НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Г. В. Ефимов

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена нелокальная теория квантованного однокомпонентного скалярного поля; формулируются аксиомы нелокальной квантовой теории. Рассмотрен класс релятивистски инвариантных обобщенных функций, которые могут играть роль форм-факторов при построении ряда теории возмущений для S-матрицы. Показано, что для лагранжианов взаимодействия типа $L_I(x) = g\varphi^n(x)$ $(n \geqslant 3)$ ряд теории возмущений для S-матрицы конечен и удовлетворяет требованиям унитарности и макропричинности в каждом порядке теории возмущений.

ABSTRACT

The nonlocal quantum field theory of one component scalar field is considered. The axioms of the nonlocal quantum field theory are formulated. A class of the relativistically invariant distributions is introduced which can play the role of cutoff functions in the perturbation series of the S-matrix. It is shown that for the interaction Lagrangians of the type $L_I(x)=g\varphi^n(x)(n \geqslant 3)$ the perturbation series for the S-matrix is finite and satisfies the requirements of unitarity and macrocausality in each order of perturbation theory.

Введение

В нелокальной квантовой теории поля существуют два способа введения нелокальности в теорию. Первый [1,2] основан на предположении, что на малых расстояниях величины, характеризующие поле, уже не измеримы. Это приводит к тому, что потенциалы поля не коммутируют с координатами, т. е.

$$[x_\mu,\ A(x)]_- \neq 0,$$

где $A(x)$ — потенциал, характеризующий некоторое поле. Сюда же относятся теории, где предполагается, что отсутствует точный смысл понятия об определенной точке пространства—времени, т. е. компоненты оператора координаты не коммутируют:

$$[x_\mu,\ x_\nu]_- \neq 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

Это приводит к теории квантового пространства — времени [3—6]. До настоящего времени такие теории еще имеют неясные перспективы.

Второй подход состоит в том, что свободное поле считается локальным, а нелокальность вводится во взаимодействие (впервые этот подход был предложен в работах [7—10], о дальнейшем развитии этого направления см. работы [11, 12]). Физической идеей, лежащей в основе этого направления, является предположение о том, что в малых пространственно-временных областях возможны другие виды причинной связи в отличие от тех, которые характерны для больших масштабов пространства и времени.

Настоящая работа относится ко второму направлению в нелокальной теории поля, поэтому в дальнейшем под термином «нелокальная квантовая теория поля» мы будем понимать именно это направление.

Следует отметить, что изначальная идея введения нелокальности состояла в попытке устранить трудности с бесконечной массой электрона в квантовой электродинамике. Затем по мере исследования вариантов нелокальных теорий оказалось, что трудностей в нелокальной теории даже больше, чем в локальной: проблемы релятивистской инвариантности, унитарности, макропричинности, градиентной инвариантности не удалось решить одновременно. Особенно трудной проблемой оказалось объединение требований релятивистской инвариантности, унитарности и макропричинности. Предложенные схемы (см., например, работу [11]) не могут еще рассматриваться как хорошая основа будущей теории.

Настоящая работа также еще не решает всех проблем, стоящих перед реальной квантовой теорией поля. Нами будет предложен вариант нелокальной теории скалярного нейтрального поля, удовлетворяющей требованиям релятивистской инвариантности, унитарности и причинности.

Проблема введения градиентной инвариантности в теорию, т. е. рассмотрение нелокальных заряженных полей, нами здесь рассмотрена не будет. Это дело дальнейших исследований.

Каковы же основные проблемы, стоящие перед нелокальной квантовой теорией поля?

При формулировке теории с нелокальным взаимодействием квантованных полей возникает два наиболее существенных вопроса: во-первых, как сформулировать условие макропричинности, накладываемое на S-матрицу теории, и, во-вторых, какого типа форм-факторы можно использовать для реализации накладываемого условия макропричинности. Эти два вопроса не только тесно связаны, но в значительной степени решение второго вопроса определяет решение первого. Именно знание свойств определенных классов нелокальных функций определяет, какое требование нелокальности накладывается на S-матрицу теории.

Остановимся сначала на формулировке условия макропричинности. Хотя физически смысл этого условия ясен, необходимо отсутствие непричинного влияния на макроскопически больших расстояниях — точная количественная формулировка этого условия, т. е. указание тех требований к матричному элементу, выполнение которых гарантирует невозможность экспериментально зарегистрировать непричинное влияние на макроскопически больших расстояниях, до сих пор отсутствует. Поэтому обычно при исследовании проблемы причинности ограничиваются качественной стороной вопроса — выяснением возможности сделать непричинное влияние близкодействующим. Исследованию условия макроскопической причинности посвящено очень много работ (см., например, [11, 13—18]), однако полное решение этой проблемы еще далеко от завершения.

Здесь непосредственно возникает второй вопрос, какого типа форм-факторы можно использовать при введении нелокальности в теорию? В простейшем варианте нелокальной связи предполагается, что взаимодействие, например, электронного поля, описываемого током $J_\mu(x)$, и электромагнитного поля, описываемого потенциалом $A_\mu(x)$, происходит не в одной точке пространства—времени, а «размазано» с помощью релятивистски-инвариантного форм-фактора $F(x-x')$, так что взаимодействие описывается функцией

$$W=\iint J_\mu(x)\,F(x-x')\,A_\mu(x')\,dx\,dx'.$$

Считается, что форм-фактор $F(x-x')$ из требования релятивистской инвариантности должен быть функцией интервала

$$s^2=\left(x_0-x_0'\right)^2-(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2$$

и достаточно быстро убывать при $|s^2|\to\infty$, например $F(s^2)=$

$= \exp\left\{-\left(\frac{s^2}{l^2}\right)^2\right\}$. При введении такого типа форм-факторов возникает два вида трудностей. Во-первых, если $F(s^2)$ допускает нарушение причинности в инвариантной области $|s^2| < l^2$, где l — некоторая малая длина, то в направлениях, близких к световому конусу, пространственная и временная протяженности непричинной области могут оказаться сколь угодно большими. Во-вторых, возникают трудности при доказательстве унитарности S-матрицы нелокальной теории, поскольку форм-фактор $F(s^2)$ должен быть вещественным при вещественных s^2, а это исключает для него фейнмановские правила обхода сингулярностей для фурье-образа $F(s^2)$, что приводит к невозможности перехода к евклидовой метрике в амплитудах физических процессов, появлению угловых расходимостей [19] и, следовательно, к нарушению унитарности S-матрицы.

Были предприняты попытки избавиться от этих трудностей. В первом случае вводят в нелокальную теорию дополнительный временитодобный вектор P_μ, с помощью которого удается «локализовать» нарушение причинности [20—23]. Однако совершенно неясно, какой физический смысл можно придать этому вектору. Во втором случае сохранить унитарность удается либо отказавшись от аналитичности амплитуд физических процессов при достаточно больших энергиях в импульсном пространстве [24], либо вводя индефинитную метрику. Нам кажется, что такой выход из трудностей нелокальной теории не совсем удовлетворителен.

Как же реально строят нелокальную теорию, исходя из разумной физической идеи о возможном нарушении причинности в малом? Грубо говоря, берется ряд теорий возмущений для S-матрицы, соответствующий локальному взаимодействию, и делаются попытки подставить в матричные элементы такие форм-факторы, которые устранили бы ультрафиолетовые расходимости, сохранили унитарность S-матрицы и имели бы такой вид, который позволил бы дать форм-факторам подходящую физическую интерпретацию. При этом полностью отсутствует какая-либо попытка дать определение нелокальной природе теории с чисто математической точки зрения. При таком подходе возникает масса различных трудностей, о которых говорилось выше, а следствием всего этого являются утверждения о беспочвенности и невозможности построения нелокальной теории поля (см., например, [15]) и общее скептическое отношение к ней.

Отметим главное различие между современными локальной и нелокальной теориями. В локальной теории — строгое математическое определение локальности и выбор связанного с этим определением пространства основных функций. В нелокальной теории — поиски вслепую форм-факторов, манипуляции с разложением S-матрицы по теории возмущений, попытки дать какую-либо разумную физическую интерпретацию отдельным матричным элементам. Различие, как видно, огромное.

Настоящая работа представляет собой попытку восполнить именно этот пробел при формулировке нелокальной квантовой теории поля. Наше решение проблем нелокальной квантовой теории поля состоит в следующем. Оказывается [25], что между локальными форм-факторами умеренного роста

$$F(x-x')=\sum_{n=0}^{N} a_n \Box^n \delta^{(4)}(x-x') \tag{1}$$

и нелокальными вида

$$F(x-x')=F\left((x-x')^2\right), \tag{2}$$

где $F(s^2)$ — некоторая функция от интервала s^2, существует большой промежуточный класс обобщенных функций, которые обладают свойствами, приемлемыми с точки зрения требований, предъявляемых к нелокальной теории [25].

Открытие этого промежуточного класса позволило проследить постепенный переход от строгой локальной квантовой теории поля к существующему построению нелокальной теории с форм-факторами вида (2). Оказалось, что обобщенные функции вида

$$F(x-x')=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Box^n \delta^{(4)}(x-x')$$

[здесь, в отличие от (1), коэффициенты a_n отличны от нуля при любых n], являясь релятивистски-инвариантными функциями, при определенных требованиях, накладываемых на a_n, сосредоточены в ограниченной области в x-пространстве. При этом в импульсном пространстве фурье-образ

$$\widetilde{F}(p^2)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (p^2)^n,$$

являясь целой функцией некоторого порядка роста, вполне может играть роль функции обрезания.

Поскольку целые функции $\widetilde{F}(p^2)$ не имеют особенностей при конечных комплексных p^2, следует ожидать, что S-матрица теории будет унитарна и не будет содержать дополнительных особенностей по сравнению с локальным случаем.

I. АКСИОМЫ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем следовать пути аксиоматического построения теории, предложенного Н. Н. Боголюбовым, Д. В. Ширковым, Б. В. Медведевым и М. К. Поливановым [26, 27]. Рассматриваемый путь построения теории исходит из предложенной Гайзенбергом [28] программы, в которой рассматриваются только матричные элементы S-матрицы, отвечающие переходам между асимптотическими устойчивыми состояниями. Совокупность таких матричных элементов можно представить в форме функционального разложения по нормальным произведениям асимптотических полей

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \ldots \int dx_n \, F_n(x_1, \ldots, x_n) : \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n), \qquad (1.1)$$

где $\varphi(x)$-поле удовлетворяет уравнению

$$(\square - m^2)\,\varphi(x) = 0. \qquad (1.2)$$

Сформулируем основные физические положения, на которых основан рассматриваемый вариант теории. При этом мы не ставим себе целью сформулировать непротиворечивую, полную и независимую систему аксиом, как это делается при изложении вайтмановского подхода, а только перечислим те физические предположения, которые будут нужны, чтобы строить теорию. Эти положения разделим на две группы: общие свойства, относящиеся к матрице рассеяния на поверхности энергии, и специальные локальные свойства, относящиеся к расширению матрицы рассеяния за поверхность энергии.

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА S-МАТРИЦЫ

Рассматриваемые состояния. Асимптотические состояния системы содержат бесконечно удаленные частицы и их связанные комплексы. Взаимодействие между такими частицами и комплексами равно нулю, и потому основные динамические характеристики системы (типа энергии, импульса, момента и т. п.) аддитивны. Такие состояния описываются амплитудами $|\ldots\rangle$, являющимися элементами гильбертова пространства.

