

КОРОТКОВОЛНОВОЕ ОТТАЛКИВАНИЕ И НАРУШЕННАЯ ХИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ*

В. В. Серебряков, Д. В. Ширков

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ СО АН СССР, НОВОСИБИРСК

* Эта работа представляет собой существенно переработанное изложение главы «Коротковолновое отталкивание» из английского издания [1a] книги «Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях» (в русском издании [1] эта глава отсутствует). В отличие от английского текста здесь мы привлекли концепцию хиральной симметрии.

А Н Н О Т А Ц И Я

Введение «потенциалов» коротковолнового отталкивания в низкоэнергетические уравнения для низших парциальных волн позволяет разрешить основные требования чисто упругого низкоэнергетического (чунэ) приближения. Появляется принципиальная возможность получения решений с малыми значениями s -волновых длин рассеяния и широкими резонансами.

Используя пороговые соотношения, вытекающие из хиральной симметрии, можно затем (при наложении некоторых простых дополнительных условий) выразить основные параметры резонансного рассеяния через распадную характеристику π -мезона.

Таким образом, пользуясь приближением нарушенной хиральной симметрии и унитарными дисперсионными уравнениями для низкоэнергетического $\pi\pi$ - и πN -рассеяния, мы получаем массы, времена жизни и константы связи p -волновых резонансов, задавая только массы пиона и нуклона, их времена жизни и константу Ферми.

A B S T R A C T

The introduction of the short-range repulsion «potentials» into the low-energy equations for lower partial waves makes it possible to eliminate the main difficulties of the purely elastic low-energy (Pele) approximation. There is then a possibility in principle of obtaining solutions with small S -wave scattering lengths and broad resonances.

The use of threshold conditions resulting from chiral symmetry allows us (under certain additional conditions) to express the main resonance scattering parameters in terms of the pion decay characteristics. Thus, using the broken chiral symmetry approximation and unitarity dispersion equations for low-energy $\pi\pi$ and πN scattering we have obtained masses, life-times and coupling constants for p -wave resonances by specifying only the pion and nucleon masses, their life-times and the Fermi coupling constant.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ НЕЗАМКНУТОСТЬ ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

1.1. Физическое содержание чунэ-модели

Чисто упругая низкоэнергетическая (чунэ) схема (см. гл. 2 из работы [1]) была основана на следующих основных положениях.

1. Строгая аналитичность для парциальных волн.

2. Двухчастичная унитарность (т. е. пренебрежение трехчастичными и более высокими массовыми состояниями в условии унитарности).

3. Пренебрежение высшими парциальными волнами f_l , $l > l_{\text{макс}}$ (обычно рассматриваются только s - и p -волны, т. е. $l_{\text{макс}} = 1$).

4. Приближенная кроссинг-симметрия для нижних парциальных волн $f_l (l \leq l_{\text{макс}})$, полученная комбинированием дисперсионных соотношений (д. с.) для рассеяния вперед и д. с. для рассеяния назад (дифференциальное приближение).

Положения 1 и 3, а также основанное на 3 положение 4, представляют собой хорошие приближения в области низких энергий, где вклады неупругих (многочастичных) каналов отсутствуют либо численно малы и высшие парциальные волны, как правило, также численно малы.

Физическое содержание чунэ-схемы определяется в основном положением 2. Благодаря ему интегральные вклады в прямом канале (s -канале) исчерпываются диаграммами, изображенными на рис. 1 (для иллюстрации приведены лишь вклады в $\pi\pi$ - и πN -рассеяние).

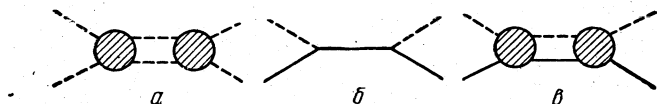


Рис. 1. Вклады из прямого канала в $\pi\pi$ -рассеянии (а) и в πN -рассеянии (б, в).

Интегральные вклады из перекрестных каналов соответствуют диаграммам рис. 2.

Из-за того что мнимые части амплитуд приближены, в силу положения 3 небольшим числом низших парциальных волн, указанные интегралы в основном насыщаются низкоэнергетическими резонансными вкладами от соответствующих двухчастичных состояний. Для $\pi\pi$ -системы это вклады от ρ -мезона ($m = 765 \text{ Мэв}$, $I = l = 1$) и σ -резонанса* ($m_\sigma \simeq 500 \div 1000 \text{ Мэв}$, $I = l = 0$)

* Более подробное обсуждение экспериментальных данных о σ -мезоне см. в § 5.4.

(рис. 3, а, б); для πN -системы вклады Δ_{33} ($M_{33} = 1236 \text{ Мэв}$, $I = l = 3/2$) (см. рис. 3, в, д).

Иными словами, в прямом канале рассеяние идет через возбужденные низшие резонансные состояния, а вклад кроссинг-каналов соответствует обмену низшими парциальными возбуждениями.

Интегральные вклады от более высоких частей спектра подавлены условиями 2 и 3, а также тем обстоятельством, что в чунэ-моделях специально рассматриваются решения, достаточно быстро убывающие с ростом энергий (условие физической самосогласованности).

Таким образом, в чунэ-моделях рассеяние практически почти полностью описывается промежуточным состоянием с относительно малыми массами $M_i^*(m_\rho, m_\sigma, M_{33})$ (порядка 1 Гэв или меньше). Это означает, что рассеяние имеет

периферический характер, так как волновые функции этих состояний сосредоточены в основном на относительно больших расстояниях от центра инерции:

$$R_i^* \sim \frac{hc}{M_i^*} \sim (0,5 \div 1) 10^{-13} \text{ см.} \quad (1.1)$$

Если в соответствии с квантовомеханическим описанием рассеяния вклады перекрестных каналов ассоциировать с обменными

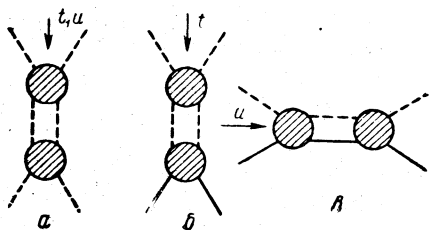


Рис. 2. Интегральные вклады из перекрестных каналов в $\pi\pi$ -рассеяние (а) и в πN -рассеяние (б, в).

периферический характер, так как волновые функции этих состояний сосредоточены в основном на относительно больших расстояниях от центра инерции:

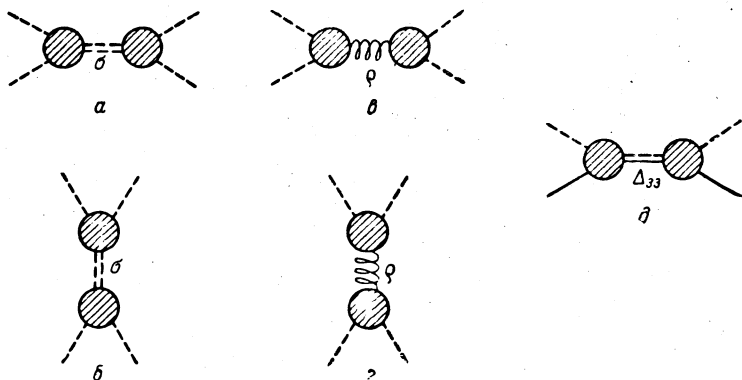


Рис. 3. Резонансные вклады в $\pi\pi$ - и πN -рассеяние.

силами, то радиусы действия сил определяются соотношением (1.1) и оказываются сравнительно большими. Обменные силы имеют длинноволновый характер.

Характеристики обменных квазичастиц связаны с резонансами в прямом канале условиями, обеспечивающими правильные пороговые поведения для рассматриваемых (т. е. не малых) парциальных волн с $l > 1$. Поскольку уравнения, описывающие низкоэнергетическое рассеяние, являются интегральными уравнениями с ядрами Коши, то эти условия эквивалентны требованию достаточно быстрого, в соответствии с условием унитарности, убывания парциальных волн при больших энергиях. В случае $\pi\pi$ -рассеяния эти условия связывают положения и ширины $\pi\pi$ -резонансов. Для более сложных случаев πN - и NN -рассеяния эти условия выражают константы взаимодействия (ширины и массы) нестабильных мезонов (ρ , σ , ω) с барионами и пионами через характеристики (длины рассеяния, ширины резонансов) парциальных волн πN - и NN -рассеяния.

Такого рода связи имеют смысл условий низкоэнергетической самосогласованности: низкоэнергетические резонансы возникают только за счет сил, связанных с обменом такими же низкоэнергетическими резонансами. Получаемая при этом картина весьма близка к программе «низкоэнергетического бутстрапа» (см. § 30.2 из работы [1]).

1.2. Эффективный лагранжиан

Удобно рассматривать отдельно промежуточные состояния, соответствующие аннигиляционному t -каналу. Эти состояния не имеют барионного заряда и соответствуют ρ - и σ -мезонам. Вклады этих состояний в амплитуды рассеяния можно описывать с помощью борновского приближения (т. е. с помощью полюсных фейнмановских диаграмм), основанного на «эффективном лагранжиане»

$$L_{\text{эфф}} = g_{1V} \bar{\Psi} \tau \gamma_{\mu} \Psi \rho_{\mu} + \frac{g_{2V}}{M} \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \tau \Psi (\partial_{\mu\rho} \rho_{\nu} - \partial_{\nu\rho} \rho_{\mu}) + g_{\sigma NN} \bar{\Psi} \Psi \sigma + g_{\rho} \rho_{\mu} \left[\frac{\partial \pi}{\partial x_{\mu}} \pi \right] + g_{\sigma} (\pi \pi) \sigma. \quad (1.2)$$

Здесь Ψ — оператор нуклонного поля; γ_{μ} — матрицы Дирака; ρ_{μ} — оператор поля ρ -мезонов, являющийся лоренцовым 4-вектором и изотопическим 3-вектором; τ — изотопические матрицы Паули; $\sigma_{\mu\nu}$ — матричный тензор спина σ -мезонов — лоренцовый и изотопический скаляр; π — оператор пионного поля. Формула (1.2) представляет собой ту часть эффективного лагранжиана, которая необходима для описания только процессов $\pi\pi$ - и πN -рассеяния. Для описания потенциала NN -рассеяния было бы необходимо, например, рассмотреть еще взаимодействие нуклонов с ω - и A_2 -мезонами.

Разумеется, параметры, связанные с эффективным лагранжианом (1.2), — константы связи и массы мезонных состояний — не являются известными априори. Однако, рассматривая процессы взаимодействия в последовательности, соответствующей иерархи-

ческой схеме, согласно которой мезон-барионное рассеяние теоретически невозможно описать без знания свойств мезон-мезонного рассеяния (см. гл. I работы [1]), можно определить их из соображений согласования по всем реакциям ($\pi\pi$ -, πN - и NN -рассеяния) в целом. Так, константы g_ρ и g_σ и массы m_ρ и m_σ определяются из $\pi\pi$ -рассеяния. При этом, например, ширина ρ -мезона выражается через g_ρ и m_ρ следующим образом:

$$\Gamma_\rho^{\text{полн}} = \frac{g_\rho^2}{6\pi} \cdot \frac{q_\rho^3}{m_\rho^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{g_\rho^2}{4\pi} \right) \frac{(m_\rho^2 - 4\mu^2)^{3/2}}{m_\rho^2}. \quad (1.3)$$

Аналогично этому константы g_{1V} и g_{2V} могут быть определены из условия согласования вкладов в πN - и NN -рассеяния или согласования πN -рассеяния с электромагнитным форм-фактором нуклона.

Эффективный лагранжиан удобен еще и в том отношении, что именно с его помощью можно учесть дополнительные принципы симметрии, непосредственно не заложенные в дисперсионном подходе. Например, принцип универсальности взаимодействия поля ρ -мезона с векторным током Сакураи [2] приводит к следующим соотношениям между константами ρ -мезонного взаимодействия

$$g_{1V} = \frac{1}{2} g_\rho, \quad g_{2V} : g_{1V} = 2\mu_N : 1. \quad (1.4)$$

Здесь $\mu_N = 1,9$ — аномальный магнитный момент нуклона.

Особо подчеркнем, что лагранжиан (1.2) нужен нам для построения t -канальных вкладов в уравнения дисперсионного типа. Эти вклады имеют те же полюса и вычеты, что и фейнмановские одночастичные диаграммы. Однако в отличие от последних они убывают на бесконечности*. Можно поэтому сказать, что дисперсионные вклады представляют собой длинноволновые части соответствующих фейнмановских диаграмм.

В гл. 3 монографии [1] было сказано, что чунэ-теория $\pi\pi$ -рассеяния приводит лишь к качественному согласию с экспериментом. Она, в частности, не может объяснить ширину ρ -мезона порядка 100 Мэв . Мы покажем сейчас, что чунэ-описание πN -рассеяния также обладает аналогичными недостатками. В частности, оно резко противоречит принципу универсальности Сакураи.

1.3. Длинноволновая модель πN -рассеяния

Получим систему уравнений для s - и p -волн πN -рассеяния, используя сформулированные выше чунэ-положения. Дополнительно примем следующие упрощающие предположения.

5. Статический предел, т. е. отношение масс пиона и нуклона будем полагать бесконечно малым: $\mu/M \ll 1$.

* Для случая невычетных д.с.

6. Вклады аннигиляционного канала $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ аппроксимируем полюсными диаграммами (см. рис. 3, б, в), соответствующими эффективному лагранжиану (1.2).

Рассмотрим теперь д.с. для рассеяния вперед и назад, записанные для следующих четырех комбинаций структурных функций πN -рассеяния:

$$\varphi^{\pm}(\nu, \cos \theta) = \frac{A^{\pm} + \frac{s-u}{4M} B^{\pm}}{4\pi}; \quad \beta^{\pm}(\nu, \cos \theta) = \frac{B^{\pm}}{8\pi M}.$$

Эти комбинации удобны тем, что в статическом пределе низшие парциальные волны входят в них очень просто:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{\pm} &\simeq \left[s_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} s_3 \right] + \frac{\cos \theta}{3} \left[p_{11} + 2p_{13} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (p_{31} + 2p_{33}) \right] \equiv s^{\pm} + \cos \theta p^{\pm}; \\ \beta^{\pm}(\nu, \theta) &\simeq \frac{1}{3} \left[h_{11} - h_{13} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (h_{31} - h_{33}) \right] \equiv \beta^{\pm}(\nu). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Здесь $\nu = q^2$ — квадрат импульса мезона в с. ц. и.; θ — угол рассеяния в с. ц. и., s_{21} — s -волны рассеяния с изотопическим спином I , $p_{2I, 2J}$ и $h_{2I, 2J}$ — p -волны с изоспином I и полным угловым моментом количества движения J . При этом

$$s_k = \frac{e^{i\delta_k} \sin \delta_k}{q}, \quad p_{ik} = \frac{e^{i\delta_{ik}} \sin \delta_{ik}}{q} = q^2 h_{ik}. \quad (1.6)$$

Дисперсионные соотношения вперед для φ^{\pm} , β^{\pm} запишем без вычитания:

$$\varphi^+(\nu, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \varphi^+(\nu', 1)}{\nu' - \nu} d\nu'; \quad (1.7a)$$

$$\varphi^-(\nu, 1) = \frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \varphi^-(\nu', 1)}{\omega'(\nu' - \nu)} d\nu'; \quad (1.7б)$$

$$\beta^{\pm}(\nu, 1) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \beta^{\pm}(\nu', 1) d\nu'}{\omega'(\nu' - \nu)}; \quad (1.7в)$$

$$\beta^-(\nu, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \beta^-(\nu', 1) d\nu'}{\nu' - \nu}. \quad (1.7г)$$

Уравнения (1.7) отличаются от известных д.с. для πN -рассеяния вперед в двух отношениях.

Во-первых, они записаны в статическом пределе, т. е. использовано предположение (5). В этом приближении лабораторная энергия $E = \omega = \sqrt{v + 1}$.

Во-вторых, и это очень существенно, они записаны без вычитания, поскольку мы предполагаем, что приближенные представления 4 и 5 справедливы во всем интервале интегрирования, вследствие чего, согласно 4, $\text{Im}\varphi^\pm$, $\text{Im}\beta^\pm$ достаточно быстро убывают и невычетные интегралы сходятся.

Дисперсионные соотношения для рассеяния назад, записанные без вычитания в статическом пределе, имеют вид:

$$\varphi^\pm(v, -1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}\varphi^\pm(v', -1)}{v' - v} dv' + \frac{\alpha_\sigma}{1 + v_\sigma + v}; \quad (1.8a)$$

$$\varphi^-(v_1 - 1) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega\alpha_{\rho 1}}{1 + v_\rho + v} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}\varphi^-(v', -1)}{\omega'(v' - v)} dv'; \quad (1.8б)$$

$$\beta^+(v, -1) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}\beta^+(v', -1)}{\omega'(v' - v)} dv'; \quad (1.8в)$$

$$\beta^-(v, -1) = \frac{\alpha_{\rho 1} + \alpha_{\rho 2}}{2M(1 + v + v_\rho)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}\beta^-(v', -1)}{v' - v} dv'. \quad (1.8г)$$

Последние члены в правых частях уравнений (1.8 а, б, г) представляют собой вклады от аннигиляционного канала, аппроксимированные диаграммами обмена σ - и ρ -мезонов с помощью эффективного лагранжиана (1.2). При этом

$$\alpha_\sigma = \frac{g_{\sigma NN} g_\sigma}{8\pi}; \quad \alpha_{\rho 1} = \frac{g_{1V} g_\rho}{8\pi}; \quad \alpha_{\rho 2} = \frac{g_{2V} g_\rho}{8\pi}, \quad (1.9)$$

а параметры v_σ , v_ρ связаны с массами m_σ , m_ρ соотношениями

$$m_\sigma^2 = 4(1 + v_\sigma), \quad m_\rho^2 = 4(1 + v_\rho).$$

Для того чтобы перейти от функции φ^\pm к парциальным волнам, следует в соответствии с (1.5) рассмотреть полусуммы и полуразности уравнений (1.7 а, б) и (1.8а, б)

$$s^\pm(v) = \frac{\varphi^\pm(v, 1) + \varphi^\pm(v, -1)}{2}, \quad p^\pm(v) = \frac{\varphi^\pm(v, 1) - \varphi^\pm(v, -1)}{2}.$$

Что же касается p -волновых комбинаций $\beta^\pm(v)$, то для их определения следует воспользоваться уравнениями (1.7в, г) и (1.8в, г). Поскольку мы пренебрегли d -волнами, то при этом возникает некоторый произвол. Определим комбинации β^\pm как полусумму

$$\beta^\pm(v) = \frac{\beta^\pm(v, 1) + \beta^\pm(v, -1)}{2},$$

поскольку полусуммы не содержат d -волн.

