

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

*Я. А. Смородинский,
М. Хусар **

Объединенный институт ядерных
исследований, Дубна

Выведены матричные элементы и сферические функции основной серии унитарных представлений группы Лоренца в базисе унитарных спиноров. Изучены представления также в базисе угловых моментов и показано, что функция буста выражается через комплексифицированные коэффициенты Вигнера группы вращений.

Matrix elements and spherical functions of unitary representations of the Lorentz group are derived in unitary spinor basis. Representations in angular momentum basis are also considered and it is shown that the boost function can be expressed in terms of complexitied Wigner coefficients of the rotation group.

В в е д е н и е

Исследования, связанные с релятивистским разложением амплитуды рассеяния, затронули вопрос о нахождении явного вида представлений и шаровых функций группы Лоренца. Наиболее вырожденное представление таких матричных элементов впервые получили А. З. Долгинов, И. Н. Топтыгин [1] аналитическим продолжением представлений группы $O(4)$. Позднее систематическое исследование представлений на однополостном гиперboloиде было проведено в работе Н. Я. Виленкина, Я. А. Смородинского [2], где введены разные системы координат на гиперboloиде и найдены соответствующие сферические функции. Эти функции описывают скалярные частицы. Построение сферических функций, включающих частицы со спином, было проведено двумя способами. Первый способ состоял в выделении матриц, описывающих спин, и реализации представления на прямом произведении группы гиперboloида и сферы [3]. Второй способ заключался в ре-

* Центральный институт физических исследований, Будапешт, ВНР.

лизации представлений спиральными функциями на световом конусе и в последующем переходе на гиперboloид [4]. Сферические функции на однополостном гиперboloиде были рассмотрены в работе [5].

Матричные элементы унитарных представлений в самом общем случае были введены в базисе $O(3)$ Штремом [6], а также К. А. Вердиевым, Л. А. Дадашевым [7]. Аналогичный результат был получен в работе А. А. Макарова, Г. И. Шепелева с помощью методов интегральной геометрии [8]. В работе Я. А. Смородинского, Г. И. Шепелева [9] матричные элементы были выражены через гипергеометрические функции и установлены их аналитические связи с матричными элементами группы $O(4)$.

Из многочисленной литературы, относящейся к матричным элементам представлений и сферическим функциям группы Лоренца, следует выделить еще работы [10—19].

В настоящей работе будет показано, что если обобщить понятие спиноров на унитарный случай, то можно получить унитарные представления основной серии в простом виде. Выведены представления также в базисе углового момента с помощью коэффициентов перехода от базиса углового момента к базису унитарных спиноров. Показано, что эти коэффициенты представляют собой комплексные коэффициенты векторного сложения группы трехмерных вещественных вращений. Настоящий обзор основывается на работах авторов [20—24].

1. ОСНОВНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Алгебра Ли собственной группы Лоренца имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} [M_i, M_k] &= i\varepsilon_{ikl}M_l, [N_i, M_k] = i\varepsilon_{ikl}N_l; \\ [N_i, N_k] &= -i\varepsilon_{ikl}M_l \quad (i, k, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где M_i и N_i — генераторы пространственных поворотов и бустов. Линейные комбинации:

$$J_k = \frac{1}{2}(M_k + iN_k); \quad K_k = \frac{1}{2}(M_k - iN_k) \quad (1.2)$$

удовлетворяют алгебре Ли двух независимых угловых моментов:

$$\left. \begin{aligned} [J_i, J_k] &= i\varepsilon_{ikl}J_l, [K_i, K_k] = i\varepsilon_{ikl}K_l; \\ [J_i, K_k] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Обратим внимание на то, что умножение вещественной алгебры Ли на комплексное число недопустимо. Наши генераторы J_k и K_k тем не менее представляют собой линейную комбинацию M_k и N_k с комплексными коэффициентами. Именно этот шаг недопустим, если не наложено никакого условия на параметры (коор-

динаты), канонически сопряженные генераторам J_k, K_k . Так, если считать параметры, относящиеся к J_k, K_k , вещественными, то получим другую группу (в данном случае группу 0 (4)). Рассмотрим, какому именно условию должны удовлетворять параметры (координаты), канонически сопряженные к J_k и K_k в нашем случае. Для этой цели используем тот факт, что если ε^A и X_A — параметры и генераторы некоторой группы, то билинейная форма $\varepsilon^A X_A$ инвариантна относительно разных параметризаций данной группы. Если обозначить вещественные параметры, относящиеся к M_k и N_k , соответственно φ^k и u^k , то в случае группы Лоренца найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon^A X_A &= \varphi^k M_k + u^k N_k := \\ &= (\varphi^k - iu^k) \frac{1}{2} (M_k + iN_k) + (\varphi^k + iu^k) \frac{1}{2} (M_k - iN_k). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что параметры, канонически сопряженные к генераторам J_k, K_k , должны быть комплексно сопряжены друг другу. Это и есть искомое условие.

