МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ЯДРА

Р. В. Джолос, В. Г. Соловьев

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

АННОТАЦИЯ

Изложен метод самосогласованного поля в формулировке Н. Н. Боголюбова. Показано, что из уравнений метода самосогласованного поля вытекают уравнения для эффективных полей теории конечных ферми-систем и секулярные уравнения модели с парными и мультипольными силами.

ABSTRACT

The self-consistent field method in the Bogolubov formulation is presented. The equations for the effective fields of the finite Fermi system theory and the secular equations of the model with pairing and multipole forces are derived from the basic equations of the self-consistent field method.

В настоящее время трудно представить ядерную физику без такого понятия, как самосогласованное поле ядра. Многочисленные экспериментальные данные указывают на то, что нуклоны в ядре ведут себя в некотором приближении как независимые частицы, движущиеся в общем потенциале. По этой причине естественно строить теорию ядра, по крайней мере теорию низколежащих возбужденных состояний ядер, основываясь на понятии о самосогласованном поле. Ниже излагается метод самосогласованного поля в формулировке Н. Н. Боголюбова [1]. На его основе будут получены уравнения, описывающие основные и низколежащие возбужденные состояния ядра. Мы покажем на различных примерах, что из этих уравнений вытекают известные результаты микроскопического подхода к структуре ядра: секулярные уравнения для случая мультипольных и спин-мультипольных сил, уравнения для частот парных вибраций, уравнения теории конечных фермисистем.

Полный гамильтониан системы возьмем в достаточно общей форме:

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum_{ff'} T(f, f')\, a_f^+ a_{f'} - \frac{1}{4} \sum_{f_1 f_2 f_1' f_2'} G(f_1 f_2;\, f_2' f_1')\, a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_2'} a_{f_1'};\\ T(f, f') &= I(f, f') - \lambda\delta_{ff'}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где f — набор квантовых чисел, характеризующих одночастичные состояния; a_f^+, a_f — операторы рождения и уничтожения фермионов соответственно; λ — химический потенциал; I — одночастичный гамильтониан; G — матрица взаимодействия частиц.

Из свойств антикоммутации операторов a_f^+, a_f и эрмитовости гамильтониана следует, что

$$\left.\begin{aligned} I(f, f') &= I^*(f', f);\\ G(f_1 f_2;\, f_2' f_1') &= -G(f_1 f_2;\, f_1' f_2') = -G(f_2 f_1;\, f_2' f_1') =\\ &= G(f_2 f_1;\, f_2' f_1') = G^*(f_1' f_2';\, f_2 f_1). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В дальнейшем будем использовать также представление $f = q, \sigma$, где $\sigma = \pm 1$ различает состояния, сопряженные относительно операции отражения времени:

$$\hat{T} a_{q\sigma}^+ \hat{T}^{-1} = s_\sigma a_{q-\sigma}. \tag{3}$$

Здесь $\hat{T}$ — оператор обращения времени, а коэффициенты s_σ обладают следующими свойствами:

$$s_\sigma s_{-\sigma} = -1; \quad s_\sigma^2 = 1. \tag{4}$$

Используя (3), можно показать, что из инвариантности гамильтониана относительно отражения времени следуют равенства:

$$\left.\begin{aligned} &I(q\sigma,\ q'\sigma') = I^*(q-\sigma,\ q'-\sigma')\, s_\sigma s_{\sigma'};\\ &G(q_1\sigma_1,\ q_2\sigma_2;\ q_2'\sigma_2',\ q_1'\sigma_1') = G^*(q_1-\sigma_1,\ q_2-\sigma_2;\\ &\qquad q_2'-\sigma_2',\ q_1'-\sigma_1')\, s_{\sigma 2} s_{\sigma_1} s_{\sigma_1'} s_{\sigma_2'}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Введем и рассмотрим функции

$$F(f_1,\ f_2) = \langle a_{f_1}^+ a_{f_2}\rangle;\ \Phi(f_1,\ f_2) = \langle a_{f_1} a_{f_2}\rangle. \tag{6}$$

Усреднение выполняется по основному состоянию системы. Заметим, что из уравнений движения вытекают следующие точные соотношения для функций F, Φ

$$\left.\begin{aligned} &i\frac{\partial}{\partial t} F(f_1,\ f_2) = \langle [a_{f_1}^+ a_{f_2},\ H]\rangle \equiv \mathfrak{B}(f_1,\ f_2);\\ &i\frac{\partial}{\partial t} \Phi(f_1,\ f_2) = \langle [a_{f_1} a_{f_2},\ H]\rangle \equiv \mathfrak{A}(f_1,\ f_2). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В методе самосогласованного поля $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно выразить через функции F, Φ [1, 2]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(f_1, f_2) = &\sum_f \{\xi(f_1, f)\Phi(f, f_2) + \xi(f_2, f)\Phi(f_1, f)\} - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{ff_1'f_2'} \Phi(f_2', f_1')\{G(f_1 f;\ f_2' f_1')F(f, f_2) + G(f, f_2;\ f_2' f_1')\times \\ &\times F(f, f_1)\} + \frac{1}{2}\sum_{f_1' f_2'} \Phi(f_2', f_1')\, G(f_1 f_2;\ f_2' f_1'); \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(f_1, f_2) = &\sum_f \{\xi(f_2, f)F(f_1, f) - \xi(f, f_1)F(f, f_2)\} + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{ff_1'f_2'} \{\Phi^*(f_1, f)\, G(f_2 f;\ f_2' f_1')\,\Phi(f_2', f_1') - \\ &-\Phi(f_2, f)\, G(f_1 f;\ f_2' f_1')\,\Phi^*(f_2', f_1'), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\xi(f, f') = T(f, f') - \sum_{f_1 f_2} G(ff_1;\ f_2 f')\, F(f_1, f_2). \tag{10}$$

Функции F, Φ не являются независимыми, а связаны друг с другом соотношениями

$$\left.\begin{aligned} F(f_1, f_2) &= \sum_f \{F(f_1, f) F(f, f_2) + \Phi^*(f, f_1)\Phi(f, f_2)\}; \\ 0 &= \sum_f \{F(f_1, f)\Phi(f, f_2) + F(f_2, f)\Phi(f, f_1)\}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Если нас интересует не зависящее от времени основное состояние, то вместо уравнений (3) нужно решать следующие уравнения [2]:

$$\mathfrak{A}(f_1, f_2) = 0; \quad \mathfrak{B}(f_1, f_2) = 0. \qquad (12)$$

Решения уравнений (12) обозначим через $F_0(f_1, f_2)$, $\Phi_0(f_1, f_2)$. Те же результаты, что и при решении уравнений (12), можно получить, предположив, что основное состояние системы является вакуумом квазичастиц, связанных с обычными фермионами общим преобразованием Н. Н Боголюбова:

$$a_f = \sum_\nu \{u(f, \nu)\alpha_\nu + v(f, \nu)\alpha_\nu^+\}, \qquad (13)$$

коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\nu (u(f, \nu)u^*(f', \nu) + v(f, \nu)v^*(f', \nu)) = \delta_{ff'}; \\ &\sum_\nu (u(f, \nu)v(f', \nu) + u(f', \nu)v(f, \nu)) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Если нас интересует спектр элементарных возбуждений, связанных с малыми колебаниями около основного состояния, то необходимо рассмотреть малые приращения к функциям F_0, Φ_0:

$$\left.\begin{aligned} F(f, f') &= F_0(f, f') + \delta F(f, f'); \\ \Phi(f, f') &= \Phi_0(f, f') + \delta\Phi(f, f'). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Уравнения для δF, $\delta\Phi$ можно получить из (7):

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\delta F(f, f') &= \delta\mathfrak{B}(f, f'); \\ i\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi(f, f') &= \delta\mathfrak{B}(f, f'). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Кроме того, δF и $\delta\Phi$ не независимы, а связаны друг с другом дополнительными соотношениями, вытекающими из (11):

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Big\{F(f_1, f_2) - \sum_f F(f_1, f)F(f, f_2) - \sum_f \Phi^*(f, f_1)\Phi(f, f_2)\Big\} = 0; \\ &\delta\Big\{\sum_f F(f_1; f)\Phi(f, f_2) + \sum_f F(f_2, f)\Phi(f, f_1)\Big\} = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Так как существует связь между δF и $\delta\Phi$, то удобнее представить их выражениями через новые независимые неизвестные, которые автоматически удовлетворяют соотношениям (17).

