

ПОВЕДЕНИЕ ФОРМ-ФАКТОРА
 π -МЕЗОНА И ПРЕДЕЛ
ЕГО РАДИУСА

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хъеу

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ, ДРВ

А Н Н О Т А Ц И Я

В настоящем обзоре теоретических работ изучаются следствия общих аналитических свойств форм-фактора, которые можно проверить экспериментально. Рассмотрены следующие вопросы:

- 1) ограничения на убывание форм-фактора в физических областях каналов рассеяния и аннигиляции;
- 2) связь между поведением форм-фактора в физической области канала рассеяния и поведением его модуля на разрезе;
- 3) точные правила сумм для форм-фактора;
- 4) предел радиуса элементарных частиц.

A B S T R A C T

In this review we study the consequences of the general analytical properties of the formfactor which can be checked experimentally. The following problems are considered:

1. Lower bounds on the formfactor in the physical regions of the scattering and annihilation channels.
2. Connections between the behaviour of the formfactor in the physical region of the scattering channel and that of its modulus on the cut.
3. Exact sum rules for the formfactor.
4. Bounds on the radius of the elementary particles.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении процессов электромагнитного взаимодействия элементарных частиц можно использовать теорию возмущений и ограничиться низшим ненулевым приближением, поскольку константа электромагнитного взаимодействия мала по сравнению с единицей ($\hbar = c = 1$):

$$\frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}.$$

Однако матричные элементы процессов электромагнитного взаимодействия адронов, записанные с помощью обычных правил Фейнмана в квантовой электродинамике, зависят от сильных взаимодействий и поэтому содержат неизвестные скалярные функции, зависящие от импульсов частиц. Эти неизвестные скалярные функции описывают вклад сильных взаимодействий в процессы электромагнитного взаимодействия адронов. В частности, в низшем приближении по e матричный элемент процесса упругого рассеяния электрона на π -мезоне

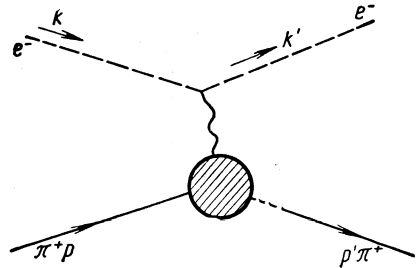


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана для процесса рассеяния $e + \pi \rightarrow e + \pi$ в низшем порядке теории возмущений.

$$e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+ \quad (I)$$

содержит некоторую функцию $F_1(t)$, зависящую от передачи импульса

$$t = -(p-p')^2 = -(k-k')^2, \quad (1.1)$$

где k и p обозначают 4-импульсы электрона и π -мезона в начальном состоянии, а k' и p' — соответственно те же величины для частиц в конечном состоянии (рис. 1), а именно

$$M_1 = e^2 \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} (p+p')_\mu \frac{1}{(p-p')^2} F_1 [-(p-p')^2]. \quad (1.2)$$

Аналогично в низшем порядке по e матричный элемент процесса аннигиляции

$$e^- + e^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (II)$$

содержит некоторую функцию $F_2(s)$, зависящую от квадрата полной энергии реакции в системе центра инерции

$$s = -(p + \tilde{p})^2 = -(k + \tilde{k})^2, \quad (1.3)$$

а именно

$$M_2 = e^2 v(-\tilde{k}) \gamma_\mu u(k) \frac{1}{V 4p_0 \tilde{p}_0} (p - \tilde{p})_\mu \frac{1}{(p + \tilde{p})^2} F_2 [-(p + \tilde{p})^2]. \quad (1.4)$$

Здесь k и \tilde{k} обозначают 4-импульсы электрона и позитрона; p и \tilde{p} — 4-импульсы π^+ и π^- -мезонов (рис. 2).

Пока не существует полной динамической теории сильных взаимодействий, скалярные функции, входящие в матричные элементы процессов с участием адронов, нельзя определить. Однако на основе общих принципов теории поля можно установить для них некоторые общие свойства, которые, в свою очередь, влекут за собой экспериментально проверяемые следствия. Так, дисперсионное соотношение для амплитуды упругого рассеяния π -мезона на нуклоне, строго доказанное Н. Н. Боголюбовым [1, 2], связывает мнимую и реальную части амплитуды. Для рассеяния вперед эти величины вполне можно определить на

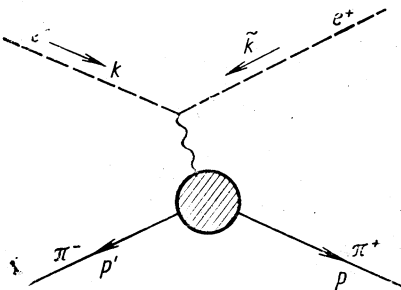


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана для процесса аннигиляции $e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$ в нижнем порядке теории возмущений.

опыте, и дисперсионное соотношение представляет собой экспериментально проверяемое следствие общих принципов теории и, в первую очередь, принципа микропричинности. Из строго доказанных аналитических свойств амплитуды по энергии и по передаче импульса вытекают также различные асимптотические теоремы [3—5], различные ограничения на величину парциальных амплитуд, на рост и на убывание сечений упругих и неупругих процессов [6—10]. Все они доступны экспериментальной проверке и составляют весьма эффективный инструмент для проверки справедливости общих принципов теории.

Подобная ситуация имеется и для функций F_1 и F_2 , входящих в матричные элементы (1.2) и (1.4). На основе общих аналитических свойств этих функций можно сделать некоторые предсказания, которые будут проверены на опыте в будущем. Такие экспериментально проверяемые следствия аналитических свойств функций F_1 и F_2 были изучены в ряде работ, обзором которых и является настоящая статья.

Заметим, что аргументы t и s функции $F_1(t)$ и $F_2(s)$, входящие в матричные элементы (1.2) и (1.4), меняются в различных интерва-

лах: передача импульса t , выражающаяся через угол рассеяния θ и импульс k -частиц в системе центра инерции

$$t = -2k^2(1 - \cos \theta),$$

всегда отрицательна:

$$t \leq 0,$$

а квадрат полной энергии в системе центра инерции

$$s = (2E)^2$$

всегда положителен:

$$s \geq 4\mu^2,$$

где μ — масса π -мезона.

Однако эти функции тесно связаны между собой. Такая связь между матричными элементами пар перекрестных процессов хорошо известна в квантовой электродинамике как правило замены Лоу. По этому правилу матричный элемент некоторого процесса с испусканием (или поглощением) какой-нибудь частицы a с энергией-импульсом k можно получить из выражения матричного элемента соответствующего процесса с поглощением (или испусканием) анти-частицы \bar{a} с энергией-импульсом \tilde{k} , если сделать замену $k \leftrightarrow -\tilde{k}$ и для фермионов $u(k) \leftrightarrow v(-\tilde{k})$. Применение этого правила к процессам (I) и (II) приводит к тому, что для получения M_2 достаточно исходить из M_1 и затем заменить $\bar{u}(k') \rightarrow \bar{v}(-\tilde{k})$, $k' \rightarrow -\tilde{k}$, $p' \rightarrow p$ и $p \rightarrow -\tilde{p}$ (см. рис. 1 и 2). Иначе говоря, $F_2(s)$ получается из $F_1(t)$ заменой t на s .

В случае квантовой электродинамики, когда рассматривается лишь взаимодействие лептонов с электромагнитным полем, можно применить теорию возмущений, и в каждом порядке по e матричные элементы вычисляются в явном виде. Тогда правило замены Лоу осуществляется просто. При наличии же сильных взаимодействий в матричные элементы процессов входят неизвестные функции и правило Лоу не будет иметь смысла, пока не укажем метод, позволяющий определить значения этих функций после замены. Так, в случае процессов (I) и (II) для применения правила Лоу необходимо знать, к чему сводится функция $F_1(t)$, когда в ней заменим $t \rightarrow s$. Иначе говоря, необходимо суметь каким-то образом продолжать функцию $F_1(t)$ из ее области определения $t \leq 0$ в область $t \geq 4\mu^2$. Это оказывается возможным: существует некоторая функция $F(w)$, аналитическая в комплексной плоскости w с разрезом $w \geq 4\mu^2$, совпадающая с $F_1(t)$ при $w = t \leq 0$ и стремящаяся к $F_2(s)$ при $w \rightarrow s$ из верхней полуплоскости: $w = s + i0$, $s \geq 4\mu^2$ [11]. Иначе говоря, каждая из функций $F_1(t)$ и $F_2(s)$ является аналитическим продолжением другой. В результате этих аналитических свойств правило замены Лоу имеет прозрачный смысл.

Таким образом, скалярные функции $F_1(t)$ и $F_2(s)$, входящие в матричные элементы процессов (I) и (II), являются значениями

одной и той же аналитической функции $F(\omega)$ в различных интервалах изменения переменной ω . Функция $F(\omega)$ называется форм-фактором π -мезона. Она аналитична в комплексной плоскости ω с разрезом $\omega \geq 4\mu^2$, и при всех вещественных значениях ω вне разреза она вещественна:

$$\operatorname{Im} F(\omega) = 0, \quad \omega < 4\mu^2. \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что в комплексно сопряженных точках $F(\omega)$ принимает комплексно сопряженные значения (в силу принципа симметрии Римана—Шварца)

$$F(\omega^*) = F(\omega)^*. \quad (1.6)$$

В частности,

$$F(s - i0) = F(s + i0)^*, \quad (1.7)$$

т. е. скачок функции $F(\omega)$ при переходе от верхнего к нижнему берегу разреза пропорционален ее мнимой части

$$F(s + i0) - F(s - i0) = 2i \operatorname{Im} F(s + i0). \quad (1.8)$$

Для роста функции $F(\omega)$ имеется также некоторое ограничение. В силу принципа микропричинности функция $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ может расти лишь медленнее любой экспоненты от $|\omega|^{1/2}$:

$$|F(\omega)| \leq \operatorname{const} e^{\varepsilon |\omega|^{1/2}}, \quad \omega \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Хорошо известно, что задание значений аналитической функции на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку внутри области аналитичности этой функции, полностью определяет ее всюду в ее области аналитичности. В частности, величины $F_1(t)$ и $F_2(s)$, представляющие собой значение одной и той же аналитической функции на различных интервалах вещественной оси, не могут быть совсем независимыми друг от друга. Это наводит на мысль о том, что из аналитических свойств $F(\omega)$ можно получить различные соотношения между значениями функций $F_1(t)$ и $F_2(s)$, определяющих сечения процессов (I) и (II). Эти соотношения можно использовать для проверки аналитичности $F(\omega)$.

Другим свойством аналитических функций является то, что ограничение на их рост влечет за собой определенные ограничения на их убывание. Поскольку форм-фактор $F(\omega)$ должен удовлетворять условию (1.9), то он не может убывать сколь угодно быстро при $\omega \rightarrow \infty$. Иначе говоря, $F_1(t)$ и $F_2(s)$ не могут убывать слишком быстро при $t \rightarrow -\infty$ и $s \rightarrow +\infty$ соответственно. Эти ограничения на убывание форм-фактора также доступны экспериментальной проверке.

Заметим, что на опыте можно определить не саму величину $F_2(s)$, а только ее модуль, поскольку сечение процесса (II) выражается через этот модуль. Поэтому при изучении экспериментальных след-

ствий аналитичности форм-фактора практическое значение имеют лишь утверждения, касающиеся непосредственно модуля $F_2(s)$, а не самой ее величины. Что касается $F_1(t)$, то благодаря условию вещественности (1.5) и условию нормировки

$$F_1(0) = F(0) = 1 \quad (1.10)$$

на основе экспериментальных данных по сечению процесса (I) можно судить о самих значениях этой величины.

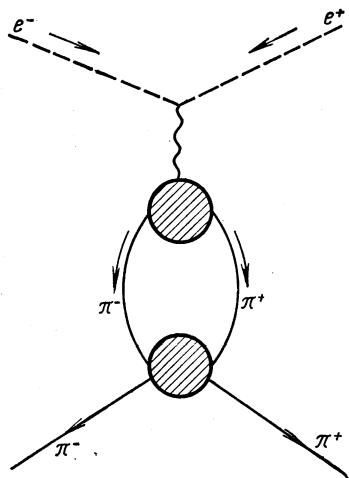


Рис. 3. Графическое изображение двухчастичного условия унитарности для процесса аннигиляции $e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$.

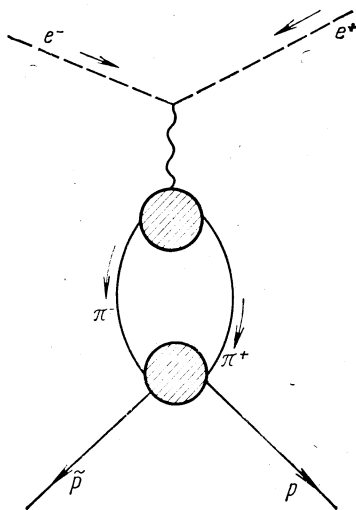


Рис. 4. Графическое изображение двухчастичного условия унитарности для процесса аннигиляции $e^- + e^+ \rightarrow p + \tilde{p}$.