В результате получаем систему уравнений для s - и p -волн:

$$s^+(\nu) = \frac{\alpha_\sigma}{2(1+\nu_\sigma+\nu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } s^+(\nu') d\nu'}{\nu'-\nu}; \quad (1.10a)$$

$$s^-(\nu) = \frac{\omega\alpha_{\rho 1}}{2(1+\nu_\rho+\nu)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } s^-(\nu') d\nu'}{(\nu'-\nu)\omega'}; \quad (1.10б)$$

$$p^+(\nu) = -\frac{\alpha_\sigma}{2(1+\nu_\sigma+\nu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } p^+(\nu') d\nu'}{\nu'-\nu}; \quad (1.10в)$$

$$p^-(\nu) = \frac{2f^2}{\omega} - \frac{\omega\alpha_{\rho 1}}{2(1+\nu_\rho+\nu)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } p^-(\nu') d\nu'}{\omega'(\nu'-\nu)}; \quad (1.10г)$$

$$\beta^+(\nu) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \beta^+(\nu') d\nu'}{\omega'(\nu'-\nu)}; \quad (1.10д)$$

$$\beta^-(\nu) = \frac{\alpha_{\rho 1} + \alpha_{\rho 2}}{4M(1+\nu_\rho+\nu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \beta^-(\nu') d\nu'}{\nu'-\nu}. \quad (1.10e)$$

Уравнения (1.10) совместно с условиями упругой унитарности для парциальных волн

$$\text{Im } s_i = q |s_i|^2, \quad \text{Im } p_{ik} = q |p_{ik}|^2; \quad 0 \leq q < \infty$$

образуют полную систему уравнений для s - и p -волн πN -рассеяния, полученную в чунэ-модели для статического случая.

Мы не будем решать эту систему. Наша цель — проверить ее внутреннюю согласованность и соответствие с основными экспериментальными данными низкоэнергетического πN -рассеяния.

Рассмотрим, во-первых, пороговые поведения p^\pm -комбинаций p -волн. В соответствии с квантовомеханическими пороговыми условиями

$$p_{ik}(q) \simeq a_{ik} q^2 \quad \text{при } q^2 \rightarrow 0,$$

где постоянные a_{ik} — p -волновые длины рассеяния. Таким образом, комбинации p^\pm на пороге должны обращаться в нуль. Получаем из (1.10в) и (1.10г):

$$-\frac{\alpha_\sigma}{2(1+\nu_\sigma)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } p^+ d\nu}{\nu} = 0; \quad (1.11a)$$

$$2f^2 - \frac{\alpha_{\rho 1}}{2(1+\nu_\rho)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } p^- d\nu}{\omega\nu} = 0. \quad (1.11б)$$

Обратимся теперь к асимптотическому поведению функций β^\pm . В силу (1.5) и (1.6) при $q \rightarrow \infty$ они должны убывать не медленнее, чем q^{-3} .

С учетом (1.10д) и (1.10е) это дает два условия

$$-2f^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \beta^+}{\omega} dv = 0; \quad (1.12a)$$

$$\frac{\alpha_{\rho 1} + \alpha_{\rho 2}}{4M} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \beta^- dv = 0. \quad (1.12б)$$

Не составляет труда показать, что асимптотические условия (1.12) являются пороговыми условиями для функций $q^2 \beta^\pm$, представляющих собой, согласно (1.5), линейные комбинации p -волн в обычной нормировке (1.6). При этом следует предполагать, что для функций $q^2 \beta^-$ и $(q^2/\omega) \beta^+$ имеют место д. с. без вычитаний.

Допустим теперь, что среди решений системы (1.10) имеется решение, которое в области низких энергий находится в близком соответствии с экспериментом: все s - и p -волны, за исключением p_{33} , малы, а p_{33} проходят через резонанс. В соответствии с этим пренебрежем всеми мнимыми частями, за исключением $\text{Im} p_{33}$, которую представим в виде

$$\text{Im} p_{33} = \pi v_{33} \Gamma_{33} \delta(\omega - \omega_{33}). \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.12а), получаем

$$\Gamma_{33} = \frac{3}{2} f^2. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.11б) и (1.12б) дают

$$\alpha_{\rho 1} = 0, \quad \frac{\alpha_{\rho 2}}{4M} = \frac{2}{3} \Gamma_{33} \omega_{33}. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.11а) приводит к соотношению

$$\frac{\alpha_\sigma}{m_\sigma^2} = \frac{4}{3} \Gamma_{33} \omega_{33}. \quad (1.16)$$

Энергетический ход s -волн описывается обменными членами. С учетом (1.14) — (1.16) получаем

$$s^+(v) = \frac{4f^2 \omega_{33}}{1 + 4 \frac{q^2}{m_\sigma^2}}, \quad s^- = 0. \quad (1.17)$$

Обсудим полученные результаты. Соотношение (1.14) известно из теории ЧГЛН [3]. Это и не удивительно, поскольку уравнения (1.11б) и (1.12а), использованные при выводе (1.14), не содержат вкладов аннигиляционного канала. Однако численно соотноше-

ние (1.14) неудовлетворительно. Если подставить в него общепринятое значение $f^2 = 0,08$, то мы получим $\Gamma_{33} = 0,12$.

Согласно экспериментальным данным, фаза δ_{33} проходит через резонанс при $M_{33} = \sqrt{s_{33}} = 1236$ Мэв. Ширина резонанса в его собственной системе составляет 120 Мэв. В лабораторной системе этому соответствует $E_{33}^{\text{лаб. кин}} = 190$ Мэв. Полная ширина в лабораторной системе, вычисленная по $\sin^2 \delta_{33}$, составляет $\gamma_{\text{лаб}}^{\text{полн}} = 170$ Мэв. Переходя к системе центра инерции, с помощью якобиана $d\omega_{\text{с. ц. и}}/dE_{\text{лаб}}$ получаем

$\omega_{33, \text{эксп}} = 265$ Мэв $= 1,92$ μ , $\gamma_{\text{с. ц. и.}, \text{эксп}}^{\text{полн}} = 75$ Мэв $\simeq 0,54$ μ ,
что для «приведенной полуширины», входящей в (1.13), дает

$$\Gamma_{33, \text{эксп}} = \frac{\gamma_{\text{полн}}}{2q_{33}^2} = 0,088.$$

В то же время расчет интегралов $\int \text{Im } h_{33} d\omega$ и $\int \text{Im } h_{33} \omega d\omega$ по экспериментальным фазам приводит к следующим эффективным значениям

$$\Gamma_{33, \text{эксп}}^{\text{эфф}} = 0,055, \quad \omega_{33, \text{эксп}}^{\text{эфф}} \simeq 1,9. \quad (1.18)$$

Отличие этих цифр от вычисленных с помощью якобиана (в δ -приближении) связано с довольно большой шириной 33-резонанса.

Соотношение (1.15) резко противоречит принципу универсальности (1.4), выполняющемуся в эксперименте (см. работу [4]):

$$\alpha_{\rho 1}^{\text{эксп}} \simeq 0,7 \div 0,5, \quad \alpha_{\rho 2}^{\text{эксп}} \simeq 2,65 \div 1,90. \quad (1.19)$$

Второе из соотношений (1.15) позволяет выразить ω_{33} через Γ_{33} и $\alpha_{\rho 2}$. Полагая $\Gamma_{33} = 0,12$ и используя (1.19), находим $\omega_{33} \simeq 1,25$, что в 1,5 раза меньше экспериментального значения (1.18).

Наконец, выражения для s -волн также резко противоречат экспериментальным данным, согласно которым

$$s^+(0) = a^+ = 0; \quad s^-(0) = a^- = 0,08 \div 0,09. \quad (1.20)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что чунэ-описание низкоэнергетического πN -рассеяния, основанное на учете только длинноволновых эффектов, по p -волнам не дает количественного согласия с экспериментом, а по s -волнам — и качественного.

Как уже отмечалось, аналогичное положение имеет место и для $\pi\pi$ -рассеяния.

1.4. Необходимость учета коротковолновых эффектов

Проанализируем теперь возможные пути усовершенствования чунэ-приближения. Приближения 5 и 6, использованные при рассмотрении πN -системы, разумеется, вносят определенные погрешности, однако известно, что релятивистские поправки к статическому пределу, хотя и являются существенными, в рассматриваемой

области низких энергий могут изменить численные результаты на величины порядка нескольких десятков процентов ($\leq 1,5$ раза). Кроме того, приближение 5 не имеет отношения к лл-задаче.

Равным образом, приближение 6 также может быть улучшено введением f_0 -резонанса в двухпионной системе с $I = 0$, $l = 2$ ($m_{f_0} = 1260$ Мэв, $\Gamma_{f_0}^{\text{полн}} = 120$ Мэв), а также учетом сложной структуры так называемого σ -резонанса (см. § 5.4). Однако соответствующие поправки также невелики.

Обратимся к исходным чунэ-приближениям 2 — 4. Можно показать (см., например, § 17.2 из работы [1]), что учет ближайших неучтенных парциальных волн дает малые численные эффекты. С другой стороны, анализ экспериментальных данных (фазовый анализ πN -рассеяния, примерное совпадение сечений в ρ - и f_0 -максимумах с геометрическими сечениями) показывает, что ближайшие неупругие добавки (вклады трех- и четырехчастичных состояний) в мнимые части парциальных амплитуд также являются численно малыми. Таким образом, «наиболее подозрительным узким местом» чунэ-схемы является пренебрежение влиянием области высоких энергий на область низких энергий, т. е. предположение о том, что область низких энергий представляет собой физически замкнутую, вследствие чего существенными оказываются только длинноволновые эффекты.

Проиллюстрируем это на только что разобранный чунэ-модели πN -рассеяния. Полученные значения длин рассеяния a_1 и a_3 (так же, как в лл-проблеме) в чунэ-приближении оказываются сильно завышенными; так, мы получили $a_1 \simeq a_3 \simeq 5f^2 \simeq 0,4$ (экспериментальные значения $a_1 \simeq 0,16$, $a_3 \simeq -0,08$). Очевидно, что в теории не учтены эффекты, которые дают существенные отрицательные вклады в длины рассеяния. Для того чтобы понять источник происхождения этих эффектов, рассмотрим функцию $\varphi^+(v, 1)$.

Из уравнения (1.7а) и определения (1.5) для φ^+ следует, что для произвольных решений $a^+ > 0$ [поскольку все s - и p -волны дают положительные вклады в $\text{Im}\varphi^+(v, 1)$]. Таким образом, только нулевое решение могло бы быть совместным с $a^+ = 0$. Такое решение, однако, требует, чтобы в системе (1.10) все неоднородные члены равнялись бы нулю, и является явно бессмысленным.

Уравнение (1.7а) соответствует дисперсионному соотношению вперед для кроссинг-четной комбинации

$$\varphi^+(v, 1) = \frac{\Gamma(\pi^+ p) + \Gamma(\pi^- p)}{2} \quad (1.21)$$

и отличается от него использованием приближений 2 — 5, а также отсутствием вычитания. Именно из-за вычитания строгое д.с. для величины (1.21) дает согласие с экспериментальными данными, и в частности с первой из формул (1.20). Ясно поэтому, что мы могли бы исправить положение, добавив в правую часть уравнения (1.7а)

отрицательную константу вычитания

$$\varphi^+(v, 1) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} \varphi^+(v', 1)}{v' - v} dv' - v,$$

где

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \varphi^+(v, 1)}{v} dv \simeq \frac{8}{3} \omega_{33} \Gamma_{33} > 0.$$

Эта постоянная отражает то обстоятельство, что мы аппроксимируем уравнением (1.7а), записанным без вычитания, исходное д.с., не существующее без вычитания. Таким образом, постоянная v отражает свойства исходного д.с. области высоких энергий, т. е. имеет коротковолновый характер.

Поясним сказанное более детально на модельном примере рассеяния нейтральных бесспиновых частиц.

1.5. Анализ коротковолновых вкладов

Рассмотрим дисперсионное соотношение для рассеяния вперед нейтральных бесспиновых частиц

$$A(x, 1) = A(0, 1) + \frac{x}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im} A(x', 1) dx'}{x'(x' - x)}. \quad (1.22)$$

Здесь $A(x, 1)$ — амплитуда рассеяния вперед, рассматриваемая как функция переменной

$$x = \left(\frac{s - 2m^2}{2m^2} \right)^2 = (2v + 1)^2,$$

причем согласно оптической теореме

$$\text{Im} A(x, 1) = \frac{\sqrt{x-1}}{8\pi} \sigma_{\text{полн}}(x),$$

а вычитание произведено в точке $x = 0$, являющейся точкой симметрии в первоначальной переменной

$$z = \frac{s - 2m^2}{2m^2} = -\frac{u - 2m^2}{2m^2}.$$

Проследим подробно процедуру получения из д. с. (1.22) уравнения для низшей парциальной волны. Область изменения $(1, \infty)$ энергетической переменной x разобьем на две:

- 1) область низких энергий $1 < x < \Lambda$;
- 2) область высоких энергий $\Lambda < x < \infty$.

В области низких энергий будем считать, что амплитуда рассеяния вперед хорошо аппроксимируется упругой s -волной;

$$A(x, 1) \simeq A_0(x), \quad \text{Im} A_0(x) = K(x) |A_0(x)|^2; \quad 1 < x < \Lambda. \quad (1.23)$$

Здесь $K(x)$ — отношение импульса к энергии

$$K(x) = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \right)^{1/2}.$$

В области высоких энергий существенны все парциальные волны. Мы предположим, что в этой области парциальное сечение s -волны пренебрежимо мало по сравнению с полным сечением:

$$\text{Im } A_0(x) \ll \text{Im } A(x, 1) = \frac{\sqrt{x-1} \sigma_{\text{полн}}}{8\pi}; \quad \Lambda < x < \infty. \quad (1.24)$$

В реальных физических условиях область низких энергий, определенная из (1.23), и область высоких энергий, определенная уравнением (1.24), разделены «областью промежуточных энергий», в которой происходит плавный переход из одного режима в другой. Первое приближение заключается в том, что мы считаем эту область бесконечно узкой (более точно, достаточно узкой, для того чтобы можно было пренебречь ее интегральными вкладами в область низких энергий).

Перепишем тождественно уравнение (1.22)

$$A(x, 1) = \lambda + \frac{x}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(x') dx'}{x'(x'-x)} + \frac{x}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im} [A(x', 1) - A_0(x')] dx'}{x'(x'-x)}. \quad (1.25)$$

Здесь введено обозначение

$$\lambda = A(0, 1). \quad (1.26)$$

Используя (1.23) и (1.24), перепишем теперь (1.25) для области $1 < x < \Lambda$ в виде

$$A_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(x') dx'}{x'-x} + V(x), \quad (1.27)$$

где функция

$$V(x) = \lambda - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(x) dx}{x} + \frac{x}{8\pi^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{x'-1} \sigma(x') dx'}{x'(x'-x)} \quad (1.28)$$

представляет собой коротковолновый вклад в область низких энергий. Этот коротковолновый эффективный потенциал в области $x < \Lambda$ может быть аппроксимирован полиномом первой степени

$$V(x) \simeq -v + xI, \quad (1.29)$$

причем

$$v = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(x') dx'}{x'} - \lambda = \lambda_0 - \lambda, \quad I = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{x-1} \sigma(x) dx}{x}. \quad (1.30)$$

Формула (1.27) отличается от чунэ-уравнения для s -волны наличием потенциала $V(x)$. Уравнение (1.27) описывает низкоэнергетическое рассеяние в поле потенциала $V(x)$. Исследуем этот потенциал более подробно.

Первым важным свойством $V(x)$ является его отрицательность ($v > 0$). Потенциал $V(x)$ является потенциалом отталкивания. Это свойство — общее для различных процессов (пл, KN , πN и т. д.) и может быть установлено из довольно общих соображений, связанных с характером поведения амплитуды рассеяния вперед (точнее, его мнимой части) в области высоких энергий.

Для того чтобы это проиллюстрировать, рассмотрим обратную функцию амплитуды рассеяния вперед $H(x, 1) = A^{-1}(x, 1)$. Скачок ее на разрезе $1 \leq x \leq \infty$ равен

$$2i \operatorname{Im} H(x, 1) = - \frac{2i \operatorname{Im} A(x, 1)}{|A(x, 1)|^2}, \quad (1.31)$$

и когда $x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Im} H(x, 1) < - \frac{8\pi}{\sqrt{x} \sigma(\infty)}.$$

Поэтому спектральный интеграл, представляющий $H(x, 1)$, сходится. Спектральное представление для $H(x, 1)$ имеет вид

$$H(x, 1) = \lambda^{-1} - \frac{x}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A(x', 1)}{|A(x', 1)|^2} \cdot \frac{dx'}{x'(x' - x)} - \frac{x\alpha_0}{x_0(x_0 - x)} - \sum_i \frac{x\beta_i}{x_i(x_i - x)}. \quad (1.32)$$

Из представления (1.22) следует, что $A(x, 1)$ является R -функцией в комплексной плоскости X . Поэтому и $H(x, 1)$ также R -функция, т. е. она не может иметь полюсов в комплексной плоскости, за исключением, быть может, действительной оси. Отсюда следует, $\alpha_0 > 0$ и $\beta_i > 0$. В (1.32) x_0 — возможное положение нуля, лежащего перед порогом реакции: $x_0 < 1$, x_i — возможные нули в физической области $x_i > 1$. Для того чтобы $\operatorname{Im} A$ при $x \rightarrow \infty$ росла как \sqrt{x} , необходимо потребовать $H(x, 1) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Это дает

$$\lambda^{-1} = \frac{-1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} A}{|A|^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{\alpha_0}{x_0} - \sum \frac{\beta_i}{x_i}. \quad (1.33)$$

Из равенства (1.33) видно, что когда амплитуда $A(x, 1)$ не имеет нуля при $x < 0$, то $\lambda < 0$, т. е.

$$\lambda < \lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} A_0}{x} dx \quad \text{и} \quad v = \lambda_0 - \lambda > 0.$$

Если же $\lambda > 0$, то с необходимостью $\alpha_0 \neq 0$ и $x_0 < 0$, т. е. функция $\operatorname{Re} A$ проходит через нуль в области $x < 0$. Следовательно, к невычетному представлению для $A_0(x)$ (1.27) следует добавить от-

рицательный член, чтобы при $x < 0$ функция $\text{Re}A(x, 1) \simeq \text{Re}A_0(x)$ проходила через нуль; значит, и в этом случае $v > 0$.