Используя каноническое преобразование (13), запишем F, F_0, Φ и Φ_0 в виде:

$$F(f_1, f_2) = \langle a^+_{f_1} a_{f_2} \rangle = \sum_g v^*(f_1, g)\, v(f_2, g) +$$
$$+ \sum_{g_1 g_2} \{u^*(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle -$$
$$- v^*(f_1, g_1)\, v(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_2} \alpha_{g_1} \rangle + u^*(f_1, g_1) \times$$
$$\times v(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_1} \alpha^+_{g_2} \rangle + v^*(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2) \langle \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle\}; \qquad (18)$$

$$F_0(f_1, f_2) = \sum_g v^*(f_1, g)\, v(f_2, g); \qquad (19)$$

$$\Phi(f_1, f_2) = \langle a_{f_1} a_{f_2} \rangle = \sum_g u(f_1, g)\, v(f_2, g) +$$
$$+ \sum_{g_1 g_2} \{v(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle - u(f_1, g_1) \times$$
$$\times v(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_2} \alpha_{g_1} \rangle + u(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2) \langle \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle +$$
$$+ v(f_1, g_1)\, v(f_2, g_2) \langle \alpha^+_{g_1} \alpha^+_{g_2} \rangle\}; \qquad (20)$$

$$\Phi_0(f_1, f_2) = \sum_g u(f_1, g)\, v(f_2, g). \qquad (21)$$

В методе самосогласованного поля при нестационарной постановке задачи волновая функция основного состояния ядра перестает быть квазичастичным вакуумом. Однако среднее число квазичастиц в основном состоянии мало, поэтому считаем, что приближенно оно равно нулю:

$$\langle \alpha^+_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle = 0. \qquad (22)$$

Для характеристики отклонения волновой функции от квазичастичного вакуума введем коэффициенты

$$\mu(g_1, g_2) = \langle \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} \rangle, \qquad (23)$$

удовлетворяющие условию:

$$\mu(g_1, g_2) = -\mu(g_2, g_1). \qquad (24)$$

Выразим δF и $\delta\Phi$ через μ, μ^*:

$$\delta F(f_1, f_2) = \sum_{g_1 g_2} \{v^*(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2)\, \mu(g_1, g_2) +$$
$$+ u^*(f_1, g_1)\, v(f_2, g_2)\, \mu^*(g_2, g_1)\}; \qquad (25)$$

$$\delta\Phi(f_1, f_2) = \sum_{g_1 g_2} \{u(f_1, g_1)\, u(f_2, g_2)\, \mu(g_1, g_2) +$$
$$+ v(f_1, g_1)\, v(f_2, g_2)\, \mu^*(g_2, g_1)\}. \qquad (26)$$

Для того чтобы получить уравнения для μ, запишем μ в терминах δF, $\delta\Phi$. Умножим (25) на $v(f_1, g)$, а (26) — на $u^*(f_1, g)$, сложим их и просуммируем по f_1. Используя условия ортонормировки (14), получаем:

$$\sum_{f_1}\{v(f_1, g)\,\delta F(f_1, f_2)+u^*(f_1, g)\,\delta\Phi(f_1, f_2)\}=$$
$$=\sum_{f_1 g_1 g_2}\{[v(f_1, g)\,v^*(f_1, g_1)+u^*(f_1, g)\,u(f_1, g_1)]\times$$
$$\times u(f_2, g_2)\,\mu(g_1, g_2)+[v(f_1, g)\,u^*(f_1, g_1)+u^*(f_1, g)\,v(f_1, g_1)]\times$$
$$\times v(f_2, g_2)\,\mu^*(g_2, g_1)=\sum_{g_2}u(f_2, g_2)\,\mu(g, g_2). \tag{27}$$

Аналогичным образом умножим (25) на $u(f_1, g)$, (26) на $v^*(f_1, g)$, сложим их и просуммируем по f_1 (с учетом (14)), тогда получим:

$$\sum_{f_1}\{u^*(f_1, g)\,\delta F^*(f_1, f_2)+v(f_1, g)\,\delta\Phi^*(f_1, f_2)\}=$$
$$=-\sum_{g_2}v^*(f_2, g_2)\,\mu(g, g_2). \tag{28}$$

Воспользуемся этим приемом еще раз: умножим (27) на $u^*(f_2, g')$, (28) на $v(f_2, g')$, вычтем (28) из (27) и просуммируем по f_2. Тогда

$$\mu(g, g')=\sum_{f_1 f_2}\{v(f_1, g)\,u^*(f_2, g')\,\delta F(f_1, f_2)+u^*(f_1, g)\times$$
$$\times u^*(f_2, g')\,\delta\Phi(f_1, f_2)-u^*(f_1, g)\,v(f_2, g')\,\delta F^*(f_1, f_2)-$$
$$-v(f_1, g)\,v(f_2, g')\,\delta\Phi^*(f_1, f_2)\}.$$

Продифференцировав это выражение по t и приняв во внимание (16), получим уравнение для μ:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mu(g_1, g_2)=\sum_{f_1 f_2}\{u^*(f_1, g_1)\,u^*(f_2, g_2)\,\delta\mathfrak{A}(f_1, f_2)+$$
$$+v(f_1, g_1)\,v(f_2, g_2)\,\delta\mathfrak{A}^*(f_1, f_2)+v(f_1, g_1)\,u^*(f_2, g_2)\times$$
$$\times\delta\mathfrak{B}(f_1, f_2)+u^*(f_1, g_1)\,v(f_2, g_2)\,\delta\mathfrak{B}(f_1, f_2)\}. \tag{29}$$

Получим уравнение для μ в явном виде. Для этого выразим $\delta\mathfrak{A}$ и $\delta\mathfrak{B}$ через μ. Из (8) и (9) находим:

$$\delta\mathfrak{A}(f_1, f_2)=\sum_{f}\{\delta\xi(f_1, f)\,\Phi_0(f, f_2)+\xi_0(f_1, f)\,\delta\Phi(f, f_2)+$$
$$+\delta\Phi(f_1, f)\,\xi_0(f_2, f)+\Phi_0(f_1, f)\,\delta\xi(f_2, f)-\frac{1}{2}\sum_{f f_1' f_2'}\delta\Phi\left(f_2', f_1'\right)\times$$
$$\times\{G(f_1 f;\ f_2' f_1')\,F_0(f, f_2)+G(f f_2;\ f_2' f_1')\,F_0(f_1, f)\}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{ff_1'f_2'}\Phi_0(f_2', f_1')\{G(f_1f; f_2'f_1')\,\delta F(f, f_2)+G(ff_2; f_2'f_1')\times$$

$$\times\,\delta F(f, f_1)+\frac{1}{2}\sum_{f_1'f_2'}\delta\Phi(f_2', f_1')\,G(f_1f_2; f_2'f_1'); \tag{30}$$

$$\delta\mathfrak{B}(f_1, f_2)=\sum_{f}\{\delta\xi(f_2, f)\,F_0(f_1, f)+\xi_0(f_2, f)\,\delta F(f_1, f)-$$

$$-\delta\xi(f, f_1)\,F_0(f, f_2)-\xi_0(f, f_1)\,\delta F(f, f_2)\}+\frac{1}{2}\sum_{ff_1'f_2'}G(f_2f; f_2'f_1')\times$$

$$\times\{\delta\Phi^*(f_1, f)\,\Phi_0(f_2', f_1')+\Phi_0^*(f_1, f)\,\delta\Phi(f_2', f_1')\}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{ff_1'f_2'}G(f_1f; f_2'f_1')\{\delta\Phi(f_2, f)\,\Phi_0^*(f_2', f_1')+\Phi_0(f_2, f)\,\delta\Phi^*(f_2', f_1')\}, \tag{31}$$

где

$$\delta\xi(f, f')=-\sum_{f_1'f_2'}G(ff_1'; f_2'f')\,\delta F(f_1', f_2');$$

$$\xi_0(f, f')=T(f, f')-\sum_{f_1'f_2'}G(ff_1'; f_2'f')\,F_0(f_1', f_2').$$

Подставим выражения (30) и (31) в (29) и воспользуемся соотношениями (25) и (26). Группируя подобные по структуре члены и используя соотношения ортонормировки, получаем после длительных вычислений следующие уравнения:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mu(g_1, g_2)=\sum_{g'}(\Omega(g_2, g')\,\mu(g_1, g')-\Omega(g_1, g')\times$$

$$\times\,\mu(g_2, g'))+\sum_{g_1'g_2'}\{X(g_1g_2; g_1'g_2')\,\mu(g_1', g_2')+$$

$$+Y(g_1g_2; g_1'g_2')\,\mu^*(g_2', g_1')\}; \tag{32}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\mu^*(g_1, g_2)=\sum_{g'}(\Omega^*(g_2, g')\,\mu^*(g_1, g')-\Omega^*(g_1, g')\,\mu^*(g_2, g'))+$$

$$+\sum_{g_1'g_2'}\{X^*(g_1g_2; g_1'g_2')\,\mu^*(g_1', g_2')+Y^*(g_1, g_2; g_1'g_2')\,\mu(g_2', g_1')\}; \tag{33}$$

$$\Omega(g, g')=\sum_{ff'}\xi_0(f, f')\{u^*(f, g)\,u(f', g')-v^*(f, g)\,v(f', g')\}-$$

$$-\sum_{f_1f_2}\{c^0_{f_1f_2}\,u^*(f_1, g)\,v^*(f_2, g')+c^{0*}_{f_1f_2}\,v(f_2, g)\,u(f_1, g')\}, \tag{34}$$

где

$$c^0_{f_1f_2}=\frac{1}{2}\sum_{f'_1f'_2}G(f_1f_2;\ f'_2f'_1)\,\Phi_0(f'_2,f'_1);$$

$$X(g_1g_2;\ g'_1g'_2)=-\frac{1}{2}\sum_{f_1f_2f'_1f'_2}G(f_1f_2;f'_2f'_1)\times$$
$$\times\{u(f_1,g_2)\,u(f_2,g_1)\,u(f'_1,g'_2)\,u(f'_2,g'_1)+v(f'_1,g_1)\times$$
$$\times v(f'_2,g_2)\,v(f_1,g'_1)\,v(f_2,g'_2)+(v(f'_1,g_1)\,u(f_1,g_2)-$$
$$-u(f_1,g_1)\,v(f'_1,g_2))\,(v(f_2,g'_1)\,u(f'_2,g'_2)-v(f_2,g'_2)\,u(f'_2,g'_1))\};\tag{35}$$

$$Y(g_1g_2;\ g'_1g'_2)=-\frac{1}{2}\sum_{f_1f_2f'_1f'_2}G(f_1f_2;\ f'_2f_1)\{u(f_2,g_1)\times$$
$$\times u(f_1,g_2)\,v(f'_2,g'_1)\,v(f'_1,g'_2)+v(f'_1,g_1)\,v(f'_2,g_2)\times$$
$$\times u(f_2,g'_2)\,u(f_1,g'_1)+(v(f'_1,g_1)\,u(f_1,g_2)-v(f'_1,g_2)\times$$
$$\times u(f_1,g_1))\,(u(f_2,g'_1)\,v(f'_2,g'_2)-u(f_2,g'_2)\,v(f'_1,g'_1))\}.\tag{36}$$

Решения однородных уравнений (32) и (33) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}\mu(g_1,g_2)&=\sum_\omega e^{-i\omega t}\,\psi_\omega(g_1,g_2);\\ \mu^*(g_1,g_2)&=\sum_\omega e^{-i\omega t}\,\varphi_\omega(g_1,g_2),\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

причем $\varphi_\omega=\psi^*_{-\omega}$.