Условием унитарности представления группы L_{\uparrow} является эрмитовость генераторов M_k и N_k , канонически сопряженных вещественным параметрам, отсюда

$$J_k^+ = K_k. \quad (1.5)$$

Хотя коммутационные соотношения группы 0 (4) совпадают с (1.3) (в отличие от группы Лоренца, в 0 (4) параметры (координаты), канонически сопряженные к генераторам, удовлетворяющим (1.3), вещественны, а генераторы унитарных представлений эрмитовы. Вид коммутационных соотношений (1.3), а также уравнений (1.4) естественным образом позволяет написать элемент группы Лоренца в виде

$$T(g) = e^{-iJ_3\varphi} e^{-iJ_2\vartheta} e^{-iJ_3\psi} e^{-iK_3\varphi^*} e^{-iK_2\vartheta^*} e^{-iK_3\psi^*}, \quad (1.6)$$

где

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2; \quad \vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2; \quad \psi = \psi_1 + i\psi_2,$$

с областями изменений параметров:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \varphi_1, \varphi_1 < 2\pi; \quad 0 \leq \vartheta_1 < \pi; \\ -\infty < \varphi_2, \vartheta_2, \psi_2 < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Переставляя экспоненты в уравнение (1.6), легко видеть, что $T(g)$ содержит следующие операции:

буст вдоль оси z на гиперболический угол $-\varphi_2$,

поворот вокруг оси z на угол $+\varphi_1$,

буст вдоль оси y на гиперболический угол $-\vartheta_2$,

поворот вокруг оси y на угол $+\vartheta_1$,

буст вдоль оси z на гиперболический угол $-\varphi_2$,

поворот вокруг оси z на угол $+\varphi_1$.

Явный вид представления 4×4 , выраженный с помощью параметров φ , ϑ , ψ , выписан в работе [20]. Неприводимые представления характеризуются двумя операторами Казимира:

$$C_1 = M^2 - N^2; \quad C_2 = MN, \quad (1.8)$$

собственные значения которых обозначим $c_1 = j_0^2 - 1 - \sigma^2$, $c_2 = j_0 \sigma$ соответственно. Так как алгебра Ли имеет вид алгебры двух независимых угловых моментов, целесообразно ввести комплексные угловые моменты, являющиеся линейными комбинациями предыдущих:

$$J^2 = \frac{1}{4} (C_1 + 2iC_2), \quad K^2 = \frac{1}{4} (C_1 - 2iC_2). \quad (1.9)$$

Если ввести величины:

$$j = \frac{1}{2} (j_0 - 1 + i\sigma); \quad k = \frac{1}{2} (j_0 - 1 + i\sigma)^*, \quad (1.10)$$

то собственные значения новых операторов Казимира (1.2) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} J^2 &\rightarrow j(j+1); & K^2 &\rightarrow k(k+1); \\ c_1 &= 2(j(j+1) + k(k+1)); \\ c_2 &= j(j+1) - k(k+1). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Для однозначных (двузначных) представлений основной серии σ вещественно, а j_0 — целое (полуцелое) число и, таким образом, $j = k^*$. Неприводимые представления основной серии характеризуются парой (j_0, σ) или (j, j^*) . Представления (j, j^*) и $(-j-1, -j^*-1)$ унитарно эквивалентны.