Здесь уместно сделать одно замечание. Разрез $\omega \geq 4\mu^2$ возникает из-за наличия двухпионных промежуточных состояний в процессе (II). Они дают вклад в мнимую часть $F_2(s)$, определяемую условием унитарности S -матрицы (рис. 3). Этот разрез совпадает с физической областью $s \geq 4\mu^2$ процесса (II). Для всех других процессов аннигиляции пары электрон—позитрон в пару адронов, например

$$e^- + e^+ \rightarrow K^+ + K^-; \quad e^- + e^+ \rightarrow p + \tilde{p}$$

и т. д., соответствующие форм-факторы также имеют разрез $\omega \geq 4\mu^2$, поскольку и для этих процессов существуют двухпионные промежуточные состояния (рис. 4). С другой стороны, их физические области определяются тем условием, что полная энергия \sqrt{s} не может быть меньше $2m_K$ или $2m_N$ соответственно, и следовательно, составляют лишь части разреза $\omega \geq 4\mu^2$. Иначе говоря, для последних процессов нельзя определить на опыте модуль форм-

фактора на всем разрезе, а лишь на его части. Поэтому все утверждения, касающиеся значений модуля форм-фактора на всем разрезе, нельзя проверить на опыте. Более того, для форм-факторов, входящих в матричные элементы последних процессов, не были доказаны аналитические свойства, аналогичные аналитическим свойствам форм-фактора π -мезона.

В дальнейшем наряду со сформулированными выше общими аналитическими свойствами форм-фактора π -мезона $F(\omega)$ будем делать различные дополнительные предположения. Все они касаются лишь наблюдаемых величин: $F_1(t)$ при $t \leq 0$ и $|F_2(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$, и поэтому можно проверить на опыте. Не будет сделано никаких приближений или предположений динамического характера. Это существенно ограничивает возможность получения конкретных предсказаний. Читателей, интересующих изучение форм-факторов в динамических теориях сильных взаимодействий, отсылаем к обзорам [12—14].

Основным нашим математическим аппаратом является теория аналитических функций комплексной переменной. Поскольку применяемые теоремы излагаются в различных книгах и монографиях и не существует монографии, в которой можно было бы найти все эти теоремы вместе, целесообразно привести их без доказательства в дополнении к этому обзору.

Прежде чем приступить к изложению полученных результатов, сформулируем еще раз общие аналитические свойства форм-фактора π -мезона $F(\omega)$, которые будем использовать всюду в дальнейшем без оговорок:

1) $F(\omega)$ аналитична в комплексной плоскости с разрезом $\omega \geq 4\mu^2$;

2) $F(\omega)$ удовлетворяет условию вещественности

$$F(\omega^*) = F(\omega)^*;$$

3) $F(\omega)$ растет медленнее любой экспоненты от $|\omega|^{1/2}$:

$$|F(\omega)| \leq \text{const } e^{\varepsilon |\omega|^{1/2}}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Кроме того, всюду в настоящем обзоре будем предполагать, что на разрезе $\omega \geq 4\mu^2$ модуль форм-фактора — непрерывная функция от ω . Такое предположение можно проверить на опыте.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

На опыте можно измерить сечение процесса (II) и тем самым определить модуль форм-фактора $F(s)$ при $s \geq 4\mu^2$. Имеющиеся экспериментальные данные показывают, по-видимому, что при $s \rightarrow +\infty$ форм-фактор $F(s)$ убывает. В дальнейшем будем предполагать, что $F(s)$ в действительности растет медленнее некоторого полинома

$$|F(s)| \leq \text{const } s^n, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.1)$$

Такое предположение можно проверить на опыте. Покажем теперь, что из него следует полиномиальная ограниченность $F(w)$ во всей плоскости w :

$$|F(w)| \leq \text{const } |w|^n, \quad w \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Для этой цели применим знаменитую теорему Фрагмена—Линделефа в теории аналитических функций (см. теорему 1 в дополнении). Согласно этой теореме, если функция $f(z)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывная в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, ограничена на вещественной оси некоторой константой M :

$$|f(x)| \leq M, \quad (2.3)$$

то либо всюду в верхней полуплоскости

$$|f(z)| \leq M, \quad (2.4)$$

либо существует такая последовательность точек $z_n \rightarrow \infty$, что

$$|f(z_n)| > \text{const } e^{a|z_n|}, \quad a > 0. \quad (2.5)$$

Посредством замены переменных $w = z^2$ преобразуем плоскость w с разрезом в верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ и положим

$$f(z) = \frac{F(z^2)}{(z+i)^{2n}}. \quad (2.6)$$

Новая функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и ограничена на вещественной оси вследствие условия (2.1). Кроме того, поскольку $F(w)$ удовлетворяет условию (1.9), то

$$|f(z)| \leq \text{const } e^{\varepsilon|z|}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Это означает, что для $f(z)$ неравенство (2.5) не может иметь место. Из только что сформулированной теоремы Фрагмена—Линделефа следует, что $f(z)$ ограничена на всей верхней полуплоскости z , т. е. $F(z^2)$ растет не быстрее полинома степени $2n$ от z в комплексной плоскости.

В частности, если $F(w)$ по модулю ограничена на разрезе некоторой константой

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2, \quad (2.8)$$

то она по модулю ограничена той же константой на всей комплексной плоскости:

$$|F(w)| \leq M. \quad (2.9)$$

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 1. Если форм-фактор $F(w)$ ограничен некоторой константой или полиномиально ограничен на разрезе:

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2$$

или

$$|F(s)| \leq \text{const } s^n, \quad s \rightarrow +\infty,$$

то он ограничен той же константой или тем же полиномом в комплексной плоскости:

$$|F(w)| \leq M$$

или

$$|F(w)| \leq \text{const } |w|^n, \quad w \rightarrow \infty.$$

Эта теорема, хотя не имеющая практического значения, оказывается весьма полезной. В дальнейшем будем часто применять ее при доказательстве других утверждений, доступных экспериментальной проверке.

Как было отмечено, ограничение на рост форм-фактора влечет за собой ограничение на его убывание. Так, в силу условия (1.9) форм-фактор $F(w)$ не может убывать как экспонента от $-\sqrt{w}$ при $w \rightarrow +\infty$. Для доказательства этого утверждения будем пользоваться теоремой Карлсона (см. теорему 2 в дополнении). Согласно этой теореме, если функция $f(z)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывная в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, растет не быстрее некоторой линейной экспоненты

$$|f(z)| \leq \text{const } e^{k|z|}, \quad z \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

и убывает экспоненциально на вещественной оси

$$|f(z)| \leq \text{const } e^{-a|z|}, \quad a > 0, \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (2.11)$$

то она тождественно равна нулю: $f(z) \equiv 0$. Если же она не тождественно равна нулю и удовлетворяет условию (2.10), то она не может удовлетворять условию (2.11). Применяя теорему Карлсона к функции $f(z) = F(z^2)$ и используя условие (1.9), приходим к следующему заключению [15].

Теорема 2. Форм-фактор $F(s)$ не может убывать как $e^{-a\sqrt{s}}$ при $s \rightarrow +\infty$ для любой ненулевой константы $a > 0$, т. е. при любом заданном значении $a > 0$ существует по крайней мере одна последовательность $s_n \rightarrow +\infty$, такая, что

$$|F(s_n)| > \text{const } e^{-a\sqrt{s_n}}.$$

Другое ограничение на убывание, почти эквивалентное только что сформулированной теореме 2, вытекает из следующей теоремы Боаса (см. теорему 3 в дополнении): пусть функция $f(z)$, аналитиче-

ская в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывная в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| < \infty; \quad (2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty, \quad (2.13)$$

а ее нули не имеют конечных предельных точек.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^- |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (2.14)$$

Применим эту теорему к функции

$$f(z) = F[4\mu^2(1-z^2)].$$

В силу ограничения (1.9) условие (2.12) для функции $f(z)$ выполняется. Предположим, что форм-фактор $F(s)$ полиномиально ограничен на разрезе

$$|F(s)| \leq \text{const } s^n, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.15)$$

Тогда условие (2.13) также выполняется. Неравенство (2.14) означает, что интеграл

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln^- |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds$$

сходится. Приходим, таким образом, к следующему заключению.

Теорема 3. Пусть форм-фактор $F(s)$ полиномиально ограничен на разрезе

$$|F(s)| \leq \text{const } s^n, \quad s \rightarrow +\infty,$$

и нигде на этом разрезе не обращается в нуль. Тогда следующий интеграл должен сходиться:

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln^- |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds < \infty$$

и поэтому для убывания $F(s)$ имеется ограничение снизу.

$$* \quad \ln^+ x = \begin{cases} \ln x & \text{при } x \geq 1; \\ 0 & \text{при } x < 1; \end{cases}$$

$$\ln^- x = \begin{cases} -\ln x & \text{при } x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, установлены ограничения на убывание $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow +\infty$ т. е. в физической области канала аннигиляции. Для форм-фактора в физической области канала рассеяния имеется также аналогичное ограничение. Чтобы получить его, применим следующую теорему (см. теорему 4 в дополнении).

Пусть функция $f(z)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывная в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, удовлетворяет условиям (2.12) и (2.13). Если при $y \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{y} \ln |f(iy)| \rightarrow -\infty, \quad (2.16)$$

то $f(z)$ тождественно равна нулю:

$$f(z) \equiv 0.$$

Это означает, что при $y \rightarrow \infty$ функция $f(iy)$ не может убывать быстрее любой линейной экспоненты от y . Применяя эту теорему к функции $f(z) = F(z^2)$, приходим к следующему заключению [16].

Теорема 4. Если форм-фактор $F(\omega)$ полиномиально ограничен в физической области канала аннигиляции:

$$|F(s)| \leq \text{const } s^n, \quad s \rightarrow +\infty,$$

то в физической области канала рассеяния он может убывать лишь не быстрее некоторой экспоненты от $|t|^{1/2}$. Иначе говоря, существует некоторая константа $a > 0$, такая, что

$$|F(t_n)| \geq \text{const } e^{-a} |t_n|^{1/2},$$

по крайней мере для некоторой последовательности $t_n \rightarrow -\infty$.

Между поведением форм-фактора $F(\omega)$ в физических областях канала аннигиляции $\omega \geq 4\mu^2$ и канала рассеяния $\omega \leq 0$ существует более тесная связь. Чтобы установить ее, применим теорему Фрагмена—Линделефа (см. теорему 1 в дополнении). Согласно этой теореме, если функция $f(z)$ аналитична и ограничена в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, то множества ее предельных значений при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$, обозначаемые E_+ и E_- соответственно, должны обладать следующим свойством: или они имеют общую точку, или одно из них окружает другое; если же $f(z)$ стремится к определенным пределам a_+ и a_- при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$ соответственно, то эти пределы равны друг другу.

Предположим теперь, что при $\omega \rightarrow \pm\infty$ форм-фактор имеет следующее поведение:

$$|F(s)| \approx as^a \quad \text{при } s \rightarrow +\infty; \quad (2.17)$$

$$F(t) \approx b |t|^\beta \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \quad (2.18)$$

где $a > 0$, а b — вещественное число. Введем новую функцию

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z+i)^\beta}. \quad (2.19)$$

Из (2.17) следует, что

$$f(z) \rightarrow be^{-i\pi\beta} \text{ при } z \rightarrow -\infty \quad (2.20)$$

и

$$|f(z)| \approx a|z|^{a-\beta} \text{ при } z \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

Покажем при помощи теоремы Фрагмена—Линделефа, что β не превосходит α . Допустим, наоборот, что $\beta > \alpha$. Тогда, согласно (2.21),

$$|f(z)| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad (2.22)$$

и предельные множества E_+ и E_- представляют собой две различные точки: $a_+ = 0$ и $a_- = be^{-i\pi\beta} \neq 0$, что противоречит теореме. Итак, $\alpha \geq \beta$.

Рассмотрим частный случай $\alpha = \beta$. Тогда

$$|f(z)| \rightarrow a \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad (2.23)$$

и предельное множество E_+ составляет подмножество окружности с центром в нуле и с радиусом a . Так как другим предельным множеством является точка $be^{-i\pi\beta}$, то имеем только две возможности: или $a = |b|$ и предельные множества E_+ и E_- имеют общую точку, или $a > |b|$ и E_+ окружает E_- .

Таким образом, приходим к заключению: обязательно $\alpha \geq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то обязательно $a \geq |b|$.

Аналогично рассматривается случай, когда $F(t)$ убывает как экспонента от $-|t|^\gamma$, $\gamma \leq 1/2$, при $t \rightarrow -\infty$. Предположим, что

$$|F(s)| \approx Ae^{-as^\alpha}, \quad \alpha < \frac{1}{2} \text{ при } s \rightarrow +\infty; \quad (2.24)$$

$$|F(t)| \approx Be^{-b|t|^\beta}, \quad \beta \leq \frac{1}{2} \text{ при } t \rightarrow -\infty, \quad (2.25)$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $A > 0$, B — вещественное число. Повторяя только что приведенные рассуждения, можно показать, что $\alpha \leq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то $a \leq b \cos \pi\alpha$. В частном случае, когда $\beta = 1/2$, то $a = 0$. Итак, имеем следующую теорему [15].