Функции ψ_ω и φ_ω обладают свойствами

$$\psi_\omega(g_1,g_2)=-\psi_\omega(g_2,g_1),\quad \varphi_\omega(g_1,g_2)=-\varphi_\omega(g_2,g_1).\tag{38}$$

Подставив (37) в уравнения (32) и (33), получим уравнения для определения спектра элементарных возбуждений:

$$\omega\psi_\omega(g_1,g_2)=\sum_{g'}\{\Omega(g_2,g')\,\psi_\omega(g_1,g')-\Omega(g_1,g')\times$$
$$\times\psi_\omega(g_2,g')\}+\sum_{g'_1g'_2}\{X(g_1g_2;\ g'_1g'_2)\,\psi_\omega(g'_1,g'_2)-$$
$$-Y(g_1g_2;\ g'_1g'_2)\,\varphi_\omega(g'_1,g'_2)\};\tag{39}$$

$$-\omega\varphi_\omega(g_1,g_2)=\sum_{g'}\{\Omega^*(g_2,g')\,\varphi_\omega(g_1,g')-\Omega^*(g_1,g')\,\varphi_\omega(g_2,g')\}+$$
$$+\sum_{g'_1g'_2}\{X^*(g_1g_2;\ g'_1g'_2)\,\varphi_\omega(g'_1,g'_2)-$$
$$-Y^*(g_1g_2;\ g'_1,g'_2)\,\psi_\omega(g'_1,g'_2)\}.\tag{40}$$

Эти уравнения впервые выведены в работе [1]. Отметим, что если ψ_ω, φ_ω и ω являются решениями уравнений (39), (40), то преобразование

$$\omega \to -\omega, \quad \psi_\omega \to \varphi_\omega^*, \quad \varphi_\omega \to \psi_\omega^*$$

опять приводит к решению той же системы.

Уравнения (39) и (40) получены без каких-либо предположений о характере взаимодействия частиц и структуре основного состояния. В дальнейшем будем считать, что функции I и G вещественны, а функции u, v, ξ_0 и вещественны, и диагональны:

$$\left.\begin{aligned} u(f, g) &= u_f\,\delta_{fg}; \quad u_f \equiv u_{q\sigma} = u_q; \quad u_f^* = u_f; \\ v(f, g) &= v_f\delta_{-fg}; \quad v_f \equiv v_{q\sigma} = s_\sigma v_q; \quad v_f^* = v_f; \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\xi_0(f, f') = \xi(f)\,\delta_{ff'}, \quad \xi(f) = \xi^*(f); \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{ff'}^0 &= c_{ff'}^{0*} = c_f\,\delta_{-f,\,f'}; \\ c_f &= \frac{1}{2}\sum_{f'} G(f, -f; -f', f')\,u_{f'}v_{f'}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega(g, g') &= \sum_{ff'} \xi(f)\,\delta_{ff'}\{u_f\,\delta_{fg}u_{f'}\,\delta_{f'g'} - v_f\,\delta_{-fg}v_{f'}\,\delta_{-f'g'}\} - \\ &- \sum_{f_1f_2} c_{f_1}\,\delta_{-f_1f_2}\{u_{f_1}\,\delta_{f_1g}v_{f_2}\,\delta_{-f_2g'} + u_{f_1}\,\delta_{f_1g'}v_{f_2}\,\delta_{-f_2g}\} = \\ &= \delta_{gg'}\{\xi(g)(u_g^2 - v_g^2) + 2c_g u_g v_g\}. \end{aligned}$$

Используя результаты сверхтекучей модели ядра, получаем

$$\sqrt{\Omega(g, g')} = \delta_{gg'}\,\varepsilon(g); \quad \varepsilon(g) = \sqrt{c_g^2 + \xi^2(g)}. \tag{44}$$

В этом же приближении имеем:

$$\begin{aligned} X(g_1g_2; g_1'g_2') &= -\frac{1}{2}G(g_1g_2; g_2'g_1')\,u_{g_1}u_{g_2}u_{g_2'}u_{g_1'} - \\ &- \frac{1}{2}G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1')\,v_{g_1}v_{g_2}v_{g_1'}v_{g_2'} - \\ &- \frac{1}{2}G(g_1, -g_2'; g_1', -g_2)\,u_{g_1}v_{g_2}u_{g_1'}v_{g_2'} - \\ &- \frac{1}{2}G(-g_1, g_2'; -g_1'g_2)\,v_{g_1}u_{g_2}v_{g_1'}u_{g_2'} + \\ &+ \frac{1}{2}G(g_1, -g_1'; g_2', -g_2)\,u_{g_1}v_{g_2}u_{g_2'}v_{g_1'} + \\ &+ \frac{1}{2}G(-g_1, g_1'; -g_2', g_2)\,v_{g_1}u_{g_2}v_{g_2'}u_{g_1'}; \end{aligned} \tag{45}$$

$$Y(g_1 g_2; -g_1', -g_2') = -\frac{1}{2} G(g_1 g_2; g_2' g_1') u_{g_1} u_{g_2} v_{g_1'} v_{g_2'} -$$
$$-\frac{1}{2} G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1') v_{g_1} v_{g_2} u_{g_1'} u_{g_2'} -$$
$$-\frac{1}{2} G(g_1, -g_2'; g_1', -g_2) u_{g_1} v_{g_2} u_{g_2'} v_{g_1'} +$$
$$+\frac{1}{2} G(-g_1, g_2'; -g_1', g_2) v_{g_1} u_{g_2} u_{g_1'} v_{g_2'} -$$
$$-\frac{1}{2} G(g_1, -g_1'; g_2', -g_2) u_{g_1} v_{g_2} u_{g_1'} v_{g_2'} -$$
$$-\frac{1}{2} G(-g_1, g_1'; -g_2', g_2) v_{g_1} u_{g_2} v_{g_1'} u_{g_2'}; \tag{46}$$
$$X^* = X; \quad Y^* = Y.$$

После подстановки соотношений (44) в уравнения (39) и (40) имеем:

$$\omega\psi_\omega(g_1, g_2) = (\varepsilon(g_1) + \varepsilon(g_2))\,\psi_\omega(g_1, g_2) +$$
$$+ \sum_{g_1' g_2'} \{X(g_1 g_2; g_1' g_2')\,\psi_\omega(g_1', g_2') -$$
$$-Y(g_1, g_2; -g_1', -g_2')\,\varphi_\omega(-g_1', -g_2')\}; \tag{47}$$

$$-\omega\varphi_\omega(-g_1, -g_2) = (\varepsilon(g_1) + \varepsilon(g_2))\,\varphi_\omega(-g_1, -g_2) +$$
$$+ \sum_{g_1' g_2'} \{X(-g_1, -g_2; -g_1', -g_2')\,\varphi_\omega(-g_1', -g_2') -$$
$$-Y(-g_1, -g_2; g_1' g_2')\,\psi_\omega(g_1', g_2')\}. \tag{48}$$

Введем новые неизвестные:

$$Z^{(\pm)}(g_1, g_2) = \frac{1}{2}\{\psi_\omega(g_1, g_2) \pm \varphi_\omega(-g_1, -g_2)\}, \tag{49}$$

уравнения для которых имеют вид:

$$\omega Z^{(\mp)}(g_1, g_2) = (\varepsilon(g_1) + \varepsilon(g_2))\, Z^{(\pm)}(g_1, g_2) +$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{g_1' g_2'} \{[X(g_1 g_2; g_1' g_2') + X(-g_1, -g_2; -g_1', -g_2')] \mp$$
$$\mp [Y(+g_1, +g_2; -g_1', -g_2') + Y(-g_1, -g_2; +g_1' g_2')]\} \times$$
$$\times Z^{(\pm)}(g_1' g_2') + \frac{1}{2} \sum_{g_1' g_2'} \{[X(g_1 g_2; g_1' g_2') -$$
$$-X(-g_1, -g_2; -g_1', -g_2') \pm [Y(g_1 g_2; -g_1', -g_2') -$$
$$-Y(-g_1, -g_2; g_1' g_2')]\}\, Z^{(\mp)}(g_1', g_2'), \tag{50}$$