Рассмотрим теперь подгруппу $O(2, C) = O(2) \times O(1, 1)$, образованную пространственными поворотами вокруг оси z и бустами вдоль оси z . Эти преобразования характеризуются параметрами φ_1, φ_2 соответственно, причем $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$, $-\infty < \varphi_2 < \infty$. Инфинитезимальные генераторы, соответствующие этим преобразованиям, можно представить в виде дифференциальных операторов:

$$M_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi_1}; \quad N_3 = i \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \quad (1.12)$$

Собственные функции которых удовлетворяют уравнениям:

$$M_3 | \mu \nu \rangle = \mu | \mu \nu \rangle; \quad (1.13)$$

$$N_3 | \mu \nu \rangle = \nu | \mu \nu \rangle \quad (1.14)$$

и имеют вид

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 | \mu \nu \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{i(\mu \varphi_1 - \nu \varphi_2)}. \quad (1.15)$$

В силу условия унитарности 1.1 (1.5) μ и ν вещественны. Из требования однозначности (двузначности) собственной функции (1.8)

получим

$$\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \left(\mu = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \right)$$

и

$$\nu \text{ непрерывно } (-\infty < \nu < \infty).$$

Функции (1.8) являются также собственными функциями генераторов J_3 и K_3 :

$$J_3 |mm^*\rangle = m |mm^*\rangle; \quad K_3 |mm^*\rangle = m^* |mm^*\rangle, \quad (1.16)$$

где

$$m = \frac{1}{2}(\mu + i\nu); \quad m^* = \frac{1}{2}(\mu - i\nu).$$

Очевидно, что базис $|mm^*\rangle$, полученный таким образом, является обобщением конечномерного спинорного базиса на унитарный случай. Собственные значения m и m^* соответствуют нецелочисленным и целочисленным индексам конечномерных спиноров.

Матричные элементы унитарных представлений в базисе унитарных спиноров являются собственными функциями операторов J^2 , K , J_3 , K_3 . Если выразить инфинитезимальные генераторы в виде дифференциальных операторов, действующих в групповом пространстве, то матричные элементы $\langle mm^* | T^{ij*}(g) | nn^* \rangle$ удовлетворяют следующим уравнениям*:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sin^3 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2 \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + j(j+1) \right] \langle mm^* | T^{jj*}(g) | nn^* \rangle = 0; \\ & \left[\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^{*2}} - 2 \cos \vartheta^* \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^*} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^{*2}} + \operatorname{ctg} \vartheta^* \frac{\partial}{\partial \vartheta^*} + j^*(j^*+1) \right] \langle mm^* | T^{jj*}(g) | nn^* \rangle = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Как видно из уравнения (1.6), матричные элементы факторизуются по переменным φ , φ^* и ψ , ψ^* :

$$\begin{aligned} \langle mm^* | T^{jj*}(g) | nn^* \rangle &= e^{-i(\varphi m + \varphi^* m^* + \psi n + \psi^* n^*)} R_{mm^*; nn^*}^{jj*}(\cos \vartheta, \cos \vartheta^*) = \\ &= e^{-i(\varphi_1 \mu - \varphi_2 \nu + \psi_1 \kappa - \psi_2 \lambda)} R_{mm^*; nn^*}^{jj*}(\cos \vartheta, \cos \vartheta^*), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$m = \frac{1}{2}(\mu + i\nu); \quad n = \frac{1}{2}(\kappa + i\lambda). \quad (1.19)$$

Подставляя (1.18) в (1.17) и вводя переменные $z = \cos \vartheta$, $z^* = \cos \vartheta^*$, сводим уравнение (1.17) к дифференциальному урав-

* Эти уравнения при вещественных переменных совпадают с уравнением для D -функций группы вращений.

нению Лежандра:

$$\left[(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} - \frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2} + j(j+1) \right] R_{mm^*; nn^*}^{jj^*}(z, z^*) = 0; \quad (1.20)$$

$$\left[(1-z^{*2}) \frac{d^2}{dz^{*2}} - 2z^* \frac{d}{dz^*} - \frac{m^{*2}+n^{*2}-2m^*n^*z^*}{1-z^{*2}} + j^*(j^*+1) \right] \times \\ \times R_{mm^*; nn^*}^{jj^*}(z, z^*) = 0. \quad (1.21)$$

Сначала рассмотрим случай, когда

$$\operatorname{Re}(m+n) \geq 0; \quad \operatorname{Re}(m-n) \geq 0. \quad (1.22)$$