Теорема 5. Пусть форм-фактор F имеет следующие поведения в физических областях канала аннигиляции и канала рассеяния:

$$|F(s)| \approx as^a, \quad a > 0, \quad s \rightarrow +\infty$$

и

$$F(t) \approx b|t|^\beta, \quad t \rightarrow -\infty,$$

или

$$|F(s)| \approx Ae^{-as^\alpha}, \quad \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad A > 0, \quad a > 0 \quad s \rightarrow +\infty,$$

и

$$F(t) \approx Be^{-b|t|^\beta}, \quad \beta \leq \frac{1}{2}, \quad b \geq 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Тогда в первом случае $\alpha \geq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то $a \geq |b|$, а во втором $\alpha \leq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то $a \leq b \cos \pi\alpha$.

В заключение заметим, что полученный результат легко обобщается на случай, когда асимптотическое выражение форм-фактора имеет вид произведения экспоненциальной и степенной функций.

3. ОГРАНИЧЕНИЯ СНИЗУ В ФИЗИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ КАНАЛА РАССЕЯНИЯ

Теперь перейдем к изучению ограничений снизу для форм-фактора $F(t)$ в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ при задании некоторой информации относительно модуля $F(s)$ в физической области канала аннигиляции $s \geq 4\mu^2$. При этом будем пользоваться условием нормировки

$$F(0) = 1. \quad (3.1)$$

Допустим, что максимальное значение модуля форм-фактора, которое достигается в некоторой точке разреза, равно M :

$$\max_{s \geq 4\mu^2} |F(s)| = M. \quad (3.2)$$

При переходе от точки $t = 0$ к точкам на разрезе $s \geq 4\mu^2$ форм-фактор меняется от 1 до M . Чем больше M , тем быстрее $F(\omega)$ может меняться и, следовательно, тем быстрее он может убывать при переходе от точки $t = 0$ к некоторой точке $t < 0$. Это наводит на мысль о том, что для значений форм-фактора в каждой точке физической области канала рассеяния $t \leq 0$ имеются некоторые нижние границы, зависящие от M . Наша задача — установить эти границы.

Для лучшего понимания сущности вопроса рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в кольцевой области с центром в нуле и с радиусами R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. Пусть M_1 и M_2 — максимумы модуля этой функции на окружностях $|z| = R_1$ и $|z| = R_2$ соответственно. Тогда, согласно теореме Адамара о трех кругах (см. теорему 5 в дополнении), для модуля $|f(z_0)|$ в некоторой точке z_0 , лежащей внутри области аналитичности $f(z)$, имеется следующее неравенство:

$$\ln |f(z_0)| \leq \ln M_1 \frac{\ln |z_0|/R_2}{\ln R_1/R_2} + \ln M_2 \frac{\ln |z_0|/R_1}{\ln R_2/R_1}. \quad (3.3)$$

Если заданы $|f(z_0)|$ и M_2 , то эта формула позволяет установить нижнюю границу для M_1 :

$$\ln M_1 \geq \left\{ \ln |f(z_0)| - \ln M_2 \frac{\ln |z_0|/R_1}{\ln R_2/R_1} \right\} \frac{\ln R_1/R_2}{\ln |z_0|/R_2}. \quad (3.4)$$

В случае форм-фактора, аналитического в плоскости ω с разрезом $\omega \geq 4\mu^2$, роль внутренней окружности играет некоторый интервал в области $t \leq 0$, роль внешней окружности — сам разрез,

а роль точки z_0 — точка $t = 0$. Так как значение $F(0)$ известно, то при заданном максимуме $|F(s)|$ на разрезе для $F(t)$ при $t \leq 0$ существует нижняя граница.

Для того чтобы применить к форм-факторной функции теорему Адамара, необходимо преобразовать плоскость w с разрезом $w \geq 4\mu^2$ и с некоторым искусственным разрезом, лежащим внутри интервала $t \leq 0$, в кольцо. Такое преобразование оказывается достаточно сложным. Ради простоты будем пользоваться только преобразованиями, переводящими часть плоскости w с двумя указанными разрезами в кольцо.

Посредством замены переменных

$$\xi = \left[\frac{w}{4\mu^2} + \alpha \right]^{1/2}, \quad (3.5)$$

где α — достаточно большое положительное число, преобразуем сначала плоскость w с разрезом $w \geq 4\mu^2$ в верхнюю полуплоскость ξ и положим

$$F(w) = \Phi(\xi).$$

Функция $\Phi(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости и принимает вещественные значения на отрезке $-\sqrt{1+\alpha} \leq \xi \leq \sqrt{1+\alpha}$. В силу принципа симметрии Римана—Шварца она аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость ξ . Итак, $\Phi(\xi)$ аналитична в плоскости ξ с двумя разрезами $\xi \geq \sqrt{1+\alpha}$ и $\xi \leq -\sqrt{1+\alpha}$. Осуществляя конформное отображение

$$\eta = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\xi} [\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1+\alpha - \xi^2}], \quad (3.6)$$

преобразуем затем плоскость ξ в круг C на плоскости η с центром в нуле и с радиусом $a = \sqrt{1+\alpha}$. Точка $\xi = \sqrt{\alpha}$, т. е. $w = 0$, переходит в точку $\eta = \eta_0$,

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\alpha}} (\sqrt{1+\alpha} - 1). \quad (3.7)$$

Рассмотрим симметричные точки $\xi = \pm \sqrt{\alpha - \gamma}$, где γ — некоторое положительное число, $\gamma < \alpha$. В отображении (3.6) они переходят в точки $\eta = \pm c$:

$$c = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\alpha - \gamma}} [\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1+\gamma}]. \quad (3.8)$$

Круг C содержит внутри себя эллипс E с фокусами в точках $\eta = \pm c$ и с большой полуосью a , где

$$a = \sqrt{1+\alpha} \quad (3.9)$$

(рис. 5). При помощи конформного отображения

$$z = \frac{1}{c} [\eta + \sqrt{\eta^2 - c^2}] \quad (3.10)$$

преобразуем эллипс E с разрезом $-c \leq \eta \leq c$ в кольцо с внутренним радиусом $R_1 = 1$, внешним радиусом $R_2 = R$,

$$R = \frac{1}{c} [a + \sqrt{a^2 - c^2}] \quad (3.11)$$

и с центром в нуле. Точка $\eta = \eta_0$ переходит в точку $z_0 = r$,

$$r = \frac{1}{c} [\eta_0 + \sqrt{\eta_0^2 - c^2}]. \quad (3.12)$$

Положим

$$\Phi(\xi) = f(z).$$

Согласно предположению,

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leq M. \quad (3.13)$$

Положим

$$\max_{|z|=1} |f(z)| = m. \quad (3.14)$$

На основе теоремы Адамара о трех кругах имеем

$$\ln |f(r)| \leq \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R}\right) \ln m + \frac{\ln r}{\ln R} \ln M. \quad (3.15)$$

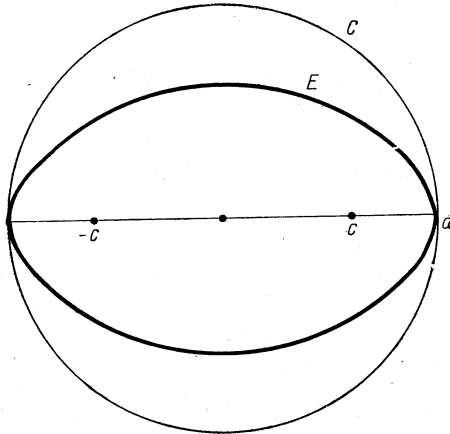


Рис. 5. Круг C и эллипс E с фокусами в точках $\eta = \pm c$ и с большой полуосью $a = \sqrt{1 + c^2}$.

Поскольку $f(r) = \Phi(\sqrt{\alpha}) = F(0) = 1$, то отсюда имеем

$$m \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{\ln r / \ln R}{1 - \ln r / \ln R}}. \quad (3.16)$$

Устремляя $\alpha \rightarrow \infty$ и пользуясь выражениями (3.11) и (3.12) для R и r , выражениями (3.7)–(3.9) для η_0 , c и a , получаем окончательно

$$\max_{\omega \leq t < 0} |F(\omega)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Psi\left(\frac{1+t}{4\mu^2}\right)}, \quad (3.17)$$

где

$$\Psi(\gamma) = \frac{[1 - (1 + \gamma)^{-1/2}]^{1/2}}{1 - [1 - (1 + \gamma)^{-1/2}]^{1/2}}. \quad (3.18)$$

Если $F(t)$ монотонно убывает при увеличении абсолютного значения t в физической области канала рассеяния, то вместо (3.17) имеем

$$|F(t)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Psi\left(\frac{1+t}{4\mu^2}\right)}. \quad (3.19)$$

Итак, справедлива следующая теорема [15].

Теорема 6. Пусть форм-фактор $F(\omega)$ на разрезе ограничен некоторой константой:

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2.$$

Тогда для его значений в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ имеется следующая нижняя граница:

$$\max_{\omega \leq t < 0} |F(\omega)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^\Psi \left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right),$$

где

$$\Psi(\gamma) = \frac{[1 - (1 + \gamma)^{-1/2}]^{1/2}}{1 - [1 - (1 + \gamma)^{-1/2}]^{1/2}}.$$

Если $F(t)$ монотонно убывает при увеличении $|t|$ в области $t \leq 0$, то

$$|F(t)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^\Psi \left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right).$$

Обозначим t_e такое положительное значение, что в интервале $-t_e \leq t \leq 0$ форм-фактор убывает монотонно в e раз. Тогда из полученных результатов следует, что

$$t_e \geq \frac{1}{(1 + \ln M)^2 - 1}. \quad (3.20)$$

Интересно рассмотреть функцию $\Psi(\gamma)$, определяемую формулой (3.18), при больших γ ($\gamma \gg 1$). Имеем

$$\Psi(\gamma) \approx 2\sqrt{\gamma}, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Итак, при больших передачах t форм-фактор должен удовлетворять условию

$$\max_{\omega \leq t < 0} |F(\omega)| \geq \text{const} e^{-2\sqrt{\frac{|t|}{4\mu^2}} \ln M}, \quad t \rightarrow -\infty \quad (3.22)$$

или, если $F(t)$ монотонно убывает,

$$|F(t)| \geq \text{const} e^{-2\sqrt{\frac{|t|}{4\mu^2}} \ln M}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (3.23)$$

Это означает, что при $t \rightarrow -\infty$ форм-фактор не может убывать быстрее некоторой экспоненты от $-\sqrt{|t|}$, причем коэффициент при $\sqrt{|t|}$ в экспоненте полностью определяется заданием максимума M . Этот результат является обобщением теоремы 4.

При доказательстве неравенства (3.17) мы не воспользовались всеми аналитическими свойствами форм-фактора $F(\omega)$, которыми располагаем. Действительно, после конформных отображений (3.5) и (3.6) форм-фактор становится функцией от η , аналитической в кру-

ге C . Мы воспользовались, однако, лишь аналитичностью этой функции в эллипсе E , содержащемся внутри C , и посредством конформного отображения (3.10) преобразовали этот эллипс (с разрезом) в кольцо и затем применили теорему Адамара к функции $f(z)$, аналитической в этом кольце. Попытаемся теперь воспользоваться аналитичностью $F(w)$ во всей комплексной плоскости w с разрезом $w \geq 4\mu^2$. Для этой цели применим более общую, чем теорема Адамара, теорему о двух константах. При формулировке последней теоремы нам понадобится понятие гармонической меры.

Пусть D — некоторая связная область в комплексной плоскости z , граница ∂D которой состоит из конечного числа аналитических дуг. Пусть далее α — некоторое множество дуг из границы ∂D , а β — остальная часть границы: $\partial D = \alpha \cup \beta$. Обозначим $\omega(z, \alpha, D)$ гармоническую в области D функцию, принимающую значения 1 в каждой внутренней точке дуг из множества α и равную нулю в каждой внутренней точке дуг, принадлежащих множеству β . Эта функция $\omega(z, \alpha, D)$ называется гармонической мерой в точке z множества α относительно области D . Из принципа максимума и минимума для гармонических функций следует, что $0 \leq \omega(z, \alpha, D) \leq 1$. (Подробно о гармонических функциях и гармонической мере сказано в дополнении.) Теорема о двух константах заключается в следующем (см. теорему 8 в дополнении). Пусть задана связная область D с границей ∂D , состоящей из конечного числа аналитических дуг, α — открытое множество, состоящее из некоторых дуг на ∂D , а β — множество остальных дуг на ∂D . Обозначим β_0 внутреннюю часть β . Допустим далее, что функция $f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в замкнутой области \bar{D} , за исключением конечного числа точек на ∂D , удовлетворяет условию

$$|f(z)| \leq M \quad \text{при } z \in \alpha; \quad (3.24)$$

$$|f(z)| \leq m \quad \text{при } z \in \beta_0. \quad (3.25)$$

Тогда для любой точки z в области D имеем

$$\ln |f(z)| \leq \omega(z, \alpha, D) \ln M + [1 - \omega(z, \alpha, D)] \ln m. \quad (3.26)$$

В частном случае, когда область D — кольцо с радиусами R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$, α — внешняя окружность с радиусом R_2 , а β — внутренняя окружность с радиусом R_1 , гармоническая мера

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{\ln |z|/R_1}{\ln R_2/R_1}. \quad (3.27)$$

Из теоремы о двух константах вытекает теорема Адамара о трех кругах.