причем

$$
\begin{gathered}
\left[X(g_1 g_2; g_1' g_2') + X(-g_1, -g_2, -g_1', -g_2')\right] \mp \left[Y(g_1 g_2; -g_1', -g_2') + \right. \\
\left. + Y(-g_1, -g_2; g_1' g_2')\right] = -\frac{1}{2}\left[G(g_1 g_2; g_2' g_1') + \right. \\
\left. + G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1')\right] v^{(\pm)}_{g_1 g_2} v^{(\pm)}_{g_1' g_2'} - \\
-\frac{1}{2}\left\{\left[G(g_1, -g_2'; g_1', -g_2) \mp G(g_1, -g_1'; g_2', -g_2)\right] + \right. \\
\left. + \left[G(-g_1, g_2'; -g_1', g_2) \mp G(-g_1, g_1'; -g_2', g_2)\right]\right\} u^{(\pm)}_{g_1 g_2} u^{(\pm)}_{g_1' g_2'}; \qquad (51')
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left[X(g_1 g_2; g_1' g_2') - X(-g_1, -g_2; -g_1', -g_2')\right] \pm \\
\pm \left[Y(g_1, g_2; -g_1', -g_2') - Y(-g_1, -g_2; g_1', g_2')\right] = \\
= -\frac{1}{2}\left[G(g_1, g_2; g_2', g_1') - G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1')\right] \times \\
\times v^{(\pm)}_{g_1 g_2} v^{(\mp)}_{g_1' g_2'} - \frac{1}{2}\left\{\left[G(g_1, -g_2'; g_1', -g_2) \pm \right.\right. \\
\left. \pm G(g_1, -g_1'; g_2', -g_2)\right] - \left[G(-g_1, g_2'; -g_1', g_2) \pm \right. \\
\left.\left. \pm G(-g_1, g_1'; g_2', g_2)\right]\right\} u^{(\pm)}_{g_1 g_2} u^{(\mp)}_{g_1' g_2'}; \qquad (51'')
\end{gathered}
$$

$$
u^{(\pm)}_{gg'} = u_g v_{g'} \pm u_{g'} v_g, \quad v^{(\pm)}_{gg'} = u_g u_{g'} \mp v_g v_{g'}. \qquad (52)
$$

Таким образом, основное уравнение можно записать так:

$$
\begin{gathered}
\omega Z^{(\pm)}(g_1, g_2) = \left(\varepsilon(g_1) + \varepsilon(g_2)\right) Z^{(\mp)}(g_1, g_2) - \\
-\frac{1}{4}\sum_{g_1' g_2'}\left[G(g_1, g_2; g_2', g_1') + G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1')\right] \times \\
\times v^{(\mp)}_{g_1 g_2} v^{(\mp)}_{g_1' g_2'} Z^{(\mp)}(g_1', g_2') - \frac{1}{4}\sum_{g_1' g_2'}\left\{\left[G(g_1, -g_2'; g_1', -g_2) \mp \right.\right. \\
\left. \mp G(g_1, -g_1'; g_2', -g_2)\right] + \left[G(-g_1, g_2'; -g_1', g_2) \mp \right. \\
\left.\left. \mp G(-g_1, g_1'; -g_2', g_2)\right]\right\} u^{(\mp)}_{g_1 g_2} u^{(\mp)}_{g_1' g_2'} Z^{(\mp)}(g_1', g_2') - \\
-\frac{1}{4}\sum_{g_1' g_2'}\left[G(g_1 g_2; g_2', g_1') - G(-g_1, -g_2; -g_2', -g_1')\right] \times \\
\times v^{(\mp)}_{g_1 g_2} v^{(\pm)}_{g_1' g_2'} Z^{(\pm)}(g_1', g_2') - \frac{1}{4}\sum_{g_1' g_2'}\left\{\left[G(g_1 - g_2'; g_1' - g_2) \pm \right.\right. \\
\left. \pm G(g_1 - g_1'; g_2' - g_2)\right] - \left[G(-g_1 g_2'; -g_1' g_2) \pm \right. \\
\left.\left. \pm G(-g_1, g_1'; -g_2' g_2)\right]\right\} u^{(\mp)}_{g_1 g_2} u^{(\pm)}_{g_1' g_2'} Z^{(\pm)}(g_1', g_2'). \qquad (53)
\end{gathered}
$$

Перепишем уравнение (53) в q, σ-представлении, воспользовавшись соотношениями (5):

$$\omega Z^{(\mp)}(q_1\sigma_1, q_2\sigma_2) = \left(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2)\right) Z^{(\pm)}(q_1\sigma_1, q_2\sigma_2) - \frac{1}{4}\times$$

$$\times \sum_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'} G(q_1\sigma_1, q_2\sigma_2; q_2'\sigma_2', q_1'\sigma_1')\left(1+s_{\sigma_1}s_{\sigma_2}s_{\sigma_1'}s_{\sigma_2'}\right)\times$$

$$\times v^{(\pm)}_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} v^{(\pm)}_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2') - \frac{1}{4}\sum_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'}\times$$

$$\times G(q_1\sigma_1, q_2\sigma_2; q_2'\sigma_2', q_1'\sigma_1')\left(1-s_{\sigma_1}s_{\sigma_2}s_{\sigma_1'}s_{\sigma_2'}\right) v^{(\pm)}_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2}\times$$

$$\times v^{(\mp)}_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'} Z^{(\mp)}(q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2') - \frac{1}{4}\times$$

$$\times \sum_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'}\left[G(q_1\sigma_1, q_2'-\sigma_2'; q_1'\sigma_1', q_2-\sigma_2)\mp\right.$$

$$\left.\mp G(q_1\sigma_1, q_1'-\sigma_1'; q_2'\sigma_2', q_2-\sigma_2)\right]\left(1+s_{\sigma_1}s_{\sigma_2}s_{\sigma_1'}s_{\sigma_2'}\right)\times$$

$$\times u^{(\pm)}_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} u^{(\pm)}_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2') -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'}\left[G(q_1\sigma_1, q_2'-\sigma_2'; q_1'\sigma_1', q_2-\sigma_2)\pm\right.$$

$$\left.\pm G(q_1\sigma_1, q_1'-\sigma_1'; q_2'\sigma_2', q_2-\sigma_2)\right]\left(1-s_{\sigma_1}s_{\sigma_2}s_{\sigma_1'}s_{\sigma_2'}\right)\times$$

$$\times u^{(\pm)}_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} u^{(\mp)}_{q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'} Z^{(\mp)}(q_1'\sigma_1', q_2'\sigma_2'). \qquad (54)$$

Распишем уравнение (54) для случаев $\sigma_1=\sigma_2$, $\sigma_1=-\sigma_2$, используя соотношения (41) и свойства коэффициентов s_σ. Из (41) следует, что

$$u^{(\pm)}_{q\sigma, q'\sigma} = s_\sigma\left(u_q v_{q'} \pm u_{q'} v_q\right) \equiv s_\sigma u^{(\pm)}_{qq'};$$

$$u^{(\pm)}_{q\sigma, q'-\sigma} = s_{-\sigma}\left(u_q v_{q'} \mp u_{q'} v_q\right) \equiv s_{-\sigma} u^{(\mp)}_{qq'};$$

$$v^{(\pm)}_{q\sigma, q'\sigma} = u_q u_{q'} \mp v_q v_{q'} \equiv v^{(\pm)}_{qq'};$$

$$v^{(\pm)}_{q\sigma, q'-\sigma} = u_q u_{q'} \pm v_q v_{q'} \equiv v^{(\mp)}_{qq'}.$$

Применяя эти равенства, получаем:

$$\omega Z^{(\mp)}(q_1\sigma, q_2\sigma) = [\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2)]\, Z^{(\pm)}(q_1\sigma, q_2\sigma) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{q_1' q_2' \sigma'} G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma')\, v^{(\pm)}_{q_1q_2} v^{(\pm)}_{q_1'q_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma', q_2'\sigma') -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{g_1' g_2' \sigma'} G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'-\sigma', q_1'\sigma') v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\mp)}(q_1'\sigma', q_2'-\sigma') -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{q_1' q_2' \sigma'} \left[G(q_1\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'\sigma', q_2-\sigma) \mp\right.$$

$$\left.\mp G(q_1\sigma, q_1'-\sigma'; q_2'\sigma', q_2-\sigma)\right] s_\sigma s_{-\sigma'} u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma', q_2'\sigma') -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{q_1' q_2' \sigma'} \left[G(q_1\sigma, q_2^1-\sigma'; q_1'\sigma', q_2-\sigma) \pm\right.$$

$$\left.\pm G(q_1\sigma, q_1'-\sigma'; q_2'-\sigma', q_2-\sigma)\right] s_\sigma s_{-\sigma'} \times$$

$$\times u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma', q_2'-\sigma'); \qquad (55)$$

$$\omega Z^{(\pm)}(q_1\sigma, q_2-\sigma) = [\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2)] Z^{(\mp)}(q_1\sigma, q_2-\sigma) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{q_1' q_2' \sigma'} G(q_1\sigma, q_2-\sigma; q_2'-\sigma', q_1'\sigma') v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \times$$

$$\times Z^{(\mp)}(q_1'\sigma', q_2'-\sigma') - \frac{1}{2}\sum_{q_1' q_2' \sigma'} G(q_1\sigma, q_2-\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma') \times$$

$$\times v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\mp)}(q_1'\sigma', q_2'\sigma') - \frac{1}{2}\times$$

$$\times \sum_{q_1' q_2' \sigma'} \left[G(q_1\sigma, q_2'\sigma'; q_1'\sigma', q_2\sigma) \pm G(q_1\sigma, q_1'-\sigma'; q_2'-\right.$$

$$\left.-\sigma', q_2\sigma)\right] \times s_\sigma s_{\sigma'} u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\mp)}(q_1'\sigma', q_2'-\sigma') - \frac{1}{2}\times$$

$$\times \sum_{q_1' q_2' \sigma'} \left[G(q_1\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'\sigma', q_2\sigma) \mp G(q_1\sigma, q_1'-\right.$$

$$\left.-\sigma'; q_2'\sigma', q_2\sigma)\right] \times s_\sigma s_{-\sigma'} u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma', q_2'\sigma'). \qquad (56)$$

При выводе уравнений (55) и (56) мы воспользовались тем, что в (54) при суммировании по σ_1', σ_2' половина слагаемых обращается в нуль из-за присутствия множителей $\left(1 \pm s_{\sigma_2} s_{\sigma_2} s_{\sigma_1'} s_{\sigma_2'}\right)$.