Релятивистская ковариантность. Имеется группа G преобразований L, которая включает в качестве подгруппы группу Лоренца и может включать также другие преобразования (например, изотопические, градиентные и т. д.). Под действием L из G амплитуды состояний преобразуются с помощью некоторого ее унитарного представления U_L. Если в состоянии $|p\rangle$ вектор энергии-импульса p имеет определенное значение и L_a трансляция $x \rightarrow x + a$, то

$$U_{L_a} | p \rangle = e^{-ipa} | p \rangle. \qquad (2.1)$$

Существование вакуума. Существует единственное состояние, для которого

$$U_L | 0 \rangle = | 0 \rangle \qquad (2.2)$$

для всех U_L. Это состояние вакуума.

Полнота и спектральность. Существует система собственных амплитуд состояний 4-импульса $| n, \mathbf{k}_n \rangle$, отвечающих неотрицательным значениям энергии, которая вместе с амплитудой $| 0 \rangle$ яв ляется полной, так что

$$\langle\alpha\,|\,AB\,|\,\beta\rangle=$$
$$=\langle\alpha\,|\,A\,|\,0\rangle\langle 0\,|\,B\,|\,\beta\rangle+\sum_n\int d\mathbf{k}_n\,\langle\alpha\,|\,A\,|\,n,\ \mathbf{k}_n\rangle\langle\mathbf{k}_n,\ n\,|\,B\,|\,\beta\rangle. \quad (2.3)$$

Здесь n — совокупность всех остальных дискретных и непрерывных квантовых чисел, которая вместе с $\mathbf{k}_n$ полностью определяет состояние. Если асимптотические состояния исчерпываются состояниями бесспиновых частиц одного сорта, то соотношение полноты запишется в форме

$$\langle\alpha\,|\,AB\,|\,\beta\rangle=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int d\mathbf{k}_1\ldots\int d\mathbf{k}_m\langle\alpha\,|\,A\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_m\rangle\langle\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_m\,|\,B\,|\,\beta\rangle. \quad (2.4)$$

Существование и унитарность S-матрицы. Амплитуда вероятности перехода от состояния $|\,\alpha\,\rangle$ к состоянию $|\,\beta\,\rangle$ дается матричным элементом $\langle\beta\,|\,S\,|\,\alpha\rangle$ оператора S (матрицы рассеяния), удовлетворяющего условию унитарности на массовой оболочке, т. е.

$$\langle\alpha\,|\,SS^+\,|\,\beta\rangle=\langle\alpha\,|\,\beta\rangle, \quad (2.5)$$

где $|\,\alpha\rangle$ и $|\,\beta\rangle$ — произвольные асимптотические состояния системы.

При преобразовании L из группы G матрица рассеяния S преобразуется с помощью унитарного представления U_L.

Стабильность. Если $|\,\alpha\,\rangle$ — амплитуда вакуума или состояния, содержащего одну реальную частицу или один стабильный комплекс, то условие стабильности таких состояний имеет вид

$$S\,|\,\alpha\rangle=|\,\alpha\rangle. \quad (2.6)$$

Асимптотические состояния, отвечающие наличию определенного числа n частиц определенных сортов α_i с определенными импульсами $\mathbf{p}_i$, можно получить, если ввести обычным образом операторы рождения $a^+_{\alpha_i\mathbf{p}_i}$ и уничтожения $a^+_{\alpha_i\mathbf{p}_i}$ частицы α_i-го сорта с импульсом $\mathbf{p}_i$ и подействовать ими на амплитуду состояния вакуума

$$|\,\alpha_1,\ \mathbf{p}_1;\ldots;\ \alpha_n,\ \mathbf{p}_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\,a^+_{\alpha_1\mathbf{p}_1}\ldots a^+_{\alpha_n\mathbf{p}_n}\,|\,0\rangle, \quad (2.7)$$

где $N=\nu_1!\ \ldots\ \nu_n!$, ν_i — число частиц одинакового сорта, присутствующих в состоянии, описываемом амплитудой (2.7). Поскольку пространственно-разделенные частицы не взаимодействуют, операторы $a^+_{\alpha_i\mathbf{p}_i}$ и $a_{\alpha_i\mathbf{p}_i}$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$\left[a_{\alpha\mathbf{p}},\ a^+_{\beta\mathbf{q}}\right]_-=\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad (2.8)$$
$$\left[a_{\alpha\mathbf{p}},\ a_{\beta\mathbf{q}}\right]_-=\left[a^+_{\alpha\mathbf{p}},\ a^+_{\beta\mathbf{q}}\right]_-=0.$$

Решения уравнения (1.2) можно записать в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}}\left(a_{\mathbf{k}}\,e^{-ikx}+a_{\mathbf{k}}^{+}\,e^{ikx}\right), \tag{2.9}$$

где $kx=\omega x_0-\mathbf{ux}$, $\omega=\sqrt{m^2-\mathbf{k}^2}$.

Из (2.8) и (2.9) следуют правила коммутации

$$\left[\varphi(x),\ a_{\mathbf{p}}^{+}\right]_-=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}};$$

$$p_0=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}. \tag{2.10}$$

$$\left[a_{\mathbf{p}},\ \varphi(x)\right]_-=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p_0}}.$$

§ 3. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА S-МАТРИЦЫ

Теперь расширим определяющее матрицу рассеяния разложение (1.1) на произвольные, но коммутирующие поля $\varphi(x)$. Такое расширение в высшей степени неоднозначно. Мы будем рассматривать только такие расширения, для которых сохраняется свойство релятивистской инвариантности S-матрицы, и потребуем, чтобы выполнялись следующие локальные свойства.

Интегрируемость. Расширенный оператор S обладает вариационными производными любого порядка по асимптотическим полям. Радиационные операторы

$$R^{(n)}(x_1,\ldots,\ x_n)=\frac{\delta^n S}{\delta\varphi(x_1)\ldots\delta\varphi(x_n)}S^{-1} \tag{3.1}$$

и их произведения являются интегрируемыми, т. е. все матричные элементы

$$\langle\alpha\,|\,R^{(m)}(x_1,\ldots,\ x_m)\,R^{(n)}(y_1,\ldots,\ y_n)\,|\,\beta\rangle \tag{3.1a}$$

суть обобщенные функции, интегрируемые на некотором подходящем пространстве основных функций.

Условие макропричинности. Разумная нелокальная теория должна быть построена таким образом, чтобы нелокальное взаимодействие квантованных полей не приводило к нарушению причинности на макроскопически больших расстояниях. Как говорилось во введении, мы будем рассматривать только такие теории, когда непричинное поведение S-матрицы обусловливается нелокальной связью между взаимодействующими полями. В этом случае элементарная длина является характеристикой области, где происходит нелокальное взаимодействие локальных полей.

Перейдем к математической формулировке наших физических условий. Будем следовать идее Н. Н. Боголюбова [26]. Введем операцию «включения» и «выключения» взаимодействия. Пусть функция $g(x)$ со значениями в интервале (0,1) характеризует интенсивность включения взаимодействия. Пусть теперь $g_1(x)$ отлична от нуля в области $G_1 \subset R^4$, а $g_2(x)$ — в области $G_2 \subset R^4$. Тогда S-матрица теории удовлетворяет условию микропричинности, если

$$S(g_1+g_2) = S(g_2) S(g_1) \text{ при } G_2 \gtrsim G_1. \qquad (3.2)$$

Знак $G_2 \sim G_1$ означает, что все точки области G_2 пространственно подобны всем точкам области G_1. Знак $G_2 > G_1$ означает, что все точки области $G_2(G_1)$ лежат в будущем (в прошлом) относительно некоторого момента времени t.

Будем считать, что S-матрица удовлетворяет условию макропричинности, если

$$S(g_1+g_2) = S(g_2) S(g_1) + M(g_2, g_1) \text{ при } G_2 \gtrsim G_1, \qquad (3.3)$$

где оператор $M(g_2, g_1)$ таков, что любые матричные элементы $\langle \alpha \mid M(g_1, g_2) \mid \beta \rangle$ убывают достаточно быстро при $\rho(G_1, G_2) \to \infty$, где

$$\rho(G_1, G_2) = \min_{x \in G_1,\, y \in G_2} \sqrt{(x_0-y_0)^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}.$$

Поскольку причинные сигналы затухают при x, $t \to \infty$, как $\frac{1}{|\mathbf{x}|^{3/2}}$ (свойство запаздывающей функции $\Delta_{ret}(x)$), в физике принято считать, что функция убывает достаточно быстро, если она убывает быстрее любой обратной степени полинома, т. е.

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^N |f(x)| = 0 \qquad (3.4)$$

для любых $N > 0$.

Кроме того, идея введения нелокальности говорит о том, что мы не можем на достаточно малых расстояниях разделить два каких-либо физических события. Поэтому при проверке условия макропричинности (3.3) можно использовать в качестве функций включения взаимодействия не функции с ограниченным носителем в x-пространстве, а функции, которые порядка единицы в некоторой области $G \subset R^4$, а вне этой области достаточно быстро убывают.

Окончательно сформулируем условие макропричинности. Если функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ порядка единицы в областях G_1 и G_2 соответственно и быстро убывают вне этих областей, и, кроме того, $G_1 \lesssim G_2$, тогда*

$$\lim_{\rho(G_1, G_2) \to \infty} [\rho(G_1, G_2)]^N \, |\langle \alpha | \{S[g_2+g_1] - S[g_2] S[g_1]\} | \beta \rangle| = 0 \qquad (3.5)$$

при любых $N > 0$ и для любых состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Матричные элементы матрицы рассеяния можно преобразовать в вакуумные средние радиационных операторов с помощью формальных соотношений коммутации (2.10). Отсюда следует, что можно написать для коммутаторов S-матрицы с операторами рождения

* Отметим, что, как следует из вывода условия причинности в работе [26], если $SS^+ \neq 1$ вне массовой оболочки, то в условии причинности появляется S^{-1}, а не S^+.

и уничтожения формулы

$$[S,\ a_{\mathbf{p}}^{+}]_{-}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4x\,\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}},\tag{3.6}$$

$$[a_{\mathbf{p}},\ S]_{-}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4x\,\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2p_0}}.$$

§ 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем проблему, разрешением которой мы будем в дальнейшем заниматься. Будем строить матрицу рассеяния по заданному лагранжиану взаимодействия $L_I(x)$ в виде формального разложения по степеням константы взаимодействия g:

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ig)^n}{n!}\cdot\int dx_1\ldots\int dx_n\,S_n(x_1,\ldots,\ x_n).\tag{4.1}$$

Сходимость этого формального ряда здесь не рассматривается. Существуют довольно веские основания, что этот ряд является расходящимся [29, 30]. Однако будем считать, что формальное разложение (4.1) является источником разумных асимптотических приближений, если константа связи g достаточно мала.

Чтобы связать формальное разложение для S-матрицы (4.1) с лагранжианом взаимодействия $L_I(x)$, воспользуемся принципом соответствия: при бесконечно малом g матрица $S(g)$ должна иметь вид

$$S=1+ig\int L_I(x)\,dx,\tag{4.2}$$

откуда следует, что в разложении (4.1)

$$S_1(x)=L_I(x).\tag{4.3}$$

Согласно процедуре Н. Н. Боголюбова [26], зная $S_1(x)$, можно построить остальные $S_n(x_1,\ ...,\ x_n)$, требуя выполнения налагаемых на S-матрицу условий релятивистской ковариантности, унитарности и причинности в каждом порядке теории возмущений. В случае локальной теории оказывается, что

$$S_n(x_1.\ldots,\ x_n)=\mathrm{T}\left(L_I(x_1)\ldots L_T(x_n)\right),\tag{4.4}$$

где под символом Т понимается процедура хронологического упорядочивания операторов. Однако это выражение не является самым общим выражением, удовлетворяющим указанным условиям. Для полного определения S-матрицы задание лагранжиана взаимодействия оказывается недостаточным, и необходимо задать еще бесконечную цепочку квазилокальных операторов [26]:

$$\Lambda_2(x_1,\ x_2);\ \Lambda_3(x_1x_2x_2);\ \ldots;\ \Lambda_n(x_1,\ldots,\ x_n);\ \ldots\tag{4.5}$$

поскольку выражение (4.4) не определено при совпадающих аргументах.