Допустим, что область D — правый полукруг с радиусом, равным единице и с центром в нуле, α — правая полуокружность на границе ∂D , а β — отрезок $[-i, i]$ на мнимой оси (рис. 6). Тогда

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 - |z|^2}. \quad (3.28)$$

Применим теперь теорему (3.26) с гармонической мерой (3.28) к изучению форм-фактора $F(w)$. Для этой цели необходимо преобразовать конформно плоскость w с разрезом в правый полукруг на рис. 6. Сначала положим для некоторого $\gamma > 0$

$$\xi = \frac{\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1-w/4\mu^2}}{\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1-w/4\mu^2}}. \quad (3.29)$$

В отображении $w \rightarrow \xi$ плоскость w с разрезом $w \geq 4\mu^2$ превращается в единичный круг, причем разрез $w \geq 4\mu^2$ переходит в единичную окружность, точка $w = -4\mu^2\gamma$ переходит в центр круга, а полу-бесконечный интервал $w \leq -4\mu^2\gamma$ на вещественной оси переходит в отрезок $[-1, 0]$. Заменой

$$\xi = z^2; \quad z = \sqrt{\xi} \quad (3.30)$$

преобразуем затем последний единичный круг в правый единичный полукруг на рис. 6. Очевидно, что образом разреза $w \leq 4\mu^2$ в этих двух последовательных отображениях является правая единичная полуокружность α , а образом интервала $w \leq -4\mu^2\gamma$ является отрезок $\beta = [-i, i]$ на мнимой оси. Точка $w = 0$ при этом переходит в точку $z = z_0$:

$$z_0 = \sqrt{\xi_0} = \left[\frac{\sqrt{1+\gamma} - 1}{\sqrt{1+\gamma} + 1} \right]^{1/2}. \quad (3.31)$$

Положим

$$F(w) = f(z).$$

Согласно предположению, на разрезе $F(w)$ ограничен константой M . Это означает, что

$$|f(z)| \leq M \quad \text{при } z \in \alpha. \quad (3.32)$$

Обозначим

$$m = \max_{z \in \beta} |f(z)| = \max_{t \leq -4\mu^2\gamma} |F(t)|. \quad (3.33)$$

Из теоремы о двух константах следует, что

$$\ln |f(z_0)| \leq \omega(z_0, \alpha, D) \ln M + [1 - \omega(z_0, \alpha, D) \ln m]. \quad (3.34)$$

С другой стороны, в силу условия нормировки (3.1)

$$f(z_0) = F(0) = 1.$$

Таким образом,

$$m \geq \left(\frac{1}{M} \right)^{\frac{\omega(z_0, \alpha, D)}{1 - \omega(z_0, \alpha, D)}}. \quad (3.35)$$

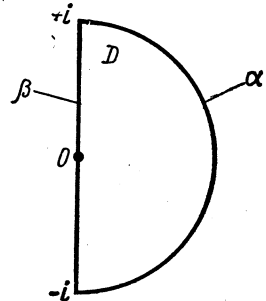


Рис. 6. Область D — правый полукруг с радиусом, равным единице, и с центром в нуле; α — правая полуокружность; β — отрезок $[-i, i]$.

Пользуясь выражением (3.28) для гармонической меры $\omega(z, \alpha, D)$ и выражением (3.31) для z_0 , нетрудно получить

$$\omega(z_0, \alpha, D) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}. \quad (3.36)$$

Неравенство (3.35) теперь можно написать в виде

$$\max_{\omega \leq t < 0} |F(\omega)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Phi\left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right)}, \quad (3.37)$$

где

$$\Phi(\gamma) = \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}{1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}. \quad (3.38)$$

Если $F(t)$ монотонно убывает с увеличением абсолютного значения t в физической области канала рассеяния $t \leq 0$, то вместо (3.37) имеем

$$|F(t)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Phi\left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right)}, \quad t < 0. \quad (3.39)$$

Теперь сформулируем полученный результат в виде теоремы [17].

Теорема 7. Пусть форм-фактор $F(\omega)$ на разрезе ограничен некоторой константой M :

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2.$$

Тогда для его значений в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ имеется следующая нижняя граница:

$$\max_{\omega \leq t < 0} |F(\omega)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Phi\left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right)},$$

где

$$\Phi(\gamma) = \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}{1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}.$$

Если $F(t)$ монотонно убывает при увеличении $|t|$ в области $t \leq 0$, то

$$|F(t)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\Phi\left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right)}.$$

При больших γ функция $\varphi(\gamma)$ имеет следующее асимптотическое выражение:

$$\varphi(\gamma) \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma}. \quad (3.40)$$

Напомним, что вместо множителя 2 в (3.21) имеем множитель $\pi/2$. Следовательно, вместо неравенств (3.22) и (3.33), найденных при помощи теоремы Адамара, теперь получим

$$\max_{w \leq t < 0} |F(w)| \geq \text{const} e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{|t|}{4\mu^2}} \ln M}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (3.41)$$

или если $F(t)$ монотонно убывает,

$$|F(t)| \geq \text{const} e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{|t|}{4\mu^2}} \ln M}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (3.42)$$

Применение более общей теоремы, таким образом, позволяет улучшить найденные результаты.

Естественно, возникает вопрос: можно ли еще существенно улучшить результаты, выраженные неравенством (3.41) и (3.42)? Поскольку форм-фактор

$$F(w) = e^{[1 - \sqrt{1 - w/4\mu^2}] a} \quad (3.43)$$

для любого $a > 0$ обладает свойствами:

$$\ln M = a;$$

$$|F(t)| \approx e e^{-\sqrt{\frac{|t|}{4\mu^2}} \ln M},$$

то в лучшем случае также можно лишь получить ограничения вида (3.41) или (3.42) с заменой $\pi/2$ на единицу, если не рассматривать константу перед экспонентой.

Таким образом, установлены ограничения снизу для форм-факторной функции в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ в том случае, когда она ограничена на разрезе. Наше рассмотрение легко обобщить на случай, когда на разрезе $F(w)$ растет полиномиально. Эти обобщения даны в работе [17]. Результат, аналогичный теореме 7, был получен независимо также в работе [18].

4. ПРАВИЛА СУММ

В последние годы в теории сильных взаимодействий широко применяются дисперсионные правила сумм. Они оказываются весьма универсальным инструментом для изучения связи между асимптотикой амплитуды и ее поведением в резонансной области [19]. В настоящем разделе обзора выведем ряд дисперсионных правил сумм для форм-фактора π -мезона, которые являются следствиями его общих аналитических свойств. Эти правила сумм содержат лишь модуль форм-фактора в физических областях канала рассеяния и ка-

нала аннигиляции, т. е. лишь наблюдаемые величины, и, следовательно, их можно использовать для экспериментальной проверки аналитичности.

Для иллюстрации основной идеи рассмотрим сначала простой случай, когда $F(w)$ не имеет нулей в плоскости. Тогда не только функция $F(w)$, но и функция $\ln F(w)$, является аналитическими функциями в комплексной плоскости w , а реальная часть последней

$$\operatorname{Re} \ln F(w) = \ln |F(w)|$$

представляет собой гармоническую функцию. Правила сумм являются следствием гармоничности функции $\ln |F(w)|$ и условия нормировки

$$F(0) = 1. \quad (4.1)$$

При помощи конформного отображения

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - w/4\mu^2}}{1 + \sqrt{1 - w/4\mu^2}} \quad (4.2)$$

преобразуем плоскость w с разрезом $w \geq 4\mu^2$ в единичный круг так, чтобы точка $w = 0$ переходила в центр $z = 0$, а разрез $w \geq 4\mu^2$ переходил в единичную окружность. Положим

$$f(z) = F(w).$$

Согласно предположению, аналитическая в единичном круге функция $f(z)$ не имеет нулей. Поэтому функция

$$u(z) = \ln |f(z)| \equiv \ln |F(w)|$$

гармонична внутри этого круга. Функция $u(z)$ непрерывна в единичном круге. Тогда имеем

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) d\varphi \quad (4.3)$$

или

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (4.4)$$

В силу условия нормировки (4.1) левая часть последнего соотношения равна нулю. Возвращаясь к старой переменной w , получаем

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{s - 4\mu^2}} ds = 0. \quad (4.5)$$

Заметим, что если на разрезе $F(s)$ полиномиально ограничен, то по теореме 3 интеграл в левой части (4.5) должен сходиться.

В общем случае форм-фактор $F(\omega)$ может иметь нули, и даже бесконечное число нулей. Они являются логарифмическими полюсами функции

$$u(z) = \ln |f(z)|,$$

и последняя функция не является гармонической в единичном круге. Она также может и не быть непрерывной в этом замкнутом круге. Однако если $f(z)$ — аналитическая функция, то $\ln |f(z)|$ — субгармоническая. С другой стороны, для любой субгармонической в единичном круге функции $u(z)$ имеет место неравенство

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) d\varphi \quad (4.6)$$

(подробно о гармонических и о субгармонических функциях см. в дополнении). Поэтому в общем случае вместо равенства (4.4) имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi \geq 0. \quad (4.7)$$

Возвращаясь к переменной ω , получаем

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds \geq 0. \quad (4.8)$$

Этот результат был получен в работе [20], а затем независимо в работе [21]. Вывод, основанный на свойстве субгармоничности, весьма прост.

Полученный результат легко обобщить для того, чтобы получить верхние оценки форм-фактора во всех точках вне разреза и, в частности, в физической области канала рассеяния $t \leq 0$, если значения его модуля на разрезе заданы. Действительно, делаем замену переменных

$$\omega_1 = \omega - t \quad (4.9)$$

для некоторого $t < 0$. Точка $\omega = t$ теперь переходит в точку $\omega_1 = 0$. Положим

$$F_1(\omega_1) = F(\omega) = F(\omega_1 + t)$$

и применим к этой функции приведенные рассуждения. Тогда получим

$$\ln |F_1(0)| \leq \frac{\sqrt{4\mu^2 - t}}{\pi} \int_{4\mu^2 - t}^{\infty} \frac{\ln |F_1(\omega_1)|}{\omega_1 \sqrt{\omega_1 - (4\mu^2 - t)}} d\omega_1 \quad (4.10)$$

или

$$\ln |F(t)| \leq \frac{\sqrt{4\mu^2 - t}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{(s-t) \sqrt{s-4\mu^2}} ds. \quad (4.11)$$

Этот результат был получен в работе [22] при помощи другого метода.

В левой части соотношения (4.8) стоят значения модуля форм-фактора в физической области канала аннигиляции. Выражение (4.2) представляет собой правило сумм. Существуют также правила сумм, содержащие одновременно значение модуля форм-фактора в физических областях канала рассеяния и канала аннигиляции. Чтобы получить одно из этих правил сумм, воспользуемся конформным отображением

$$z = \frac{\sqrt{1 + \omega/t_0} - \sqrt{1 - \omega/4\mu^2}}{\sqrt{1 + \omega/t_0} + \sqrt{1 - \omega/4\mu^2}} \quad (4.12)$$

вместо (4.2). При этом плоскость ω превращается в единичный круг, а разрез $\omega \geq 4\mu^2$ вместе с полубесконечным интервалом $\omega \leq -t_0$ переходит в единичную окружность.

Положим $f(z) = F(\omega)$ и, пользуясь свойством субгармоничности $\ln |f(z)|$, находим

$$\int_{-\infty}^{-t_0} \frac{\ln |F(t)|}{|t| \sqrt{(t-4\mu^2)(t+t_0)}} dt + \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{(s-4\mu^2)(s+t_0)}} ds \geq 0. \quad (4.13)$$

Этот результат был получен в работе [23] наряду с другими правилами сумм такого же типа.

Сформулируем теперь приведенные правила сумм в виде теоремы.

Теорема 8. Для значений модуля форм-фактора в физических областях канала аннигиляции и канала рассеяния имеют место следующие правила сумм:

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{-t_0} \frac{\ln |F(t)|}{|t| \sqrt{(t-4\mu^2)(t+t_0)}} dt + \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{(s-4\mu^2)(s+t_0)}} dt \geq 0;$$

$$\ln |F(t)| \leq \frac{\sqrt{4\mu^2-t}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{(s-t) \sqrt{s-4\mu^2}} ds.$$

5. ПРЕДЕЛ РАДИУСА ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ФОРМ-ФАКТОРА НА РАЗРЕЗЕ

При изучении ограничений снизу для форм-фактора в физической области канала рассеяния при заданном значении максимума его модуля на разрезе было замечено, что чем больше M , тем быстрее он может меняться. Величину, характеризующую быстроту

этого изменения, представляет собой его производная. Это наводит на мысль о том, что при заданном максимуме M производная форм-фактора в нуле, по-видимому, не может превзойти некоторое значение, зависящее от M . С другой стороны, производная форм-фактора в нуле определяет среднеквадратический радиус соответствующей частицы

$$\langle r^2 \rangle = 6F'(0). \quad (5.1)$$

Поэтому можно сказать, что в силу аналитичности форм-фактора при заданном значении максимума M его модуля на разрезе для радиуса соответствующей частицы, по-видимому, существует некоторый верхний предел, зависящий от M . Покажем, что это действительно так, и получим конкретные выражения для верхнего предела радиуса.