Это рассуждение основывается только на том весьма общем факте, что мнимая часть амплитуды рассеяния вперед (являющаяся положительной вследствие условия унитарности) хотя бы слабо растет в области больших энергий:

$$\text{Im} A(x, 1) \geq c (\ln x)^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Численные оценки для значений v в ряде случаев можно получить, исходя из экспериментальных значений для длин рассеяния s -волн и низкоэнергетических полных сечений, входящих в кроссинг-четную амплитуду рассеяния вперед, требующую вычитаний. Мы увидим ниже, что значения v как в $\pi\pi$ -, так и в πN -рассеянии по порядку величины равны μ^{-1} .

Радиус действия сил, связанных с потенциалом $V(x)$, может быть оценен, исходя из численного значения коэффициента 1 в линейном члене в (1.29). Этот линейный член становится существенным при

$$x \sim x_0 = I^{-1}.$$

Полагая, например, для $\pi\pi$ -рассеяния

$$\Lambda = \left(\frac{s - 2\mu^2}{2\mu^2} \right)^2 \Big|_{s \sim 1 \text{ Гэв}^2} \simeq (21,5)^2$$

и $\sigma_{\text{полн}} = 0,8 \mu^{-2}$ (что соответствует 16 мбарн), получаем

$$x_0 = 5\pi^2 \sqrt{\Lambda} \simeq 1060, \quad (1.34)$$

что соответствует $s_0 \simeq 2\mu^2 (\sqrt{x_0} + 1) \simeq 68 \mu^2 \simeq (1,15 \text{ Гэв})^2$. Поэтому «радиус действия» сил отталкивания в 10 раз меньше комптоновской длины пиона.

Таким образом, высокоэнергетические эффекты в области низких энергий приводят к возникновению эффективного отталкивания с интенсивностью порядка 1 (в обратных массах пиона) и радиусом действия порядка 0,1 обратной массы пиона.

Заметим, что сам факт малого изменения потенциала в области низких энергий ($x \ll 1000$) связан лишь с тем обстоятельством, что при высоких энергиях сечения всех процессов меньше 0,1 барн.

Наша ближайшая цель — построить решаемую модель для низших парциальных волн рассеяния, учитывающую это коротковолновое отталкивание.

2. НЕЙТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Выбор модели

Наиболее просто такая модель может быть получена приближенной заменой потенциала (1.28) полюсным выражением

$$V(x) \rightarrow v(x) = -\frac{v}{1 + \frac{x}{p}}; \quad p = \frac{v}{I}. \quad (2.1)$$

«Приближенный потенциал» $v(x)$ обладает следующими свойствами:

а) в физической области низких энергий он численно очень близок к точному выражению (1.28) — имеет два совпадающих члена в разложении Лорана;

б) конечен во всей физической области ($1 < x < \infty$);

в) имеет особенность (полюс в нефизической парциальной точке $x = -p$).

Уравнение для нейтрального случая с потенциалом (2.1)

$$A_0(x) = -\frac{v}{1 + \frac{x}{p}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(x') dx'}{x' - x} \quad (2.2)$$

в силу свойства б) оказывается совместным с условием упругой унитарности

$$\text{Im } A_0(x) = K(x) |A_0(x)|^2$$

на всем интервале $1 < x < \infty$ и благодаря этому решается в аналитическом виде. Разумеется, из решений уравнений (2.2) следует выбирать решения, для которых функция $A_0(x)$ оказывается малой при $x > \Lambda$. Только при этом условии решение может иметь физический смысл в области низких энергий при $x < \Lambda$.

В силу свойства в) парциальная амплитуда, удовлетворяющая уравнению (2.2), имеет полюс в точке $x = -p$. Этот факт нарушает строгую аналитичность (п. 1.1).

Однако из-за короткодействующего характера введенного феноменологического потенциала величина p является большой [ср. с (1.34)]. Поэтому аналитические свойства нарушаются лишь в высокоэнергетической части комплексной плоскости.

Положение 1 из п. 1.1 заменяется, таким образом, следующим:

(1а) правильные свойства аналитичности парциальных волн в низкоэнергетической части комплексной плоскости энергий (в круге радиуса $|x| \simeq \Lambda$).

Заметим здесь, что согласно положениям 2—4 в области высоких энергий мы и так уже имеем отступления от строгой кроссинг-симметрии и унитарности.

2.2. Решение уравнения

Аналитическое решение уравнения (2.2) может быть представлено в виде

$$A_0(x) = \frac{N(x)}{D(x)}, \quad (2.3)$$

где

$$N(x) = \lambda + \frac{x\beta}{x+p} \quad (2.4)$$

$$\text{и } D(x) = 1 - x \sum \frac{\alpha_i}{x_i(x_i - x)} - cx - \lambda I(x) - \beta x \frac{I(x) - I(-p)}{x + p}. \quad (2.5)$$

$$\text{Здесь } I(x) = \frac{x}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(x') dx'}{x'(x' - x)}.$$

Как и в случае чисто упругой низкоэнергетической аппроксимации, решение (2.3) — (2.5) является многопараметрическим. Оно зависит от параметров λ , α_i и x_i . Значение β определяется из того условия, чтобы в точке $-p$ функция A_0 имела вычет, равный $-v$:

$$\beta = \frac{v}{1 - vpI'(-p)} \left\{ 1 + p \sum \frac{\alpha_i}{x_i(x_i + p)} + pc - \lambda I(-p) \right\}. \quad (2.6)$$

Так как p — большая величина, получаем

$$\beta \simeq \frac{v}{1 - \frac{v}{\pi}} \left\{ 1 + p \sum \frac{\alpha_i}{x_i(x_i + p)} + pc + \frac{\lambda \ln p}{\pi} \right\}. \quad (2.7)$$

Очевидно, что при $\lambda > 0$ и $v < \pi$ функция $N(x)$ (т. е. $A_0(x)$) имеет нуль в точке

$$x_0 = -\frac{\lambda p}{\lambda + \beta}.$$

При фиксированных λ , α_i и x_i нуль в точке x_0 тем ближе к порогу реакции, чем больше v . При $v \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow -p$ решение (2.3) переходит в чунэ-решение. Наличие этого нуля существенно отличает полученное решение от решения чунэ-приближения, его близость к подпороговой области характеризует силу влияния высокоэнергетического вклада. При фиксированном значении v величина λ ограничена интервалом $\lambda_{\text{мин}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{макс}}$. $\lambda_{\text{мин}}$ определяется из уравнения $\lambda_{\text{мин}} + \beta = 0$, когда $\alpha_i = 0$, отражающего то обстоятельство, что нуль в функции N не должен лежать за полюсом в точке $-p$. Это дает

$$\lambda_{\text{мин}} = -\frac{1}{\frac{1}{v} - \frac{1}{\pi} + \frac{\ln p}{\pi}} < 0;$$

$\lambda_{\text{макс}}$ (как в чунэ-приближении) ограничено условием отсутствия связанных состояний $D(1) = 0$ на интервале $0 < x < 1$. При $p \gg 1$

$$\lambda_{\text{макс}} \simeq \frac{1 - \sum \frac{\alpha_i}{x_i(x_i - 1)} - c - \frac{v}{\pi - v} \left\{ 1 + p \sum \frac{\alpha_i}{x_i(x_i + p)} + cp \right\} \frac{\ln p}{p}}{I(1) + \frac{v}{\pi p} \cdot \frac{\ln^2 p}{\pi - v}}.$$

Из формул (2.5) и (2.4) видно, что существует два типа решений. Если нуль x_0 достаточно удален, т. е. $\beta \ll p$, то $\lambda > 0$ и решение в об-

ласти низких энергий практически не отличается от соответствующего решения в чунэ-приближении. Если же точка x_0 недалеко от порога, т. е. $\beta \sim p$, то $|\lambda| \sim (\ln p)^{-1}$; длина рассеяния $|a_0| \sim (\ln p)^{-1}$ и решение может иметь низкоэнергетический резонанс, так как величина $\beta \ln p / \pi \tilde{r} x_r^{-1}$ [см. последний член в формуле (2.5)] может быть конечной. В этом случае ширина резонанса является довольно малой $\sim (\ln p)^{-1}$, однако выражение для s -волны очень трудно аппроксимировать формулой типа Брейта — Вигнера. s -Волна лучше аппроксимируется выражением

$$A_0 \simeq \frac{\lambda \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)}{1 - \frac{x}{x_r} - i\lambda \left(1 + \frac{x}{x_0}\right) K(x)} \quad (2.8)$$

Для того чтобы представить себе порядки величин, ограничивающих константу λ и длину рассеяния для решений, сильно зависящих от высокоэнергетического вклада, приведем табл. 1.

Таблица 1

Зависимость $\lambda_{\text{мин}}$ и $a_{\text{мин}}$ от положения полюса p в потенциале отталкивания

p	100	1 000	10 000
$W(p)$	660 Мэв	1,1 Гэв	2 Гэв
$-\lambda_{\text{мин}}$	1,1	0,61	0,41
$-a_{\text{мин}}$	0,49	0,36	0,28

Величина $W(p)$ во второй строке характеризует удаленность от порога полюса p по энергетической шкале $W = 280 \left[\frac{V \bar{p} + 1}{2} \right]^{1/2}$ Мэв.

Из табл. 1 видно, что даже при достаточно удаленном полюсе возможны решения с немалой отрицательной длиной рассеяния s -волны.

Когда выполняются условия $(v/\pi) \ln p \ll 1$ и $\lambda \ll 1$, резонансное решение удобно представить в виде:

$$\text{Re } A_0(x) = \frac{\lambda + v}{1 - x/x_r}; \quad \text{Im } A_0 = \pi x_r \Gamma \delta(x - x_r); \quad (2.9)$$

$$\Gamma = \lambda + v = \lambda_0.$$

При этом интеграл в уравнении (2.2) хорошо аппроксимируется резонансными вкладами. Мы будем пользоваться в дальнейшем этим обстоятельством для приближенного анализа уравнений, описывающих рассеяние реальных частиц.

Из рассмотренного можно сделать вывод, что влияние высокоэнергетических вкладов на амплитуду рассеяния в низкоэнергети-

ческой части комплексной плоскости $|x| \ll \Lambda$ сводится к тому, что эта амплитуда в некоторых точках начинает обращаться в нуль (или может быть весьма близка к нулю). Таким образом, пороговые условия для парциальных волн с $l \gg 1$ невозможно выполнить без корректного учета коротковолновых вкладов. С другой стороны, свойства низкоэнергетической амплитуды, в том числе и распределение ее нулей, можно получить на основе совсем другого приближения — приближения безмассовых пионов.

3. АЛГЕБРА ТОКОВ И ХИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

3.1. Алгебра зарядов и хиральная группа

Этот параграф представляет собой чрезвычайно конспективное изложение основных представлений метода алгебры токов. Читателю, незнающему с методом, следует обратиться к указанным в ссылках работам, а также к имеющейся обзорной литературе [5].

Появление метода алгебры токов [6] открыло новое поле деятельности в физике элементарных частиц. Основные величины в этом методе — векторные j_A^μ и аксиальные j_{5A}^μ токи — представляют собой изотопические 3-векторы ($A = 1, 2, 3$) и лоренцевы 4-вектор и псевдовектор ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Наиболее удобно представить j_A^μ и j_{5A}^μ как токи, связанные с вариацией лагранжиана при унитарных инфинитезимальных преобразованиях полей

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U \Psi(x) U^{-1}; \quad U = 1 - i \alpha_A(x) Q_A - i \beta_B(x) Q_B^5. \quad (3.1)$$

Токи и их дивергенции определяются через производные от вариации полного лагранжиана [7]:

$$j_A^\mu = - \frac{\partial \delta L(x)}{\partial (\partial_\mu \alpha_A(x))}; \quad j_{5B}^\mu = - \frac{\partial \delta L(x)}{\partial (\partial_\mu \beta_B(x))}; \quad (3.2)$$

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = - \frac{\partial \delta L(x)}{\partial \alpha_A(x)}; \quad \partial_\mu j_{5B}^\mu(x) = - \frac{\partial \delta L(x)}{\partial \beta_B(x)}. \quad (3.3)$$

Трансформационные свойства токов определяются свойствами операторных генераторов Q_A и Q_B преобразования (3.1). В случае, если лагранжиан инвариантен относительно преобразования (3.1) с параметрами α_A и β_B , не зависящими от координат ($\partial_\mu \alpha_A(x) = \partial_\nu \beta_B(x) = 0$), из (3.3), получаем уравнения непрерывности для токов

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = \partial_\nu j_{5B}^\nu(x) = 0.$$

В этом случае «заряды»

$$Q_A(x^0) = \int d^3 x j_A^0(x), \quad Q_{5B}(x^0) = \int d^3 x j_{5B}^0(x) \quad (3.4)$$

не зависят от времени и должны быть отождествлены с генераторами

преобразования (3.1)

$$Q_A(x^0) = Q_A, \quad Q_{5B}(x^0) = Q_{5B}.$$

Одна из важнейших физических гипотез метода заключается в том, что токи j_A^μ и j_{5B}^ν одновременно описывают как слабые, так и электромагнитные взаимодействия адронов. Эта гипотеза позволяет установить связь между характеристиками сильных взаимодействий (такими, как форм-факторы) и параметрами слабых взаимодействий адронов (временами жизни относительно слабых распадов).

В то же время токи, являющиеся в этом методе основными операторными величинами, подчиняются определенным коммутационным соотношениям. Вид коммутационных соотношений для плотностей токов j_A^μ и j_{5B}^ν существенно зависит от конкретных физических предположений, относящихся к структуре элементарных частиц или к структуре сильных взаимодействий. Так, например, коммутационные соотношения для векторных токов, следующие из кварковой модели частиц [6, 8], существенно отличаются от коммутационных соотношений, получаемых на основе предположения о векторной доминантности [9].

Однако независимо от того, каковы коммутационные соотношения между плотностями токов, коммутационные соотношения между соответствующими зарядами имеют весьма простой вид:

$$[Q_A, Q_B] = i \epsilon_{ABC} Q_C; \quad (3.5a)$$

$$[Q_A, Q_{5B}] = i \epsilon_{ABC} Q_{5C}. \quad (3.5b)$$

Здесь ϵ_{ABC} — антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

Соотношения (3.5a) отражают тот факт, что три величины Q_1 , Q_2 и Q_3 являются генераторами изотопической группы $SU(2)$, т. е. операторами изотопического спина системы*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

Соотношения (3.5b) указывают на то, что тройка величин Q_{51} , Q_{52} , Q_{53} при изотопических преобразованиях ведет себя как вектор.

Обычно предполагают, что коммутатор аксиальных зарядов имеет вид [6]

$$[Q_{5A}, Q_{5B}] = i \epsilon_{ABC} Q_C. \quad (3.5b)$$

Это соотношение, замыкающее алгебру зарядов, является основным модельным предположением. Оно задает структуру теории.

Для уяснения этой структуры удобно ввести лево- и правополяризованные заряды

$$Q^\pm = \frac{Q \pm Q_5}{2}.$$

* Здесь и ниже символом \mathbf{a} всегда будет обозначаться изотопический 3-вектор. Его компоненты удовлетворяют соотношению

$$[Q_A, Q_B] = i \epsilon_{ABC} a_C. \quad (3.6)$$

Коммутационные соотношения (3.1) для них примут вид

$$\begin{aligned} [Q_A^\pm, Q_B^\pm] &= i \varepsilon_{ABC} Q_C^\pm; \\ [Q_A^+, Q_B^-] &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, компоненты Q^+ и Q^- образуют отдельные алгебры изотопического типа [алгебры $SU(2)$]. Поэтому заряды Q и Q_5 можно рассматривать как генераторы группы $SU(2) \times SU(2)$.

Под действием оператора четности P поляризованные заряды переходят друг в друга:

$$PQ^\pm P^{-1} = Q^\mp.$$

Поскольку заряды Q^\pm весьма напоминают по своим свойствам проекционные хиральные операторы (а, например, в кварковой реализации и явно их содержат), полученную алгебру называют также хиральной $SU(2) \times SU(2)$ алгеброй зарядов.

Инвариантность лагранжиана относительно соответствующей группы преобразований, порождаемой генераторами Q и Q_5 , называют хиральной симметрией.

3.2. Гипотеза $PCAC$ и приближение безмассовых пионов

Другой важной гипотезой при рассмотрении процессов с участием пионов является гипотеза частично сохраняющегося аксиального тока (гипотеза $PCAC$), задающая в явном виде дивергенцию аксиального тока [7, 10]

$$\partial_\mu j_5^\mu = f_\pi \mu^2 \pi. \quad (3.8)$$

С помощью этого операторного соотношения можно выразить амплитуды процессов с $n + 1$ внешними пионами через амплитуду процессов с n пионами и, в частности, связать амплитуду рассеяния пиона на частице H с пионным форм-фактором этой же частицы. Важную роль здесь играет процедура экстраполяции по квадрату массы внешнего пиона из точки $m_\pi^2 = 0$ [в этой точке используется соотношение $PCAC$ (3.8)] в физическую точку $m_\pi^2 = \mu^2 = 0,02 \text{ Гэв}^2$.