В случае нелокальной теории нельзя понимать символ T как процедуру строгого упорядочивания операторов поля по времени. Наша задача состоит в том, чтобы придать смысл выражению (4.4). Сохраним символ T, но под ним будем понимать некоторую операцию, согласно которой будем строить $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ по заданному лагранжиану $L_I(x)$. По существу, эта вводимая здесь операция является дополнительным постулатом теории, которая гарантирует единственность построения S-матрицы по заданному лагранжиану взаимодействия.

Естественно, будем требовать, чтобы S-матрица (4.1) в каждом порядке теории возмущений удовлетворяла всем требованиям, перечисленным в § 2 и 3.

Сделаем одно существенное замечание. Построенная нами S-матрица будет удовлетворять сформулированному требованию макропричинности в каждом порядке теории возмущений. Однако в настоящее время принято связывать величину элементарной длины с поведением амплитуды при больших энергиях. Тогда оказывается, что при построении разложения S-матрицы по константе связи с увеличением порядка теории возмущений непричинная область расширяется, т. е. величина элементарной длины, характеризующая масштаб нелокальности, растет от порядка к порядку теории возмущений, достигая величины $l_n = (n-1)l$ в n-м порядке. Это прямое следствие унитарности S-матрицы. Действительно, пусть мы имеем S-матрицу по теории возмущений:

$$S = 1 + \mathrm{i}gS_1 + (\mathrm{i}g)^2 S_2 + (\mathrm{i}g)^3 S_3 + \ldots$$

и пусть S-матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений, т. е.

$$\begin{gathered} S_1^+ - S_1 = 0, \\ S_2^+ + S_2 - S_1^+ S_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-)^n S_n^+ + S_n + (-)^n S_{n-1}^+ S_1 - S_{n-1} S_1^+ + \ldots = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Обычно нелокальность вводится во втором порядке теории возмущений и связана с поведением амплитуд при больших энергиях. Приведем простой пример. Пусть при больших энергиях для какой-либо амплитуды имеем $S_2 \sim \mathrm{e}^{lE}$, тогда $S_n \sim \mathrm{e}^{(n-1)lE}$, т. е. $l_n = (n-1)l$. Тот же результат получается для более сложной зависимости амплитуд от энергии. Это означает, что непричинная область расширяется от одного порядка теории возмущений к другому. Однако, что происходит в пределе полного ряда, сказать в настоящее время ничего нельзя. Существуют довольно веские основания, что ряд теории возмущений расходится. Поэтому проблема определения полной S-матрицы теории связана с проблемой суммирования всего ряда теории возмущений. В принципе можно представить, что существует какой-либо способ суммирования, который приводит к конечной, унитарной, макропричинной S-матрице. Тогда расширение области нелокальности в теории возмущений физического смысла не имеет, так как в результате суммирования мы получим вполне определенную величину элементарной длины, связанную с поведением полной S-матрицы при асимптотически больших энергиях. Все эти рассуждения в настоящее время находятся в области догадок и добрых пожеланий, а в будущем составят основу требований, предъявляемых к методам суммирования ряда теории возмущений.

Тем не менее физически задачу можно поставить таким образом, чтобы степень нарушения причинности находилась в пределах обычных требований, предъявляемых к нелокальным теориям. Действительно, нам необходимо построить по лагранжиану системы квантованных полей S-матрицу в виде ряда теории возмущений по малой константе связи. Нас интересует только теория возмущений, о свойствах всего ряда в рамках современных методов ничего не известно. Поэтому можно потребовать, чтобы нарушение причинности, происходящее на макроскопических расстояниях и описываемое высшими порядками теории возмущений, было исчезающе мало.

Действительно, в обычной нелокальной теории требуется, чтобы непричинные сигналы затухали достаточно быстро со временем или расстоянием, например, как $\exp\{-\Lambda t\}$, где Λ — импульс обрезания. В случае, например, слабых взаимодействий, где обычно выбирается $\Lambda \sim 100$ *Гэв*, для времени порядка атомных размеров, т. е. для $t \sim 10^{-18}$ *сек* ~ 1 *эв*$^{-1}$, влияние непричинного сигнала крайне мало, именно $\sim \exp\{-10^{11}\}$. Посмотрим, что происходит в рассматриваемой схеме нелокальной теории с разложением S-матрицы по малой константе связи. Снова рассмотрим слабые взаимодействия. Малым параметром ряда теории возмущений в этом случае является величина $G\Lambda^2$, где G — константа слабых взаимодействий, $\frac{1}{\Lambda} = l$ — элементарная длина. Естественно предположить, что $G\Lambda^2 = Gl^{-2} < 1$. Пусть, например, $Gl^{-2} = e^{-1}$. Нарушение причинности на расстояниях порядка атомных размеров будет описываться в порядке теории возмущений $n \sim \frac{r}{l} \sim 10^{11}$, если выбрать, как и ранее, величину порядка размера атома:

$$r \sim 10^{-8}\ см \sim 1\ эв^{-1} \ \text{и}\ l \sim 10^{-2}\ Гэв^{-1}.$$

Значит, величина эффекта, связанного с непричинным поведением на расстояниях порядка атомных, будет $\sim (Gl^{-2})^n \sim \exp\{-10^{11}\}$, т. е. столь же мала, как и в обычно допустимых вариантах нелокальных теорий [11].

Следует отметить, что приведенные оценки справедливы лишь для достаточно малых энергий. При больших энергиях реальным параметром разложения является величина типа $ge^{a(E)}$, где $a(E)$ растет с увеличением энергии. Поэтому теория возмущений справедлива лишь для таких энергий, когда $g \exp\{a(E)\} \lesssim 1$. Если при этом $a(E) \sim l_{эфф} E$, то $E \lesssim \frac{1}{l_{эфф}} \ln \frac{1}{g}$.

Интересной физической задачей является исследование таких взаимодействий, когда константа связи g достаточно мала, так что возможно использовать теорию возмущений при энергиях, превышающих величину $1/l_{эфф}$. Это позволит реально подойти к области, где причинность уже нарушается, но еще существуют надежные методы вычислений.

Таким образом, предлагаемая схема построения нелокальной теории для взаимодействий, характеризующихся малой константой связи, как нам представляется, физически приемлема.

II. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однокомпонентное скалярное поле $\varphi(x)$, которое описывается лагранжианом следующего вида:

$$L(x) = L_0(x) + gL_I(x). \tag{1.1}$$

Здесь $L_0(x)$ — обычный лагранжиан свободного поля, а $L_I(x)$ описывает самодействие поля $\varphi(x)$. В случае обычной локальной теории поля лагранжиан взаимодействия является некоторым полиномом от поля $\varphi(x)$, например $L_I(x) = \varphi^4(x)$.

Рассмотрим следующую задачу. Будем считать, что в лагранжиан взаимодействия входит не поле $\varphi(x)$, а поле $\Phi(x)$, определенное следующим образом:

$$\Phi(x) = \int dy A(x-y)\, \varphi(y) = A(\Box)\, \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$A(x-y) = A(\Box)\, \delta^{(4)}(x-y), \tag{1.3}$$

где $A(\Box)$ — некоторый оператор от $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2}$.

Проведем обычные преобразования. Формально S-матрицу можно записать в виде Т-произведения

$$S = \mathrm{T} \exp\left\{ ig \int dx L_I(x) \right\}, \tag{1.4}$$

где $L_I(x)$ — теперь полином от поля $\Phi(x)$, например $L_I(x) = \Phi^4(x)$. Разложим S-матрицу в ряд по константе связи g и перейдем к N-произведению операторов поля $\Phi(x)$, согласно теореме Вика, где под «хронологической» сверткой операторов $\Phi(x)$ будем понимать

$$D_c(x-y) = \overline{\Phi(x)\, \Phi}(y) = A(\Box_x)\, A(\Box_y)\, \overline{\varphi(x)\, \varphi}(y) =$$
$$= A(\Box_x)\, A(\Box_y)\, \Delta_c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4\, i} \int \frac{d^4p\, [\tilde{A}(p^2)]^2}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}\, e^{ip(x-y)}. \tag{1.5}$$

Такой выбор свертки двух операторов поля соответствует так называемому Т-произведению, или операции Т*[31]. В этом состоит наш первый постулат теории (см. гл. 1, § 4).

Далее, действуя обычными методами, принятыми в квантовой теории поля, получим по структуре обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что обычные причинные функции скалярного поля заменяются на функции (1.5).

Поставим следующую задачу. Можно ли так подобрать операторы $A(\Box)$, чтобы функция $[\widetilde{A}(p^2)]^2$ играла роль функции обрезания или форм-фактора в ряду теории возмущений, т. е. чтобы сходились интегралы, соответствующие любым графам Фейнмана, и были выполнены требования унитарности и причинности, накладываемые на S-матрицу теории?

Изучим свойства обобщенных функций

$$A(x-y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n)!}\Box^n\,\delta^{(4)}(x-y). \tag{1.6}$$

Фурье-образ этого оператора запишем в виде

$$\widetilde{A}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n)!}z^n;\quad z=p^2. \tag{1.7}$$

Каким требованиям должна удовлетворять функция $\widetilde{A}(z)$? Прежде всего $\widetilde{A}(z)$ должна быть целой аналитической функцией в плоскости комплексного переменного $z=p^2$. В противном случае любые особенности функции $\widetilde{A}(z)$ при конечных z приведут к появлению некоторых дополнительных нефизических особенностей в амплитудах физических процессов. Это означает, что S-матрица не будет унитарной.

Таким образом, функция $\widetilde{A}(z)$ в (1.7) является целой. Детальное исследование обобщенных функций вида (1.6) проведено в работе [25]. Здесь рассмотрим три случая:

I. $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}=0.$$

II. $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{n^{\sigma}}=0,\quad \sigma<1.$$

III. $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{n^2}=0.$$

Функции класса I — целые функции порядка меньше $\frac{1}{2}$, т. е. для любых $\varepsilon>0$ существуют такие $C_\varepsilon>0$, что

$$|\widetilde{A}(z)|<C_\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{|z|}}. \tag{1.8}$$

Обобщенная функция $A(x-y)$ в этом случае есть локальная обобщенная функция, как показано в работе [25]. Согласно теории целых функций (см., например, [42]) для функции $\widetilde{A}(z)$ порядка меньше $\frac{1}{2}$ в комплексной плоскости z не существует ни одного направления, вдоль которого $\widetilde{A}(z)$ могла бы убывать. Это означает, что такие функции не могут играть роль функций обрезания при построении теории возмущений для S-матрицы, т. е. локальных форм-факторов не существует.

Функции класса II — целые функции порядка меньше 1, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие C_ε и A_ε, что

$$|\widetilde{A}(z)| < C_\varepsilon e^{A_\varepsilon |z|^{1-\varepsilon}}. \tag{1.9}$$

Функции класса III — целые функции произвольного порядка роста. Для функций классов II и III могут существовать такие направления в комплексной плоскости z, вдоль которых они убывают. Поэтому они могут играть роль функций обрезания при построении теории возмущений для S-матрицы.