Чтобы легче понимать смысл полученных результатов, рассмотрим сначала дисперсионное соотношение для $F(\omega)$. Предположим, что $F(\omega)$ ограничен. Тогда дисперсионное соотношение можно написать с одним вычитанием

$$F(\omega) = F(0) + \frac{\omega}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega'. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что

$$F'(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F(\omega')}{(\omega')^2} d\omega'. \quad (5.3)$$

Заменив затем в правой части последнего соотношения $\text{Im} F(\omega')$ на ее верхнюю границу M , получаем

$$|F'(0)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega')^2} = \frac{M}{4\pi\mu^2}. \quad (5.4)$$

Этот результат показывает, что верхний предел для $F'(0)$ действительно существует. Верхний предел (5.4), однако, оказывается весьма завышенным и не представляет практического интереса. Будем теперь улучшать эту оценку.

В настоящем разделе предположим, что на разрезе форм-фактор ограничен некоторой константой

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2. \quad (5.5)$$

Наши рассуждения, однако, легко обобщить на случай, когда $F(s)$ растет полиномиально при $s \rightarrow +\infty$. Будем также часто пользоваться условием нормировки

$$F(0) = 1. \quad (5.6)$$

Кроме того, предположим, дополнительно, что в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ модуль форм-фактора не превосходит единицу:

$$|F(t)| \leq 1, \quad t \leq 0. \quad (5.7)$$

Такое предположение вполне можно проверить на опыте. Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что условие (5.7) по видимому действительно выполняется.

Для иллюстрации метода рассмотрим сначала случай, когда $F(w)$ не имеет нулей. Тогда $\ln F(w)$ также представляет собой аналитическую функцию. Пользуясь аналитичностью последней функции, можно получить для

$$F'(0) = \left(\frac{d}{dw} [\ln F(w)] \right)_{w=0} \quad (5.8)$$

верхний предел, пропорциональный $\ln M$, а не M , и тем самым улучшить результат (5.4).

Действительно, посредством конформного отображения (4.2) преобразуем плоскость w с разрезом в единичный круг и положим

$$f(z) = F(w). \quad (5.9)$$

Нетрудно проверить, что

$$F'(0) = \frac{1}{16\mu^2} f'(0). \quad (5.10)$$

Поскольку $f(z)$ не имеет нулей, то функция $\ln f(z)$ также аналитична в единичном круге. Более того, в силу условия нормировки (5.6) $f(0) = 1$, $\ln f(0) = 0$, и, следовательно, функция $\frac{\ln f(z)}{z}$ также аналитична. Поскольку

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z},$$

то из принципа максимума модуля (см. дополнение) следует, что

$$|f'(0)| \leq \max_{|z|=r \leq 1} \left| \frac{\ln f(z)}{z} \right| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r \leq 1} |\ln f(z)|. \quad (5.11)$$

Заметим, что $|\ln f(z)|$ является модулем аналитической функции $\ln f(z)$, а $\ln |f(z)|$ — ее реальная часть. Согласно теореме Каратеодори (см. теорему 6 в дополнении), имеем

$$\max_{|z|=r \leq 1} |g(z)| \leq \frac{2r}{1-r} \max_{|z|=1} \operatorname{Re} g(z) \quad (5.12)$$

для любой функции $g(z)$, аналитической в единичном круге, и, следовательно,

$$\max_{|z|=r \leq 1} |\ln f(z)| \leq \frac{2r}{1-r} \max_{|z|=1} \ln |f(z)|. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в правую часть (5.11), получаем

$$|f'(0)| \leq \frac{2}{1-r} \max_{|z|=1} \ln |f(z)|. \quad (5.14)$$

Согласно предположению (5.5),

$$\max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{s \geq 4\mu^2} |F(s)| \leq M.$$

С другой стороны, в правой части (5.14) можно сделать переход к пределу $r \rightarrow 0$. Тогда

$$|f'(0)| \leq 2 \ln M, \quad (5.15)$$

и, следовательно,

$$|F'(0)| \leq \frac{1}{8\mu^2} \ln M. \quad (5.16)$$

В общем случае, когда $F(w)$ имеет нули, $\ln f(z)$ не является аналитической функцией в единичном круге. Для того чтобы применить изложенный метод, необходимо сначала найти круг меньшего радиуса в плоскости z , в котором нет нулей $f(z)$, или круг в плоскости w , в котором нет нулей $F(w)$. К этому кругу теперь можно применить все приведенные рассуждения. Заметим, что $F(w)$ равен единице при $w = 0$. При заданном максимуме M быстрота изменения $F(w)$ ограничена, и поэтому $F(w)$ не может обращаться в нуль в точках, близких к $w = 0$. Это наводит на мысль о том, что существует некоторый круг с центром в точке $w = 0$, в котором $F(w)$ нигде не обращается в нуль. Найдем теперь такой круг с максимальным радиусом.

Положим

$$w' = 1 + \frac{w}{\alpha}, \quad \alpha \gg 4\mu^2 \quad (5.17)$$

и рассмотрим в плоскости w' эллипс E с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с большой полуосью

$$a = 1 + \frac{4\mu^2}{\alpha}. \quad (5.18)$$

Функция $G(w') = F(w)$ аналитична в E , так как этот эллипс имеет только одну общую точку с разрезом $w \geq 4\mu^2$. Посредством конформного отображения

$$z = w' + \sqrt{(w')^2 - 1} \quad (5.19)$$

преобразуем эллипс E с разрезом $-1 \leq w' \leq 1$ в кольцо с внутренним радиусом, равным единице, и внешним радиусом R

$$R = a + \sqrt{a^2 - 1} \quad (5.20)$$

и положим $f(z) = F(w)$.

Согласно предположениям (5.5) и (5.7),

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leq M; \quad (5.21)$$

$$\max_{|z|=1} |f(z)| \leq 1. \quad (5.22)$$

Из теоремы Адамара о трех кругах следует, что

$$|F(w)| = |f(z)| \leq M^{\frac{\ln |z|}{\ln R}}. \quad (5.23)$$

Выберем α достаточно большим. Тогда

$$\frac{\ln |z|}{\ln R} \approx \sqrt{\frac{|\omega|}{4\mu^2}}, \quad (5.24)$$

и мы получим

$$|F(w)| \leq M \sqrt{\frac{|\omega|}{4\mu^2}}. \quad (5.25)$$

Рассмотрим круг $|\omega| \leq r \leq 4\mu^2$ в плоскости ω . Функция $F(\omega)$ аналитична в этом круге и не превосходит по модулю величину

$$\max_{|\omega| \leq r} |F(\omega)| \leq M \sqrt{\frac{r}{4\mu^2}}. \quad (5.26)$$

В теории аналитических функций известна теорема, согласно которой функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z| \leq r$, равная единице в нуле и имеющая максимум модуля M , не может обращаться в нуль внутри круга

$$|z| < \frac{r}{M} \quad (5.27)$$

(см. теорему 7 в дополнении). Применяя эту теорему к функции $F(\omega)$, рассматриваемой как аналитическая функция в круге $|\omega| \leq r$, и учитывая условие (5.26), заключаем, что $F(\omega)$ не имеет нулей в круге с радиусом

$$\omega_0 = r e^{-\sqrt{\frac{r}{4\mu^2}} \ln M}, \quad r \leq 4\mu^2. \quad (5.28)$$

Выберем r так, чтобы ω_0 достигало наибольшего значения. Легко показать, что это наибольшее значение ω_0 равно

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{4\mu^2}{M}, & \text{если } \ln M \leq 2; \\ \frac{4\mu^2}{e^2} \left(\frac{2}{\ln M} \right)^2, & \text{если } \ln M \geq 2. \end{cases} \quad (5.29)$$

Таким образом, функция $F(\omega)$ не имеет нулей в круге $|\omega| \leq \omega_0$, где ω_0 определяется формулами (5.29). В этом круге $\ln F(\omega)$ яв-

ляется аналитической функцией, причем с учетом условия нормировки (5.6) функция $\frac{\ln F(w)}{w}$ также аналитична. Применяя к этой функции принцип максимума, а затем к $\ln F(w)$ — теорему Каратеодори, как это было сделано выше, получаем

$$\begin{aligned} |F'(0)| &\leq \max_{|\omega| \leq r \leq \omega_0} \left| \frac{\ln F(\omega)}{\omega} \right| = \frac{1}{r} \max_{|\omega|=r \leq \omega_0} |\ln F(\omega)| \leq \\ &\leq \frac{2}{\omega_0 - r} \max_{|\omega|=\omega_0} \ln |F(\omega)|. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Устремляя затем r к нулю и учитывая условие (5.26), имеем

$$|F'(0)| \leq \frac{1}{\mu \sqrt{\omega_0}} \ln M. \quad (5.31)$$

Подставляя сюда значения (5.29) для ω_0 , получаем окончательно [24]

$$|F'(0)| \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{M} \ln M}{2\mu^2}, & \text{если } \ln M \leq 2; \\ \frac{e (\ln M)^2}{4\mu^2}, & \text{если } \ln M \geq 2. \end{cases} \quad (5.32)$$

Теорема 9. Пусть на разрезе форм-фактор $F(w)$ ограничен $|F(w)| \leq M$, $s \geq 4\mu^2$, а в физической области канала рассеяния он меньше единицы по модулю $|F(t)| \leq 1$, $t \leq 0$. Тогда

$$|F'(0)| \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{M} \ln M}{2\mu^2}, & \text{если } \ln M \leq 2; \\ \frac{e (\ln M)^2}{4\mu^2}, & \text{если } \ln M \geq 2. \end{cases}$$

Заметим, что неравенство (5.26) имеет важное значение при нахождении максимального радиуса ω_0 . Оно было установлено, однако, на основе лишь аналитичности функции $G(w')$ в эллипсе E , а эта функция в действительности аналитична во всей плоскости w с разрезом $w \geq 4\mu^2$. Попробуем теперь пользоваться всеми аналитическими свойствами, которыми располагаем.

Для этой цели преобразуем плоскость w в правый единичный полукруг при помощи конформных отображений

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - w/4\mu^2}}{1 + \sqrt{1 - w/4\mu^2}} \quad (5.33)$$

и
$$z = \sqrt{\xi}. \quad (5.34)$$

В этих отображениях разрез $w \geq 4\mu^2$ переходит в правую единичную полуокружность, а физическая область канала рассеяния $w \leq 0$

переходит в отрезок $[-i, i]$ на мнимой оси. Положим $f(z) = F(\omega)$. Согласно предположениям (5.5) и (5.7),

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \alpha, \quad (5.35)$$

где α — правая единичная полуокружность, и

$$|f(z)| \leq 1, \quad z \in [-i, i]. \quad (5.36)$$

Обозначим $\omega(z, \alpha, D)$ гармоническую меру правого единичного полуокруга D в точке z относительно дуги α . Мы имеем

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 - |z|^2}. \quad (5.37)$$

Применяя к $f(z)$ теорему о двух константах [см. (3.34) и дополнение], получаем

$$|f(z)| \leq M^{\omega(z, \alpha, D)}, \quad (5.38)$$

т. е.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq e^{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 - |z|^2} \ln M} \leq \\ &\leq e^{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2|z|}{1 - |z|^2} \ln M}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Для сокращения записи формул положим

$$\rho = \frac{2}{\pi} \ln M. \quad (5.40)$$

Пользуясь неравенством (5.39) при нахождении максимального радиуса полуокруга, в котором $f(z)$ не обращается в нуль, и повторяя все предыдущие рассуждения, получаем [17]

$$|F'(0)| \leq \begin{cases} \frac{M \ln M}{4\pi\mu^2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{M}}{M-1}, & \text{если } \ln M \leq \pi; \\ \frac{\ln M}{4\pi\mu^2} \frac{1}{\Phi(\rho)} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\Phi(\rho)}}{1 - \Phi(\rho)}, & \text{если } \ln M \geq \pi, \end{cases} \quad (5.41)$$

где

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho^2 - 2 - \sqrt{(\rho^2 - 2)^2 - 4}}{2} e^{-\rho \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{\rho^2 - 4}}}. \quad (5.42)$$

Теорема 10. В условиях теоремы 9 имеем

$$|F'(0)| \leq \begin{cases} \frac{M \ln M}{4\pi\mu^2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{M}}{M-1}, & \text{если } \ln M \leq \pi; \\ \frac{\ln M}{4\pi\mu^2} \frac{1}{\Phi(\rho)} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\Phi(\rho)}}{1 - \Phi(\rho)}, & \text{если } \ln M \geq \pi, \end{cases}$$

где

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho^2 - 2 - \sqrt{(\rho^2 - 2)^2 - 4}}{2} e^{-\rho \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{\rho^2 - 4}}};$$

$$\rho = \frac{2}{\pi} \ln M.$$

Теоремы 9 и 10 легко обобщить на случай, когда $F(s)$ полиномиально растет при $s \rightarrow \infty$. Такие обобщения были сделаны в работе [17].