Очевидно, что в приближении безмассовых пионов ($m_\pi^2 = 0$) как векторный, так и аксиальный токи сохраняются [см. соотношение (3.8)], т. е. заряды Q и Q_5 коммутируют с гамильтонианом, и мы имеем точную хиральную симметрию. В этом пределе, как и в квантовой электродинамике, существуют низкоэнергетические теоремы для амплитуд рассеяния (рассматриваемых в нефизической точке $m_\pi^2 = 0$). Выход на массовую поверхность осуществляется аналитическим продолжением по m_π^2 . При рассеянии пионов по тяжелой мишени (пион-барионное рассеяние) $\pi + B \rightarrow \pi + B$, когда «естественная» единица массовой шкалы велика ($M_B^2 \gg \mu^2$), экстраполяция из $m_\pi^2 = 0$ в $m_\pi^2 = \mu^2$ представляется вполне обоснованной. Однако при пион-мезонном рассеянии положение не столь благоприятно.

Поэтому, в частности, пороговые характеристики $\pi\pi$ -рассеяния можно объяснить только в рамках нарушенной хиральной симметрии.

3.3. Различные реализации хиральной группы

Хиральная симметрия в отличие, например, от изотопической является динамической симметрией. Это означает, что лагранжиан симметричен лишь в целом, т. е. лагранжиан свободных полей и лагранжиан взаимодействия по отдельности не симметричны.

В ряде работ было показано [11], что все результаты алгебры токов эквивалентны расчетам с помощью низших порядков теории возмущений для хирально-симметричного лагранжиана. При этом вычисляются только вклады, соответствующие диаграммам без внутренних петель (диаграммы-деревья), не содержащие расходимостей.

Задача сводится теперь к построению этого эффективного лагранжиана. При построении лагранжиана возникают две возможности.

В первом варианте лагранжиан строят в терминах операторов полей, которые являются мультиплетами или линейными реализациями хиральной группы $SU(2) \times SU(2)$ [12]. Здесь приходится вводить бозоны противоположной четности и задавать их квантовые числа. Инфинитезимальные приращения полей при действии генераторов группы являются здесь линейными функциями этих полей. В общем случае они задаются соответствующими инфинитезимальными коммутаторами

$$\delta_A \Phi = -i [Q_A, \Phi] \alpha_A, \quad \bar{\delta}_B \Phi = -i [Q_{5B}, \Phi] \beta_B.$$

(Здесь и далее символ $\bar{\delta}$ обозначает приращение, связанное с преобразованием, генерируемым аксиальным зарядом; α_A и β_B — бесконечно малые параметры, а в правых частях нет суммирования.)

В этом случае инвариантный лагранжиан является полиномиальной функцией операторов поля и их первых производных.

Вторая возможность основана на том, что инвариантный лагранжиан можно построить в виде сложной (неполиномиальной!) функции небольшого числа полей, например пионного и нуклонного. Пионное поле π и нуклонное Ψ в этом случае, являясь мультиплетом изотопической группы, не принадлежат к какому-либо линейному представлению хиральной группы в целом, и их инфинитезимальные превращения зависят от π -поля нелинейно [см. ниже (4.9) и (6.5)]. В этом случае мы имеем дело с нелинейной реализацией хиральной группы.

Ниже мы покажем, как строится лагранжиан и каковы наиболее существенные свойства борновских фейнмановских графов этого лагранжиана для $\pi\pi$ - и πN -рассеяния [13].

Мы применим это приближение для получения пороговых характеристик для низкоэнергетических уравнений $\pi\pi$ - и πN -рассеяния.

Покажем, что уравнения можно согласовать с безмассовым пионным приближением, если только в них введено коротковолновое отталкивание, и что уже их простейшие решения без К. Д. Д.-членов (т. е. не содержащие дополнительных параметров) обладают сильным и даже резонансным p -волновым взаимодействием в разумной энергетической области. Это, по-видимому, указывает на то, что в рамках нелинейной по π -полю теории получаются динамические резонансы с высшими спинами, которые феноменологически линейно реализуют хиральную группу $SU(2) \times SU(2)$.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЕЗМАССОВЫХ ПИОНОВ В $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

4.1. Простейшая линейная реализация хиральной симметрии — «сигма-модель»

Поскольку хиральные преобразования (3.1) не сохраняют четность, простейшая линейная реализация, содержащая пион, должна содержать также скалярную частицу σ . Если изотопический спин этой частицы, как у пиона, равен 1, то мультиплет (π, σ) строится [14] из линейных представлений $(0,1)$ и $(1,0)$ хиральной группы. Этот случай физически не интересен, так как экспериментаторы не обнаружили даже намека на σ -частицу ($I = 1$). Если считать изотопический спин σ -частицы равным нулю, то тогда мультиплет строится из линейного представления $(1/2, 1/2)$ и соответствующая модель называется сигма-моделью Гелл-Манна — Леви [7].

Важность этой модели определяется также тем, что она тесным образом связана с приближением PCAC.

В этой модели вариации полей π и σ задаются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}\pi_A &\equiv -i [\beta_B Q_5^B, \pi_A] = \beta_A \sigma; \\ \bar{\delta}\sigma &\equiv -i [\beta_B Q_5^B, \sigma] = -\beta_A \pi_A; \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\pi_A &\equiv -i [\alpha_B Q^B, \pi_A] = -\varepsilon_{ABC} \alpha_B \pi_C; \\ \delta\sigma &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Хирально-симметричный лагранжиан, соответствующий (4.1) и (4.2), имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{m^2}{2} (\pi^2 + \sigma^2) + \sum_{n \geq 2} \lambda_n (\pi^2 + \sigma^2)^n. \quad (4.3)$$

Этот лагранжиан приводит к сохранению аксиального тока и равенству масс π - и σ -мезонов. Мы увидим сейчас, что добавление к нему члена

$$L_{\text{нар}} = f_\pi \mu^2 \sigma, \quad (4.4)$$

нарушающего сохранение аксиального тока, автоматически приводит к неравенству масс. В самом деле, вычисляя соответствующую вариацию лагранжиана, получаем

$$\partial_\mu j_5^\mu = - \frac{\partial (L + L_{\text{нар}})}{\partial \bar{\varphi}} = f_\pi \mu^2 \pi, \quad (4.5)$$

т. е. условие PCAC (3.4). С другой стороны, взаимодействие (4.4) приводит к появлению графов Фейнмана, в которых существует переход $\sigma \rightarrow$ вакуум («*tadepole*»-графы) [15]. Такие диаграммы могут быть исключены преобразованием сдвига

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma'; \quad \sigma_0 = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle.$$

Ограничиваясь в лагранжиане (4.3) членом $n = 2$, получаем условие компенсации таких графов:

$$-m^2 \sigma_0 + 4\lambda \sigma_0^3 + f_\pi \mu^2 = 0.$$

При этом член взаимодействия ($\sim \lambda$) приводит к перенормировке масс

$$\begin{aligned} \mu^2 &= m^2 - 4\lambda \sigma_0^2; \\ m_\sigma^2 &= m^2 - 12\lambda \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Условие совместности выписанных соотношений имеет вид

$$\sigma_0 = f_\pi.$$

Константа λ выражается через физические массы μ и m_σ следующим образом:

$$\lambda = - \frac{m_\sigma^2 - \mu^2}{8f_\pi^2}. \quad (4.6)$$

Заметим, что при $\mu^2 \rightarrow 0$ симметрия лагранжиана восстанавливается. Длины $\pi\pi$ -рассеяния в борновском приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4\pi} \left(5\lambda + \frac{24\lambda^2 f_\pi^2}{m_\sigma^2 - 4\mu^2} + \frac{16\lambda^2 f_\pi^2}{m_\sigma^2} \right); \\ a_2 &= \frac{1}{4\pi} \left(2\lambda + \frac{16\lambda^2 f_\pi^2}{m_\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $\mu^2 \rightarrow 0$, учитывая (4.6), получаем из (4.7)

$$a_0 = a_2 = 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, мы убедились, что в пределе выполнения хиральной симметрии ($\mu^2 \rightarrow 0$) простейшая линейная модель, удовлетворяющая условию PCAC, дает нулевые длины рассеяния.

4.2. Нелинейная реализация хиральной группы*

Этот же результат можно получить, и не вводя явно σ -мезон. Для этого следует рассматривать пионное поле как нелинейную реализацию хиральной группы. Нелинейная реализация задается функциями π -мезонного поля, которые характеризуют приращение пионного поля при инфинитезимальном преобразовании, связанном с оператором Q_5 . Это приращение имеет вид

$$\bar{\delta}\pi_A = -i[\beta_B Q_5^B, \pi_A] = \beta_A f(\pi) + \pi_A(\beta\pi)g(\pi^2). \quad (4.9)$$

Для того чтобы выполнялось тождество Якоби

$$[Q_5^A, [Q_5^B, \pi^C]] - [Q_5^B, [Q_5^A, \pi^C]] = [[Q_5^A, Q_5^B], \pi^C],$$

где правая часть вычисляется с помощью (3.5в) и (3.6), необходимо, чтобы функции f и g удовлетворяли соотношению

$$1 + 2f'(x)f(x) = g(x)\{f(x) - 2xf'(x)\}, \quad x = \pi^2, \quad f' = df/dx. \quad (4.10)$$

В зависимости от выбора функции f это уравнение дает функцию g и, следовательно, задание f полностью характеризует трансформационный закон (4.9). Здесь может сложиться впечатление, что уравнение (4.9) определяет целый класс неэквивалентных реализаций хиральной группы. Однако это не так. Можно показать [13, 16], что неопределенность в выборе функции f целиком переносится на произвол, связанный с переопределением пионного поля:

$$\tilde{\pi}_A = \pi_A \Phi(\pi^2)$$

в результате $\tilde{f}(\pi^2) = f(\pi^2)\Phi(\pi^2)$. Поэтому конкретное задание функции f эквивалентно определенному заданию физического поля π , описывающего реальный π -мезон.

Обратимся теперь к построению соответствующего инвариантного лагранжиана. Из (4.9) видно, что вариация градиента $\delta\partial_\mu\pi$ пропорциональна самому градиенту. Вследствие этого для инвариантного обобщения кинетического члена $(1/2)(\partial_\mu\pi)^2$ вводят так называемую ковариантную производную

$$D_\mu\pi_A = d_{AB}(\pi)\partial_\mu\pi_B.$$

Функция d_{AB} должна быть выбрана так, чтобы обеспечить следующий вид коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [Q_5^A, D_\mu\pi^C] &= -iV^{AB}(\pi)\varepsilon_{BCD}D_\mu\pi^D; \\ [Q_5^A, D_\mu\pi^C] &= -i\varepsilon_{ABC}D_\mu\pi_B. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Наличие в правых частях этих равенств антисимметрических тензоров обеспечивает инвариантность обобщенного кинетического члена

* Изложение этого раздела следует работе Вайнберга [13].

на. Используя тождества Якоби и соотношения коммутации операторов Q^A и Q_5^B , получаем

$$V_{AB}(\pi) = \varepsilon_{ABC} \pi_C W(\pi^2), \quad (4.12a)$$

где

$$W(x) = [f(x) + \sqrt{f^2(x) + x}]^{-1}, \quad (4.12b)$$

а также

$$D_\mu \pi \sim \frac{\partial_\mu \pi}{[f^2(\pi^2) + \pi^2]^{1/2}} - \frac{f'(\pi^2) + \frac{1}{2} W(\pi^2)}{f^2(\pi^2) + \pi^2} \pi \partial_\mu \pi^2. \quad (4.13)$$

Наиболее известны следующие частные случаи.

а. Определение π -поля по Вайнбергу [13] $g = \lambda$, $f(\pi^2) = \frac{1 - \lambda^2 \pi^2}{2\lambda}$. При этом из (4.12) и (4.13) имеем $W = \lambda$.

С помощью (4.9) можно показать, что инвариантного выражения, зависящего только от поля π (но не от его градиентов), выстроить невозможно. Поэтому лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (D_\mu \pi)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\partial_\mu \pi)^2}{(1 + \lambda^2 \pi^2)^2}.$$

В последнем выражении множитель нормировки, опущенный в (4.13), выбран таким образом, чтобы в пределе $\lambda \rightarrow 0$ получить обычное выражение.

б. Определение π -поля, соответствующего сигма-модели [17], $g = 0$ [ср. с (4.1)], $f = \sqrt{f_0^2 - \pi^2}$. Тогда

$$W = (f_0 + \sqrt{f_0^2 - \pi^2})^{-1}$$

и

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\pi \partial_\mu \pi)^2}{f_0^2 - \pi^2}.$$

Этот лагранжиан соответствует лагранжиану (4.3), с точностью до аддитивных c -чисел, если отождествить

$$\sigma = \sqrt{f_0^2 - \pi^2}.$$

Ясно теперь, что поскольку лагранжианы имеют чисто кинетический вид, то их борновские члены в $\pi\pi$ -рассеянии пропорциональны скалярным производным 4-импульсов. Так как масса мезона равна нулю, то длины рассеяния также равны нулю.

4.3. Нарушенная симметрия в нелинейном случае

Точной симметрии соответствуют безмассовые пионы, пионам с массой соответствует нарушенная симметрия. Нарушение симметрии опишем, добавляя в лагранжиан член вида $\Phi(\pi^2)$. Линейный член разложения этой функции дает массовый член

$$\pi^2 \Phi'(0) = -\frac{\mu^2}{2} \pi^2,$$

квадратичный—контактное $\pi\pi$ -взаимодействие:

$$\frac{1}{2} (\pi^2)^2 \Phi''(0) = \lambda (\pi^2)^2.$$

Поэтому в борновском приближении изотопические комбинации

$$2A_0(s, t, u) - 5A_2 \quad \text{и} \quad A_1(s, t, u)$$

не содержат членов порядка λ , т. е. не зависят от вида нарушающей симметрию функции $\Phi(\pi^2)$. Более того, можно показать, что они зависят только от одного параметра f_π , который определяется временем жизни π^\pm -мезонов. Чтобы показать это, рассмотрим контактные члены $\pi\pi$ -рассеяния, следующие из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} (D_\mu \pi)^2 + \Phi(\pi^2). \quad (4.14)$$

Из (4.13) очевидно, что для этого необходимо задать первые два члена разложения функции f

$$f(x) = f_0 + x f_1.$$

Из уравнения (4.10) f_1 можно выразить через f_0 и $g_0 = g(0)$

$$f_1 = \frac{g_0}{2} - \frac{1}{2f_0}.$$

Тогда разложение лагранжиана (4.14) по π -полям примет вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{(\partial_\mu \pi)^2}{2} - \frac{\mu^2 \pi^2}{2} - \frac{g_0}{2f_0} \pi^2 (\partial_\mu \pi)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2f_0^2} - \frac{g_0}{f_0} \right) (\pi \partial_\mu \pi)^2 + \lambda (\pi^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Вычисляя борновские члены, получаем

$$2A_0(s, t, u) - 5A_2(s, t, u) = \frac{3(2s-t-u)}{32\pi f_0^2}; \quad (4.16)$$

$$A_1(s, t, u) = \frac{t-u}{32\pi f_0^2}. \quad (4.17)$$

Вычисляя из этого лагранжиана аксиальный ток

$$j_{5\mu}^A = - \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \beta_A},$$

заметим, что коэффициент при $\partial_\mu \pi$ в точности равен f_0 . Именно этот член ответствен за распад заряженного пиона $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Поэтому константу f_0 можно вычислить через время жизни π -мезона. Однако обычно ее определяют из соотношения Гольдбергера — Треймана [18] (см. § 6.1):

$$f_0 = f_\pi = - \frac{g_A}{g_V} \cdot \frac{M}{g} = 0,615 \mu = 86 \text{ Мэв}. \quad (4.18)$$

Для длин рассеяния из (4.16) и (4.17) получим*

$$2a_0 - 5a_2 = 0,63; \quad A_1' = 0,035 q^2. \quad (4.19)$$

Отношение между длинами рассеяния a_0 и a_2 можно получить, фиксируя определенный вид нарушения хиральной симметрии.

Так, полагая в (4.15) $\mu \neq 0$, $\lambda = 0$, т. е. нарушая симметрию только за счет массового члена, получаем

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2g_0 f_\pi}. \quad (4.20)$$

Другой механизм нарушения, который можно назвать алгебраическим, заключается в том, что нарушающему члену Φ (4.14) приписываются определенные трансформационные свойства относительно преобразований, связанных с хиральной группой. Вайнберг [13] показал, что если член $\Phi(\pi^2)$ принадлежит к представлению $(N/2, N/2)$, то нарушающее симметрию контактное взаимодействие имеет вид

$$\frac{N(N+2)+2}{40 f_\pi^2} \mu^2 (\pi^2)^2.$$

Для отношения длин рассеяния это дает

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{5}{2} + \frac{30}{N(N+2)-8}. \quad (4.21)$$

В табл. 2 приведены численные значения a_0 и a_2 , вычисленные с помощью (4.19) — (4.21) для ряда конкретных случаев нарушения симметрии, включая рассмотренные выше.

Четвертая строка таблицы ($N = 1$) соответствует известному результату Вайнберга [19]: $a_0 \approx 0,2$, $a_2 \approx -0,06$, полученному им впервые при рассмотрении приближения мягких пионов в алгебре

* При вычислении (4.18) использовано новое значение $g_A/g_V = -1,23$. В работе [13] $f_\pi = 0,59 \mu$ получено с помощью старого значения $-1,18$. Отметим еще, что вычисление по времени жизни пиона дает $0,68 \mu = 95 \text{ Мэв}$. Вследствие этого надежность численных значений в правых частях (4.19), по-видимому, можно оценить в $\pm 10\%$.