Обобщенные функции $A(x-y)$ в случаях II и III нелокальны.

Разделение целых функций на классы II и III связано с тем, что для обобщенных функций класса II можно ввести такую несобственную регулярную процедуру предельного перехода, что оказывается возможным однозначно определить произведение двух обобщенных функций [25]. Такую регуляризацию рассмотрим в дальнейшем. В случае обобщенных функций класса III такой регулярной процедуры не существует.

Ниже будем рассматривать только обобщенные функции класса II.

§ 2. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим обобщенные функции (1.6) класса II. Найдем пространство основных функций, которое обозначим Z_2. Если функция $f(x) = f(x_0, \mathrm{x})$ принадлежит основному пространству Z_2, тогда должен быть определен функционал

$$\begin{aligned}(A, f)(x) = \int dx' A(x-x') f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n)!} \Box^n f(x) = \\ = \int dp e^{ipx} \widetilde{A}(p^2) \widetilde{f}(p).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно условию II, для любой $\widetilde{A}(p^2)$ класса II существует такое $\delta > 0$ и такие постоянные $C_\delta > 0$ и $A_\delta > 0$, что

$$|\widetilde{A}(p^2)| < C_\delta e^{A_\delta |p^2|^{1-\delta}} < C_\delta e^{A_\delta \sum_{j=0}^{3} |p_j|^{2(1-\delta)}}, \tag{2.2}$$

тогда для сходимости интеграла (2.1) необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такие постоянные C и $b_j\,(j = 0, 1, 2, 3)$, что

$$|\widetilde{f}(p)| < C e^{-\sum_{j=0}^{3} b_j |p_j|^{2-\varepsilon}}. \tag{2.3}$$

Легко показать [25], что пространством основных функций в рассматриваемом случае будет пространство целых функций точного порядка 2. Пространство Z_2 может быть сделано счетно-нормируемым, если в нем ввести систему норм, например, следующим образом:

$$\|f\|_m = \sup_{z_0, \ldots, z_3} |f(z_0, \ldots, z_3)|\, e^{-\sum_{j=0}^{3} |z_j|^{2+\frac{1}{m}}} \tag{2.4}$$

для любых $m = 1, 2, 3\ldots$

В качестве пространства основных функций, на котором определены не только обобщенные функции (1.6) класса II, но и все матричные элементы (3.1а) (гл. I) радиационных операторов (3.1) (гл. I), следует выбрать пространство $Z_2^{\text{физ}}$ со следующей системой норм:

$$\|f\|_{n,m} = \sup_{z_0, \ldots, z_3} |x_0 x_1 x_2 x_3|^n\, |f(x_0 + \mathrm{i}\, y_0, \ldots, x_3 + \mathrm{i}\, y_3)|\, e^{-\sum_{j=0}^{3} |y_j|^{2+\frac{1}{m}}}. \tag{2.4a}$$

Каковы пространственно-временные свойства обобщенных функций $A\,(x - y)$? Поскольку в пространстве основных функций отсутствуют функции с ограниченным носителем, определить понятие носителя функционала непросто [25]. Однако для наших целей достаточно поступить следующим образом. Выберем такие функции основного пространства $f(x) \in Z_2$, которые порядка единицы в окрестности точки $x = 0$ и достаточно быстро убывают при удалении от нее (см. разд. 1, § 3).

Будем считать, что обобщенная функция (2.1) сосредоточена в малой ограниченной области около точки $x = y$, если для любой функции основного пространства $f(x) \in Z_2$ такой, что $f(x)$ порядка единицы около точки $x = 0$ и достаточно быстро убывает при удалении от нее, функционал

$$(A, f)(x) = \int dy\, A\,(x - y)\, f(y) \tag{2.5}$$

достаточно быстро убывает при $\|x\| = \sqrt{x_0^2 + \mathbf{x}^2} \to \infty$, т. е.

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^N\, |(A, f)(x)| = 0 \tag{2.6}$$

для любых $N > 0$.

В качестве таких пробных функций в рассматриваемом случае будем выбирать функции из пространств $S_\alpha^\beta\left(\beta \leqslant \frac{1}{2};\ \alpha + \beta \leqslant 1\right)$, согласно терминологии Гельфанда и Шилова. Напомним, что если $f(x) \in S_\alpha^\beta$, то $f(x+iy)$ является целой аналитической функцией в плоскости $x+iy$ порядка $\rho = \frac{1}{1-\beta} \leqslant 2$, такой, что

$$|f(x+iy)| < C\, e^{-a|x|^{\frac{1}{\alpha}} + b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}} \tag{2.7}$$

при некоторых постоянных a, b и C.

Отметим, что $S_\alpha^\beta \subset Z_2$ при $\beta \leqslant \frac{1}{2}$, $\alpha+\beta \leqslant 1$. Фурье-преобразование переводит пространство S_α^β в пространство S_β^α, т. е. $\widetilde{S}_\alpha^\beta = S_\beta^\alpha$:

$$|\widetilde{f}(p+iq)| < C e^{-a|p|^{\frac{1}{\beta}} + \beta|q|^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{2.8}$$

Тогда для функционала (2.5) получим

$$F(x) = (A, f)(x) = \int dp\, e^{ipx} \widetilde{A}(p^2) \widetilde{f}(p). \tag{2.9}$$

Так как $\widetilde{f}(p) \in S_\beta^\alpha$ при $\beta \leqslant \frac{1}{2}$, $\alpha+\beta \leqslant 1$, а $\widetilde{A}(p^2)$—целая порядка строго меньше 2, тогда $\widetilde{A}(p^2) f(p) \in S_\beta^\alpha$, откуда $F(x) \in S_\alpha^\beta$, и, следовательно, быстро убывает при $\|x\| \to \infty$.

Таким образом, рассматриваемая обобщенная функция сосредоточена в малой ограниченной области, согласно нашему определению.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Как показано в § 1, введение нелокальности в лагранжиан взаимодействия согласно (1.2) эффективно приводит к точно такому же ряду теории возмущений, как и в локальном случае, только с измененной причинной функцией:

$$\Delta_c(x-y) \to D_c(x-y) = \Delta_c(x-y) - i K(x-y), \tag{3.1}$$

где

$$D_c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4k\, [\widetilde{A}(k^2)]^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} e^{ik(x-y)}; \tag{3.2}$$

$$K(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4k \frac{[\widetilde{A}(k^2)]^2 - 1}{m^2 - k^2} e^{ik(x-y)} =$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \Box^n \delta(x-y). \tag{3.3}$$

Мы считаем, что оператор $A(\Box)$ нормирован следующим образом:

$$\widetilde{A}(m^2)=1. \tag{3.4}$$

Отметим, что обобщенная функция $K(x-y)$ принадлежит к тому же классу, что и $A(x-y)$. Изменение свободного пропагатора, согласно (3.1), можно истолковать иначе. Пропагатор свободной частицы

$$\Delta_c(x_1-x_2)=\langle 0\,|\,\mathrm{T}\left(\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\right)|\,0\rangle \tag{3.5}$$

не определен при совпадающих аргументах $x_1=x_2$. В случае локальной теории в правую часть (3.5) можно добавить любую квазилокальную обобщенную функцию класса I. Гипотеза «нелокальности» заключается в том, что Т-произведение в (3.5) не определено не только в совпадающих точках $x_1=x_2$, но и в некоторой малой ограниченной области около $x_1=x_2$. Одна из возможных математических реализаций этой гипотезы состоит в том, что в правую часть (3.5) можно добавить нелокальную обобщенную функцию, сосредоточенную в малой пространственно-временной области, т. е. обобщенную функцию класса II, что и происходит, согласно формуле (3.1).

Приведем еще одно физическое соображение, которое позволит сделать дополнительные ограничения на класс вводимых формфакторов. Пусть имеются два бесконечно тяжелых точечных источника, расположенных на некотором расстоянии друг от друга; взаимодействие между ними осуществляется посредством обмена скалярными мезонами. Пусть лагранжиан взаимодействия этой системы имеет вид

$$L_I(x)=[\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)+\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)]\,\Phi(x_0,\mathbf{x}), \tag{3.6}$$

где поле $\Phi(x)$ связано с полем $\varphi(x)$ согласно формуле (1.2). Источники расположены в точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. S-матрицу, описывающую взаимодействие этой системы, запишем по обычным правилам:

$$S=T\exp\left\{\mathrm{i}g\int d^4xL_I(x)\right\}. \tag{3.7}$$

Первая неисчезающая поправка к энергии каждого источника и энергии взаимодействия между ними дается матричными элементами S-матрицы во втором порядке теории возмущений и пропорциональна

$$\begin{aligned}\Delta E\sim \mathrm{i}\,g^2\int d^4x\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\left(L_I(x)\,L_I(0)\right)|\,0\rangle=\\ =2g^2\,W(0)+2g^2\,W(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2),\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$W(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_0\,\langle 0\,|\,\mathrm{T}\left(\Phi(x_0,\mathbf{x}_1)\,\Phi(0,\mathbf{x}_2)\right)|\,0\rangle. \tag{3.9}$$

Первый член в формуле (3.8) представляет собой поправку к собственной энергии источника, а второй — потенциальную энергию между двумя источниками за счет обмена скалярным мезоном.

Естественными физическими требованиями являются

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{I.}\quad W(0) < \infty, \\ &\mathrm{II.}\quad W(\mathbf{x}) \to \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{-m|\mathbf{x}|} \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

В обычной локальной квантовой теории поля этим требованиям удовлетворить не удается, оставаясь в пределах требований релятивистской инвариантности. Посмотрим, что происходит в рассматриваемой нелокальной теории. Согласно (3.9) и (1.5), получим

$$W(\mathbf{r}) = i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 p\, [\widetilde{A}(p^2)]^2}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{i p_0 x_0 - i \mathbf{p}\mathbf{r}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}\, [\widetilde{A}(-\mathbf{p}^2)]^2}{m^2 + \mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \tag{3.11}$$

Если форм-фактор $\widetilde{A}(-\mathbf{p}^2)$ таков, что

$$\widetilde{A}(\mathbf{p}^2) = 0\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad \text{при} \quad p^2 \to -\infty, \tag{3.12}$$

т. е.

$$\int d\mathbf{p} \left[\widetilde{A}(\mathbf{p}^2)\right]^2 < \infty, \tag{3.13}$$

то функция

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}\, e^{i\mathbf{r}\mathbf{q}} \left[\widetilde{A}(-\mathbf{q}^2)\right]^2 \tag{3.14}$$

обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &V(0) < \infty, \\ &V(\mathbf{r}) = O\left(e^{-\left(\frac{r}{l}\right)^{\gamma}}\right) \quad \text{при} \quad \frac{r}{l} \gg 1, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где l — некоторый параметр размерности длины, так называемая «элементарная длина»; $\gamma = \frac{2\rho}{2\rho - 1}$ [здесь ρ — порядок роста целой функции $A(p^2)$]. Так как $1/2 \leqslant \rho < 1$, то $2 < \gamma < \infty$.

Окончательно получим

$$W(\mathbf{r}) = \int d\boldsymbol{\varrho}\, V(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}|) \frac{1}{|\rho|} e^{-m|\rho|} = \frac{1}{r} e^{-mr} - \frac{1}{r} e^{-h(r)}. \tag{3.16}$$

Здесь $h(r)$ — непрерывная функция, такая, что $h(0) = 0$ и $h(r) = O\left(\left(\frac{r}{l}\right)^{\gamma}\right)$, где $\gamma > 2$, при $r \gg l$.