С помощью соотношений (4) и (5) можно показать, что коэффициенты

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma');\\
&\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'-\sigma', q_1'\sigma')s_{\sigma'};\\
&\sum_\sigma s_\sigma G(q_1\sigma, q_2-\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma');\\
&\sum_\sigma s_\sigma G(q_1\sigma, q_2-\sigma; q_2'-\sigma', q_1'\sigma')s_{\sigma'};\\
&\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2'\sigma'; q_1'\sigma', q_2\sigma);\\
&\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'\sigma'; q_2\sigma)s_{-\sigma'};\\
&\sum_\sigma s_{-\sigma} G(q_1\sigma, q_2'\sigma'; q_1'\sigma', q_2-\sigma);\\
&\sum_\sigma s_{-\sigma} G(q_1\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'\sigma', q_2-\sigma)s_{-\sigma'}
\end{aligned}\right\}\quad(57)$$

не зависят от σ'. Например,

$$\sum_\sigma s_{-\sigma} G(q_1\sigma, q_2'\sigma'; q_1'\sigma', q_2-\sigma) = \sum_\sigma s_{-\sigma}s_\sigma s_{-\sigma}s_{\sigma'}^2 \times$$
$$\times G(q_1-\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'-\sigma', q_2\sigma) =$$
$$= \sum_\sigma s_\sigma G(q_1-\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'-\sigma', q_2\sigma) =$$
$$= \sum_\sigma s_{-\sigma} G(q_1\sigma, q_2'-\sigma'; q_1'-\sigma', q_2-\sigma).$$

Поэтому введем для коэффициентов (57) новые обозначения, отражающие это свойство:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma') \equiv\\
&\qquad\equiv G^\xi(q_1+, q_2+; q_2'+, q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_\sigma G(q_1\sigma, q_2\sigma; q_2'-\sigma', q_1'\sigma')s_{\sigma'} \equiv\\
&\qquad\equiv G^\xi(q_1+, q_2+; q_2'-, q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_\sigma s_\sigma G(q_1\sigma, q_2-\sigma; q_2'\sigma', q_1'\sigma') \equiv\\
&\qquad\equiv G^\xi(q_1+, q_2-; q_2'+, q_1'+);
\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma} s_{\sigma} G\left(q_1\sigma, q_2-\sigma;\ q_2'-\sigma',\ q_1'\sigma'\right) s_{\sigma'} \equiv \\
&\qquad \equiv G^{\xi}(q_1+, q_2-;\ q_2'-,\ q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma} G\left(q_1\sigma,\ q_2'\sigma';\ q_1'\sigma',\ q_2\sigma\right) \equiv \\
&\qquad \equiv G^{\omega}(q_1+,\ q_2+;\ q_2'+, q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma} G\left(q_1\sigma,\ q_2'-\sigma';\ q_1'\sigma',\ q_2\sigma\right) s_{-\sigma'} \equiv \\
&\qquad \equiv G^{\omega}(q_1+,\ q_2+;\ q_2'-,\ q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma} s_{-\sigma} G\left(q_1\sigma, q_2'\sigma';\ q_1'\sigma',\ q_2-\sigma\right) \equiv \\
&\qquad \equiv G^{\omega}(q_1+, q_2-;\ q_2'+, q_1'+);\\
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma} s_{-\sigma} G\left(q_1\sigma, q_2'-\sigma;\ q_1'\sigma', q_2-\sigma\right) s_{-\sigma'} \equiv \\
&\qquad \equiv G^{\omega}(q_1+, q_2-;\ q_2'-,\ q_1'+).
\end{aligned}\right\} \qquad (58)
$$

Просуммируем уравнение (55) по σ, а уравнение (56) умножим на s_σ и также просуммируем по σ. Получим

$$
\begin{aligned}
&\omega\sum_{\sigma} Z^{(\mp)}(q_1\sigma, q_2\sigma) = (\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1\sigma, q_2\sigma) - \\
&-\sum_{q_1' q_2'} G^{\xi}(q_1+, q_2+;\ q_2'+, q_1'+)\, v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma, q_2'\sigma) - \\
&-\sum_{q_1' q_2'} G^{\xi}(q_1+, q_2+; q_2'-, q_1'+)\, v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} s_\sigma Z^{\mp}(q_1'\sigma, q_2'-\sigma) - \\
&-\sum_{q_1' q_2'} \left[G^{\omega}(q_1+, q_2-; q_2'-, q_1'+) \mp G^{\omega}(q_1+, q_2-;\ q_1'-, q_2'+)\right] \times \\
&\qquad \times u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\mp)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1'\sigma, q_2'\sigma) - \\
&-\sum_{q_1' q_2'} \left[G^{(\omega)}(q_1+, q_2-;\ q_2'+, q_1'+) \pm G^{\omega}(q_1+, q_2-;\right. \\
&\left. q_1'+,\ q_2'+)\right] \times u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} s_\sigma Z^{\mp}(q_1'\sigma, q_2'-\sigma);
\end{aligned} \qquad (59)
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega\sum_{\sigma} s_\sigma Z^{(\pm)}(q_1\sigma, q_2-\sigma) = (\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\sum_{\sigma} s_\sigma Z^{\mp}(q_1\sigma, q_2-\sigma) - \\
&-\sum_{q_1' q_2'} G^{\xi}(q_1+, q_2-; q_2'-, q_1'+)\, v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} s_\sigma Z^{(\mp)} \times (q_1'\sigma, q_2'-\sigma) -
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{q_1' q_2'} G^{\xi}(q_1+, q_2-; q_2'+, q_1'+)\, v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \times$$

$$\times \sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1' \sigma, q_2' \sigma) - \sum_{q_1' q_2'} [G^{\omega}(q_1+, q_2+; q_2'+, q_1'+) \pm$$

$$\pm\; G^{\omega}(q_1+, q_2'+; q_1'+, q_2'+)]\, u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\mp)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\mp)}(q_1' \sigma, q_2' - \sigma) -$$

$$-\sum_{q_1' q_2'} [G^{\omega}(q_1+, q_2+; q_2'-, q_1'+) \mp G^{\omega}(q_1+, q_2+; q_1'-, q_2'+)] \times$$

$$\times u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1' \sigma, q_2' \sigma). \qquad (60)$$

Так как коэффициенты $\sum\limits_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'\sigma)$ антисимметричны относительно перестановки индексов q, q', а коэффициенты $\sum\limits_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'-\sigma)$—симметричны и, кроме того, для каждого типа возбуждения при фиксированных значениях q, q' только один из коэффициентов $\sum\limits_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'\sigma)$, $\sum\limits_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'-\sigma)$ отличен от нуля, то уравнения (59), (60) можно существенно упростить. Во-первых, не писать слагаемых, содержащих $\pm G^{\omega}$, воспользовавшись свойствами симметрии коэффициентов. Во-вторых, вместо неизвестных $\sum\limits_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'\sigma)$, $\sum\limits_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\pm)}(q\sigma, q'-\sigma)$ под знаком суммирования по q, q' писать их сумму, поскольку всякий раз только одно из слагаемых будет отлично от нуля. В этом случае вместо уравнений (59) (60) будем иметь уравнения:

$$\omega \sum_{\sigma} Z^{(\mp)}(q_1 \sigma, q_2 \sigma) = (\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2)) \sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1 \sigma, q_2 \sigma) -$$

$$-\sum_{q_1' q_2'} [G^{\xi}(q_1+, q_2+; q_2'+, q_1'+) + G^{\xi}(q_1+, q_2+; q_2'-, q_1'+)] \times$$

$$\times v^{(\pm)}_{q_1 q_2} v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \Big[\sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1' \sigma, q_2' \sigma) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\mp)}(q_1' \sigma, q_2' - \sigma)\Big] -$$

$$-2 \sum_{q_1' q_2'} [G^{\omega}(q_1+, q_2-; q_2'-, q_1'+) + G^{\omega}(q_1+, q_2-; q_2'+, q_1'+)] \times$$

$$\times u^{(\pm)}_{q_1 q_2} u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \Big[\sum_{\sigma} Z^{(\pm)}(q_1' \sigma, q_2' \sigma) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} Z^{(\mp)}(q_1' \sigma; q_2' - \sigma)\Big]; \qquad (61)$$

$$\omega\sum_\sigma s_\sigma Z^{(\pm)}(q_1\sigma, q_2-\sigma)=[\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2)]\sum_\sigma s_\sigma Z^{(\mp)}(q_1\sigma, q_2-\sigma)-$$
$$-\sum_{q_1'q_2'}\left[G^\xi(q_1+, q_2-;\ q_2'-, q_1'+)+G^\xi(q_1+, q_2-;\ q_2'+, q_1'+)\right]\times$$
$$\times v^{(\pm)}_{q_1q_2}v^{(\pm)}_{q_1'q_2'}\left[\sum_\sigma Z^{(\pm)}(q_1'\sigma, q_2'\sigma)+\sum_\sigma s_\sigma Z^{(\mp)}(q_1'\sigma, q_2'-\sigma)\right]-$$
$$-2\sum_{q_1'q_2'}\left[G^\omega(q_1+, q_2+;\ q_2'+, q_1'+)+G^\omega(q_1+, q_2+;\ q_2'-, q_1'+)\right]\times$$
$$\times u^{(\pm)}_{q_1q_2}u^{(\pm)}_{q_1'q_2'}\left(\sum_\sigma Z^{(\pm)}(q_1'\sigma, q_2'\sigma)+\sum_\sigma s_\sigma Z^{(\mp)}(q_1'\sigma, q_2'-\sigma)\right). \qquad (62)$$