Тогда в качестве линейно независимых решений уравнения (1.20) выберем следующие решения:

$$P_{mn}^j(z) = n_{mn}^j \left(\frac{1-z}{2} \right)^{\frac{m-n}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \times \\ \times {}_2F_1 \left(-j+m, j+m+1; m-n+1; \frac{1-z}{2} \right); \quad (1.23)$$

$$Q_{mn}^j(z) = n_{nm}^j \frac{\sin \pi(j-m)}{\sin \pi(j-n)} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{-\frac{(m-n)}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \times \\ \times {}_2F_1 \left(-j+n, j+n+1; -m+n+1; \frac{1-z}{2} \right) = n_{nm}^j \frac{\sin \pi(j-m)}{\sin \pi(j-n)} \times \\ \times \left(\frac{1-z}{2} \right)^{-\frac{(m-n)}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{-\frac{(m+n)}{2}} \times \\ \times {}_2F_1 \left(-j-m, j-m+1; -m+n+1; \frac{1-z}{2} \right), \quad (1.24)$$

где*

$$n_{mn}^j = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)} \Gamma \left[\frac{j+m+1}{j-m+1}, \frac{j-n+1}{j+n+1} \right]^{1/2} [\operatorname{Re}(m \pm n) \geq 0].$$

Множитель $\Gamma(n-m+1)^{-1}$ обеспечивает конечность Q -функций и при $n-m+1 = -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Уравнение (1.20) имеет три особых точки: $z = +1, -1, \infty$ (точки ветвления). Разрезы направляем по вещественной оси от $+1$ направо и от -1 налево.

Из двух решений (1.20) и (1.21) можно построить четыре независимых решения следующим образом:

$$R_{mm^*; nn^*}^{jj^*}(z, z^*) = a_1 P_{m^*n^*}^{j^*}(z^*) Q_{mn}^j(z) + a_2 P_{mn}^j(z) Q_{m^*n^*}^{j^*}(z^*) + \\ + a_3 P_{mn}^j(z) P_{m^*n^*}^{j^*}(z^*) + a_4 Q_{mn}^j(z) Q_{m^*n^*}^{j^*}(z^*), \quad (1.25)$$

* Здесь и в дальнейшем для удобства используется обозначение

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a, b, \dots, x \\ u, v, \dots, z \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \dots \Gamma(x)}{\Gamma(u) \Gamma(v) \dots \Gamma(z)}.$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — некоторые константы (не зависящие от z и z^*). Очевидно, что $a_1 = 0$, так как этот член сингулярен в точке $z = 1$. Из требования конечности решения в особых точках получим два уравнения для трех констант. Поскольку к единичному элементу группы относится единичная матрица, то должно иметь место соотношение $\lim_{z \rightarrow 1} R_{mm^*; nn^*}^{jj^*}(z, z^*) = \delta_{\mu\kappa} \delta(\nu - \lambda)$. Можно показать, что этому условию можно удовлетворять только в том случае, если положить $a_3 = 0$.

Потребовав конечность при $z \rightarrow 0$, имеем следующие уравнения:

$$a_1 + a_2 = 0; \quad e^{i\pi(n-m)} \frac{\sin \pi(j-m)}{\sin \pi(j-n)} a_1 + e^{-i\pi(n^*-m^*)} \frac{\sin \pi(j^*-m^*)}{\sin \pi(j^*-n^*)} a_2 = 0. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.26) имеют нетривиальное решение, если

$$e^{i\pi(\mu-\kappa)} \frac{\sin \pi(j-n) \sin \pi(j^*-m^*)}{\sin \pi(j^*-n^*) \sin \pi(j-m)} = 1, \quad (1.27)$$

где μ и κ определяются уравнениями (1.19). Уравнение (1.27) дает условия квантования для j_0 , а именно из него следует, что j_0 — целое или полуцелое число. Для полуцелых j_0 представления двузначны.

Решая уравнения (1.26) и выбирая подходящий нормировочный множитель, получаем $R_{mm^*; nn^*}^{jj^*}$ -функции в виде

$$R_{mm^*; nn^*}^{jj^*} = \frac{N_{mn}^j}{4i \sqrt{\sin \pi(m-n) \sin \pi(m^*-n^*)}} \times \\ \times [P_{m^*n^*}^{j^*}(z^*) Q_{mn}^j(z) - P_{mn}^j(z) Q_{m^*n^*}^{j^*}(z^*)] \quad (\text{Re}(m \pm n) \geq 0), \quad (1.28)$$

где

$$N_{mn}^j = \sqrt{\frac{\sin \pi(j-n) \sin \pi(j^*-n^*)}{\sin \pi(j-m) \sin \pi(j^*-m^*)}}.$$