При помощи принципа гармонической меры докажем теперь еще одно неравенство, определяющее верхний предел $F'(0)$, при тех же предположениях, что и в теоремах 9 и 10. Посредством конформного отображения (5.33) преобразуем плоскость w в единичный круг и положим

$$g(\xi) = \frac{1}{M} F(w). \quad (5.43)$$

Функция $g(\xi)$ удовлетворяет условию

$$|g(\xi)| \leq 1. \quad (5.44)$$

Это означает, что образом единичного круга C_ξ на плоскости ξ при отображении

$$\xi \rightarrow \eta = g(\xi) \quad (5.45)$$

является некоторое подмножество единичного круга C_η на плоскости η . В силу условия (5.7)

$$|g(\xi)| \leq \frac{1}{M} \text{ при } \xi \in [-1, 0], \quad (5.46)$$

так как в преобразовании (5.33) интервал $w \leq 0$ переходит в отрезок $[-1, 0]$ на плоскости ξ . Это означает, что образ отрезка

$$\beta = [-1, 0] \quad (5.47)$$

содержится в интервале $[-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$ на плоскости η и заведомо в интервале $[-1, \frac{1}{M}]$. Предполагается, что $M > 1$.

Введем новую функцию

$$h(\xi) = \frac{g(\xi) - \frac{1}{M}}{1 - \frac{1}{M} g(\xi)}. \quad (5.48)$$

При отображении

$$\eta = g(\xi) \rightarrow \zeta = h(\xi) \quad (5.49)$$

единичный круг C_η превращается в единичный круг C_ζ , интервал $[-1, \frac{1}{M}]$ на плоскости η переходит в интервал $\beta = [-1, 0]$ на плоскости ζ . Таким образом, отображение

$$\xi \rightarrow \zeta = h(\xi) \quad (5.50)$$

обладает следующими свойствами: оно превращает единичный круг C_ξ в подмножество единичного круга C_ζ , а интервал $\beta = [-1, 0]$ на плоскости ξ — в подмножество интервала $\beta = [-1, 0]$ на плоскости ζ .

Обозначим $\omega(\xi, \beta, C_\xi)$ и $\omega(\zeta, \beta, C_\zeta)$ гармонические меры кругов C_ξ и C_ζ в точках ξ и ζ относительно отрезков β на плоскостях ξ и ζ соответственно, причем отрезки β также рассматриваются как части границ кругов C_ξ и C_ζ (круги с разрезом вдоль одного радиуса). Согласно принципу гармонической меры (см. дополнение)

$$\omega(\xi, \beta, C_\xi) \leq \omega(\zeta, \beta, C_\zeta). \quad (5.51)$$

Для гармонических мер в последнем неравенстве имеем выражения

$$\left. \begin{aligned} \omega(\xi, \beta, C_\xi) &= 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} \sqrt{\xi}}{1 - |\xi|}; \\ \omega(\zeta, \beta, C_\zeta) &= 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} \sqrt{\zeta}}{1 - |\zeta|}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Подставляя их в (5.51), получаем

$$\operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} \sqrt{\xi}}{1 - |\xi|} \geq \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{Re} \sqrt{\zeta}}{1 - |\zeta|}. \quad (5.53)$$

При бесконечно малом ξ это неравенство дает

$$|\xi| \geq |\zeta|. \quad (5.54)$$

С другой стороны, по определению (5.48) и (5.49)

$$\zeta \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{M^2}} g'(0) \xi, \quad \xi \rightarrow 0. \quad (5.55)$$

Из (5.54) и (5.55) следует, что

$$|g'(0)| \leq 1 - \frac{1}{M^2}. \quad (5.56)$$

Пользуясь (5.33) и (5.43), имеем

$$g'(0) = 16\mu^2 \frac{1}{M} F'(0). \quad (5.57)$$

Подставляя (5.57) в (5.56), получаем окончательно

$$|F'(0)| \leq \frac{1}{16\mu^2} \frac{M^2 - 1}{M}. \quad (5.58)$$

Этот результат был найден в работе [25] в том случае, когда $F(w)$ имеет конечное число нулей. Следуя работе [26], мы доказали его без каких-либо предположений относительно нулей $F(w)$, но с дополнительным предположением (5.7), которое можно проверить на опыте.

Другое, весьма элегантное доказательство неравенства (5.58) было дано в работе [27] без предположения (5.7). В этой работе было отмечено, что функция

$$\varphi(\xi) = \frac{h(\xi)}{\xi} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{g(\xi) - \frac{1}{M}}{1 - \frac{1}{M}g(\xi)}, \quad (5.59)$$

аналитическая в единичном круге $|\xi| < 1$, по модулю не превосходит единицы в этой области:

$$|\varphi(\xi)| \leq 1, \quad |\xi| \leq 1. \quad (5.60)$$

Ее значение при $\xi = 0$ равно

$$\varphi(0) = \frac{g'(0)}{1 - \frac{1}{M^2}}. \quad (5.61)$$

Поэтому условие (5.60) дает

$$|g'(0)| \leq 1 - \frac{1}{M^2},$$

т. е. получаем снова (5.56) и, следовательно, (5.58) без предположения (5.7).

Теорема 11. Если на разрезе форм-фактор ограничен некоторой константой:

$$|F(s)| \leq M, \quad s \geq 4\mu^2,$$

то имеет место неравенство

$$|F'(0)| \leq \frac{1}{16\mu^2} \cdot \frac{M^2 - 1}{M}.$$

6. ПРЕДЕЛ РАДИУСА ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МОДУЛЯ ФОРМ-ФАКТОРА НА РАЗРЕЗЕ

Было показано, что при заданном значении максимума модуля форм-фактора на разрезе его производная в нуле не может по модулю превосходить некоторый предел. Однако на опыте можно определить в принципе не только максимальное значение модуля форм-фактора в физической области канала аннигиляции, но и сами зна-

чения этого модуля при различных значениях аргумента. Поэтому применение найденных в предыдущем разделе результатов для оценки предела радиуса позволяет нам воспользоваться лишь частью информации, которую мы получаем из опыта по аннигиляции. Эти результаты желательно обобщить таким путем, чтобы в выражение для верхнего предела радиуса входили значения форм-фактора на всем разрезе.

Как и в предыдущих разделах, нам удобно работать с функциями, аналитическими в круге. Поэтому, как и раньше, воспользуемся конформным отображением (4.2) и преобразуем плоскость с разрезом $w \geq 4\mu^2$ в единичный круг.

Напомним, что в этом отображении разрез $w \geq 4\mu^2$ переходит в единичную окружность. Положим

$$F(w) = f(z). \quad (6.1)$$

Поскольку значения $|F(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$ можно определить на опыте, то предположим, что эти значения заданы и ограничены. Допустим, что значения $|f(z)|$ на единичной окружности заданы:

$$|f(e^{i\varphi})| = \rho(\varphi), \quad (6.2)$$

где $\rho(\varphi)$ — заданная и ограниченная функция от φ . Задача наша сводится к нахождению максимума $|f'(0)|$ для всех функций, аналитических в единичном круге и удовлетворяющих условию (6.2).

Напомним, что всюду в настоящем обзоре предполагаем непрерывность $|F(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$, что можно проверить на опыте. Это означает, что $\rho(\varphi)$ — непрерывная функция для всех φ .

Введем теперь вспомогательную функцию $g(z)$ следующим образом:

$$g(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \ln \rho(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (6.3)$$

Очевидно, что она аналитична в единичном круге. Заметим, что реальная часть функции, стоящей под знаком экспоненты,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2|z| \cos(\theta - \varphi)} \ln \rho(\varphi) d\varphi; \quad (6.4)$$

$$z = |z| e^{i\theta},$$

является гармонической в единичном круге функцией, предельные значения которой при $|z| \rightarrow 1$ совпадают с $\ln |f(e^{i\varphi})|$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\varphi}) \approx \ln \rho(\varphi) \equiv \ln |f(e^{i\varphi})|. \quad (6.5)$$

С другой стороны, эта функция представляет собой логарифм модуля функции $g(z)$:

$$u(z) = \ln |g(z)|. \quad (6.6)$$

Поэтому можно заключить, что на единичной окружности

$$\lim_{r \rightarrow 1} |g(re^{i\varphi})| = \rho(\varphi) = |f(e^{i\varphi})|. \quad (6.7)$$

Кроме того, функция $g(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга, как это видно из определения (6.3). Отсюда следует, что функция

$$h(z) = g(0) \frac{f(z)}{g(z)} \quad (6.8)$$

аналитична в единичном круге. Коэффициент $g(0)$ введен ради удобства при рассуждении.

Согласно условию нормировки

$$F(0) = 1, \quad (6.9)$$

функция $h(z)$ равна единице в нуле:

$$h(0) = 1. \quad (6.10)$$

В силу (6.7) на единичной окружности она по модулю равна $|g(0)|$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} |h(re^{i\varphi})| = |g(0)|. \quad (6.11)$$

При всех других значениях z модуль функции $h(z)$ также не превосходит $|g(0)|$

$$|h(z)| \leq |g(0)|, \quad |z| \leq 1 \quad (6.12)$$

(см. дополнение, теорему 9).

К функции $h(z)$ применяем теперь все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 11. Тогда получим

$$|h'(0)| \leq \frac{M^2 - 1}{M}, \quad (6.13)$$

где

$$M = |g(0)|. \quad (6.14)$$

Учитывая условие (6.10) и пользуясь определением (6.8), можно написать $h'(0)$ в виде

$$\begin{aligned} h'(0) &= \left[\frac{d}{dz} \ln h(z) \right]_{z=0} = \left[\frac{d}{dz} \ln f(z) \right]_{z=0} - \\ &- \left[\frac{d}{dz} \ln g(z) \right]_{z=0} = \frac{f'(0)}{f(0)} - \frac{g'(0)}{g(0)} = f'(0) - \frac{g'(0)}{g(0)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

С другой стороны, из (6.8) следует, что

$$\begin{aligned} g(0) &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \rho(\varphi) d\varphi \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}; \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \ln \rho(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (6.17)$$

Положим

$$N = \frac{g'(0)}{g(0)}. \quad (6.18)$$

Учитывая (6.15), из (6.13) получаем

$$|f'(0) - N| \leq \frac{M^2 - 1}{M},$$

т. е.

$$N - \frac{M^2 - 1}{M} \leq f'(0) \leq N + \frac{M^2 - 1}{M}. \quad (6.19)$$

Таким образом, при заданной функции $\rho(\varphi)$ величины M и N вполне определяются, и для $f'(0)$ существуют верхний предел $N + \frac{M^2 - 1}{M}$ и нижний предел $N - \frac{M^2 - 1}{M}$. Возвращаясь к переменной ω и функции $F(\omega)$, получаем следующую теорему.

Теорема 12. При заданных ограниченных значениях модуля форм-фактора на разрезе для его производной в нуле имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N - \frac{M^2 - 1}{M} \right] \leq F'(0) \leq \frac{1}{16\mu^2} \left[N + \frac{M^2 - 1}{M} \right],$$

где

$$M = \exp \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv;$$

$$N = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv.$$

Верхний и нижний пределы $F'(0)$ были получены в работе [28] при некоторых предположениях относительно непрерывности интегралов от $\ln |f(z)|$. Здесь мы следовали работе [29] и установили полученные пределы без таких дополнительных предположений. Заметим, что в силу правила сумм (4.8) константа M , определяемая выше, не меньше единицы.

Верхний и нижний пределы, установленные в теореме 12, являются лучшими оценками при заданных значениях $|F(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$. Дело в том, что существуют явные примеры форм-фактора $F(\omega)$, удовлетворяющего условию (6.2), для которых $F'(0)$ принимает максимальные значения

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N + \frac{M^2 - 1}{M} \right]$$

или минимальное

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N - \frac{M^2 - 1}{M} \right].$$

Иначе говоря,

$$\sup F'(0) = \frac{1}{16\mu^2} \left[N + \frac{M^2 - 1}{M} \right]; \quad (6.20)$$

$$\inf F'(0) = \frac{1}{16\mu^2} \left[N - \frac{M^2 - 1}{M} \right]. \quad (6.21)$$

Эти выражения для $F'(0)$ соответствуют решениям экстремальной задачи: найти наибольшее и наименьшее из всевозможных значений $F'(0)$ при заданных значениях $|F(s)|$, $s \geq 4\mu^2$.

Для доказательства этих утверждений достаточно построить в явном виде форм-фактор $F(\omega)$ так, чтобы $F'(0)$ было равно (6.20) или (6.21).

Пусть z_0 — некоторое вещественное число, по модулю меньше единицы. Рассмотрим функцию

$$\tilde{g}(z) = \frac{z_0 + z}{1 + z_0 z} g(z), \quad (6.22)$$

где $g(z)$ — определенная в (6.3) функция. Так как на единичной окружности модуль множителя перед $g(z)$ в правой части (6.22) равен единице, то

$$|\tilde{g}(e^{i\varphi})| = |g(e^{i\varphi})|. \quad (6.23)$$

С учетом (6.7) имеем

$$|\tilde{g}(e^{i\varphi})| = |f(e^{i\varphi})| = \rho(\varphi). \quad (6.24)$$

С другой стороны,

$$\tilde{g}(0) = z_0 g(0). \quad (6.25)$$

Если выберем

$$z_0 = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{M}, \quad (6.26)$$

то функция $\tilde{g}(z)$ будет удовлетворять условию нормировки

$$\tilde{g}(0) = 1, \quad (6.27)$$

аналогично функции $f(z)$. Напомним еще раз, что $M \geq 1$; случай, когда $M = 1, z_0 = 1$, тривиален.