Складывая уравнения (61) и (62), вводя новые неизвестные

$$R^{(\pm)}(q, q')=\sum_\sigma Z^{(\pm)}(q\sigma, q'\sigma)+\sum_\sigma s_\sigma Z^{(\mp)}(q\sigma, q'-\sigma)$$

и обозначения

$$G^\xi(q_1q_2;\ q_2'q_1')\equiv G^\xi(q_1+, q_2+;\ q_2'+, q_1'+)+$$
$$+G^\xi(q_1+, q_2+;\ q_2'-, q_1'+)+G^\xi(q_1+, q_2-;\ q_2'+, q_1'+)+$$
$$+G^\xi(q_1+, q_2-;\ q_2'-, q_1'+);$$
$$G^\omega(q_1q_2;\ q_2'q_1')\equiv G^\omega(q_1+, q_2+;\ q_2'+, q_1'+)+$$
$$+G^\omega(q_1+, q_2+;\ q_2'-, q_1'+)+G^\omega(q_1+, q_2-;\ q_2'+, q_1'+)+$$
$$+G^\omega(q_1+, q_2-;\ q_2'-, q_1'+),$$

получаем уравнения для новых неизвестных:

$$\omega R^{(\mp)}(q_1, q_2)=[\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2)]R^{(\pm)}(q_1, q_2)-$$
$$-\sum_{q_1'q_2'}G^\xi(q_1q_2;\ q_2'q_1')v^{(\pm)}_{q_1q_2}v^{(\pm)}_{q_1'q_2'}R^{(\pm)}(q_1', q_2')-$$
$$-2\sum_{q_1'q_2'}G^\omega(q_1q_2;\ q_2'q_1')u^{(\pm)}_{q_1q_2}u^{(\pm)}_{q_1'q_2'}R^{(\pm)}(q_1', q_2'). \qquad (63)$$

Взаимодействие в канале частица — частица влияет на свойства коллективных состояний через члены уравнения (63), пропорциональные $v^{(\pm)}_{qq'}$. Вклад взаимодействия в канале частица — дырка содержится в членах, пропорциональных $u^{(\pm)}_{qq'}$.

При изучении свойств низколежащих состояний ядер следует иметь в виду, что взаимодействие $G(g_1g_2;\ g_2'g_1')$ используется при различных значениях импульсов сталкивающихся частиц. Часть коллективных эффектов, связанных с квадрупольными, октупольными и т. п. корреляциями в канале частица — дырка, определяется взаимодействием с малым передаваемым импульсом [в рассматриваемом случае это $G^\omega(q_1q_2;\ q_2'q_1')$]. Другая часть эффектов связана с парными корреляциями сверхпроводящего типа. Она определяется взаимодействием с суммарным импульсом сталкивающихся частиц, равным нулю (G^{ξ} $(q_1q_2;\ q_2'q_1')$). Эти два взаимодействия, вообще говоря, следует считать независимыми.

При выводе уравнений (63) взаимодействие между частицами было взято в общем виде. Однако известно, что появление в ядрах вибрационных уровней связано в основном со взаимодействием в канале частица — дырка, дающим когерентный вклад. Поэтому рассмотрим для примера случай, когда влиянием взаимодействия в канале частица — частица на свойства вибрационных состояний можно пренебречь. Взаимодействие в канале частица — дырка возьмем в виде суммы мультипольного и спин-мультипольного:

$$G^{\omega}(q_1 q_2;\ q_2' q_1') = \varkappa_f f(q_1,\ q_2) f(q_1',\ q_2') + \\ + \varkappa_t t(q_1,\ q_2) t(q_1',\ q_2'), \tag{64}$$

где $f(q,\ q')$, $t(q,\ q')$ — одночастичные матричные элементы операторов мультипольного и спин-мультипольного моментов соответственно.

В этом случае уравнения (63), с учетом свойств симметрии коэффициентов $R^{(\pm)}(q,\ q')$, примут вид

$$\omega R^{(-)}(q_1,\ q_2) = [\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2)] R^{(+)}(q_1,\ q_2) - \\ -2\varkappa_f f(q_1,\ q_2) u^{(+)}_{q_1 q_2} \sum_{q_1' q_2'} f(q_1',\ q_2') u^{(+)}_{q_1' q_2'} R^{(+)}_{(q_1' q_2')}; \tag{65}$$

$$\omega R^{(+)}(q_1,\ q_2) = [\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2)] R^{(-)}(q_1,\ q_2) - \\ -2\varkappa_t - t(q_1,\ q_2) u^{(-)}_{q_1 q_2} \sum_{q_1' q_2'} t(q_1',\ q_2') u^{(-)}_{q_1' q_2'} R^{(-)}(q_1',\ q_2'). \tag{66}$$

В уравнения (65), (66) не вошли слагаемые, содержащие

$$\sum_{q_1' q_2'} t(q_1',\ q_2') u^{(+)}_{q_1' q_2'} R^{(+)}(q_1',\ q_2'),\quad \sum_{q_1' q_2'} f(q_1',\ q_2') u^{(-)}_{q_1' q_2'} R^{(-)}(q_1',\ q_2'),$$

так как эти суммы обращаются в нуль из-за симметрии коэффициентов f, t, $R^{(\pm)}$, $u^{(\pm)}$ относительно перестановки индексов q_1', q_2'. Коэффициенты $R^{(\pm)}(q_1,\ q_2)$ антисимметричны относительно перестановки индексов, если для рассматриваемого типа возбуждения заданным q_1, q_2 соответствуют одинаковые σ_1, σ_2. Коэффициенты $R^{(\pm)}(q_1,\ q_2)$ симметричны относительно перестановки индексов в противном случае. Эти свойства симметрии такие же, как у коэффициентов f, и противоположны свойствам симметрии коэффициентов t.

Преобразуем уравнения (65) и (66). Для этого введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} V^{(+)} &= 2\varkappa_f \sum_{qq'} f(q,\ q')\, u_{qq'}^{(+)} R^{(+)}(q,\ q'); \\ V^{(-)} &= 2\varkappa_t \sum_{qq'} t(q,\ q')\, u_{qq'}^{(-)} R^{(-)}(q,\ q') \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

и перепишем (65) и (66):

$$(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\, R^{(\pm)}(q_1,\ q_2)-\omega R^{(\mp)}(q_1,\ q_2)=\begin{Bmatrix} f(q_1,\ q_2) \\ t(q_1,\ q_2)\end{Bmatrix} u_{q_1 q_2}^{(\pm)} V^{\pm}. \tag{68}$$

Отсюда найдем

$$\left.\begin{aligned} R^{(+)}(q_1,\ q_2) &= \frac{f(q_1,\ q_2)\, u_{q_1 q_2}^{(+)}(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\, V^{(+)}+t(q_1,\ q_2)\, u_{q_1 q_2}^{(-)}\, \omega V^{(-)}}{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))^2-\omega^2}; \\ R^{(-)}(q_1,\ q_2) &= \frac{t(q_1,\ q_2)\, u_{q_1 q_2}^{(-)}(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\, V^{(-)}+f(q_1,\ q_2)\, u_{q_1 q_2}^{(+)}\, \omega V^{(+)}}{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))^2-\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Подставляя (69) в (67) и приравнивая нулю детерминант получившейся системы линейных уравнений, находим секулярное уравнение для определения частот коллективных колебаний:

$$\left(1-2\varkappa_f \sum_{qq'} \frac{f^2(q,\ q')\, u_{qq'}^{(+)2}(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))}{(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))^2-\omega^2}\right)\left(1-2\varkappa_t \times \right.$$
$$\left.\times \sum_{qq'} \frac{t^2(q,\ q')\, u_{qq'}^{(-)2}(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))}{(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))^2-\omega^2}\right) = 4\varkappa_t \varkappa_t \times$$
$$\times \left\{\sum_{qq'} \frac{f(q,\ q')\, t(q,\ q')\, u_{qq'}^{(+)} u_{qq'}^{(-)}\, \omega}{(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))^2-\omega^2}\right\}^2.$$

Это уравнение исследовано в работе [3] при изучении квадрупольных состояний в деформированных ядрах. Взяв $\varkappa_t = 0$, получим хорошо известное секулярное уравнение для случая мультиполь-мультипольного взаимодействия:

$$1=2\varkappa_f \sum_{qq'} \frac{f^2(q,\ q')\, u_{qq'}^{(+)2}(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))}{(\varepsilon(q)+\varepsilon(q'))^2-\omega^2}.$$

Корни этого уравнения являются энергиями вибрационных состояний. Решения уравнений данного типа найдены при изучении вибрационных состояний в сферических [4] и деформированных ядрах [5].