Таким образом, мы видим, что введение нелокальности в теорию изменяет потенциал Юкавы на малых расстояниях. Происходит как бы «размазка» потенциала Юкавы на расстояниях порядка элементарной длины l, а на больших расстояниях часть потенциала $W(\mathbf{r})$, связанная с введенной нелокальностью, убывает быстрее любой гауссовой экспоненты.

Обратим внимание на дополнительное условие (3.12) на формфактор $A(p^2)$. Только в случае выполнения этого условия получаем ясную физическую картину взаимодействия двух точечных источников с конечной энергией взаимодействия между ними.

Если же $A(p^2) \to \infty$ при $p^2 \to -\infty$, что не противоречит основным принципам построения S-матрицы, потенциал взаимодействия $W(\mathbf{r})$ уже не описывается просто функцией (3.16), а является обобщенной функцией вида

$$W(\mathbf{r}) = \int d\boldsymbol{\varrho}\, V(\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}) \frac{e^{-m|\rho|}}{|\rho|}, \tag{3.17}$$

где

$$V(\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\varrho}). \tag{3.18}$$

Поскольку энергия взаимодействия есть физически наблюдаемая величина, потенциал $W(\mathbf{r})$ должен быть хорошей гладкой функцией. Здесь же $V(\mathbf{r}-\rho)$ — нелокальная обобщенная функция, определенная на некотором пространстве целых функций. Поэтому требование гладкости потенциала $W(\mathbf{r})$ в этом случае приводит к тому, что бесконечно тяжелый источник не может быть точечным, а его распределение в пространстве должно описываться целой функцией основного пространства. В этом случае лагранжиан взаимодействия запишем в виде

$$L_I(x) = [g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) + g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)]\, \Phi(\mathbf{x}, x_0), \tag{3.19}$$

где $g(x)$ — некоторая целая функция основного пространства.

Следовательно, в этом случае мы не имеем той ясной физической интерпретации на языке потенциалов, которая была в первом случае. Кроме того, требование (3.12) можно рассматривать как физическое обоснование введения евклидовой метрики — перехода к интегрированию по пространственно-подобной области импульсных переменных ($q_0 \to iq_4$). Как отмечено в работе [38], только в этом случае S-матрица унитарна.

§ 4. РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ

Как уже отмечалось, ряд теории возмущений (1.4) строится согласно обычной диаграммной технике Фейнмана, только вместо обычной причинной функции используется функция (1.5). В x-пространстве матричный элемент какого-либо процесса в n-м приближении теории возмущений представляется суммой выражений вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i,\, j \in G} D_c(x_i - x_j), \tag{4.1}$$

где i и j пробегают целочисленные значения от 1 до n соответственно конкретному выбору диаграммы Феймана G. Если в (4.1) формально перейти к импульсному представлению, то получим

$$\widetilde{F}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + \ldots + p_n)\, T(p_1, \ldots, p_n); \tag{4.2}$$

$$\widetilde{F}(p_1, \ldots, p_n) = \int d^4 x_1 \ldots \int d^4 x_n\, e^{i(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)} \times F(x_1, \ldots, x_n); \tag{4.3}$$

$$T(p_1, \ldots, p_n) = \int \ldots \int \prod_{i=1}^{L} d^4 l_i \prod_{j=1}^{N} \frac{[\widetilde{A}(k_i^2)]^2}{m^2 - k_j^2 - i\varepsilon}, \tag{4.4}$$

где N — число внутренних линий; L — число независимых интегрирований. Здесь k_j — 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме, l_i — 4-импульсы, по которым проводится интегрирование.

Однако выражение (4.4) пока не имеет математического смысла. Введение форм-фактора A (k^2) еще не делает интеграл (4.4) сходящимся, так как если функция $A(k^2)$ убывает при $k^2 \to -\infty$, то она растет при $k^2 \to +\infty$ быстрее любого полинома. Итак, введение одного форм-фактора еще не обеспечивает сходимости интегралов в ряду теории возмущений.

Для придания смысла выражению (4.4) воспользуемся регулярной процедурой несобственного предельного перехода. Вместо причинной функции $D_c(x)$ в (4.1) введем регуляризованную функцию

$$D_c^{\lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4\, i} \int \frac{d^4 k\, [\widetilde{A}(k^2)]^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}\, e^{ikx} R^{\lambda}(k^2). \tag{4.5}$$

Функцию $R^{\lambda}(k^2)$ выберем в следующем виде:

$$R^{\lambda}(z) = \exp\left\{-\lambda (z + i M^2)^{\frac{1}{2} + \nu} e^{-i\pi\sigma}\right\}, \tag{4.6}$$

где $0 < \nu < \sigma < \frac{1}{2}$, а M^2 — некоторый параметр. Для регуляризующей функции $R^{\lambda}(z)$ при больших $|z|$ справедливы оценки:

$$|R^{\lambda}(z)| \sim e^{-\lambda |z|^{\frac{1}{2}+\nu}}; \quad -\pi a_2 < \arg z < \pi(1 + a_1);$$

$$|R^{\lambda}(z)| \sim e^{\lambda |z|^{\frac{1}{2}+\nu}}; \quad \pi(1 + a_1) < \arg z < 2\pi\left(1 - \frac{a_2}{2}\right), \tag{4.7}$$

где $a_1 = \dfrac{2(\sigma - \nu)}{1 + 2\nu} > 0, \quad a_2 = \dfrac{1 - 2\sigma}{1 + 2\nu} > 0.$

Иными словами, в комплексной плоскости $z R^{\lambda}(z)$ аналитична и убывает как экспонента порядка $\rho_1 = \frac{1}{2} + \nu < 1$ по $|z|$ в верхней полуплоскости, включая вещественную ось.

Поскольку $\widetilde{A}(k^2)$ — целая функция порядка $\rho < 1$, то, выбирая $\rho < \frac{1}{2} + \nu < 1$, т. е.

$$\rho - \frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

получим, что интеграл (4.5) хорошо сходится при $\lambda > 0$. Подставляя затем $D_c^{\lambda}(x)$ в (4.1) и переходя к импульсному представлению, получаем вместо (4.4)

$$T^{\lambda}(p_1, \ldots, p_n) = \int \ldots \int \prod_{i=1}^{L} d^4 l_i \prod_{j=1}^{N} \frac{[\widetilde{A}(k_j^2)]^2}{m^2 - k_j^2 - i\varepsilon} R^{\lambda}(k_j^2). \tag{4.9}$$

При $\lambda > 0$ этот интеграл хорошо сходится.

В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $\widetilde{A}(k^2)$, которые удовлетворяют условию (3.12), т. е. $\widetilde{A}(k^2) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ при $k^2 \to -\infty$.

Рассмотрим теперь, как перейти к пределу $\lambda \to 0$ в интеграле (4.9). Поступим следующим образом. Перейдем в интеграле (4.9) к евклидовой метрике, повернув контуры интегрирования по l_{j0} на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. $l_{j0} \to i l_{j4}$. Одновременно перейдем к евклидовым внешним импульсам переходом $p_{j0} \to i p_{j4}$. Если поворот по всем аргументам $l_{\gamma 0}(\nu = 1, \ldots, L)$ и $p_{j0}(j = 1, \ldots, n)$ проводить одновременно, т. е. положить

$$\begin{aligned} l_{\nu 0} &= r_{\nu} e^{i\varphi} \quad (\nu = 1, \ldots, L); \\ p_{\mu 0} &= \rho_{\mu} e^{i\varphi} \quad (\mu = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{4.10}$$

тогда каждый аргумент $k_j^2 (j = 1, \ldots, N)$ будет находиться в верхней полуплоскости комплексного переменного k_j^2. Действительно, импульс k_j, соответствующий любой выбранной линии в диаграмме, является суммой некоторого числа импульсов $l\nu$, по которым ведется интегрирование, и некоторого числа внешних импульсов p_{μ}:

$$k_j = \sum_{\nu=1}^{L} \Theta_{\nu}^{(j)} l_{\nu} + \sum_{\mu=1}^{n} \vartheta_{\mu}^{(j)} p_{\mu}. \tag{4.11}$$

Числа $\Theta_{\gamma}^{(j)}$ и $\vartheta_{\mu}^{(j)}$ могут принимать только одно из трех значений $-1, 0$ или $+1$ в зависимости от выбранной линии в диаграмме. В случае одновременного поворота (4.10) получим

$$\operatorname{Im} k_j^2 = \operatorname{Im}\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{L}\Theta_\nu^{(j)} r_\nu e^{i\varphi} + \sum_{\mu=1}^{n}\vartheta_\mu^{(j)}\rho_\mu e^{i\varphi}\right]^2 - \mathbf{k}_j^2\right\} =$$

$$= \sin 2\varphi \left\{\sum_{\nu=1}^{L}\Theta_\nu^{(j)} r_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}\vartheta_\nu^{(j)}\rho_\mu\right\}^2 \geqslant 0 \qquad (4.12)$$

при всех $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

После поворота (4.10) в интеграле (4.9) можно перейти к пределу $\lambda = 0$, поскольку форм-фактор $\widetilde{A}(k^2)$ удовлетворяет условию (3.12), и, следовательно, сходятся интегралы, соответствующие любым диаграммам Фейнмана. Окончательно получим

$$T\left((p_1)_E, \ldots, (p_n)_E\right) = i^L \int \ldots \int \prod_{i=1}^{L} d^4 (l_i)_E \prod_{j=1}^{N} \frac{\left[\widetilde{A}\left(-(k_j)_E^2\right)\right]^2}{m^2 + (k_j)_E^2 - i\varepsilon}. \qquad (4.13)$$

Итак, амплитуда $T((p_1)_E, \ldots, (p_n)_E)$ определяется сходящимся интегралом (4.13). Она зависит от скалярных произведений евклидовых внешних импульсов:

$$\left(p_{iE}\, p_{jE}\right) = + \left(p_{i4}\, p_{j4} + \mathbf{p}_i\, \mathbf{p}_j\right). \qquad (4.14)$$

Реальная физическая амплитуда зависит от скалярных произведений псевдоевклидовых внешних импульсов:

$$(p_i\, p_j) = p_{i0}\, p_{j0} - \mathbf{p}_i\, \mathbf{p}_j. \qquad (4.15)$$

Заметим далее, что, во-первых, всевозможные скалярные произведения n псевдоевклидовых и n евклидовых импульсов задаются одним и тем же числом инвариантных переменных, и, во-вторых, амплитуда $T(p_1, \ldots, p_n)$ — аналитическая функция своих инвариантных переменных.

Интеграл (4.15) определяет амплитуду T во всей области евклидовых внешних импульсов. Чтобы получить физическую амплитуду, соответствующую данной диаграмме Фейнмана, необходимо аналитически продолжить амплитуду (4.15) по инвариантным импульсным переменным к физическим значениям скалярных произведений $(p_i p_j)$.

Следует отметить, что изложенная процедура полностью эквивалентна обычному методу при рассмотрении диаграмм Фейнмана в теории возмущений. Если положить $A(\Box) = 1$, то получим обычные выражения для амплитуд скалярной теории.

Итак, мы получили ряд теорий возмущений, свободный от ультрафиолетовых расходимостей. Прежде чем приступать к проверке унитарности и причинности S-матрицы, исследуем, какими аналитическими особенностями обладают полученные амплитуды.