Таким образом, функция $\tilde{g}(z)$, определяемая согласно (6.22) с учетом (6.3) и (6.26), удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к $f(z)$: она аналитична в единичном круге, равна единице в нуле, а ее модуль принимает заданные значения $|f(e^{i\varphi})|$ на единичной окружности.

Если мы выберем в качестве $f(z)$ эту функцию $\tilde{g}(z)$, то из (6.22) имеем

$$f'(0) = \frac{g'(0)}{g(0)} + \frac{1}{z_0} - z_0. \quad (6.28)$$

Подставляя в это выражение значение (6.26) для z_0 , получаем значение $f'(0)$, соответствующее верхней грани (6.20).

Таким образом, экстремальный форм-фактор, для которого $F'(0)$ имеет наибольшее значение, соответствует функции

$$f(z) = \frac{z_0 + z}{1 + z_0 z} g(z). \quad (6.29)$$

Аналогично для функции

$$f(z) = \frac{z_0 - z}{1 - z_0 z} g(z) \quad (6.30)$$

имеем

$$f'(0) = \frac{g'(0)}{g(0)} + z_0 - \frac{1}{z_0}, \quad (6.31)$$

т. е. ее производная в нуле принимает значение, соответствующее нижней грани (6.21). Итак, доказаны наши утверждения, что значения (6.20) и (6.21) являются экстремальными.

Применение теоремы 12 к оценке пределов радиуса частицы затрудняется тем, что пока известны лишь значения модуля форм-фактора $F(s)$ в небольшом интервале энергии. Более того, хотя в принципе можно определить на опыте значения $|F(s)|$ при всех s в физической области канала аннигиляции $s \geq 4\mu^2$, но практически всегда имеется возможность измерять $|F(s)|$ лишь до какой-нибудь максимальной энергии. Судя по экспериментальным данным, можно, однако, сделать некоторые утверждения относительно поведения форм-фактора при энергиях, больших этой максимальной энергии. Так, если форм-фактор убывает с ростом s на большом интервале значений s , лежащих ниже максимального значения s_{\max} , то можно предположить, что модуль форм-фактора $F(s)$ при $s \geq s_{\max}$ не превосходит его значения при $s = s_{\max}$. Найденный при этом результат является более надежным, чем результат, полученный при некотором предположении о конкретном виде модуля форм-фактора при $s \geq s_{\max}$.

Итак, решим следующую задачу. Пусть заданы значения $|F(s)|$ в интервале $4\mu^2 \leq s \leq s_{\max}$ на разрезе. Допустим далее, что при

$s \geq s_{\max}$ значения $|F(s)|$ не превосходят $|F(s_{\max})|$. Найдем верхний и нижний пределы $F'(0)$.

Обозначим φ_{\max} значения угла φ , в которое переходит точка s_{\max} , взятая на верхнем берегу разреза, при отображении (6.1). В терминах функции $f(z) = F(w)$, аналитической в единичном круге, наши предположения означают, что

$$\left. \begin{aligned} |f(e^{i\varphi})| &= f(\varphi); & |\varphi| &\leq \varphi_{\max}; \\ |f(e^{i\varphi})| &\leq f(\varphi_{\max}); & |\varphi| &\geq \varphi_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где $f(\varphi)$ — заданная функция. Положим

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi); & |\varphi| \leq \varphi_{\max}; \\ f(\varphi_{\max}), & |\varphi| \geq \varphi_{\max} \end{cases} \quad (6.33)$$

и, исходя из этой функции вместо $f(\varphi)$, построим функцию $g_1(z)$, аналогичную $g(z)$ в (6.3):

$$g_1(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \ln f_1(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (6.34)$$

Вместо функции $h(z)$, определяемой выражением (6.8), рассмотрим теперь соответствующую функцию

$$h_1(z) = g_1(0) \frac{f(z)}{g_1(z)}. \quad (6.35)$$

Она также аналитична в единичном круге и по модулю не превосходит величину

$$M_1 = g_1(0) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_1(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (6.36)$$

Применяя к $h_1(z)$ все рассуждения, изложенные выше при рассмотрении $h(z)$, получаем

$$|h_1'(0)| = \left| f'(0) - \frac{g'(0)}{g(0)} \right| \leq \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \quad (6.37)$$

и, следовательно,

$$N_1 - \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \leq f'(0) \leq N_1 + \frac{M_1^2 - 1}{M_1}, \quad (6.38)$$

где M_1 определяется согласно (6.36), а

$$N_1 = \frac{g_1'(0)}{g_1(0)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \ln f_1(\varphi) d\varphi. \quad (6.39)$$

Возвращаясь к исходной переменной w , приходим к следующей теореме.

Теорема 13. Пусть заданы значения модуля форм-фактора $F(s)$ в некотором интервале $4\mu^2 \leq s \leq s_{\max}$ физической области канала аннигиляции, а при $s \geq s_{\max}$ значения $|F(s)|$ не превосходят $|F(s_{\max})|$. Тогда возможные значения производной форм-фактора в нуле лежат между следующими пределами:

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N_1 - \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right] \leq F'(0) \leq \frac{1}{16\mu^2} \left[N_1 + \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right],$$

где

$$M_1 = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{v_{\max}} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv + \ln |F(4\mu^2 v_{\max})| \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\pi} \int_{v_{\max}}^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} dv \right\};$$

$$N_1 = \frac{2}{\pi} \int_1^{v_{\max}} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv + \\ + \ln |F(4\mu^2 v_{\max})| \frac{2}{\pi} \int_{v_{\max}}^{\infty} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} dv,$$

причем

$$v_{\max} = \frac{s_{\max}}{4\mu^2}.$$

В заключение отметим, что при заданных условиях верхний и нижний пределы, указанные в теореме 19, являются экстремальными значениями.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем теперь итоги данной работы. Мы изучили экспериментальные следствия общих аналитических свойств форм-фактора π -мезона. На опыте по изучению упругого рассеяния электрона на π -мезоне $e + \pi \rightarrow e + \pi$ можно измерить значения форм-фактора $F(t)$ при $t \leq 0$ и, в частности, определить $F'(0)$, а опыт по изучению аннигиляции пары электрон-позитрон в пару заряженных π -мезонов $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ позволяет определить значения модуля форм-фактора $F(s)$ при $s \geq 4\mu^2$. Все наши утверждения касаются непосредственно лишь этих наблюдаемых величин.

В разделе 2 было изучено асимптотическое поведение $F(\omega)$ при больших значениях ω , лежащих в физических областях процесса рассеяния и процесса аннигиляции, и доказаны следующие положения:

1. Форм-фактор $F(s)$ при $s \rightarrow +\infty$ может убывать лишь медленнее $e^{-\varepsilon\sqrt{s}}$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

2. Если на разрезе форм-фактор полиномиально ограничен и не обращается в нуль ни в одной точке, то интеграл

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds$$

должен сходиться. Это накладывает на убывание форм-фактора при $s \rightarrow +\infty$ некоторое ограничение, почти эквивалентное сформулированному условию 1.

3. Если форм-фактор $F(s)$ при $s \rightarrow +\infty$ полиномиально ограничен, то при $t \rightarrow -\infty$ его значение $F(t)$ может убывать лишь быстрее некоторой экспоненты $e^{-a\sqrt{|t|}}$.

4. Между поведением форм-фактора $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow +\infty$ и при $\omega \rightarrow -\infty$ (в физических областях канала аннигиляции и канала рассеяния) существует некоторая связь, состоящая в следующем: если

$$|F(s)| \approx as^a; \quad a > 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty$$

и

$$F(t) \approx b|t|^\beta \quad \text{при } t \rightarrow -\infty$$

или

$$|F(s)| \approx Ae^{-as^\alpha}; \quad \alpha \leq \frac{1}{2}; \quad A > 0, \quad a \geq 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty$$

и

$$F(t) \approx Be^{-b|t|^\beta}, \quad \beta \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty,$$

то в первом случае обязательно $\alpha \geq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то $a \geq |b|$, а во втором случае $\alpha \leq \beta$, причем если $\alpha = \beta$, то $a \leq b \cos \pi\alpha$.

Раздел 3 посвящен изучению ограничения снизу на величину форм-фактора в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ при заданном значении максимума его модуля в физической области канала аннигиляции. Показано, что если

$$|F(s)| \leq M \quad \text{при } s \geq 4\mu^2,$$

то

$$\max_{\omega \leq t \leq 0} |F(\omega)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^\varphi \left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right),$$

где в качестве $\varphi(\gamma)$ можно выбрать одну из следующих функций:

$$\varphi(\gamma) = \frac{[1-(1+\gamma)^{-1/2}]^{1/2}}{1-[1-(1+\gamma)^{-1/2}]^{1/2}}$$

или

$$\varphi(\gamma) = \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}{1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma}}.$$

В частности, при больших γ

$$\varphi(\gamma) \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma}.$$

Если же в физической области канала рассеяния $t \leq 0$ форм-фактор монотонно убывает с ростом абсолютного значения передачи импульса, то для его значения в каждой точке этой области имеется нижнее ограничение

$$|F(t)| \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\varphi\left(\frac{|t|}{4\mu^2}\right)}.$$

В разделе 4 были получены различные точные правила сумм, содержащие явно модуль форм-фактора в наблюдаемых областях:

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{s-4\mu^2}} ds \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{-t_0} \frac{\ln |F(t)|}{|t| \sqrt{(t-4\mu^2)(t+t_0)}} dt + \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{s \sqrt{(s-4\mu^2)(s+t_0)}} ds \geq 0;$$

$$\ln |F(t)| \leq \frac{\sqrt{4\mu^2-t}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\ln |F(s)|}{(s-t) \sqrt{s-4\mu^2}} ds; \quad t \leq 4\mu^2.$$

При заданном значении максимума модуля форм-фактора на разрезе (в физической области аннигиляционного канала для случая π -мезона) радиус соответствующей частицы не может превосходить некоторый предел, зависящий от этого максимума. Различные оценки для этого предела были получены в разделе 5. Показано, что если $|F(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$ не больше константы M : $|F(s)| \leq M$; $s \geq 4\mu^2$, а при $t \leq 0$ $F(t)$ по модулю не больше единицы $|F(t)| \leq 1$, то для $F'(0)$ имеется неравенство $|F'(0)| \leq \xi(M)$, где в качестве функции $\xi(M)$ можно взять

$$\xi(M) = \begin{cases} \frac{\sqrt{M} \ln M}{2\mu^2}, & \text{если } \ln M \leq 2; \\ \frac{e (\ln M)^2}{4\mu^2}, & \text{если } \ln M \geq 2, \end{cases}$$

или

$$\xi(M) = \begin{cases} \frac{M \ln M}{4\pi\mu^2} \arctg \frac{2\sqrt{M}}{M-1}, & \text{если } \ln M \leq \pi; \\ \frac{\ln M}{4\pi\mu^2} \cdot \frac{1}{\Phi(\rho)} \arctg \frac{2\sqrt{\Phi(\rho)}}{1-\Phi(\rho)} & \text{если } \ln M \geq \pi; \end{cases}$$

где

$$\rho = \frac{2}{\pi} \ln M,$$

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho^2 - 2 - \sqrt{(\rho^2 - 2)^2 - 4}}{2} e^{-\rho \arctg \frac{2}{\sqrt{\rho^2 - 4}}}.$$

Без предположения о том, что форм-фактор в физической области канала рассеяния не превосходит единицы по модулю, было установлено следующее верхнее ограничение:

$$|F'(0)| \leq \frac{1}{16\mu^2} \cdot \frac{M^2 - 1}{M},$$

где M — значение максимума модуля $F(s)$ при $s \geq 4\mu^2$.

Наконец, в последнем разделе получены верхняя и нижняя границы для $F'(0)$ при заданных значениях модуля форм-фактора в физической области канала аннигиляции:

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N - \frac{M^2 - 1}{M} \right] \leq F'(0) \leq \frac{1}{16\mu^2} \left[N + \frac{M^2 - 1}{M} \right],$$

где

$$M = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv \right\};$$

$$N = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv.$$

Практически можно определить $|F(s)|$ только в конечной области вплоть до какого-то значения s_{\max} . Допустим, что

$$|F(s)| \leq |F(s_{\max})| \text{ при } s \geq s_{\max}.$$

Тогда для $F'(0)$ имеем следующие верхний и нижний пределы, не зависящие от конкретного поведения $|F(s)|$ при $s \geq s_{\max}$:

$$\frac{1}{16\mu^2} \left[N_1 - \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right] \leq F'(0) \leq \frac{1}{16\mu^2} \left[N_1 + \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right],$$

где

$$M_1 = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{v_{\max}} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv + \right. \\ \left. + \ln |F(s_{\max})| \frac{1}{\pi} \int_{v_{\max}}^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v-1}} dv \right\}; \\ N_1 = \frac{2}{\pi} \int_1^{v_{\max}} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} \ln |F(4\mu^2 v)| dv + \\ + \ln |F(s_{\max})| \frac{2}{\pi} \int_{v_{\max}}^{\infty} \frac{2-v}{v^2 \sqrt{v-1}} dv; \\ v_{\max} = \frac{s_{\max}}{4\mu^2} . .$$

Опыты по аннигиляции пары электрон—позитрон в пару заряженных π -мезонов проводятся в настоящее время. В них можно определить $|F(s)|$ при $s \geq 4\mu^2$. Значения $F(t)$ при $t \leq 0$ и, в частности, $F'(0)$ можно определить или непосредственно в опыте по упругому рассеянию электрона на мезоне, или косвенно в различных других опытах. Это позволит проверить все полученные результаты.