Обобщение уравнения (1.13) на любые значения m и n , т. е. без ограничения $\text{Re}(m \pm n) \geq 0$, является очень простым. Вместо перечисления свойств симметрий и R -функций для различных значений $\text{Re}(m \pm n)$ перепишем R -функции для любых m и n в единой форме. Для этой цели вводим символ $\|u\|$ (где u — любое комплексное число), который определяется следующим образом:

$$\|u\| = \begin{cases} u, & \text{если } \text{Re } u \geq 0 \\ -u, & \text{если } \text{Re } u < 0, \end{cases}$$

с помощью которого вводим величины:

$$M = \frac{1}{2} (\|m+n\| + \|m-n\|); \quad N = \frac{1}{2} (\|m+n\| - \|m-n\|).$$

В общем случае $R_{mm^*, nn^*}^{jj^*}$ -функция получается заменой $m \rightarrow M$, $n \rightarrow N$. Итак, окончательная форма матричных элементов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle mm^* | T^{jj^*} (g) | nn^* \rangle = \\ & = e^{-i(m\varphi + m^*\varphi^* + n\psi + n^*\psi^*)} R_{MM^*, NN^*}^{jj^*} (\cos \vartheta, \cos \vartheta^*). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Представления (1.29) удовлетворяют следующим условиям ортогональности и полноты:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \int \sin \vartheta \sin \vartheta^* d\varphi d\varphi^* d\vartheta d\vartheta^* d\psi d\psi^* \times \\ & \times \langle m' - m'^* | T^{j'-j'^*} | n' n'^* \rangle^* \langle mm^* | T^{jj^*} | nn^* \rangle = \\ & = \frac{32\pi^4}{(2j+1)(2j^*+1)} \delta_{\mu'\mu} \delta_{\kappa'\kappa} \delta(\nu' - \nu) \delta(\lambda' - \lambda) \delta_{j'_0 j_0} \delta(\sigma' - \sigma) (\sigma, \sigma' \geq 0), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} & j = \frac{1}{2} (j_0 - 1 + i\sigma); \quad m = \frac{1}{2} (\mu + i\nu); \quad n' = \frac{1}{2} (\kappa + i\lambda); \\ & j' = \frac{1}{2} (j'_0 - 1 + i\sigma'); \quad m' = \frac{1}{2} (\mu' + i\nu'); \quad n' = \frac{1}{2} (\kappa' + i\lambda'); \\ & \frac{2}{32\pi^4} \sum_{j_0=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (2j+1) \times \\ & \times (2j^*+1) \langle mm^* | T^{jj^*} (g') | nn^* \rangle^* \langle mm^* | T^{jj^*} (g) | nn^* \rangle = \\ & = \delta(g' - g). \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Дельта-функция на группе определяется соотношением

$$\begin{aligned} \delta(g' - g) &= \delta(\varphi'_1 - \varphi_1) \delta(\varphi'_2 - \varphi_2) \delta(\cos \vartheta'_1 \operatorname{ch} \vartheta'_2 - \cos \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2) \times \\ & \times \delta(\sin \vartheta'_1 \operatorname{sh} \vartheta'_2 - \sin \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_2) \delta(\psi'_1 - \psi_1) \delta(\psi'_2 - \psi_2). \end{aligned}$$

2. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе будут изучены сферические функции относительно подгруппы $O(2, C) = O(2) \times O(1, 1)$. Эти функции определены на однородном пространстве, имеющем фиксированную точку с малой группой $O(2, C)$. Однородное пространство мы построим следующим образом. Рассмотрим антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) и составим трехмерный комплексный вектор:

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} S_{kl} + iS_{0i} \equiv x_i + iy_i \quad (i, k, l = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Легко показать, что квадрат вектора (2.1) инвариантен относительно собственных преобразований Лоренца, т. е.

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2 = \text{инвариант.} \quad (2.2)$$

Свойства преобразований трехмерного комплексного вектора были рассмотрены в работе [25].

Вывод сферических функций существенно отличается для сферы ненулевого радиуса от сферы нулевого радиуса. Можно показать, что при $S \neq 0$ малой группой северного полюса (O, O, S) комплексной сферы является подгруппа $O(2, C) = O(2) \times O(1, 1)$. Таким образом, сферические функции относительно подгруппы $O(2, C)$ определяются на комплексной сфере (2.2).