§ 5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВЫХ АМПЛИТУД

Пусть задан некоторый произвольный граф Фейнмана с n внешними линиями. Построим в четырехмерном евклидовом импульсном пространстве амплитуду, соответствующую этому графу. Будем считать n внешних импульсов евклидовыми, удовлетворяющими закону сохранения $q_1+...+q_n = 0$. Каждой внутренней линии поставим в соответствие пропагатор

$$D(k^2) = \frac{V(k^2)}{m^2+k^2}. \tag{5.1}$$

Здесь k — евклидов 4-импульс. Функция $V(\varsigma)$ — целая в плоскости комплексного ς и убывает достаточно быстро при $\mathrm{Re}\,\zeta \to +\infty$. Тогда амплитуда, соответствующая заданному графу, описывается интегралом вида

$$\widetilde{F} = \int \ldots \int \prod_i d^4 l_i \prod_j \frac{V_j(k_j^2)}{m_j^2+k_j^2}. \tag{5.2}$$

Здесь k_j — евклидов 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме; m_j — масса соответствующей частицы. Интегрирование в (5.2) проводится по четырехмерному евклидову импульсному пространству; l_i — 4-импульсы, по которым проводится интегрирование.

Этот интеграл хорошо сходится, так как предполагается, что функции $V_j(k^2)$ достаточно быстро убывают при $k^2 \to \infty$.

Как говорилось выше, евклидова амплитуда $\widetilde{F}$ (5.2) совпадает (с точностью до постоянного множителя) с реальной амплитудой, которая соответствует процессу, описываемому тем же графом Фейнмана, в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов p_j, от которых зависит реальная амплитуда. Переход в физическую область внешних импульсов должен осуществляться аналитическим продолжением амплитуды по соответствующим инвариантным импульсным переменным. При этом необходимо помнить, что все массы имеют отрицательные мнимые добавки $m_j = m_j - i\varepsilon$.

Необходимо подчеркнуть, что в случае, когда $V_j(k^2) = 1$ или являются просто полиномами по k^2, амплитуда $\widetilde{F}$ в (5.2) совпадает с реальной псевдоевклидовой амплитудой в указанной выше области евклидовых внешних импульсов, поскольку в этом случае евклидова и псевдоевклидова формулировки эквивалентны [32]. Отметим, что анализ Л. Д. Ландау [33] особенностей амплитуд в теории возмущений начинается именно с выражения для амплитуды в евклидовой метрике.

Итак, наша задача состоит в изучении аналитических особенностей амплитуды $\widetilde{F}$ в (5.2) по инвариантным импульсным переменным. Легко показать, что по сравнению с аналогичной амплитудой локальной теории амплитуда $\widetilde{F}$ при конечных значениях импульсных переменных не имеет дополнительных особенностей, связанных с наличием целых функций $V_j(k^2)$. Действительно, после параметризации Фейнмана получим

$$\widetilde{F}=(N-1)!\int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_N\, \delta\left(1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right)\int\ldots\int \frac{\prod_i d^4 l_i \prod_j V_j\left(k_j^2\right)}{\left[\sum_j \alpha_j\left(m_j^2+k_j^2\right)\right]^N}, \tag{5.3}$$

где N — число внутренних линий.

Преобразованием переменных интегрирования из выражения, стоящего в знаменателе, всегда можно устранить члены, линейные по отношению к l_j, после чего получим (мы точно следуем рассуждениям Л. Д. Ландау [33]).

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left(k_j^2+m_j^2\right)=\varphi\left(\alpha,\ q_i,\ q_j,\ m^2\right)+K(\alpha,\ l'). \tag{5.4}$$

Здесь K — однородная квадратичная форма от новых переменных интегрирования l' с коэффициентами, зависящими только от параметров α_j; φ — неоднородная квадратичная форма от векторов q_j, характеризующих свободные концы рассматриваемой диаграммы.

Так как квадратичная форма φ зависит от скалярных произведений q_iq_j, то получаем исходное выражение, с которого начинал Л. Д. Ландау при выводе своих известных уравнений.

Зависимость числителя от внешних импульсов не может привести ни к каким дополнительным особенностям в конечной области инвариантных импульсных переменных, поскольку в числителе стоит целая функция от скалярных произведений q_iq_j и параметров α_j.

Остается, однако, очень важный вопрос о величине скачков на соответствующих разрезах у функции $\widetilde{F}$. Этот вопрос непосредственно связан с унитарностью S-матрицы теории. Мы докажем следующее свойство амплитуды $\widetilde{F}$, известное как правило Куткосского [34] для нормальных порогов. Пусть граф, соответствующий амплитуде $\widetilde{F}$, может быть разбит на два блока $\widetilde{F}_I$ и $\widetilde{F}_{II}$, соединенные r внутренними линиями (рис. 1):

$$\widetilde{F}=\int\ldots\int d^4k_1\,\ldots\, d^4k_r\,\widetilde{F}_I(q_j,\,k_i)\prod_{\nu=1}^{r}\frac{V_\nu\left(k_\nu^2\right)}{m_\nu^2+k_1^2}\times$$

$$\times\widetilde{F}_{II}\left(q_j',\ k_i\right)\delta^{(4)}(q-k_1-\ldots-k_r). \tag{5.5}$$

Здесь $q_j\,(j=1,\ \ldots,\ n_1)$ и $q_j'\,(j=1,\ \ldots,\ n_2)$ — внешние импульсы соответственно блоков I и II, при этом выполнено $q=q_1'+\ldots+q_{n_2}'=-\left(q_1+\ldots+q_{n_1}\right)$ ($n=n_1+n_2$ — число внешних линий).

Функции $\widetilde{F}_I(q_j, k_i)$ и $\widetilde{F}_{II}(q'_j, k_i)$ описывают блоки I и II; они зависят от скалярных произведений векторов q_i, q'_j и k_i.

Тогда амплитуда $\widetilde{F}$, рассматриваемая как функция комплексного переменного $z = -q^2$, имеет связанную с данным разбиением линию ветвления, начинающуюся в точке

$$z = (m_1 + \ldots + m_r)^2, \tag{5.6}$$

а скачок функции $\widetilde{F}$ на этом разрезе дается формулой

$$\Delta\widetilde{F}(z) = \mathrm{i}(2\pi)^r \prod_{\nu=1}^{r} V_\nu(-m_\nu^2) \int d^4\widetilde{k}_1 \ldots \int d^4\widetilde{k}_r \prod_{\nu=1}^{r} \Theta(\widetilde{k}_{\nu 0}) \times$$
$$\times \delta(m_\nu^2 + \widetilde{k}_\nu^2)\, \delta^{(4)}(\widetilde{q} - \widetilde{k}_1 - \ldots - \widetilde{k}_r)\, \widetilde{F}_I(q_j, \widetilde{k}_i)\, \widetilde{F}_{II}(q'_j, \widetilde{k}_i). \tag{5.7}$$

Здесь под $\widetilde{k}_i$ понимаются четырехмерные векторы с компонентами $(\mathrm{i}\,k_{i0}, \mathbf{k}_j)$, так что $k_j^2 = -k_{j0}^2 + \mathbf{k}_j^2$ и $(k_j q) = \mathbf{k}_j \widetilde{\mathbf{q}} + \mathrm{i}\,k_{j0} q_4$, а

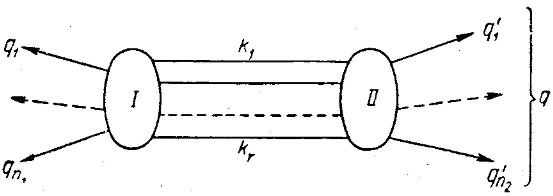

Рис. 1.

$d^4 k_j = dk_{j0}\, d\mathbf{k}_j$. Вектор $\widetilde{q}(iq_0, \mathbf{q})$ удовлетворяет соотношению $q^2 = \widetilde{\mathbf{q}}^2 - q_0^2 = -z$. Под функциями $\widetilde{F}_I(q_j, \widetilde{k}_i)$ и $\widetilde{F}_{II}(q'_j, \widetilde{k}_i)$ следует понимать аналитическое продолжение к соответствующим значениям скалярных аргументов $(q_j, \widetilde{k}_i)$ и т. д. исходных функций $\widetilde{F}_{\mathrm{I}}(q_j, k_i)$ и $\widetilde{F}_{\mathrm{II}}(q'_j, k_i)$, описывающих блоки I и II. Доказательство формулы (5.7) приведено в работе [41].

Мы доказали правило Куткосского для нормальных порогов в случае произвольных диаграмм Фейнмана, когда диаграммы записываются в евклидовом импульсном пространстве, а в качестве функций обрезания выбираются целые функции.

Отметим еще раз, что в случае $V_j(k^2) = 1$ проведенное доказательство является доказательством правила Куткосского для обычных диаграмм квантовой теории поля, поскольку псевдоевклидовы интегралы для амплитуд физических процессов в области евклидовых внешних импульсов всегда могут быть записаны в евклидовом пространстве, а переход в физическую область всегда можно рассматривать как аналитическое продолжение по инвариантным импульсным переменным.

Что касается аномальных особенностей диаграмм, то они возникают обычным образом при учете аналитических свойств блоков I и II. Например, появление аномальной особенности для обыкновенной треугольной или четырехугольной диаграммы можно проследить методом, аналогичным использованному в работе [35].

Наконец, отметим, что, как следует из приведенного доказательства, введение целой функции обрезания $V(k^2)$, нарушающей эквивалентность в обычном смысле евклидовой и псевдоевклидовой формулировок теории, не нарушает аналитических свойств теории в любой конечной области импульсных переменных. Справедливость правила Куткосского делает довольно простым доказательство унитарности в рассматриваемой теории.

§ 6. УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Покажем, что построенная S-матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений на массовой оболочке, т. е. выполнено (2.5) из гл. I. Прежде всего обратим внимание на алгебраический характер условия унитарности. Мы имеем в виду следующее. Пусть

$$S = 1 + \mathrm{i}\, T; \tag{6.1}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} g^n T_n. \tag{6.2}$$

Из условий (1.2.5) и (6.1) следует

$$-\mathrm{i}\langle \alpha | (T - T^+) | \beta \rangle = \langle \alpha | TT^+ | \beta \rangle. \tag{6.3}$$

Подставим в (6.3) разложение (6.2) и введем в правую часть разложение по полной системе функций $|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle$. Тогда в каждом порядке по степеням константы связи получим

$$2\mathrm{Im}\langle \alpha | T_n | \beta \rangle = \\ = \sum_{m_1+m_2=n} \sum_N \int d\mathbf{k}_1 \ldots \int d\mathbf{k}_N \langle \alpha | T_{m_1} | \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_N \rangle \langle \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_N | T^+_{m_2} | \beta \rangle. \tag{6.4}$$

Суммирование по N проводится не до бесконечности, а ограничено полной энергией состояния $|\alpha\rangle$ или $|\beta\rangle$. Кроме того, мы воспользовались равенством

$$\langle \alpha | T_n | \beta \rangle = \langle \beta | T_n | \alpha \rangle, \tag{6.5}$$

справедливым в теории однокомпонентного скалярного поля.

Амплитуда $\langle \alpha | T_n | \beta \rangle$ представляет собой сумму всевозможных диаграмм Фейнмана в n-м порядке теории возмущений вида

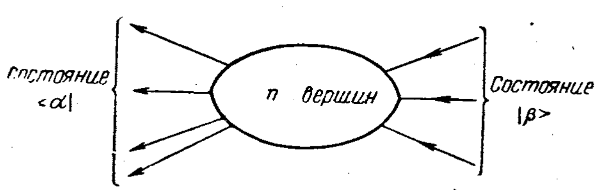

Рис. 2.