8. ДОПОЛНЕНИЕ

Хорошо известно одно из замечательных свойств аналитических функций комплексной переменной, которое носит название принципа максимума: если функция $f(z)$ аналитична в связной области D и непрерывна в замкнутой области \bar{D} , то ее модуль может достигать максимума только на границе ∂D этой области. Принцип максимума допускает обобщение на случай, когда на границе ∂D имеется множество точек, в окрестности которых функция $f(z)$ может быть неограниченной. Рассмотрим частный случай, когда такое множество состоит лишь из одной точки и область D односвязна [30, 31].

Обобщенный принцип максимума. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области \bar{D} , за исключением точки ξ на ∂D . Пусть, далее, во всех точках границы ∂D , отличающихся от ξ , $f(z)$ по модулю ограничена некоторой константой

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \partial D, \quad z \neq \xi.$$

Допустим, что существует некоторая функция $\omega(z)$ со следующими свойствами:

- 1) $\omega(z)$ аналитична в области D ;
- 2) $|\omega(z)| < 1$ в области D ;

3) $\omega(z) \neq 0$ в области D ;

4) для любого положительного ε функция $[\omega(z)]^\varepsilon f(z)$ ограничена в точке ξ любым числом, превосходящим M . Тогда во всей области $|f(z)| \leq M$.

На основе обобщенного принципа максимума можно доказать следующую теорему.

Теорема 1 (Фрагмен — Линделёф). Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ и ограничена по модулю некоторой константой M на вещественной оси:

$$|f(x)| \leq M, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тогда имеет место следующая альтернатива:

или во всех точках z в верхней полуплоскости

$$|f(z)| \leq M,$$

или существует такая последовательность точек $z_n \rightarrow \infty$, $\text{Im } z_n > 0$, что

$$|f(z_n)| \geq \text{const } e^{a|z_n|}.$$

для некоторой константы $a > 0$.

Если модуль функции $f(z)$ меньше любой экспоненты $e^{\varepsilon|z|}$ для сколько угодно малого $\varepsilon > 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$, то должна осуществляться первая возможность, т. е. $f(z)$ ограничена по всей полуплоскости.

Пусть функция $f(z)$ аналитична и ограничена в верхней полуплоскости. Обозначим E_+ и E_- множества предельных значений функции $f(z)$ при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$ на вещественной оси соответственно. Тогда имеется следующая альтернатива: или множества E_+ и E_- имеют по крайней мере одну общую точку, или одно из них окружает другое, отделяя его от окружности с радиусом M и с центром в нуле. В частности, если существуют конечные пределы a_+ и a_- при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$ соответственно, то эти пределы должны совпадать друг с другом. Из теоремы Фрагмена—Линделёфа вытекает следующее следствие [32].

Теорема 2 (Карлсон). Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ и растет не быстрее $e^{k|z|}$ при $z \rightarrow \infty$. Если на вещественной оси $f(z)$ убывает экспоненциально

$$|f(z)| \leq e^{-\alpha|z|}, \quad \alpha > 0, \quad z \rightarrow \pm\infty,$$

то она тождественно равна нулю.

Теорема Карлсона накладывает некоторое ограничение на убывание аналитической функции с заданным максимальным ростом. Другие ограничения дают следующие теоремы [33].

Теорема 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ и принадлежит к экспоненциальному типу, т. е.

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \max_{|z|=r} \ln |f(z)| < \infty,$$

причем нули $f(z)$ не имеют конечных предельных точек. Допустим, далее, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^- |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Теорема 4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ и принадлежит экспоненциальному типу, т. е.

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \max_{|z|=r} \ln |f(z)| < \infty,$$

а интеграл

$$\int_1^r \frac{1}{x^2} \ln |f(x)f(-x)| dx,$$

как функция от r , ограничен. Тогда если

$$\frac{1}{y} \ln |f(iy)| \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty,$$

то

$$f(z) \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия принципа максимума модуля.

Теорема 5 (Адамар). Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольцевой области $D: R_1 < |z| < R_2$ и непрерывна в \bar{D} , причем ее модуль на окружности $|z| = R_i$ не превосходит M_i , $i = 1, 2$. Тогда

$$\ln \frac{R_1}{R_2} \ln |f(z)| \leq \ln \frac{|z|}{R_2} \ln M_1 - \ln \frac{|z|}{R_1} \ln M_2.$$

Теорема 6 (Каратеодори). Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < R$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq R$, причем $f(0) = 0$. Положим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|; A(r) = \max_{|z|=r} \text{Re } f(z).$$

Тогда имеет место неравенство

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R).$$

Теорема 7. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < R$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq R$ и равная единице при $|z| = 0$. Если ее модуль имеет максимум, равный M , то она не может иметь нулей внутри круга: $|z| < \frac{R}{M}$.

Доказательства теорем 5 и 6 можно найти в [31, 32]. Теорема 7 была доказана в работе [34].

Понятие аналитической функции тесно связано с понятием гармонической функции. Напомним, что функция $u(x, y)$ двух вещественных переменных x, y называется гармонической, если она дважды дифференцируема по этим переменным и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Реальная и мнимая части аналитической функции суть гармонические функции. Как и аналитические функции, значение гармонической функции в каждой точке, лежащей в ее области гармоничности, полностью определяется заданием значений этой функции на любом контуре, окружающем данную точку и лежащем в области гармоничности рассматриваемой функции. В частности, для гармонической функции $u(x, y) = u(z)$ справедлива формула:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Обобщением понятия гармонической функции является понятие субгармонической функции [35]. Действительная функция $h(x, y) = h(z)$ называется субгармонической в области D , если она удовлетворяет следующим условиям:

1) она определена и непрерывна во всех точках области D , за исключением, быть может, конечного числа точек или точек последовательности z_n , не имеющей предельных точек в D , причем для каждой точки z_n

$$\lim_{z \rightarrow z_n} h(z) = -\infty,$$

и, следовательно, можно положить

$$h(z_n) = -\infty;$$

2) для каждой точки z внутри области D и достаточно малых значений r

$$h(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Примерами субгармонических функций являются $|f(z)|$, $\ln |f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая в области D функция.

Таким образом, имеем неравенства

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\varphi})| d\varphi;$$

$$\ln |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z + re^{i\varphi})| d\varphi$$

для достаточно малых r и при всех z внутри области D .

Применение гармонических функций при изучении аналитических функций оказывается весьма полезным. При этом важное значение имеет понятие гармонической меры [30, 31].

Пусть D — связная область с границей ∂D , состоящей из конечного числа аналитических дуг. Пусть далее α — некоторое множество дуг из границы ∂D , а β — остальная часть: $\alpha \cup \beta = \partial D$. Обозначим $\omega(z, \alpha, D)$ гармоническую в области D функцию, равную единице в каждой внутренней точке множества α и равную нулю в каждой внутренней точке множества β . Она называется гармонической мерой множества α в точке z относительно области D . Согласно принципу максимума и минимума для гармонических функций, $0 \leq \omega(z, \alpha, D) \leq 1$ всюду в области D .

Для кольцевой области с радиусами $R_1 < R_2$

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{\ln |z|/R_1}{\ln R_2/R_1},$$

если в качестве множества α выберем большую окружность:

$$\alpha = \{z: |z| = R_2\}.$$

В том случае, когда D является правым единичным полукругом, а α — правая единичная полуокружность:

$$D = \left\{ z: |z| \leq 1, \left| \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$\alpha = \left\{ z: |z| = 1, \left| \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\text{имеем } \omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{Re}z}{1-|z|^2}.$$

При помощи понятия гармонической меры сформулируем теперь теорему о двух константах, обобщающую теорему Адамара о трех кругах на случай произвольной области.

Теорема 8. Пусть D — связная область с границей ∂D , состоящей из конечного числа аналитических дуг; α — открытое множество, состоящее из точек конечного числа дуг границы ∂D ; β — дополнение к α в ∂D ; β_0 — внутренность множества. Допустим, да-

лее, что функция $f(z)$ аналитична в области D , непрерывна во всех точках \bar{D} , за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \alpha,$$

$$|f(z)| \leq m, \quad z \in \beta_0.$$

Тогда для любой точки в области D

$$\ln |f(z)| \leq \omega(z, \alpha, D) \ln M + [1 - \omega(z, \alpha, D)] \ln m.$$

Рассмотрим, наконец, еще одно свойство аналитических и ограниченных в единичном круге $|z| < 1$ функций. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая при $|z| < 1$ и принимающая конечные предельные значения $f(e^{i\varphi})$ при $z \rightarrow e^{i\varphi}$ по некасательным направлениям во всех точках границы круга, за исключением конечного числа точек. Положим

$$F(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{-i\varphi} - z} \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right].$$

Функция $F(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и не имеет там нулей, а $|F(z)|$ принимает предельные значения $|f(e^{i\varphi})|$ при $z \rightarrow e^{i\varphi}$ по некасательным направлениям. Поэтому функция

$$g(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$$

также аналитична в единичном круге. При $z \rightarrow e^{i\varphi}$ она стремится к предельным значениям, по модулю равным единице. При всех других z в круге ее модуль также не превосходит единицы.

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 9. Все функции $f(z)$, аналитические в круге $|z| < 1$ и принимающие конечные предельные значения $f(e^{i\varphi})$ на единичной окружности по некасательным направлениям во всех точках, за исключением конечного числа точек, представимы в виде

$$f(z) = \Phi(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \ln |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\},$$

где $\Phi(z)$ — аналитические в круге $|z| < 1$ функции, по модулю не превосходящие единицы:

$$|\Phi(z)| \leq 1; \quad |z| \leq 1.$$

Эта теорема в более общем виде была доказана в книге [36].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
2. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
3. Померанчук И. Я. ЖЭТФ, 725, 34, 1958.
4. Van Hove L. Phys. Lett., 1963, 5, 252.
5. Logunov A. A. e. a. Phys. Lett., 1963, 7, 69.
6. Lukaszuk L., Martin A. Nuovo cimento, 1967, 52A, 122
7. Froissart M. Phys. Rev., 1961, 123, 1053.
8. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Nguyen Van Hieu. Proceedings of the International Conference on Particles and Fields, Interscience Publ., New York, 1967.
9. Logunov A. A., Nguyen Van Hieu. Proceedings of the Topical Conference on Hadron Collisions at High Energies, CERN, Geneva, 1968.
10. Нгуен Ван Хьеу. «Письма в ЖЭТФ», 1968, 7, 391.
11. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. лит., 1963, гл. 18.
12. Дрелл С. Д., Захариазен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. Бартон Г. Дисперсионные методы в теории поля. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1968.
14. Исаев П. С. В сб. «Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра», Т. 2, вып. 1. М., Атомиздат, 1971, с. 67.
15. Нгуен Ван Хьеу. «Докл. АН СССР», 1968, 182, 1303.
16. Martin A. Nuovo cimento, 1965, 37, 671.
17. Балун В., Нгуен Ван Хьеу, Сулейманов В. А. «Ядерная физика», 1961, 2, 635.
18. Волков Г. Г., Ежела В. В., Мествиришвили М. А. «Ядерная физика», 1969, 2, 857.
19. Logunov A. A., Soloviev L. D., Tavkhelidze A. N. Phys. Lett., 1967, 24B, 181.
20. Гешкенбейн Б. В., Иоффе Б. Л. ЖЭТФ, 1964, 46, 902.
21. Nguyen Van Hieu. Preprint JINR, E2-3509 (1967).
22. Truong Nguyen Tran, Vinh Mau R. Phys. Rev., 1969, 177, 2494.
23. Nguen Thi Hong. Nucl. Phys., 1969, B11, 127.
24. Нгуен Ван Хьеу. «Ядерная физика», 1968, 7, 1111.
25. Гешкенбейн Б. В. «Ядерная физика», 1969, 2, 1282.
26. Балун В., Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ, P2-4508 (1969).
27. Нгуен Тхи Хонг. «Ядерная физика», 1971, 13, 409.
28. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. «Теоретическая и математическая физика», 1970, 3, 178.
29. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий. Киев, 1970.
30. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М., Гостехиздат, 1941.
31. Стойлов С. Теория функций комплексного переменного. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
32. Титчмарш Е. Теория функций. М., Гостехиздат, 1951.
33. Woas R. P. Entire Functions, New York, Acad. Press., 1954.
34. Bessis J. D. Nuovo cimento, 1966, 45, 974.
35. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., «Наука», 1968.
36. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.