При $S \neq 0$ вводим комплексные полярные координаты:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S \sin \vartheta \cos \varphi; & S_1^* &= S^* \sin \vartheta^* \cos \varphi^*; \\ S_2 &= S \sin \vartheta \sin \varphi; & S_2^* &= S^* \sin \vartheta^* \sin \varphi^*; \\ S_3 &= S \cos \vartheta; & S_3 &= S \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Сферические функции, преобразующиеся по неприводимым представлениям, являются собственными функциями операторов J^2, K^2, J_3, K_3 , представленных в виде дифференциальных операторов, действующих в пространстве (2.2).

Регулярное решение указанных выше уравнений запишется в виде

$$\langle \vartheta, \vartheta^*; \varphi \varphi^* | jj^*; mm^* \rangle = \sqrt{\frac{(2j+1)(2j^*+1)}{8\pi^2}} e^{i(m\varphi+m^*\varphi^*)} \times \\ \times R_{MM^*; 00}^{jj^*}(\cos \vartheta, \cos \vartheta^*). \quad (2.4)$$

Эти функции, постоянные на классах смежности по подгруппе $O(2) \times O(1, 1)$, преобразуются по неприводимому унитарному представлению (j, j^*) . Сферические функции (2.4) ортонормированы относительно скалярного произведения:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \sin \vartheta \sin \vartheta^* d\vartheta d\vartheta^* d\varphi d\varphi^* \langle \varphi, \vartheta | \phi \rangle^* \langle \varphi, \vartheta | \psi \rangle.$$

Параметризация (2.3) при $S = 0$ теряет смысл. Для параметризации сферы нулевого радиуса вводим следующие координаты:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -i \cos \theta \cos \phi - \sin \phi; & S_1^* &= i \cos \theta^* \cos \phi^* - \sin \phi^*; \\ S_2 &= -i \cos \theta \sin \phi + \cos \phi; & S_2^* &= i \cos \theta^* \sin \phi^* + \cos \phi^*; \\ S_3 &= i \sin \theta; & S_3^* &= -i \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Сферические функции на сфере нулевого радиуса являются собственными функциями операторов Казимира J^2 и K^2 :

$$\left[\text{tg}^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2i \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{tg}^2 \theta (2 + \text{tg}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{i}{\cos^3 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} - j(j+1) \right] f_{mm^*}^{jj^*}(\theta \theta^*; \phi \phi^*) = 0; \quad (2.6)$$

$$\left[\operatorname{tg}^2 \theta^* \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}} - \frac{1}{\cos^2 \theta^*} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^{*2}} - 2i \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \theta^* (2 + \operatorname{tg}^2 \theta^*) \frac{\partial}{\partial \theta^*} - \frac{i}{\cos^3 \theta^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^*} - j^* (j^* + 1) \right] \times \\ \times f_{mm^*}^{jj^*}(\theta, \theta^*, \phi, \phi^*) = 0, \quad (2.7)$$

а также операторов J_3, K_3 :

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta^*; \phi\phi^*) = m f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta^*; \phi\phi^*); \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta^*; \phi\phi^*) = m^* f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta^*; \phi\phi^*). \quad (2.9)$$

Регулярное решение системы уравнений (2.6) — (2.9) имеет вид

$$\langle \theta\theta^* \phi\phi^* | jj^*; mm^* \rangle \equiv f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta^*, \phi\phi^*) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{j-m} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{j+m} \left(\cos \frac{\theta^*}{2} \right)^{-j^*-1+m^*} \times \\ \times \left(\sin \frac{\theta^*}{2} \right)^{-j^*-1-m^*} e^{i(m\phi + m^*\phi^*)}. \quad (2.10)$$

При учете (2.5) инвариантная мера на сфере нулевого радиуса записывается в виде $\left(\frac{i}{2}\right)^2 \cos \theta \cos \theta^* d\theta d\theta^* d\phi d\phi^*$. Простые интегрирования приводят к нормировке:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \cos \theta \cos \theta^* d\theta d\theta^* d\phi d\phi^* f_{m'm'^*}^{j'-j'^*}(\theta\theta^*; \phi\phi^*) f_{mm^*}^{jj^*}(\theta\theta; \phi\phi^*) = \\ = \delta_{j'j_0} \delta(\sigma' - \sigma) \delta_{\mu'\mu_0} \delta(\nu' - \nu). \quad (2.11)$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В БАЗИСЕ УГЛОВОГО МОМЕНТА