где входят n_β линий, а выходят n_α линий.

Из соотношения (6.4) следует, что мнимая часть амплитуды $\langle\alpha|T_n|\beta\rangle$ должна быть равна набору амплитуд физических процессов низших порядков. Если мы теперь формально будем разрезать всевозможные диаграммы Фейнмана, представляющие амплитуду $\langle\alpha|T_n|\beta\rangle$, всевозможными способами, оставляя слева состояние $|\alpha\rangle$, а справа $|\beta\rangle$ (см. рис. 2), то формально получим по структуре правую часть соотношения (6.4) с единственным отличием, что вместо причинных функций D_c на разрезаемых линиях стоят функции $\Delta^{(-)}$. Это как раз и есть алгебраическое свойство ряда теории возмущений, которое связано с алгебраическим свойством теоремы Вика при раскрытии Т-произведения для S-матрицы в форме

$$S = \mathrm{T}\exp\left\{\mathrm{i}\,g\int d^4 x L_{\mathrm{I}}(x)\right\}, \tag{6.6}$$

где $L_I(x)$ — некоторый полином от поля $\varphi(x)$. Теорема Куткосского обеспечивает именно это свойство амплитуд теории возмущений. Поэтому если в теории возмущений, во-первых, амплитуды имеют особенности такие же, как и в обычной локальной теории, и, во-вторых, справедлива теорема Куткосского, то S-матрица такой теории будет унитарна на массовой оболочке в каждом порядке теории возмущений.

В нашем случае мы имеем именно эту картину: аналитические особенности амплитуд такие же, как и для локальных взаимодействий, и величина скачков на нормальных порогах определяется той же формулой Куткосского, как в локальном случае. Следовательно, построенная нами S-матрица унитарна на массовой оболочке.

Отметим, что условие унитарности (1.2.5) останется справедливым, если в лагранжиан взаимодействия ввести скалярное внешнее поле $a(x)$, например, следующим образом:

$$gL_{\mathrm{I}}(x) = g\Phi^4(x) + \varphi^2(x)\,a(x). \tag{6.7}$$

Действительно, на диаграмме Фейнмана пропагатор, соединяющий вершину g с внешним полем $a(x)$, равен функции

$$\overline{\Phi(x)\,\varphi}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4\,\mathrm{i}}\int \frac{d^4 p\tilde{A}(p^2)}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\,\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p\,(x-y)} \tag{6.8}$$

вместо пропагатора (1.5). Поскольку $\tilde{A}(p^2)$ — целая функция того же типа, что и $[\tilde{A}(p^2)]^2$, то формула Куткосского остается в силе и S-матрица унитарна.

§ 7. ПРИЧИННОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Для проверки причинности S-матрицы, которая является функционалом от оператора $\Phi(x)$, рассмотрим выражение

$$C(x, y) = \frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\Phi(y)}\,S^{-1}\right). \tag{7.1}$$

В случае локального взаимодействия, когда теория микропричинна, оператор $C(x, y) = 0$ при $x \lesssim y$ [26]. Определим, чему равен оператор $C(x, y)$ в (7.1) в рассматриваемом случае.

Прежде всего покажем, что операторы $\Phi(x)$ в (1.2) удовлетворяют локальным перестановочным соотношениям

$$[\Phi(x_1),\ \Phi(x_2)]_- = [\varphi(x_1),\ \varphi(x_2)]_- = \Delta(x_1 - x_2), \qquad (7.2)$$

где $\Delta(x_1 - x_2)$ — обычный коммутатор скалярного поля. Для этого воспользуемся условием полноты. Имеем

$$[\Phi(x_1),\ \Phi(x_2)]_- =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int d\mathbf{k}_1 \ldots \int d\mathbf{k}_n \{\Phi(x_1) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle\langle \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n \mid \Phi(x_2) -$$
$$- \Phi(x_2) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle\langle \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n \mid \Phi(x_1)\}. \qquad (7.3)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\Phi(x) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle = A(\Box)\,\varphi(x) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle =$$
$$= A(\Box)\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} \{e^{-ikx} a_{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle + e^{ikx} a_{\mathbf{k}}^{+} \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle\} =$$
$$= A(m^2)\,\varphi(x) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle = \varphi(x) \mid \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n\rangle. \qquad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в (7.3), получаем (7.2). То же можно сказать и о $D^{(\pm)}$-функциях:

$$D^{(\pm)}(x_1 - x_2) = \Delta^{(\pm)}(x_1 - x_2), \qquad (7.5)$$

где $\Delta^{(\pm)}$ — соответствующие функции скалярного поля.

Рассмотрим теперь выражение (7.1). Наша S-матрица (1.4) является функционалом только от оператора поля $\Phi(x)$. При разложении в ряд по нормальным произведениям операторов поля $\Phi(x)$ получаем ряд вида

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n\, S_n(x_1, \ldots, x_n) : \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n):, \qquad (7.6)$$

где коэффициентные функции $S_n(x_1, \ldots x_n)$ построены из причинной функции (1.5), которая равна сумме обычной причинной функции скалярного поля и обобщенной функции $K(x_1 - x_2)$ [см. выражение (3.1)]. Подставим ряд (7.6) в (7.1) и перейдем вновь к N-произведению. При этом возникнут $D^{(-)}$-функции операторов поля $\Phi(x)$. Но, согласно (7.5), $D^{(-)}$-функция точно равна $\Delta^{(-)}$-функции обычного скалярного поля $\varphi(x)$. Поэтому, если не принимать во внимание обобщенные функции $K(x_1 - x_2)$, мы получим обычное условие микропричинности локального скалярного поля, т. е. оператор $C(x, y)$ в (7.1) равен нулю при $x \lesssim y$. Но при наличии обобщенных функций $K(x_1 - x_2)$ в (3.1) соотношение (7.1) в области $x \lesssim y$ будет пропорционально нелокальной обобщенной функции рассматриваемого нами типа. Поэтому условие макропричинности (3.5) из гл. I будет выполнено в каждом порядке теории возмущений.

§ 8. СТАБИЛЬНОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Для того чтобы удовлетворить условию стабильности матрицы (1.2.6), необходимо провести перенормировку массы скалярной частицы и волновой функции. Для этого в лагранжиан взаимодействия следует ввести два контрчлена. Окончательно лагранжиан взаимодействия должен иметь вид

$$gL_I(x) = g:\Phi^n(x): - \delta m^2 :\Phi^2(x): - Z_2 :\Phi(x)(\Box - m^2)\Phi(x): \qquad (8.1)$$

Константы перенормировки δm^2 и Z_2 выбирают таким образом, чтобы оператор собственной энергии мезона $\Sigma_r(p^2)$ был нормирован следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_r(p^2)\,|_{p^2=m^2} = 0; \\ &\frac{d}{dp^2}\Sigma_r(p^2)\,|_{p^2=m^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

Для этого необходимо оператор $\Sigma(p^2)$, являющийся суммой всех неприводимых диаграмм собственной энергии, регуляризовать следующим образом:

$$\Sigma_r(p^2) = \Sigma(p^2) - \Sigma(p^2)\,|_{p^2=m^2} - \frac{\partial\Sigma(p^2)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=m^2}(p^2-m^2) =$$
$$= \Sigma(p^2) - \delta m^2 - Z_2(p^2-m^2), \qquad (8.3)$$

где

$$\delta m^2 = \Sigma(p^2)\,|_{p^2=m^2} = \delta m^2(g,m);$$

$$Z_2 = \frac{\partial\Sigma(p^2)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=m^2} = Z_2(g,m).$$

В рассматриваемой нелокальной теории постоянные δm^2 и Z_2 — конечные величины.

Изложенная процедура полностью соответствует обычным методам локальной квантовой теории поля [26, 36].

§ 9. ПЕРЕНОРМИРОВКА КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

Параметр g, входящий в лагранжиан взаимодействия (8.1), не является физической константой связи. Дело в следующем [37]. На опыте мы измеряем некоторые физические величины. Назовем эти величины условно сечениями и обозначим их

$$\sigma_A,\ \sigma_Б,\ \sigma_В \ldots \qquad (9.1)$$

Цель теории состоит в том, чтобы предсказать результаты опытов $Б$, $В$, ..., если опыт A дал значение σ_A.

С другой стороны, зная лагранжиан взаимодействия (8.1), можно вычислить величины (9.1) математически. В результате подсчетов получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_A = \sigma_A(g, m, \varepsilon) = \sum_{k=n_A}^{\infty} g^k \sigma_k^{(A)}(m, \varepsilon); \\ \sigma_Б = \sigma_Б(g, m, \varepsilon) = \sum_{k=n_Б}^{\infty} g^k \sigma_k^{(Б)}(m, \varepsilon), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (9.2)$$

где ε — энергетические и другие переменные, от которых может зависеть сечение.

В рассматриваемой нелокальной теории все величины σ_A, $\sigma_Б, \dots$ даны в виде рядов (9.2) по параметру g, причем каждый член ряда конечен.

Физическую константу связи находят из опыта, однако совершенно неясно, из каких опытов надо ее определять. Мы можем **по определению** считать, что физическая константа связи g_r такова, что в опыте A при определенных значениях переменных $\varepsilon = \varepsilon_0$ измеряемая величина σ_A равна

$$\sigma_A = g_r^{n_A} = \sum_{k=n_A}^{\infty} g^k \sigma_k^{(A)}(m, \varepsilon_0). \quad (9.3)$$

Следовательно, формула (9.3) является **определением** физической константы связи g_r. Из (9.3) по теории возмущений можно найти

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_r^k a_k(m, \varepsilon_0). \quad (9.4)$$

Подставляя затем (9.4) в (9.2), получаем

$$\sigma_A(\varepsilon) = \sum_{k=n_A}^{\infty} g_r^k \tilde{\sigma}_k^{(A)}(m, \varepsilon, \varepsilon_0) \text{ и т. д.} \quad (9.5)$$

Еще раз обратим внимание на то, что в рассматриваемой нелокальной теории связь между g_r и g дается в виде ряда (9.3) с конечными функциями $\sigma_k^{(A)}(m, \varepsilon_0)$. В обычной локальной перенормируемой теории величины $\sigma_k^{(A)}$ представляются в виде расходящихся интегралов, и поэтому в лагранжиан взаимодействия (8.1) добавляют еще один контрчлен, устраняющий эту расходимость [26, 36]. В нашем случае расходимости отсутствуют. Поэтому дополнительной перенормировки константы g в лагранжиане взаимодействия можно и не проводить, а просто считать, что между константами g и g_r существует связь (9.4).

§ 10. ПРИМЕРЫ ВОЗМОЖНЫХ ФОРМ-ФАКТОРОВ И ВТОРОЙ ПОРЯДОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как показано в § 5, амплитуда, соответствующая любой диаграмме Фейнмана, может быть записана в виде сходящегося интеграла по евклидову пространству в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов. При этом причинная функция (1.5) в евклидовом импульсном пространстве имеет вид

$$D_c(k^2)=\frac{V(k^2)}{m^2+k^2}, \tag{10.1}$$

где $V(k^2)=\left[\widetilde{A}(-k^2)\right]^2$. Так как $\widetilde{A}(-k^2)$ удовлетворяет условию (3.12), то $D_c(k^2)=O\left((k^2)^{-3}\right)$ при $k^2\to+\infty$.