Таблица 2

Зависимость s -волновых длин $\pi\pi$ -рассеяния от способа нарушения хиральной симметрии

Способ нарушения симметрии	$\xi = a_0/a_2$	a_0	a_2
Уравнение (4.20), $g_0 f_\pi = 0,5$	$-1/2$	0,057	$-0,105$
То же $g_0 = 0$	∞	0,315	0
» » $g_0 = -\infty$	$5/2$	$+\infty$	$+\infty$
Уравнение (4.21), $N = 1$	$-7/2$	0,184	$-0,0525$
То же $N = 2$	∞	0,315	0
» » $N = 3$	$95/14$	0,495	0,73
» » $N \rightarrow \infty$	$5/2$	$+\infty$	$+\infty$

токов. Поэтому случай $N = 1$ соответствует формуле (4.5) PCAC. Другие приведенные в таблице длины рассеяния соответствуют таким выражениям для $\partial_\mu j_5^\mu$, в которых в правой части (4.5) добавлены члены разложения более высокого порядка по степеням поля π .

Отметим еще следующее интересное обстоятельство. В рамках линейной реализации хиральной симметрии (сигма-модель) вайнбергские длины рассеяния можно получить, если в формулах (4.7) и (4.6) устремить массу σ -мезона m_σ к бесконечности [11].

5. РАССЕЯНИЕ ПИОНОВ

5.1. Запись уравнений

Дисперсионные соотношения для $\pi\pi$ -рассеяния вперед удобно рассматривать для следующих комбинаций структурных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= B + \frac{A+C}{3}; \\ T_1 &= A-C; \\ T_2 &= A+C. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

При перестановке s и u они преобразуются следующим образом:

$$T_I(s, u) = (-1)^I T_I(u, s). \quad (5.2)$$

При этом индекс 1 соответствует изотопическому спину в t -канале.

Для обсуждения высокоэнергетического поведения этих комбинаций воспользуемся концепцией полюсов Редже. Для старшего асимптотического члена при $t = 0$ получаем

$$T_0 \sim s, \quad T_1 \sim s^{\alpha\rho(0)} \sim \sqrt{s}. \quad (5.3)$$

В настоящее время не обнаружено ни одного резонанса с изоспином 2, с массой меньше $1,5 \text{ Гэв}$. Поэтому естественно считать, что если даже и существует соответствующая траектория Редже, то она лежит

очень низко, так что

$$s^2 T_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Таким образом, вычитание требует только одно д. с. для T_0 или, что эквивалентно, д. с. для кроссинг-четной структурной функции V . Поэтому учет вакуумных особенностей в низкоэнергетических уравнениях можно провести точно так же, как и в нейтральном случае. При этом, как мы увидим ниже, параметр отталкивания $v \sim 0,5$. Вклад из области высоких энергий в T_1 , обусловленный ρ -мезонной траекторией, имеет вид zv_1 (5.2). Параметр v_1 можно оценить, исходя из гипотезы универсальности взаимодействия ρ -мезона [20]:

$$v_1 = \frac{2}{8\pi^2} \int_{z_H}^{\infty} \frac{\sigma_{+-} - \sigma_{++}}{z^2} \sqrt{z^2 - 1} dz \sim 0,02 \quad \text{при } z_H \simeq 25. \quad (5.5)$$

Этим вкладом в дальнейшем будем пренебрегать.

Для д. с. вперед соотношение (5.4) дает так называемое сверхсходящееся правило сумм [21]:

$$\frac{2}{\pi} \int \left\{ \frac{\text{Im } A_0}{3} - \frac{\text{Im } A_1}{2} + \frac{\text{Im } A_2}{6} \right\} z dz = 0. \quad (5.6)$$

В физике низких энергий это правило сумм играет роль условия «бутстрапного типа»: в резонансном приближении оно связывает массы и ширины резонансов. В то же время из-за наличия под интегралом множителя z это правило сумм очень чувствительно к резонансам с большой массой и к нерезонансной подкладке. Другими словами, оно существенно зависит от сечения в промежуточной энергетической области. К сожалению, эти сечения для лл-рассеяния практически неизвестны, и поэтому реально воспользоваться уравнением (5.6) при решении низкоэнергетической системы уравнений мы не можем. Все же по низкоэнергетическим характеристикам амплитуды рассеяния с помощью (5.6) можно судить о вкладах из промежуточной области.

Ограничиваясь s - и p -волнами и используя положения 2—4 из § 1.1, получаем для двух s -волн $A_0 \equiv A_{l=0}^l$, $A_2 \equiv A_{l=2}^l$ и p -волны $A_1 \equiv A_{l=1}^l$ следующую систему уравнений:

$$A_i(z) = -\alpha_i v(z) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_i}{z' - z} dz' + \frac{b_{ik}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_k dz'}{z' + z}, \quad (5.7)$$

здесь b_{ik} — матрица кроссинг-симметрии (см. § 13.1 из работы [1])

$$b_{ik} = \begin{pmatrix} 1/3 & -3 & 5/3 \\ -1/9 & 1/2 & 5/18 \\ 1/3 & 3/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

$\alpha = (1, 1/3, 1)$, а потенциал коротковолнового отталкивания $v(z)$ может быть представлен в виде

$$v(z) = v - z^2 \frac{v}{\rho^2} \simeq \frac{v}{1 + z^2/\rho^2}. \quad (5.8)$$

Пороговое условие для ρ -волны принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_1}{z-1} dz + \frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z+1} \times \\ \times \left[-\frac{\text{Im } A_0}{9} + \frac{\text{Im } A_1}{2} + \frac{5 \text{Im } A_2}{18} \right] = \frac{v(1)}{3}. \quad (5.9)$$

К сожалению, очень трудно аналитически получить точное решение системы (5.7). Подобно нейтральной модели, она имеет много решений. Это уже было видно при исследовании аналогичной системы уравнений без отталкивания (см. гл. 3 в работе [1]). Как известно, тогда характерными чертами решений была малая ширина ρ -мезона и большие положительные длины рассеяния a_0 и a_2 . Теперь же после введения отталкивания из порогового условия (5.9) видно, что параметр $v(1)$ увеличивает ширину ρ -мезона (увеличивает интегральный вклад в пороговое условие от ρ -волны). Длины рассеяния при этом уменьшаются.

Для грубой оценки величины v можно воспользоваться формулой (5.8), согласно которой при $\rho \gg 1$ имеем $v \simeq v(1)$.

Отождествляя член разложения в (5.8), пропорциональный $z^2 = x$, с линейным членом формулы, аналогичной (1.28), получаем

$$v = \frac{\rho^2}{4\pi} \int_{z_H}^{\infty} \frac{dz \sqrt{z^2 - 1}}{z^3} \sigma_B(z) \simeq \frac{\rho^2 \sigma_B^B}{4\pi^2 z_H},$$

полагая теперь

$$\rho \sim z_H \geq 25 (W_H = 1 \text{ Гэв}) \quad \text{и} \quad \sigma_B(\infty) \simeq \frac{0,8}{\mu^2} (\sim 16 \text{ мбарн}),$$

находим

$$v \geq 0,5.$$

Из этой оценки видно, что влияние высокоэнергетических эффектов на длины рассеяния s -волн и ширину ρ -мезона существенно.

Рассмотрим более детально влияние коротковолнового отталкивания на пороговые характеристики s - и ρ -волн.

5.2. Пороговый анализ

Напомним, что выражения для комбинаций $2A_0 - 5A_2$ и A_1 [(4.16) и (4.17)], полученные при рассмотрении феноменологических лагранжианов, не зависят от способа нарушения хиральной симметрии. При этом рассматривалось только феноменологическое

приближение [16], т. е. приближение, учитывающее только графы-деревья (фейнмановские графы без внутренних петель). Поэтому естественно предположить, что такое приближение достаточно хорошо работает в области аналитичности амплитуды рассеяния в окрестности точки $z = 0$. Другими словами, формулы (4.16) и (4.17) задают разложения по z решений уравнений (5.7) при малых

$$2A_0 - 5A_2 = \frac{3(3z + 1)}{16\pi f_\pi^2}; \quad (5.10a)$$

$$A_1 = \frac{z - 1}{48\pi f_\pi^2}. \quad (5.10b)$$

Разложим теперь уравнение (5.7) по степеням z . Удерживая члены порядка z , имеем

$$A_i(z) \approx -\alpha_i v + \frac{1}{\pi} \int \frac{dz'}{z'} [\text{Im } A_i + b_{ik} \text{Im } A_k] + \\ + \frac{z}{\pi} \int \frac{dz'}{z'^2} [\text{Im } A_i - b_{ik} \text{Im } A_k] + \dots \quad (5.11)$$

Разложения (5.11) имеют радиус сходимости $z = 1$. Однако если $\text{Im } A_i(z')$ при $z' \sim 1$ малы, то первыми членами таких разложений можно пользоваться и при $z \sim 1$. Поэтому будем использовать формулу (5.11) для анализа решений с малыми длинами рассеяния.

Сравнивая формулы (5.10) и (5.11), имеем

$$3v + \frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z} \left[\text{Im } A_0 - \frac{27}{2} \text{Im } A_1 - \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right] = \frac{3}{16\pi f_\pi^2}. \quad (5.12)$$

Определяя теперь v через интегралы от $\text{Im } A_1$ из порогового условия для p -волны

$$3v = \frac{27}{2\pi} \int \frac{\text{Im } A_1}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z} \left(-\text{Im } A_0 + \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z^2} \left[\text{Im } A_0 + \frac{9}{2} \text{Im } A_1 - \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right]$$

в приближении (5.11), получаем из (5.12)

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z^2} \left\{ \text{Im } A_0 + \frac{9}{2} \text{Im } A_1 - \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right\} = \frac{3}{16\pi f_\pi^2}. \quad (5.13)$$

Можно показать, что соотношение (5.13) обеспечивает выполнение обоих уравнений (5.10) как в точке симметрии $z = 0$, так и на пороге $z = 1$ с точностью до членов $\sim \int dz z^{-3}$. Точность выполнения (5.10) можно повысить, потребовав

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{dz}{z^3} \left\{ \text{Im } A_0 - \frac{27}{2} \text{Im } A_1 - \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right\} = 0. \quad (5.14)$$

Условия (5.13) и (5.14) обеспечивают выполнение (5.10) с точностью до членов $\sim \int dz z^{-4}$.

Длины рассеяния имеют вид:

$$a_0 = \frac{5}{2\pi} \int \frac{dz}{z} \left\{ \text{Im } A_0 - \frac{9}{2} \text{Im } A_1 + \frac{1}{2} \text{Im } A_2 \right\} + \frac{1}{16\pi f_\pi^2}; \quad (5.15)$$

$$a_2 = \frac{2}{3\pi} \int \frac{dz}{z} \left\{ \text{Im } A_0 - \frac{9}{2} \text{Im } A_1 + \frac{1}{2} \text{Im } A_2 \right\} - \frac{1}{8\pi f_\pi^2}. \quad (5.16)$$

Мы ожидаем, что система уравнений имеет решение с резонансом в p -волне, характеристики которого весьма близки к экспериментальным данным. Кроме того, будем считать, что парциальная волна A_2 мала на большом интервале энергий (вплоть до 1 ГэВ), и поэтому ее мнимой частью будем пренебрегать. Для количественной оценки (5.15) и (5.16) воспользуемся тем обстоятельством, что в настоящее время положение и ширину ρ можно считать установленными достаточно хорошо:

$$m_\rho = 765 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_\rho^{\text{полн}} = 120 \text{ МэВ}. \quad (5.17)$$

Поэтому ρ -резон является достаточно узким и мнимую часть соответствующей парциальной волны можно аппроксимировать δ -функцией:

$$\text{Im } A_1(z) = \pi \gamma_1 z_1 \delta(z - z_1). \quad (5.18)$$

Здесь

$$z_1 = \frac{m_\rho^2 - 2\mu^2}{2\mu^2} = 14,0; \quad \gamma_1 = \frac{m_\rho \Gamma_\rho^{\text{полн}}}{m_\rho^2 - 2\mu^2} \simeq 0,17.$$

Интеграл от p -волны в (5.18) дает вклад в (5.15), численно равный 1,28 комптоновской длины пиона. В то же время $3/16\pi f_\pi^2 = 0,158$ [см. (4.18)]. Поэтому малые длины рассеяния, соответствующие не сильному разрушению хиральной симметрии [малые N в формуле (4.21)], возможны только тогда, когда интеграл от $\text{Im } A_0$ в (5.15) и (5.16) компенсируется интегралом от $\text{Im } A_1$, т. е. приближенно должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \text{Im } A_0 \frac{dz}{z} \simeq \frac{9}{2\pi} \int \text{Im } A_1 \frac{dz}{z} = 0,756.$$

Иллюстрацией этого может служить табл. 3.

Заметим, что при такой компенсации параметр высокоэнергетического отгалкивания существенно отличен от нуля. В этом случае, выражая интеграл в (5.9), содержащий $\text{Im } A_0$, через a_2 , получаем

$$v = 3\gamma_1 - \frac{a_2}{2}.$$

Если же $v = 0$, то такая компенсация невозможна и мы приходим к большим длинам рассеяния

$$a_0 \simeq \frac{15}{\pi} \int \text{Im } A_1 \frac{dz}{z} \simeq 15 \gamma_1 \simeq \frac{5}{2} a_2 = 2,5.$$

Зависимость параметра интенсивного отталкивания v - и s -волнового вклада в пороговые условия для p -волны и отношения длин $\pi\pi$ -рассеяния от способа нарушения хиральной симметрии

Способ нарушения симметрии	Отношение длин рассеяния	$\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dz}{z} \text{Im } A_0$	v
$g_0/f_0 = 0,5$	$-1/2$	0,747	0,56
1 (PCAC)	$-7/2$	0,796	0,54
2	$\pm \infty$	0,906	0,51

Такая ситуация соответствует большим N (>10) в формуле (4.21).

Выразив интеграл от $\text{Im}A_0$ через параметр отталкивания, получим простые формулы для длин рассеяния:

$$a_0 = -5v + 2,84; \quad a_2 = -2v + 1,02. \quad (5.19)$$

Из формул (5.19) следует: $v \sim 0,5$, когда a_2 мало, что соответствует оценке из высокоэнергетических интегралов (см. п. 5.1). Это независимо указывает на то, что система уравнений (5.7) имеет решение с экспериментальной p -волной и малыми длинами рассеяния.

Таким образом, введение коротковолнового отталкивания в дисперсионную низкоэнергетическую теорию для низких парциальных волн позволяет привести ее в соответствие с приближением, основанным на малости массы пиона. При этом оказывается, что интенсивность отталкивания v — очень удобный параметр для количественного описания $\pi\pi$ -рассеяния в области низких энергий. Он позволяет связывать способ нарушения симметрии с высокоэнергетическими характеристиками рассеяния, обусловленными вакуумными вкладами.

5.3. Решаемая модель $A_2=0$

В проведенном выше пороговом анализе было показано, что малые длины рассеяния s -волн возникают только при определенной компенсации больших интегральных вкладов от $\text{Im}A_1$ и $\text{Im}A_0$ (5.17). Можно воспользоваться идеей этой компенсации и на основе уравнений (5.7) построить такую решаемую модель для парциальных волн A_0 и A_1 , решение которой в области до 1 Гэв будет разумно описывать энергетический ход δ_0^0 - и δ_1^1 -фаз, а также соответствовать (5.10).

В основу модели положим предположение о том, что в рассматриваемой физической области как $\text{Im}A_2$, так и $\text{Re}A_2$ можно считать равными нулю. Выражая тогда из третьего уравнения (5.7) потенциал отталкивания $v(z)$ через кроссинг-интегралы от $\text{Im}A_0$ и $\text{Im}A_1$ и подставляя полученные выражения в первые два уравнения (5.7),

получаем решаемую модель для волн A_0 и A_1 :

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_0(z')}{z' - z} dz' - \frac{9}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_1(z')}{z' + z} dz'; \\ A_1(z) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_1(z')}{z' - z} dz' - \frac{2}{9\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_0(z')}{z' + z} dz'. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Эта модель имеет простую кроссинг-симметрию

$$A_0(-z) = -\frac{9}{2} A_1(z). \quad (5.21)$$

Из (5.21) вытекает, что волна A_0 имеет нуль на кроссинг-пороге при $z = -1$. Решение, полученное переходом в обратной функции, имеет вид

$$\begin{aligned} H(z) &= A_0^{-1}(z) = -\frac{2}{9} A_1^{-1}(-z) = \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{R_0 z}{z+1} - I(z) + \frac{2}{9} I(-z) - \sum_i \frac{z \alpha_i}{z_i(z_i - z)} - cz. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь $R_0, \alpha_i, c > 0$, $|z_i| > 1$, а также

$$I(z) = \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{z' - 1}{z' + 1}} \cdot \frac{dz'}{z'(z' - z)}.$$

Отсутствие связанных состояний, т. е. полюсов в интервале $-1 < z < 1$, приводит к ограничению сверху на возможные значения параметра λ :

$$\lambda < \lambda_{\max} = \left[\frac{R_0}{2} + I(1) - \frac{2}{9} I(-1) + \sum \frac{\alpha_i}{z_i(z_i - 1)} + c \right]^{-1}. \quad (5.23)$$

Длина рассеяния a_0 волны A_0 может принимать только положительные значения. Это следует из решения и непосредственно из первого уравнения (5.20). В самом деле, согласно этому уравнению, $dA_0/dz > 0$ при $-1 < z < 1$, а также $A_0(-1) = 0$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что длина рассеяния p -волны тоже положительна [в решении (5.22) это соответствует $R = 4/9 \alpha_1 > 0$].