Кроме вибрационных уровней, появление которых связано в основном со взаимодействием в канале частица — дырка, в ядрах существуют коллективные состояния, свойства которых определяются преимущественно взаимодействием в канале частица — частица. Примером таких состояний являются парные вибрации. Чтобы рассмотреть свойства парных вибрационных состояний, положим:

$$\left.\begin{aligned} G^{\omega}(q_1 q_2;\ q_2' q_1') &= 0; \\ G^{\xi}(q_1 q_2;\ q_2' q_1') &= G\delta_{q_1 q_2}\delta_{q_1' \bar{q}_2'}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

В этом случае уравнения (63) примут вид

$$\omega R^{(\mp)}(q,\ q) = 2\varepsilon(q) R^{(\pm)}(q,\ q) - G v_{qq}^{(\pm)} \sum_{q'} v_{q'q'}^{(\pm)} R^{(\pm)}(q',\ q'). \tag{71}$$

Введем обозначения

$$d^{(\pm)} = G \sum_{q} v_{qq}^{(\pm)} R^{(\pm)}(q,\ q). \tag{72}$$

Тогда уравнения (71) запишутся так:

$$2\varepsilon(q) R^{(\pm)}(q,\ q) - \omega R^{(\mp)}(q,\ q) = v_{qq}^{(\pm)} d^{(\pm)}. \tag{73}$$

Из (73) следует

$$R^{(\pm)}(q,\ q) = \frac{2\varepsilon(q) v_{qq}^{(\pm)} d^{(\pm)} + \omega v_{qq}^{(\mp)} d^{(\mp)}}{4\varepsilon^2(q) - \omega^2}. \tag{74}$$

Подставив (74) в (72) и приравняв нулю детерминант получившейся системы линейных уравнений, найдем уравнение для определения частоты парных вибраций:

$$\left\{\sum_q \frac{2\varepsilon(q) v_{qq}^{(+)2}}{4\varepsilon^2(q) - \omega^2} - \frac{1}{G}\right\}\left\{\sum_q \frac{2\varepsilon(q)}{4\varepsilon^2(q) - \omega^2} - \frac{1}{G}\right\} = \\ = \omega^2 \left\{\sum_q \frac{v_{qq}^{(+)}}{4\varepsilon^2(q) - \omega^2}\right\}^2. \tag{75}$$

Такого типа уравнения были получены в случае сферических ядер в работе [6], а в случае деформированных ядер — в работе [7]. Эти уравнения легли в основу теории парных вибраций [8, 9].

Рассмотрим более общий случай, когда

$$G^{(\omega)}(q_1 q_2;\ q_2' q_1') = \varkappa f(q_1,\ q_2) f(q_1',\ q_2');$$

$$G^{\xi}(q_1 q_2;\ q_2' q_1') = G\delta_{q_1 q_2}\delta_{q_1' q_2'}.$$

Тогда уравнения (63) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}\omega R^{(-)}(q_1, q_2) &= (\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(+)}(q_1, q_2) - \varkappa f(q_1, q_2)u^{(+)}_{q_1q_2}\times\\ &\times\sum_{q_1' q_2'} f(q_1', q_2')u^{(+)}_{q_1'q_2'}R^{(+)}(q_1', q_2') - Gv^{(+)}_{q_1q_1}\delta_{q_1q_2}\times\\ &\times\sum_{q'} v^{(+)}_{q'q'}R^{(+)}(q', q');\\ \omega R^{(+)}(q_1, q_2) &= (\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(-)}(q_1, q_2) - G\delta_{q_1q_2}\times\\ &\sum_{q'} R^{(-)}(q', q')v^{(-)}_{q'q'}.\end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}V^{(+)} &= \varkappa\sum_{q, q'} f(q, q')u^{(+)}_{qq'}R^{(+)}(q, q');\\ d^{(\pm)} &= G\sum_{q} v^{(\pm)}_{qq}R^{(\pm)}(q, q).\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

В результате уравнения (76) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(+)}(q_1, q_2) - \omega R^{(-)}(q_1, q_2) &=\\ = f(q_1, q_2)u^{(+)}_{q_1q_2}V^{(+)} + v^{(+)}_{q_1q_1}\delta_{q_1q_2}d^{(+)};&\\ -\omega R^{(+)}(q_1, q_2) + (\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(-)}(q_1, q_2) = \delta_{q_1q_2}d^{(-)}.&\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Из (78) следует, что

$$\left.\begin{aligned}&R^{(+)}(q_1, q_2) =\\ &= \frac{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))f(q_1, q_2)u^{(+)}_{q_1q_2}V^{(+)} + 2\varepsilon(q_1)u^{(+)}_{q_1q_1}\delta_{q_1q_2}d^{(+)} + \omega\delta_{q_1q_2}d^{(-)}}{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))^2-\omega^2};\\ &R^{(-)}(q_1, q_2) =\\ &= \frac{\omega f(q_1, q_2)u^{(+)}_{q_1q_2}V^{(+)} + \omega v^{(+)}_{q_1q_1}\delta_{q_1q_2}d^{(+)} + 2\varepsilon(q_1)\delta_{q_1q_2}d^{(-)}}{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))^2-\omega^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Подставляя (79) в (77) и приравнивая нулю детерминант получившейся системы линейных уравнений, найдем уравнение для определения энергий коллективных возбуждений:

$$
\det\begin{vmatrix}
\left(\varkappa\sum\limits_{qq'}\dfrac{\varepsilon(qq')\,f^2(qq')\,\overset{(+)}{U}{}^2_{qq'}}{\varepsilon^2(qq')-\omega^2}-1\right) & \dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{f(qq)\,\overset{(+)}{U}_{qq}\,\omega}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2} & \dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{2\varepsilon(q)\,\overset{(+)}{U}_{qq}\overset{(+)}{V}_{qq}\,f(qq)}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2}\\[2ex]
\varkappa\sum\limits_q\dfrac{\omega\,\overset{(+)}{U}_{qq}\,f(qq)}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2} & \left(\dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{2\varepsilon(q)}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2}-1\right) & \dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{\omega\,\overset{(+)}{V}_{qq}}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2}\\[2ex]
\varkappa\sum\limits_q\dfrac{2\varepsilon(q)\,\overset{(+)}{U}_{qq}\overset{(+)}{V}_{qq}\,f(qq)}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2} & \dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{\omega\,\overset{(+)}{V}_{qq}}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2} & \left(\dfrac{G}{2}\sum\limits_q\dfrac{2\varepsilon(q)\,\overset{(+)}{V}{}^2_{qq}}{4\varepsilon^2(q)-\omega^2}-1\right)
\end{vmatrix}=0
$$

$$\varepsilon(qq')\equiv\varepsilon(q)+\varepsilon(q').$$

Уравнения такого типа были получены в работе [8] для квадрупольных состояний деформированных ядер.

Мы составили уравнения для собственных колебаний системы. Рассмотрим теперь колебания под влиянием слабого внешнего поля. Для этого к гамильтониану (1) добавим член

$$\sum_{ff'}\delta I(f,\ f')\,a_f^+\,a_{f'}\,, \tag{80}$$

где функция $\delta I(f,\ f')=\delta I^*(f',\ f)$ характеризует внешнее поле. Выражения $\delta\mathfrak{A}(f,\ f')$, $\delta\mathfrak{B}(f,\ f')$ следует пополнить членами

$$\delta\mathfrak{A}_{ex}(f_1,\ f_2)=\sum_f\{\delta I(f_1,\ f)\,\Phi(f,\ f_2)+\delta I(f_2,\ f)\,\Phi(f_1,\ f)\}; \tag{81}$$

$$\delta\mathfrak{B}_{ex}(f_1,\ f_2)=\sum_f\{\delta I(f_2,\ f)\,F(f_1,\ f)+\delta I(f,\ f_1)\,F(f,\ f_2)\}. \tag{81'}$$

Используя

$$\delta I(f,f')=\sum_\omega e^{-i\omega t}\,\delta I_\omega(f,f');\qquad \delta I^*(f,f')=\sum_\omega e^{-i\omega t}\,\delta I^*_{-\omega}(f,f'), \tag{82}$$