В евклидовом x-пространстве изменение пропагатора (10.1) означает умножение причинной функции $\Delta_c(x)$ (которая вещественна в евклидовом пространстве), на некоторую положительную непрерывную функцию $\vartheta(x^2)$, т. е.

$$D_c(x)=\Delta_c(x)\,\vartheta(x^2), \tag{10.2}$$

$$\text{где } \vartheta(x^2)=\begin{cases} O(x^2) & \text{при } \; x^2\to 0 \\ 1-O\left(\mathrm{e}^{-[\sqrt{x^2}]^{\gamma}}\right) & \text{при } \; x^2\to\infty. \end{cases} \tag{10.3}$$

Здесь $x^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ и $\gamma=\dfrac{2\rho}{2\rho-1}$, где $\rho<1$ — порядок функции $V(k^2)$.

Для коэффициентов c_n, определяющих обобщенную функцию $K(x-y)$ в (3.3) по (10.2), легко получить при $n\gg 1$

$$|c_n|\sim\int\limits_0^\infty du\,u^{2+2n}\left[1-\vartheta\left(\frac{u^2}{m^2}\right)\right]K_1(u), \tag{10.4}$$

где $K_1(u)$—функция Макдональда. Отсюда видно, что наименьший рост коэффициентов c_n при $n\to\infty$ достигается, когда функция $\vartheta(x^2)=1$, начиная с некоторого l^2, т. е.

$$\vartheta(x^2)=1 \quad \text{при} \quad x^2\geqslant l^2. \tag{10.5}$$

В этом случае

$$|c_n|\sim(ml)^{2n}. \tag{10.6}$$

Если же

$$|1-\vartheta(x^2)|<A\mathrm{e}^{-a(\sqrt{x^2})^{\gamma}} \quad (m^2x^2\gg 1), \tag{10.7}$$

где A, a и γ—положительные постоянные, тогда при асимптотически больших n имеем

$$|c_n|\sim\Gamma\left(\frac{2n}{\gamma}\right). \tag{10.8}$$

Примером такой функции может служить

$$\vartheta(x^2)=1-\exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{x^2}}{l}\right)^{\gamma}\right\}.$$

Другим выбором функций $\vartheta(x^2)$ можно получить все нелокальные классы обобщенных функций класса II, о которых говорилось в § 1.

Наиболее простые формулы получаются при простейшем выборе функции $\vartheta(x^2)$:

$$\vartheta(x^2)=\theta(x^2-l^2), \tag{10.9}$$

где $\theta(u)=\begin{cases}1 & \text{при } u>0\\ 0 & \text{при } u<0.\end{cases}$

В качестве примера рассмотрим S-матрицу, соответствующую неперенормируемому лагранжиану взаимодействия

$$L_I(x)=:\varphi^{\nu}(x):, \tag{10.10}$$

где γ — некоторое целое число.

Амплитуды второго порядка теории возмущений при взаимодействии (10.10) описываются диаграммами Фейнмана вида

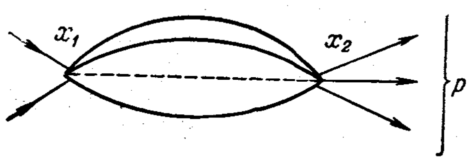

Рис. 3.

В каждой точке на диаграмме сходится ν линий. Пусть имеется r внутренних линий. Обозначим p сумму внешних импульсов, входящих в точку x_2. Тогда амплитуда, соответствующая этой диаграмме, в области $p^2<0$ описывается интегралом

$$T_2(p^2)=g^2\int d^4x e^{iqx}D_c^r(x), \tag{10.11}$$

где $D_c(x)$ дается в (10.2), а q — евклидов вектор, причем $q^2=-p^2$. Подставим в (10.11) пропагатор $D_c(x)$ по (10.2) и воспользуемся тождеством

$$[\Delta_c(x)]^r=\int\limits_{(rm)^2}^{\infty} d\varkappa^2\,\Omega_r(\varkappa^2)\,\Delta_c(\varkappa, x), \tag{10.12}$$

где $\Delta_c(\varkappa, x)$ — причинная функция скалярного поля с массой $\varkappa$; $\Omega_r(\varkappa^2)$ — фазовый объем r скалярных частиц с массой m:

$$\Omega_r(\varkappa^2)=\frac{1}{(2\pi)^{3(r-1)}}\int\frac{d\mathbf{k}_1}{2\omega_1}\cdots\int\frac{d\mathbf{k}_r}{2\omega_r}\,\delta^{(4)}(k-k_1-\ldots-k_r), \tag{10.13}$$

где $\omega_j=\sqrt{m^2+\mathbf{k}_j^2}$, $\quad k^2=k_0^2-\mathbf{k}^2=\varkappa^2$.

Произвольный форм-фактор $[\vartheta(x^2)]^n$ представим в виде

$$[\vartheta(x^2)]^r = \int\limits_0^{x^2} dl^2 \frac{d}{dl^2} [\vartheta(l^2)]^r =$$

$$= r \int\limits_0^{\infty} dl^2 \vartheta'(l^2) [\vartheta(l^2)]^{r-1} \vartheta(x^2 - l^2). \tag{10.14}$$

Подставляя формулы (10.12) и (10.14) в (10.11), получаем после простых вычислений

$$T_2(p^2) = g^2 r \int\limits_0^{\infty} dl^2 \vartheta'(l^2) [\vartheta(l^2)]^{r-1} \int\limits_{(rm)^2}^{\infty} \frac{dx^2 \Omega_r(x^2) d(\varkappa^2 l^2, p^2 l^2)}{\varkappa^2 - p^2 - i\varepsilon}, \tag{10.15}$$

где $$d(\varkappa^2 l^2, p^2 l^2) = \varkappa l \left[I_0\left(l\sqrt{p^2}\right) K_1(\varkappa l) + \frac{I_1(l\sqrt{p^2})}{l\sqrt{p^2}} \varkappa l K_0(\varkappa l) \right], \tag{10.16}$$

где I_k и K_k — функции Бесселя. Интеграл (11.15) хорошо сходится, поскольку при $\varkappa \to \infty$ $\Omega_r(x^2) \sim \varkappa^{2r}$, а $K_k(\varkappa l) \sim e^{-\varkappa l}$. Заметим, что

$$d(\varkappa^2 l^2, \varkappa^2 l^2) \equiv 1, \tag{10.17}$$

поэтому при $p^2 > (rm)^2$

$$\operatorname{Im} T_2(p^2) = \pi g^2 \Omega_r(p^2). \tag{10.18}$$

Асимптотическое поведение реальной части амплитуды определяется поведением функций Бесселя $I_0\left(l\sqrt{p^2}\right)$ и $I_1\left(l\sqrt{p^2}\right)$ при больших $|p^2|$:

$$\operatorname{Re} T_2(p^2) \sim g^2 \int\limits_0^{\infty} dl^2 \vartheta'(l^2) e^{l\sqrt{p^2}} \sim g^2 e^{(p^2)^\rho} \quad \text{при} \quad p^2 \to +\infty; \tag{10.19}$$

$$\operatorname{Re} T_2(p^2) \sim O\left(\frac{1}{(p^2)^2}\right) \quad \text{при} \quad p^2 \to -\infty.$$

Матричные элементы высших порядков строятся так же, как это описывалось в § 4. Ряд теории возмущений для S-матрицы будет удовлетворять всем аксиомам нелокальной теории (см. гл. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая схема построения нелокальной теории состоит из следующих основных этапов.

1. Вводится нелокальный лагранжиан взаимодействия, что в ряду теории возмущений эффективно приводит к изменению про-

пагатора свободной частицы:

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} \to \frac{[\tilde{A}(p^2)]^2}{m^2-p^2-i\varepsilon},$$

где $\tilde{A}(p^2)$ — целая функция порядка $\rho < 1$ в плоскости комплексного p^2 и такая, что

$$\tilde{A}(p^2) = O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad \text{при} \quad p^2 \to -\infty.$$

2. При построении ряда теории возмущений вводится регулярная процедура несобственного предельного перехода $R^\lambda(p^2)$, позволяющая перейти к евклидовой метрике.

3. Доказывается теорема Куткосского для нормальных порогов в евклидовой формулировке теории.

Эти основные этапы приводят к конечному унитарному макропричинному ряду теории возмущений для S-матрицы в случае любого неперенормируемого взаимодействия.

Нам кажется, что преимущество развитой схемы состоит в следующем: во-первых, весь произвол в выборе формы обрезания и и величины «элементарной длины» l удалось заключить в лагранжиан взаимодействия; во-вторых, амплитуды физических процессов не имеют дополнительных особенностей в конечной области изменения инвариантных импульсных переменных по сравнению с локальной теорией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков М. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **10**, 1311 (1940).
2. Yukawa H. Phys. Rev., **77**, 219 (1950); **80**, 1047 (1950).
3. Snyder H. Phys. Rev., **71**, 38 (1947).
4. Гольфанд Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 504 (1959); **43**, 256 (1962).
5. Кадышевский В. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 1885 (1961); «Докл. АН СССР», **147**, 588 (1962).
6. Тамм М. Е. В кн. «Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий». Т. II. Дубна, 1964, стр. 229.
7. Wataghin G. Z. Phys. **88**, 92 (1934).
8. Блохинцев Д. И. Вестник МГУ (физика), **3**, 77 (1946); **1**, 83 (1948); «Ж. эксперим. и теор. физ.», **16**, 480 (1964); «Успехи физ. наук», **61**, 137 (1957).
9. McManus H. Proc. Roy. Soc., **A9**, **195**, 323 (1948).
10. Peierls R. Proc. Roy. Soc., A, **214**, 143 (1952).
11. Киржниц Д. А. «Успехи физ. наук», **90**, 129 (1966).
12. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р2-3590, Дубна, 1968.
13. Bloch C. Kgl. Dansk. Mat. Fys., **27**, No. 8 (1952).
14. Chretien M., Peierls R. Nuovo cimento, **10**, 688 (1953).
15. Stueckelberg E., Wanders G. Helv. phys. acta., **27**, 607 (1954).
16. Ebel E. M. Kgl. danske vid. selskab. Mat. fys. medd., **29**, No. 2 (1954).
17. Славнов Д. А., Суханов А. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1472 (1959).
18. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. Preprint JINR E-250, Dubna, 1965.

19. Киржниц Д. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 551 (1961); **45**, 143 (1963); **45**, 2024 (1963).
20. Wataghin G. Nuovo cimento, **25**, 1383 (1962).
21. Blokhintsev D. I., Kolerov G. I. Nuovo cimento, **34**, 163 (1964).
22. Ingraham R. Nuovo cimento, **39**, 361 (1965).
23. Блохинцев Д. И. Препринт ОИЯИ Р-2422, Дубна, 1965.
24. Лезнов А. Н., Киржниц Д. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48** 622 (1955).
25. Efimov G. V. Commun. Math. Phys., **7**, 1938 (1968); Препринт ИТФ 68-52, Киев, 1968.
26. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
27. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
28. Heisenberg W. Z. Phys., **120**, 513, 673 (1943); Z. Naturforsch., **1**, 608 (1966).
29. Dayson F. J. Phys. Rev., **85**, 631 (1952).
30. Thirring W. Helv. phys. acta, **26**, 33 (1953).
31. Умедзава Х. Квантовая теория поля. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
32. Schwinger J. Phys. Rev., **115**, 721 (1959).
33. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 62 (1959).
34. Cutkosky R. E. J. Math. Phys., **1**, 429 (1960).
35. Грибов В. Н., Данилов Г. С., Дятлов И. Т. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 924, 1215 (1961).
36. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
37. Källen G. Nuovo cimento, **12**, 217 (1954).
38. Ефимов Г. В. Препринт ИТФ 68—54, Киев, 1968.