Рассмотрим простейшее решение без К. Д. Д.-членов (т. е. при $c = 0, \alpha_i = 0$). При больших z имеем асимптотически

$$(A_0)^{-1} \simeq \frac{7}{9\pi} \ln z, \quad (A_1)^{-1} \simeq -\frac{7}{2\pi} \ln z. \quad (5.24)$$

Из положительности длины рассеяния a_1 и отсутствия нулей у функции A_1 в физической области теперь следует, что фаза δ_1^1 обязательно проходит через резонанс. Положение и ширина определяются двумя параметрами λ и R_0 . Если теперь определить эти па-

раметры с помощью разложения (5.10б) для p -волны:

$$R_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{32\pi}{3} f_\pi^2, \quad (5.25)$$

то масса и ширина ρ -мезона определяются через константу f_π и массу пиона μ соотношениями, которые при $m_\rho^2 \gg \mu^2$ выглядят следующим образом:

$$\frac{192}{7} f_\pi^2 = m_\rho^2 \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{m_\rho^2}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right); \quad (5.26)$$

$$\frac{\Gamma_\rho}{m_\rho} = \left(\frac{7}{2\pi} + \frac{96\pi f_\pi^2}{m_\rho^2} \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

Полагая, в соответствии с (4.18), $f_\pi = 0,615\mu$ ($R_0 = 12,7$), получаем $m_\rho \sim 930$ Мэв; $\Gamma_\rho^{\text{полн}} \sim 230$ Мэв.

Интересно отметить, что, переходя с помощью (1.3) от Γ_ρ к g_ρ , получаем вместо (5.27)

$$\frac{2f_\pi^2 g_\rho^2}{m_\rho^2} = \left(1 + \frac{7m_\rho^2}{192\pi^2 f_\pi^2} \right)^{-1}. \quad (5.27a)$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение известного соотношения КСФР [22, 23], учитывающее унитарные поправки.

5.4. Фазы рассеяния в области до 1 Гэв

Кривая 1 на рис. 4 дает энергетический ход фазы p -волны для случая (5.25).

Для того чтобы рассчитать энергетический ход s -фазы, заметим, что первая из формул (5.22) достаточно хороша только в областях, далеких от порога. В околороговой области ее следует поправить, используя выражения (5.10а) и вводя параметр $\xi = a_0/a_2$, характеризующий способ нарушения симметрии. Тогда нетрудно найти, что в окрестности $z = 0$ A_0 можно представить в виде

$$A_0 \simeq \frac{z + z_0}{8\pi f_\pi^2},$$

где

$$z_0 = \frac{2\xi + 5/2}{\xi - 5/2}. \quad (5.28)$$

При малых нарушениях симметрии (см. табл. 2) положение нуля z_0 недалеко от точки $z = 0$ и поэтому следует ожидать, что поправки, учитывающие унитарность, сдвигают его на малую величину. Следовательно, амплитуду A_0 в окрестности порога в физической

области можно аппроксимировать выражением (ср. с работой [24])

$$A_0 = \frac{1}{\frac{3R_0}{4(z+z_0)} - I(z)} \quad (5.29)$$

При $z \geq 10$ амплитудой A_2 можно пренебречь и поэтому корректнее пользоваться формулой (5.22). Зависимость

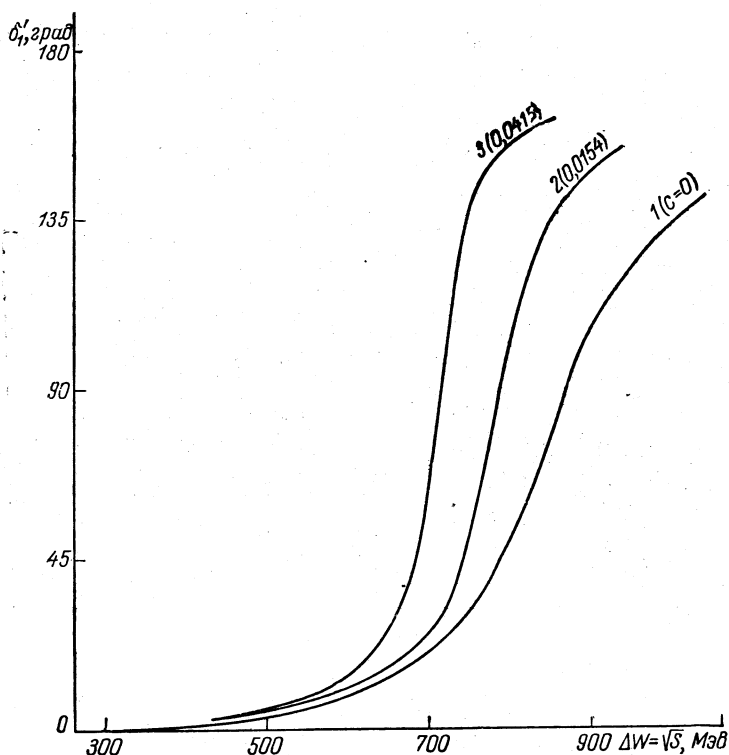


Рис. 4. Энергетическое поведение δ_1^0 -фазы при разных c .

s -фазы δ_0^0 от энергии для разных значений ξ представлена на рис. 5 ($R_0 = 12,7$).

Из рис. 4 (кривая 1) и 5 видно, что значения фазы δ_0^0 лежат ниже экспериментальных данных и в то же время характеристики ρ -мезона (m_ρ , Γ_ρ) завышены. Такого несоответствия с экспериментом следовало ожидать, так как приведенное выше рассмотрение представляет собой как бы первое приближение, претендующее только на получение качественной картины лл-взаимодействия.

При этом не был учтен ряд важных эффектов: во-первых, мы ограничились только s - и p -волнами, а известно, однако, что d -

волна ($I = 0$) не мала и проходит через резонанс в районе $1,2 \text{ Гэв}$ (f_0 -мезон). Аналогичная ситуация имеет место и для изотопической амплитуды A_1 . Это приводит к тому, что интегральными вкладами от более высоких резонансов в районе $(0,5-1) \text{ Гэв}$ нельзя пренебрегать. Во-вторых, мы уже оценивали вклад от ρ -мезонной траектории в действительную часть амплитуды рассеяния на пороге (5.5). Там он оказался мал. Однако в районе ρ -мезона этот вклад по порядку величины равняется нескольким десяткам комптоновских

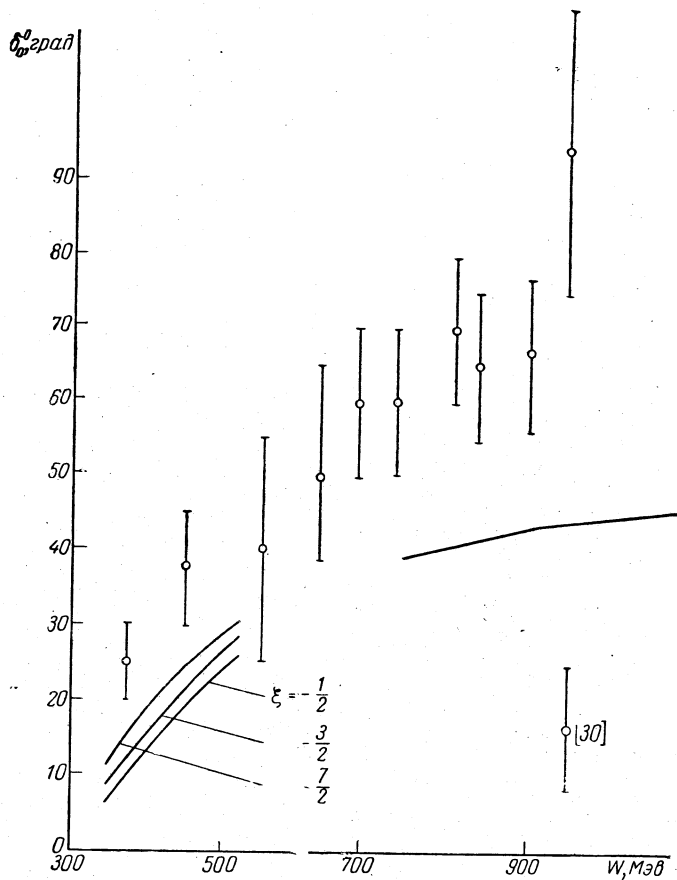


Рис. 5. Энергетическая зависимость δ_0^0 -фазы при разных ξ .

длин мезона и его также следует учитывать. Оказывается, что учет повышает s -фазу δ_0^0 на $5-10^\circ$. Наконец, не следует забывать, что амплитуда A_2 также отличается от нуля.

Наиболее существенный эффект — учет вкладов от промежуточной области ($1 \div 2 \text{ Гэв}$). Для этого нужно сформулировать за-

дачу для s -, p -, d - и f -парциальных волн и рассматривать решение получившихся уравнений. Мы, однако, здесь не будем заниматься изучением этой системы. Заметим только, что и влияние высших волн на s -, p -решения можно учесть, считая параметр c выражения (5.22) отличным от нуля.

Нетрудно убедиться в этом на примере рассеяния нейтральных пионов (2.2). Представив условие унитарности в виде

$$\text{Im } A = K |A(z)|^2 + 2\varphi(z) \text{Re } A(z) + \eta(z),$$

где функции φ и η определяются d -волной, решим уравнение (2.2). И тогда можно показать, что решение этого уравнения без К. Д. Д.-

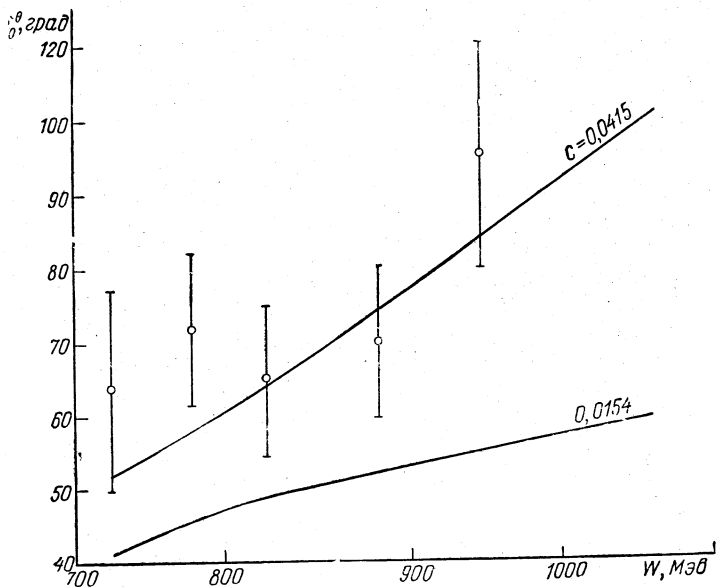


Рис. 6. Энергетическая зависимость δ_0^0 -фазы при разных c .

членов соответствует решению (2.3) — (2.5) с чисто упругой унитарностью, но с К. Д. Д.-членом с $c \neq 0$ в низкоэнергетической области, если функции φ и η существенно отличны от нуля при энергиях больше 1 Гэв.

Решения (2.22) для двух значений $c \neq 0$ представлены на рис. 4 (кривые 2 и 3) и на рис. 6. Видно, что при малых c масса резонанса в p -волне и его ширина приближаются к экспериментальным значениям и s -фаза увеличивается. Становится возможным резонанс в районе 1 Гэв. Этот резонанс имеет довольно большую ширину. Для ее грубой оценки в δ -приближении можно воспользоваться пороговым условием для второго из уравнений (5.20).

Это дает $\gamma_\sigma = \frac{9}{2}\gamma_p$ или

$$\Gamma_\sigma = \frac{9m_\sigma}{2m_p} \Gamma_p \simeq 700 \text{ Мэв} \quad (\text{при } m_\sigma \sim 1 \text{ Гэв}).$$

Конечно, столь широкий резонанс только условно можно назвать квазичастицей (σ -мезоном). Его очень трудно отличить в спектре масс бипиона (например, в реакции $\pi + N \rightarrow \pi' + \pi'' + N$) от эффектов взаимодействия частиц в конечном состоянии, когда это взаимодействие достаточно сильно, но не обязательно резонансное.

В заключение скажем несколько слов о волне A_2 . Используя определение (5.8) и полученные численные значения A_0 и A_1 из

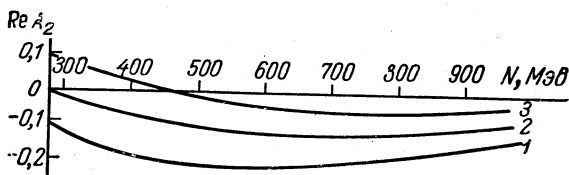


Рис. 7. Энергетическая зависимость амплитуды A_2 при разных a_2 .

третьего уравнения (5.7), можно рассчитать малую волну A_2 . Основная неопределенность здесь оказывается связанной с интенсивностью отталкивания v . Ее можно фиксировать, задавая длину рассеяния a_2 [см. вторую формулу (5.19)]. Поведение фазы этой волны для трех различных значений $a_2 = +0,10; 0; -0,10$ представлено на рис. 7 (подробности см. в работе [25]).

Из этого рисунка видно, что на значительном интервале энергий фаза δ_2^0 мала и отрицательна. Ясно поэтому, что исходное приближение $\text{Im}A_2 = 0$ согласовано с полученным поведением фазы.

6. ПИОН-НУКЛОННОЕ РАССЕЯНИЕ

6.1. Приближение безмассовых пионов в πN -рассеянии

Приближение, в котором выполняется симметрия относительно хиральной группы $SU(2) \times SU(2)$, дает близкие к экспериментальным значения пороговых характеристик. Поэтому, как это было в $\pi\pi$ -рассеянии, следствия приближения безмассовых пионов можно рассматривать в виде граничных условий для решений системы уравнений для парциальных волн πN -рассеяния.

Аналогично § 4, получим следствия хиральной симметрии для πN -рассеяния из борновских членов соответствующего эффективного лагранжиана. Этот лагранжиан, как уже отмечалось, можно построить двумя способами.

Первый способ основан на предположении, что существует некоторый набор элементарных частиц, реализующий линейные представления группы $SU(2) \times SU(2)$. Допустим, нуклонное поле принадлежит к представлению $(1/2, 1/2)$. Вариации этого поля при действии генераторов Q_5^A и Q^A определяются выражениями

$$\delta\Psi = i \frac{\tau_a}{2} \Psi; \quad \bar{\delta}\Psi = i \frac{\tau_b^a}{2} \gamma_5 \Psi. \quad (6.1)$$

Разумеется, массовый член в лагранжиане неинвариантен при таком преобразовании. Однако инвариантность полного лагранжиана можно обеспечить, вводя взаимодействие с π - и σ -полями, которые также принадлежат представлению $(1/2, 1/2)$ и преобразуются по формулам (4.1).

Простейший инвариантный лагранжиан (сигма-модель Гелл-Манна — Леви [7, 12]) имеет вид

$$L = \bar{\Psi} (i\gamma_\mu \partial_\mu - M) \Psi + \frac{1}{2} \{(\partial\sigma)^2 + (\partial\pi)^2\} - \lambda \left\{ \sigma^2 - \frac{2M}{g} \sigma + \pi^2 \right\} + g \bar{\Psi} [\sigma + \gamma_5 \pi \tau] \Psi. \quad (6.2)$$

Отметим, что σ -поле из (6.2) отличается от $\bar{\sigma}$ -поля из (4.3) аддитивной постоянной $\sigma = \bar{\sigma} + M/g$, а константа связи g выражается через введенную ранее (§ 1) константу f известным соотношением

$$f^2 = \frac{g^2}{4\pi} \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2.$$

Борновские члены лагранжиана (6.2) описывают только амплитуду T^+ . Соответствующая длина рассеяния, определенная через диаграммы обмена нуклоном и σ -мезоном, имеет вид

$$a^+ = -\frac{g^2}{4\pi M} + \frac{2\lambda M}{\pi m_\sigma^2}.$$

Поскольку из (6.2) следует, что $m_\sigma^2 = 8M^2\lambda/g^2$, то

$$a^+ = 0. \quad (6.3)$$

Для получения амплитуды T^- следует добавить к (6.2) члены взаимодействия с векторными частицами. Наиболее подходящими кандидатами являются ρ - и A_2 -мезоны. Соответствующие поля, реализующие представление $(1,0) + (0,1)$, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\rho_A^\mu &= -\varepsilon_{ABC} \alpha_B \rho_C^\mu, & \bar{\delta}\rho_A^\mu &= -\varepsilon_{ABC} \beta_B A_{2C}^\mu; \\ \delta A_{2A}^\mu &= -\varepsilon_{ABC} \alpha_B A_{2C}^\mu, & \bar{\delta}A_{2A}^\mu &= -\varepsilon_{ABC} \beta_B \rho_C^\mu. \end{aligned}$$

Из-за сохранения G -четности в борновский член T -амплитуды дает вклад только ρ -мезонный обмен

$$\Phi^- = \frac{2g_{1V}g_\rho}{m_\rho^2 - t}$$

Из универсальности взаимодействия векторных мезонов следует, что $2g_{1V} = g_\rho$. Поэтому (в единицах μ^{-1})

$$a^- = \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^2\pi} \quad (6.4a)$$

Исходя из экспериментального значения ширины ρ -мезона (5.17) с помощью (1.3) можно получить $g_\rho^2/4\pi = 2,5$, откуда следует $a^- = 0,084$.

Другой способ построения эффективного лагранжиана основан на предположении о том, что поле пионов представляет собой нелинейную реализацию хиральной группы [13]. Для получения инвариантного лагранжиана не нужно вводить другие поля. Здесь следует задать коммутаторы

$$[Q^A, \Psi] = -\frac{\tau^A}{2} \Psi; \quad [Q_5^A, \Psi] = V_{AB}(\pi) \frac{\tau^B}{2} \Psi, \quad (6.5)$$

определяющие вариацию нуклонного поля Ψ .

Для нахождения функции V_{AB} необходимо воспользоваться тождествами Якоби и групповыми соотношениями (3.5в). Это дает то же самое выражение для V_{AB} , что и формула (4.12), по которой найден закон преобразования ковариантной производной $D_\mu\pi$. Отсюда следует, что нуклонный массовый член в лагранжиане инвариантен относительно преобразований хиральной группы.

Инвариантный лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{вз} = \frac{ig}{2M} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau \Psi D_\mu \pi, \quad (6.6)$$

где выражение $D_\mu\pi$ определено в (4.13).

Для построения полного лагранжиана нужно еще определить ковариантную производную $D_\mu\Psi$, преобразующуюся так же, как и поле Ψ (6.5).