запишем уравнения (39) и (40) (в присутствии внешнего поля) в следующем виде [1]:

$$\omega\psi_\omega(g_1,\ g_2)=\sum_{g'}\{\Omega(g_2,g')\,\psi_\omega(g_1,g')-\Omega(g_1,g')\,\psi_\omega(g_2,g')\}+$$

$$+\sum_{q_1'q_2'}\{X(g_1,\ g_2;\ g_1',g_2')\,\psi_\omega(g_1',\ g_2')-Y(g_1,g_2;\ g_1',g_2')\,\varphi_\omega(g_1',g_2')\}+$$

$$+\sum_{ff'}\{v(f',\ g_1)\,u^*(f,\ g_2)-u^*(f,\ g_1)\,v(f',\ g_2)\}\,\delta I_\omega(f,\ f'); \tag{83}$$

$$-\omega\varphi_\omega(g_1, g_2)=\sum_{g'}\{\Omega^*(g_2, g')\varphi_\omega(g_1, g')-\Omega^*(g_1, g')\varphi_\omega(g_2, g')\}+$$
$$+\sum_{q_1' q_2'}\{X^*(g_1 g_2; g_1' g_2')\varphi_\omega(g_1', g_2')-Y^*(g_1 g_2; g_1' g_2')\psi_\omega(g_1', g_2')\}+$$
$$+\sum_{ff'}\{v^*(f', g_1)u(f, g_2)-u(f, g_1)v^*(f', g_2)\}\delta I^*_{-\omega}(f, f'). \qquad (84)$$

Перепишем уравнения (83) и (84) в приближении (41)—(43). Введем функции $R^{(\pm)}(q, q')$, проведем такие же выкладки, как при выводе уравнений (63), тогда получим

$$\omega R^{(\mp)}(q_1, q_2)=(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(\pm)}(q_1, q_2)-\sum_{q_1' q_2'}G^\xi(q_1 q_2; q_2' q_1')\times$$
$$\times v^{(\pm)}_{q_1 q_2}v^{(\pm)}_{q_1' q_2'}R^{(\pm)}(q_1', q_2')-2\sum_{q_1' q_2'}G^\omega(q_1, q_2; q_2', q_1')\times$$
$$\times u^{(\pm)}_{q_1 q_2}u^{(\pm)}_{q_1' q_2'}R^{(\pm)}_{q_1' q_2'}-\frac{1}{2}u^{(\pm)}_{q_1 q_2}\left[\delta I_\omega(q_1, q_2)\pm\delta I^*_{-\omega}(q_1, q_2)\right], \qquad (85)$$

где

$$\delta I_\omega(q_1, q_2)=\sum_\sigma\left(\delta I_\omega(q_1\sigma, q_2\sigma)-s_\sigma\delta I_\omega(q_1\sigma, q_2-\sigma)\right);$$
$$\delta I^*_\omega(q_1, q_2)=\sum_\sigma\left(\delta I^*_\omega(q_1\sigma, q_2\sigma)-s_\sigma\delta I^*_{-\omega}(q_1\sigma, q_2-\sigma)\right).$$

Приведем уравнения (85) к виду, близкому к тому, который дан в теории конечных ферми-систем [10]. Для этого введем

$$d^{(\pm)}(q_1, q_2)=\sum_{q_1' q_2'}G^\xi(q_1 q_2; q_2' q_1')v^{(\pm)}_{q_1' q_2'}R^{(\pm)}(q_1', q_2'); \qquad (86)$$

$$V^{(\pm)}(q_1, q_2)=\sum_{q_1' q_2'}G^\omega(q_1 q_2; q_2' q_1')u^{(\pm)}_{q_1' q_2'}R^{(\pm)}(q_1', q_2')+V_0^{(\pm)}(q_1, q_2), \qquad (87)$$

$$V_0^{(\pm)}(q_1, q_2)=\frac{1}{2}\left(\delta I_\omega(q_1, q_2)\pm\delta I^*_{-\omega}(q_1, q_2)\right). \qquad (88)$$

Тогда

$$(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))R^{(\pm)}(q_1, q_2)-\omega R^{(\mp)}(q_1, q_2)=$$
$$=v^{(\pm)}_{q_1 q_2}d^{(\pm)}(q_1, q_2)+u^{(\pm)}_{q_1 q_2}V^{(\pm)}(q_1, q_2). \qquad (89)$$

Отсюда следует

$$R^{(\pm)}(q_1, q_2)=\left[(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))^2-\omega^2\right]^{-1}\{(\varepsilon(q_1)+\varepsilon(q_2))\times$$
$$\times\left[u^{(\pm)}_{q_1 q_2}V^{(\pm)}(q_1, q_2)+v^{(\pm)}_{q_1 q_2}d^{(\pm)}(q_1, q_2)\right]+$$
$$+\omega\left[u^{(\mp)}_{q_1 q_2}V^{(\mp)}(q_1, q_2)+v^{(\mp)}_{q_1 q_2}d^{(\mp)}(q_1, q_2)\right]\}. \qquad (90)$$

Подставляя (90) в (86) и (87), получаем

$$V^{(\pm)}(q_1, q_2) = V_0^{(\pm)}(q_1, q_2) + 2\sum_{q_1' q_2'} G^{\omega}(q_1 q_2; q_2' q_1')\, u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} \times$$

$$\times \left[\left(\varepsilon(q_1') + \varepsilon(q_2')\right)^2 - \omega^2\right]^{-1} \Big\{ \left(\varepsilon(q_1') + \varepsilon(q_2')\right) \Big[u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} V^{(\pm)}(q_1', q_2') +$$

$$+ v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} d^{(\pm)}(q_1', q_2') \Big] + \omega \Big[u^{(\mp)}_{q_1', q_2'} V^{(\mp)}(q_1', q_2') + v^{(\mp)}_{q_1' q_2'} d^{(\mp)}_{q_1' q_2'} \Big] \Big\}; \quad (91)$$

$$d^{(\pm)}(q_1, q_2) = \sum_{q_1', q_2'} G^{\xi}(q_1 q_2; q_2' q_1') \frac{v^{(\pm)}_{q_1' q_2'}}{\left(\varepsilon(q_1') + \varepsilon(q_2')\right)^2 - \omega^2} \times$$

$$\times \Big\{ \left(\varepsilon(q_1') + \varepsilon(q_2')\right) \Big[u^{(\pm)}_{q_1' q_2'} V^{(\pm)}(q_1', q_2') + v^{(\pm)}_{q_1' q_2'} d^{(\pm)}(q_1', q_2') \Big] +$$

$$+ \omega \Big[u^{(\mp)}_{q_1' q_2'} V^{(\mp)}(q_1', q_2') + v^{(\mp)}_{q_1' q_2'} d^{(\mp)}(q_1', q_2') \Big] \Big\}. \quad (92)$$

Мы получили систему уравнений для четырех неизвестных функций $V^{(\pm)}$, $d^{(\pm)}$. Однако только две из них являются независимыми, как это следует из уравнений (63). Поэтому удобнее решать систему уравнений (63), а не (91) и (92).

Таким образом, мы вывели из уравнений метода самосогласованного поля уравнения теории конечных ферми-систем, которые обычно получались при помощи техники функций Грина. Уравнения же метода самосогласованного поля написаны для функций распределения $\langle \Psi^+(t, r_1)\, \Psi(t, r_2) \rangle$, $\langle \Psi(t, r_1)\, \Psi(t, r_2) \rangle$. Тем не менее полученный результат нельзя назвать неожиданным. Он является следствием общей теоремы о вариации среднего значения динамической величины [11]:

$$\delta \langle A(t) \rangle = \langle A(t) \rangle_{H+\delta H} - \langle A(t) \rangle_H =$$

$$= 2\pi \left\{ e^{-iEt} \langle\langle A, B \rangle\rangle_E \,\delta\xi + e^{iEt} \langle\langle A, B \rangle\rangle^*_{-E}\, \delta\xi^* \right\},$$

где $A(t)$ — некоторая динамическая величина в представлении Гейзенберга; B — оператор, явно от времени не зависящий; $\delta\xi$ — бесконечно малое C-число; $\langle\langle A, B \rangle\rangle_E$—функция Грина в E-представлении. Эта теорема связывает вариации функций распределения с соответствующими функциями Грина. Используя эту теорему, вводя в гамильтониан слабые внешние поля и варьируя по малому параметру, мы всегда можем получить из уравнений для функций распределения уравнения для функций Грина.

Мы показали, что среди имеющихся в микроскопической теории ядра математических методов метод самосогласованного поля является наиболее общим. Из его основных уравнений при определенных предположениях вытекают и уравнения для эффективных полей теории конечных ферми-систем, и секулярные уравнения модели с парными и мультипольными силами. Однако и метод самосогласованного поля не свободен от ограничений. Тот факт, что мы используем простые правила расщепления средних от произведений четырех фермиевских операторов и полагаем равными нулю матричные элементы $\langle \alpha_g^+ \alpha_{g'} \rangle$, означает, что нелинейные эффекты не учитываются и в таком подходе. По этой причине метод самосогласованного поля фактически оказывается эквивалентным квазибозонному приближению. Кроме того, с чисто практической точки зрения более удобным оказывается использовать волновые функции ядра как в методе приближенного вторичного квантования, а не средние от операторов, как в методе самосогласованного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. «Успехи физ. наук», **67**, 549 (1959).
2. Боголюбов Н. Н., Соловьев В. Г. Докл. АН СССР, **124**, 1011 (1959).
3. Pyatov N. I. Arkiv Fys., **36**, 667 (1967).
4. Kisslinger L., Sorensen R. A. Rev. Mod. Phys., **35**, 853 (1963).
5. Soloviev V. G. Atomic Energy Rev., **3**, 117 (1965).
6. Hogaassen—Feldman J. Nucl. Phys., **28**, 258 (1961).
7. Soloviev V. G. Nucl. Phys., **69**, 1 (1965).
8. Bohr A. Nucl. Structure Dubna Symposium 1968. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1968.
9. Sorensen B. Nucl. Phys., A134, 1 (1969).
10. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., «Наука», 1968.
11. Боголюбов Н. Н. Препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.