Стандартное манипулирование с тождествами Якоби дает

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{iV(\pi^2)}{\sqrt{f^2(\pi^2) + \tau^2}} \frac{\tau}{2} (\pi \partial_\mu \pi) \Psi. \quad (6.7)$$

Последний член дает дополнительное к (6.6) πN -взаимодействие. Таким образом, полный хирально-симметричный лагранжиан πN -системы имеет вид

$$L = \bar{\Psi} (i \partial_\mu \gamma_\mu - M) \Psi + \frac{v(\pi^2)}{\sqrt{f^2(\pi^2) + \tau^2}} \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \Psi (\pi \partial_\mu \pi) + \frac{ig}{2M} \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau \Psi D_\mu \pi + \frac{1}{2} (D_\mu \pi)^2. \quad (6.8)$$

Определяя из (6.8) выражения для аксиального векторного тока и рассматривая коэффициент перед $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$, можно получить соотношение Гольдбергера—Треймана:

$$\left(\frac{g_A}{g_V}\right) = -\frac{f_\pi}{M} g. \quad (4.18)$$

Рассчитывая борновские члены, получаем

$$\left. \begin{aligned} A^+ &= \frac{g^2}{M}, \quad A^- = 0 \\ B^+ &= g^2 \left\{ \frac{1}{M^2-s} - \frac{1}{M^2-u} \right\}; \\ B^- &= -\frac{g^2}{2M^2} + \frac{1}{2f_\pi^2} + g^2 \left\{ \frac{1}{M^2-s} + \frac{1}{M^2-u} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Отсюда следует, что

$$a^+ = 0 \quad (6.3)$$

и

$$a^- = \frac{1}{8\pi f_\pi^2}. \quad (6.46)$$

При $f_\pi = 0,615$ [см. (4.18)] получаем $a^- = 0,10$. Сравнив (6.4а) и (6.46) и воспользовавшись (4.18), получим связь между характеристиками ρ -мезона и $g_{\pi NN}$ [22, 23]:

$$\alpha_{\rho 1} = \frac{g_{1V} g_\rho}{8\pi} = \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 \frac{m_\rho^2}{8M^2} \cdot \frac{g^2}{4\pi}. \quad (6.10)$$

Соотношения (6.3), (6.4) и (6.10) мы будем использовать ниже как дополнительные условия, наложенные на систему s -, p -волновых уравнений с отталкиванием.

6.2. Введение отталкивания

Как уже указывалось в § 1, 4, в низкоэнергетическом уравнении для функции $\varphi^+(v, 1)$ следует ввести потенциал коротковолнового отталкивания $V^+(v)$. По аналогии с (2.1) аппроксимируем этот потенциал полюсным выражением форм-факторного типа

$$V^+(v) \simeq v^+(v) = -\frac{v}{1 + \frac{v}{\rho^2}}. \quad (6.11)$$

Параметр v связан с константой вычитания и представляет собой интенсивность отталкивания, а величина ρ^2 характеризует радиус действия сил отталкивания. Если считать, что условная граница низкоэнергетической области лежит примерно при $E_{\text{лаб}} \simeq 500 \text{ Мэв}$, то $\rho^2 \gtrsim 50$.

Уравнение (1.7а) теперь принимает вид

$$\varphi^+(v, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \varphi^+(v', 1)}{v' - v} dv' - \frac{v}{1 + \frac{v}{\rho^2}}. \quad (6.12)$$

С помощью члена коротковолнового отталкивания, пропорционального v , можно теперь получить малые (в том числе нулевые) значения длины рассеяния a^+ . Поэтому введение члена отталкивания необходимо для достижения соответствия между дисперсионным подходом и следствиями хиральной симметрии.

Необходимо также модифицировать третье из уравнений (1.7). Дело в том, что при высоких энергиях спин-флипковая амплитуда рассеяния f_2 меньше амплитуды без поворота спина, т. е. $f_2 < f_1$. Поэтому $\text{Im} v_L B^+ / 4\pi$ стремится к тому же пределу, что и $\text{Im} \varphi^+$. Таким образом, дисперсионное соотношение для функции $v_L B^+$ также требует вычитания. В соответствующее низкоэнергетическое уравнение, записанное без вычитания, следует ввести потенциал коротковолнового отталкивания:

$$v_B(q^2) = \frac{-v_B}{1 + q^2 / \rho_B^2},$$

где [ср. формулу (1.30)]

$$v_B = \frac{1}{2\pi^2} \int_1^{\infty} \text{Im} B_0^+(E') dE' + 4Mf^2, \quad (6.13)$$

а B_0^+ представляет собой низкоэнергетическую (p -волновую) составляющую функции B^+ .

Переходя к функции $\beta^+(v)$ в статическом пределе, получаем вместо (1.7в)

$$\beta^+(v) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega v_B}{2M(\rho_B^2 + v^2)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \beta^+(v') dv'}{\omega' (v' - v)}. \quad (6.14)$$

Поскольку следует считать, что $\rho_B^2 \sim p^2 \geq 50$, то это уравнение в области низких энергий практически не отличается от уравнения (1.7в). Введенный член становится важным в области больших энергий, где он существенно меняет условие (1.12а), обеспечивающее правильное убывание функции β^+ . Система уравнений для s - и p -волн приобретает вид:

$$s^+(v) = \frac{\alpha_\sigma}{2(1 + v_\sigma + v)} - \frac{v}{2\left(1 + \frac{v}{\rho^2}\right)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} s^+(v') dv'}{v' - v}; \quad (6.15а)$$

$$s^-(v) = \frac{\omega \alpha_{\rho 1}}{2(1 + v_\sigma + v)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} s^-(v') dv'}{\omega' (v' - v)}, \quad (6.15б)$$

$$p^{(+)}(v) = -\frac{\alpha_{\sigma}}{2(1+v_{\sigma}+v)} - \frac{v}{2\left(1+\frac{v}{\rho^2}\right)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } p^{+}(v') dv'}{v'-v}; \quad (6.16a)$$

$$p^{(-)}(v) = \frac{2f^2}{\omega} - \frac{\omega\alpha_{\rho 1}}{2(1+v_{\rho}+v)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } p^{-}(v') dv'}{\omega'(v'-v)}; \quad (6.16б)$$

$$\beta^{+}(v) = -\frac{2f^2}{\omega} + \frac{\omega v_B}{2M(v+\rho_B^2)} + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \beta^{+} dv'}{\omega'(v'-v)}; \quad (6.16в)$$

$$\beta^{-}(v) = \frac{\alpha_{\rho 1} + \alpha_{\rho 2}}{4M(1+v+v_{\rho})} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \beta^{-} dv'}{v'-v}. \quad (6.16г)$$

Отметим, что все эти соотношения, кроме (6.16в), получены комбинированием д.с. вперед и д.с. назад. Формула (6.16в) получена только из д.с. вперед, так как в функции $\beta^{+}(\omega, -1)$ длинноволновые вклады от аннигиляционного канала связаны с высшими резонансами ($l \geq 2$) πN -рассеяния, лежащими выше 1 Гэв ($v_{f_0} + 1 = 20$).

Для того чтобы явным образом не вводить характеристики f_0 -мезона, мы и не использовали д.с. назад при получении этого уравнения. Явный учет f_0 -мезона привел бы к модификации второго члена в правой части (6.16в).

6.3. Пороговый анализ

Пороговые и асимптотические условия для p -волн

$$p^{+}(0) = p^{-}(0) = 0, \\ q\beta^{+} \rightarrow 0, \quad q^2\beta^{-} \rightarrow 0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty$$

дают выражения характеристик πN -рассеяния через параметры эффективного лагранжиана (1.2), описывающего подпороговую область реакций $\pi N \rightarrow N\bar{N}$:

$$R = \frac{\alpha_{\rho 1}}{M_{\rho}^2} = 0,025; \quad S = \frac{\alpha_{\sigma}}{M_{\sigma}^2}; \quad \kappa = 2\mu_N + 1 = \frac{\alpha_{\rho 2}}{\alpha_{\rho 1}} + 1 = 4,8. \quad (6.17)$$

Здесь μ_N — аномальный магнитный момент нуклона.

Из асимптотического условия на уравнение (6.16г) вытекает, что не существует решения, в котором парциальные волны h_{13} и h_{31} велики, а волны h_{33} и h_{11} малы. Из порогового условия для уравнения (6.16б) следует, что не существует решения с большой h_{11} и малой волной h_{33} . Таким образом, система пороговых и асимптотических условий накладывает довольно жесткие ограничения на возможные типы решений. Однако эта система оказывается совместной с 33-доминантным решением, а также с решением, в котором помимо 33-резонанса существует резонанс в волне h_{11} .

Рассмотрим 33-доминантное решение, в котором пренебрежем мнимыми частями всех парциальных волн, за исключением h_{33} , для которой воспользуемся δ -приближением (1.13). Комбинируя для этого решения пороговые и асимптотические условия для p -волн, получаем

$$\Gamma_{33} = \frac{3}{2} f^2 - \frac{3}{2} R; \quad \omega_{33} = \frac{RM_\rho^2 \kappa}{4M(f^2 - R)}; \quad (6.18)$$

$$v = -4S + 2R\kappa \frac{M_\rho^2}{M}, \quad v_B = 4Mf^2 - \frac{8}{3} M\Gamma_{33}. \quad (6.19)$$

Используя численные значения (6.17), получаем для параметров 33-резонанса следующие числовые значения:

$$\Gamma_{33} = 0,09 \simeq f^2, \quad \omega_{33} = 1,85. \quad (6.20)$$

Для v_B имеем $v_B \simeq 0,67$.

Из уравнений (6.15) получаем следующие выражения для длин рассеяния s -волн:

$$a^+ = 4S - R\kappa \frac{M_\rho^2}{M}; \quad a^- = 2R = \frac{g_{1V} g_\rho}{4\pi m_\rho^2} = \frac{g_\rho^2}{8\pi m_\rho^2}. \quad (6.21)$$

Очевидно, a^- в два раза меньше, чем значение, полученное из выражения (6.4а). Это серьезная трудность всего рассмотренного приближения, основанного на статическом пределе, которое учитывает только силы, обусловленные ρ -, N - и Δ_{33} -обменами и высокоэнергетическим отталкиванием.

Противоречие между формулами (6.21) и (6.4а) указывает на то, что мы, по-видимому, не имеем права пренебрегать пороговыми вкладами интегралов по высокоэнергетической и промежуточной области. Если же эти вклады малы, что теоретически можно выяснить, исследуя значительно более сложную систему уравнений, включающую высшие парциальные волны и неупругие эффекты, то существует еще одна альтернатива. Возможно, что при вычислении дисперсионных интегралов от аннигиляционного канала эффективная масса ρ -мезона должна быть выбрана меньше физической. К аналогичному выводу приходят авторы работы [26], рассматривая амплитуду в релятивистском приближении. Мы рассмотрим два «предельных» случая.

1. Пусть величина a^- определяется только эффективными уменьшениями массы ρ -мезона. В уравнениях (6.15) и (6.16) проведем замену $m_\rho^2 \rightarrow \tilde{m}^2 < m_\rho^2$. Тогда, используя связь $\alpha_{\rho 1}$ с f^2 из формулы (6.10), где m_ρ^2 — физическая масса ρ -мезона, получаем вместо (6.18)

$$\Gamma_{33} = \frac{3}{2} f^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{g_V}{g_A} \cdot \frac{m_\rho}{\tilde{m}} \right)^2 \right];$$

$$\omega_{33} = \frac{m_\rho^2}{8M} \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 \frac{\kappa}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{g_V}{g_A} \cdot \frac{m_\rho}{\tilde{m}} \right)^2}.$$

Вместо второй формулы (6.21) имеем

$$a^- = \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 \left(\frac{m_\rho}{\tilde{m}} \right)^2 f^2.$$

Эти формулы при удовлетворительных значениях a^- и Γ_{33} дают чрезмерно большую массу ω -резонанса. Например, положив $\left(\frac{m_\rho}{\tilde{m}} \right)^2 = 1,5$ и взяв значение $\left(\frac{g_V}{g_A} \right) = 1,23$, получим

$$a^- = f^2 = 0,08, \quad \Gamma_{33} = \frac{3}{4} f^2 \simeq 0,06, \quad \omega_{33} = \frac{m_\rho^2 \kappa}{6M} \simeq 3,6. \quad (6.22)$$

Для вычисления a^+ и v следует знать величину S . При этом нужно иметь в виду, что σ -мезон представляет собой довольно сложное образование, и даже если он соответствует резонансу, то этот резо-

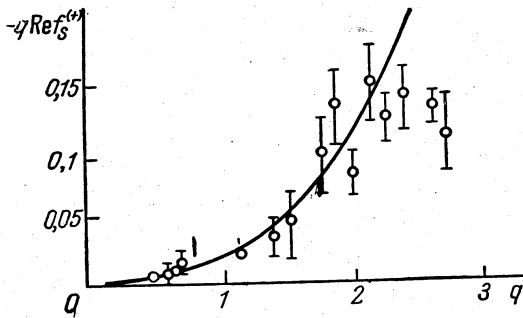


Рис. 8. Энергетическая зависимость $-q \operatorname{Re} f_s^{(+)}$ от q при $m_\sigma^2 = 50$.

нанс является широким (см. § 5.4), ввиду чего лагранжево описание в виде (1.2) весьма условно и соответствующие константы связи и «масса» m_σ представляют собой некоторые усредненные величины. Разумеется, усредненное значение массы m_σ и константы связи g_σ можно извлечь из характеристик лл-рассеяния. Однако для определения константы $g_{\sigma NN}$ у нас нет каких-либо простых теоретических соображений.

Поэтому мы определим постоянную S с помощью первого уравнения (6.21) из условия $a^+ = 0$ (6.3). Это дает с учетом (6.19) $S = 0,125$, $v = 0,50$.

Из уравнений (6.15) получаем теперь формулы, описывающие энергетический ход s -волн, при этом мы считаем фазы малыми, так что интегралами от мнимых частей можно пренебречь:

$$s^+ = -\frac{1}{m_\sigma^2} \cdot \frac{q^2}{1 + 4q^2/m_\sigma^2}; \quad s^- = \frac{a^-}{1 + 4q^2/m_\sigma^2}. \quad (6.23)$$

Ход s^+ -волны зависит от параметра m_σ^2 . Полагая $m_\sigma^2 = 50$ (что соответствует энергии 1 Гэв) и $p^2 = 50$, получаем кривую, изображенную на рис. 8. Соответствующая кривая для случая $m_\sigma^2 = 30$ пройдет выше этой примерно в полтора раза, т. е. по верхнему краю экспериментальных ошибок. Таким образом, при $m_\sigma^2 \approx 30 \div 50$ первая формула (6.23) хорошо описывает экспериментальные данные вплоть до $q \sim 2,5$.

Заметим, что такие довольно высокие значения усредненной массы примерно соответствуют экспериментальному ходу δ_0^0 -фазы $\pi\pi$ -рассеяния, приведенному на рис. 6.

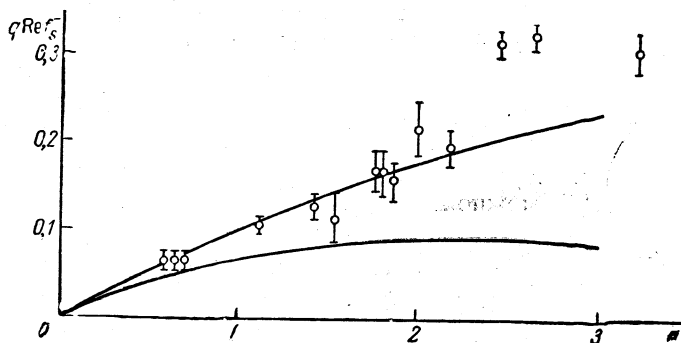


Рис. 9. Энергетическая зависимость $q \operatorname{Re} f_s^{(-)}$ от q . Нижняя кривая соответствует $(m_\rho/m)^2 = 1,5$.

Формула (6.23) для s^- приводит к кривой, лежащей ниже экспериментальных точек (рис. 9). Это соответствует тому, что эффективная масса ρ -мезона существенно занижена.

2. Предположим, что поправка от аннигиляционного канала достаточно хорошо описывается полюсным ρ -мезонным членом, где ρ -мезон имеет физическую массу. Тогда вклады от интегралов по промежуточным и высокоэнергетическим областям существенны при расчете a^- .

Уравнения (6.156) и (6.166) следует заменить

$$\begin{aligned}
 s^- &= \frac{\omega \alpha_{\rho 1}}{2(1 + v_\rho + v)} + \frac{\omega c}{2\left(1 + \frac{v}{r^2}\right)} + \frac{\omega}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} s^-}{\omega'(v' - v)} dv'; \\
 p^- &= \frac{2f^2}{\omega} - \frac{\omega \alpha_{\rho 1}}{2(1 + v_\rho + v)} + \frac{\omega c}{2(1 + v/r^2)} + \frac{\omega}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} p^-}{\omega'(v' - v)} dv'.
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

Здесь c и r^2 — феноменологические параметры, описывающие интенсивность и радиус сил, обусловленные неучтенными вкладами. Нетрудно показать, что и эта система уравнений имеет решение только с большой 33 -волной. Используя соотношения, полученные

в приближении безмассовых пионов (6.4а) и (6.10), получаем

$$c = R = \frac{1}{2} \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 f^2.$$

Вместо (4.18) и (4.19) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{33} &= \frac{3}{2} f^2 = 0,12; \\ \omega_{33} &= \frac{m_\rho^2}{8M} \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 \kappa = 1,8; \\ a^- &= 2 \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 f^2 = \frac{4}{3} f^2 = 0,10. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

В этом случае при удовлетворительных значениях длины рассеяния a^- и положения Δ_{33} -резонанса получаем несколько большую ширину Δ_{33} -резонанса. Параметр высокоэнергетического отталкивания, так же как в (6.19), можно найти, нормируя $a^+ = 0$ (6.3)

$$v = \frac{f^2 m_\rho^2}{2M} \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 \kappa = 0,57, \quad S = 0,14. \quad (6.26)$$

Поведение s -волн определяется формулами:

$$s^+ = -\frac{q^2}{m_\sigma^2 (1 + 4q^2/m_\sigma^2)}; \quad s^- = \frac{4}{3} f^2 \frac{m_\rho^2 + 2q^2}{m_\rho^2 + 4q^2}. \quad (6.27)$$

Кривая, соответствующая второму из соотношений (6.27), приведена на рис. 9. В области $q < 1,5$ она проходит несколько выше экспериментальных точек.

В итоге можно прийти к выводу, что в действительности существенно как эффективное уменьшение ρ -мезонной массы, так и учет эффектов из более высокоэнергетических областей.

6.4. Система уравнений для ρ -волн

Перейдем к ρ -волнам. Комбинируя уравнения (6.16) и (6.24), получаем для ρ -волн следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} h_i(\omega) &= \frac{3f^2}{\omega^2} (\Lambda_1)_i + \Phi_i(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\{ \frac{\text{Im } h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + A_{ik} \frac{\text{Im } A_k(\omega')}{\omega' + \omega} \right\} d\omega'. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Здесь Φ_i — p -волновые потенциалы, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} 3\Phi_i(\omega) = & \frac{2v}{M_p^2 + 4q^2} + \frac{8S}{m_\sigma^2 + 4q^2} + \frac{Rm_p^2 \kappa}{M(m_p^2 + 4q^2)} (\Lambda_2)_i + \\ & + \frac{8\omega R(\Lambda_3)_i}{m_p^2 + 4q^2} + \frac{2\omega c}{r^2 + q^2} (\Lambda_3)_i - \frac{2\omega v_B}{M_p^2 + 4q^2} (\Lambda_1 + \Lambda_3)_i; \quad (6.29) \\ M_p^2 = & 4p^2, \quad h_i = e^{i\delta_i} \sin \delta_i / q^3, \\ i = & \{(1.1), (1.3), (3.1), (3.3)\} \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} A_{ik} = & \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \\ \Lambda_2 = & \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.30) \end{aligned}$$

Система (6.28) отличается от ЧГЛН-системы наличием потенциалов Φ_i . Эти потенциалы, равно как и соответствующие выражения в уравнениях (6.15) для s -волн, наряду с членами, описывающими обмен σ - и ρ -мезонами, содержат члены коротковолнового отталкивания. Отметим, что низкоэнергетические свойства уравнений практически не зависят от больших параметров M_p^2 и r^2 . В уравнениях для s -волн «работают» только постоянные члены v и c , нормирующие комбинации s^+ и s^- на правильную длину рассеяния $a^+ = 0$ и $a^- \simeq f^2$. В уравнениях (6.28) для p -волн соответствующие члены в области низких энергий, пропорциональные p^{-2} и r^{-2} , пренебрежимо малы. В области больших энергий они дают вклад в асимптотику h_{ik} , пропорциональный v и c . Соответственно эти члены играют важную роль при обеспечении квантовомеханических пороговых условий для p -волн p_{ik} . Как мы уже видели, только после введения этих членов система уравнений (6.28) имеет решение с разумной 33 -волной.

При низких энергиях потенциалы Φ_i можно аппроксимировать выражением

$$3\Phi_i(\omega) = f^2 \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 \left[\frac{m_p^2 \kappa}{M(m_\sigma^2 + 4q^2)} + \frac{(\Lambda_2)_i}{2M} \cdot \frac{m_p^2 \kappa}{(m_p^2 + 4q^2)} + \frac{4\omega(\Lambda_3)_i}{m_p^2 + 4q^2} \right]. \quad (6.31)$$

В этом приближении расчет p -волновых длин рассеяния дает:

$$\begin{aligned} a_{33} = & 0,271; \quad a_{13} = -0,033; \\ a_{11} = & -0,099; \quad a_{31} = 0,039. \end{aligned}$$

Таким образом, использование соотношений, следующих из приближения безмассовых пионов, уже в статическом пределе дает удовлетворительную качественную картину πN -рассеяния. При этом необходимо было ввести коротковолновое отталкивание, оценка интенсивности которого как из высокоэнергетических интегралов, так и их низкоэнергетических теорем дала одну и ту же величину. Так же как и в $\pi\pi$ -рассеянии, оказалось, что решение уравнений для низкоэнергетического πN -рассеяния дает сильное и даже резонансное в 33 -волне p -волновое взаимодействие в разумной области. В конечном счете, воспользовавшись безмассовым пионным приближением и унитарными уравнениями для низкоэнергетических процессов $\pi\pi$ - и πN -рассеяний, мы получили массы p -волновых резонансов, их времена жизни и основные константы связи, задав только массы пиона и нуклона, их времена жизни и константу Ферми.

Конечно, рассмотренную выше теорию можно расценивать только как первое приближение. Точность в получении основных характеристик составляет около 25%. Для повышения точности необходимо более корректно учесть релятивистские поправки. В системе низкоэнергетических уравнений следует ввести уравнения для более высоких парциальных волн, учитывающие эффекты неупругости, а также более детально учесть высокоэнергетические вклады. Мы убеждены, что в реалистической теории, учитывающей все эти поправки, нет необходимости вводить дополнительные параметры.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

7.1. Универсальность отталкивания

Как мы только что убедились, введение члена коротковолнового отталкивания в низкоэнергетические уравнения для $\pi\pi$ - и πN -рассеяний существенно необходимо для получения количественного согласия решений дисперсионных уравнений со следствиями хиральной симметрии в области низких энергий.

Как показал Вайнберг [27], убывание комбинации полных сечений, соответствующих $I = 1$ в t -канале для любых процессов рассеяния с участием пионов, обеспечивает выполнение токовых коммутационных соотношений хиральной группы. В § 5.2 и 6.2 было показано, что учет коротковолновых «вакуумных» вкладов, соответствующих неубывающим комбинациям полных сечений ($I = 0$ в t -канале), существенно необходим для согласования с требованием хиральной симметрии в области низких энергий. Как было отмечено в § 5.2, уменьшение вакуумного отталкивания эквивалентно усилению нарушения хиральной симметрии и предел $v \rightarrow 0$ соответствует максимальному разрушению симметрии [$N \rightarrow \infty$ в (4.21)].

Интенсивности и радиусы действия потенциалов отталкивания представляют собой параметры, с помощью которых феноменологически описывается влияние высокоэнергетических вкладов на область низких энергий. Поэтому существование каких-либо простых зависимостей между амплитудами рассеяния различных про-

цессов в области высоких энергий должно приводить к соответствующим связям между параметрами потенциалов отталкивания.

Поясним возникновение таких связей на простом примере. Предположим, что в области высоких энергий некоторая линейная комбинация амплитуд рассеяния различных процессов

$$T = \sum_i c_i T_i \quad (7.1)$$

достаточно быстро убывает и для нее имеют место д.с. без вычитания. Разумеется, сразу же возникает вопрос об аргументах различных слагаемых в правой части (7.1), т. е. об определении энергетической шкалы, единой для различных физических процессов.

Естественно связать эту шкалу с инвариантным квадратом полной энергии и выбрать ее таким образом, чтобы она явно отражала свойства кроссинг-симметрии для рассеяния вперед. Этим условиям удовлетворяет переменная

$$x = s - m_i^2 - M_i^2, \quad (7.2)$$

где m_i — масса налетающей частицы и M_i — масса мишени для i -й реакции.

Будем считать, что каждая из T_i — кроссинг-четная полусумма амплитуд рассеяния частицы на мишени и античастицы на мишени [т. е. амплитуда типа (1.21)], вследствие чего ее мнимая часть по оптической теореме связана с неубывающим сечением. Д. с. для каждой из T_i по отдельности обязательно требует вычитания, а низкоэнергетическая модель для соответствующих парциальных волн — введения отталкивания. Из д. с. для функции (7.1), записанной без вычитания по переменной x , получаем

$$T(0) = \frac{2}{\pi} \int \sum_i c_i \operatorname{Im} T_i(x + m_i^2 + M_i^2) \frac{dx}{x}. \quad (7.3)$$

Интеграл в правой части (7.3) включает полюсные члены и возможные подпороговые нефизические области. Допустим, при $x > x_q$ в достаточно хорошем приближении $\operatorname{Im} T$ обращается в нуль. Тогда (7.3) можно переписать в виде

$$\sum_i c_i v_i(x_q) = 0, \quad (7.4)$$

где

$$v_i(x_q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_q} \operatorname{Im} T_i \frac{dx}{x} - T_i(0). \quad (7.5)$$

Если теперь отождествить x_q с границей области низких энергий $2m_\pi^2 \sqrt{\Lambda} = x_\Lambda$, то величины $v_i(x_q)$ будут представлять собой как раз интенсивности коротковолнового отталкивания [ср. с (1.30)]. Формула (7.4) дает линейные соотношения между интенсивностями отталкивания для различных процессов.

Комбинации вида (7.1), достаточно быстро убывающие на бесконечности, могут быть получены на основании различных моделей высокоэнергетического рассеяния. Наиболее известными в настоя-

щее время являются модель кварковой аддитивности [28], а также модель реджиевского асимптотического поведения. Обе эти модели для всех основных процессов адронного рассеяния приводят к примерно одинаковым комбинациям вида (7.1), в которых коэффициенты c_i — числа порядка единицы. Поэтому параметры $v_i(x_q)$ для различных процессов также оказываются числами одного порядка. В этом случае параметр x_q соответствует нижней границе асимптотической высокоэнергетической области, т. е. области, в которой соответствующие реджиевские или кварковые соотношения для T_i выполняются с достаточной точностью.

Разумеется, полученные таким путем значения x_q оказываются заметно больше значений x_Δ , соответствующих верхним границам низкоэнергетических областей. Однако, как мы фактически видим на рассмотренных примерах pp - и pN -рассеяния, простые соотношения между $v_i(x_q)$ практически остаются в силе и для интенсивностей коротковолнового отталкивания $v_i(x_\Delta)$. Можно показать, что подобное соответствие имеет место для NN -рассеяния и KN -рассеяния [29]. Таким образом, мы видим, что коротковолновое отталкивание является общим свойством всех низкоэнергетических процессов. Параметры отталкивания для различных процессов могут быть связаны между собой. В этом смысле практически можно говорить об универсальности отталкивания.

7.2. Общая физическая картина

Попытаемся теперь представить общую картину различных процессов низкоэнергетического рассеяния в терминах единой энергетической переменной, с помощью которой можно определить области низких и высоких энергий одновременно для всех реакций.

Наиболее простым кандидатом на роль такой универсальной переменной является введенная в (7.2) переменная x . Как следует из рис. 10, она также довольно удачный кандидат. На этом рисунке схематически изображены основные характеристики процессов pp -, pN -, KN - и NN -рассеяния в области низких и средних энергий, отнесенные к шкале x . Указаны положения ярко выраженных резонансов, имеющих в основном одноканальный двухчастичный распад, т. е. играющих важную роль в упругом двухчастичном рассеянии. Видно, что чисто упругие резонансы $[p, \Delta_{33}, \text{ а также } \Lambda(1405)]$ располагаются в области $x < 1 \text{ Гэв}^2$. Все эти резонансы являются p -волновыми. Поэтому, естественно, выделяется низкоэнергетическая область $x < 1 \text{ Гэв}^2$, в которой существенны p (и, может быть, s)-волны и в которой неупругими эффектами можно пренебречь.

В области $1 < x < 2 \text{ Гэв}^2$ появляются также d - и f -волновые резонансы. Становится существенной неупругость. Выше $x = 2 \text{ Гэв}^2$ полные сечения становятся гладкими функциями, появляется много парциальных волн, и рассеяния постепенно приобретают дифракционный характер. В NN -рассеянии, порог которого соответствует $x = 1,76 \text{ Гэв}^2$, как известно, не существует резонансов.

Таким образом, четко выделяется «упругая низкоэнергетическая область» $x < 1 \Gamma\text{э}^2$, в которой существуют только s - и p -волны. Именно в этой области справедливы низкоэнергетические положения, сформулированные в § 1. Рассеяние в этой области может быть ко-

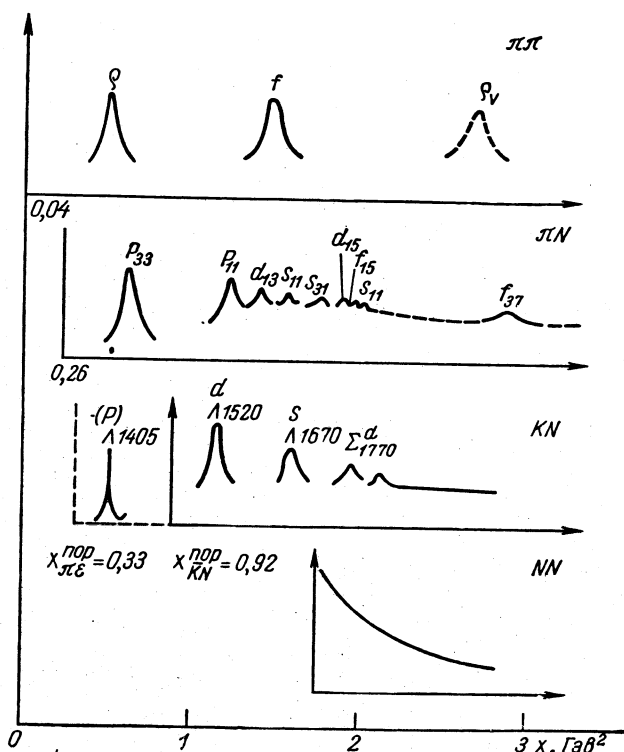


Рис. 10. Картина резонансов в шкале $x = s - m_1^2 - M_2^2$.

личественно описано системой уравнений для s - и p -волн, разумеется, включающей вклады в реальные части парциальных волн от области промежуточных и высоких энергий.

Область $1 < x < 2 \Gamma\text{э}^2$ может быть названа «неупругой низкоэнергетической областью». Здесь еще справедливо положение 2 из § 1 ($l_{\text{макс}} = 4$), однако становятся существенными неупругие эффекты. Система низкоэнергетических уравнений для этой области, описывающая s -, p -, d - и f -волны, должна учитывать не только высокоэнергетические вклады в реальные части парциальных волн, но и неупругие вклады в их мнимые части.

В области выше $x = 2 \Gamma\text{э}^2$ низкоэнергетические положения, по-видимому, не являются справедливыми даже приблизительно. Поэтому $x = 2 \Gamma\text{э}^2$ — верхняя граница дисперсионных низкоэнергетических схем рассмотренного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при высоких энергиях. М., «Наука», 1967.
- 1а. Shirkov D. V., Serebryakov V. V., Mescheryakov V. A. Dispersion theories of strong interaction at low energies. North-Holland, Amsterdam—London, 1969.
2. Sakurai J. J. Ann. of phys., **11**, 1 (1960).
3. Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu V. Phys. Rev., **106**, 1337 (1957).
4. Sakurai J. J. Phys. Rev. Lett., **17**, 1021 (1966).
5. Adler S., Dashen R. Current Algebras and Applications to Particle Physics, Benjamin, Inc., N. Y. (1968); Renner B. Current Algebras and their Applications. Pergamon Press, Oxford, 1968.
6. Gell-Mann M. Phys. Rev., **125**, 1067 (1962); Gell-Mann M. Physics, **1**, 63 (1964).
7. Gell-Mann M., Levy M. Nuovo cimento, **16**, 705 (1960).
8. Feynman R. P., Gell-Mann M., Zweig G. Phys. Rev. Lett., **13**, 678 (1964).
9. Lee T. D., Weinberg S., Zumino B. Phys. Rev. Lett., **18**, 1029 (1969).
10. Nambu Y. Phys. Rev. Lett., **4**, 380 (1960).
11. Weinberg S. Phys. Rev. Lett., **18**, 198 (1967); Wess J., Zumino B. Phys. Rev., **163**, 1727 (1967); Cronin J. Phys. Rev., **161**, 1483 (1967); Arnowitz R. Friedmann M. M., Math P. Phys. Rev. Lett., **19**, 1085 (1967).
12. Kramer G. Chiral symmetric meson-nucleon Lagrangians, Argonne preprint, ANL/HEP 6817 (1968).
13. Weinberg S. Phys. Rev., **166**, 1568 (1968).
14. Gasiorowicz S., Geffen D. A. Effective Lagrangians and Field Algebras with Chiral Symmetry, Argonne preprint, ANL/HEP 6809 (1968); Rev. Mod. Phys., **41**, No. 3, 531—573, July 1969.
15. Glashow S. L., Weinberg S. Phys. Rev. Lett., **20**, 224 (1968).
16. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys. Rev., **177**, 2239, 2247 (1969).
17. Bardeen W. A., Lee B. W. Nuclear Physics and Particles Physics (edit. B. Margolis, C. Lam) W. A. Benjamin, Inc., N. Y., 1968.
18. Goldberger M. L., Treiman S. B. Phys. Rev., **110**, 1178 (1958).
19. Weinberg S. Phys. Rev. Lett., **17**, 336 (1966).
20. Barger V., Olsson M. Phys. Rev. Lett., **18**, 1428 (1966).
21. Logunov A. A., Solovjov L. D., Tavkhelidze A. N. Phys. Lett., **24B**, 181 (1967).
22. Kawarabayashi K., Suzuki M. Phys. Rev. Lett., **16**, 255 (1966).
23. Riazuddin, Fayazuddin. Phys. Rev., **147**, 1071 (1966).
24. Fujii Y. Phys. Lett., **24B**, 190 (1967).
25. Серебряков В. В., Ширков Д. В. «Ядерная физика», **6**, 170 (1967).
26. Engels J., Höhler G., Petersson B. « Δ and ρ Exchange in πN scattering». Karlsruhe preprint (1969).
27. Weinberg S. Algebraic Realization of Chiral Symmetry, Massachusetts preprint CTP-39 (1968).
28. Левин Е. М., Франкфурт Л. Л. «Письма ЖЭТФ», **45**, 244 (1965).
29. Лендбель В. И., Серебряков В. В. «Ядерная физика», **7**, 879 (1968); Краснопевцев Е. Ф., Черняк В. Л. «Ядерная физика», **7**, 1114 (1968).
30. Walker W. D. et al. Phys. Rev. Lett., **18**, 630 (1967).