В гл. 1 было показано, что базис унитарных спиноров, а также комплексные углы Эйлера хорошо согласуются со структурой группы Лоренца, поскольку матричные элементы представлений принимают простой вид. В то же время при вычислении представлений в базисе углового момента (бум) встречаются значительные трудности, и конечный результат содержит многократные суммы. Эти же проблемы возникают, если в качестве базиса выбрать любую другую малую группу группы Пуанкаре.

Если выбрать параметры соответствующим образом, то матричные элементы представлений в буме можно описать с помощью произведений двух D -функций группы вращения и так называемой функции буста $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}$. Тогда $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}$ зависит только от одного угла χ , а остальные пять параметров группы Лоренца входят в D -функции. Вся сложность матричных элементов представлений в бум сосредоточена в функции, удовлетворяющей уравнению четвер-

того порядка [6]. Причина сложности этой функции совершенно ясна, так как при указанной выше параметризации, присущей буму, теряется выгодное свойство инвариантных дифференциальных уравнений расщепляться на два комплексно сопряженных дифференциальных уравнения второго порядка. Явный вид функции $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}$ находится либо решением указанного дифференциального уравнения четвертого порядка, либо решением разностного уравнения, полученного действием на функцию $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}$ генераторов группы Лоренца. Оба пути приводят к сложному результату. В то же время матричный элемент буста в базисе унитарных спиноров сводится к функции $e^{ix\nu}$. Поэтому ясно, что сложность функции $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}(\chi)$ связана с коэффициентом перехода между базисом унитарных спиноров и бумов.

Для вычисления этих коэффициентов надо реализовать сферические функции в базисах унитарных спиноров и бумов. Следуюя работе [4], эти функции целесообразно реализовать на световом конусе $p^2 = 0$. Известно, что при этом квантовое число j_0 совпадает со спиральностью $\Lambda = \mathbf{M}\mathbf{p} / |\mathbf{p}|$.

Сферические функции в базисах углового момента и унитарных спиноров имеют вид *:

$$\begin{aligned} \langle a\alpha\beta | j_0\sigma; l_\mu \rangle &\equiv f_{l\mu}^{j_0\sigma}(a, \alpha, \beta) = \\ &= \sqrt{2\pi(2l+1)} e^{-(1+i\sigma)a} e^{i\alpha(\mu-\Lambda)} P_{\Lambda\mu}^l(\cos\beta) \quad (\Lambda \equiv j_0); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \langle a', \alpha, b | j_0\sigma; \mu\nu \rangle &\equiv f_{\mu\nu}^{j_0\sigma}(a', \alpha, b) = \\ &= \eta \sqrt{2} e^{-i(1+i\sigma)a'} e^{i(\mu-\Lambda)\alpha} e^{-i\nu b} \quad (\Lambda \equiv j_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Как это было показано в работе [22], фазовый множитель удобно выбрать в следующем виде:

$$r = \begin{cases} 2^{i\sigma}\eta_0, & \text{если } j_0 = \Lambda \geq \mu; \Lambda + \mu \geq 0 \text{ или } \Lambda + \mu < 0 \\ 2^{i\sigma}\eta_0 \frac{\sin \pi(j-m)}{\sin \pi(j^*-m^*)}, & \text{если } \mu > \Lambda = j_0, \Lambda + \mu \geq 0 \text{ или } \Lambda + \mu < 0, \end{cases}$$

где $j = \frac{1}{2}(j_0 - 1 + i\sigma)$; $m = \frac{1}{2}(\mu + i\nu)$;

$$\eta_0 = \Gamma \left[\begin{matrix} -j + j^* + l + 1, & j - m + 1, & j + m + 1 \\ j - j^* + l + 1, & j^* - m^* + 1, & j^* + m^* + 1. \end{matrix} \right] \quad (3.3)$$

* Параметры a, α, β и a', α, b в уравнениях (3.1) и (3.2) соответствуют следующим системам координат на конусе: $p^0 = ea$; $p^1 = e^a \sin \beta \cos \alpha$; $p^2 = ea \sin \beta \sin \alpha$; $p^3 = e^a \cos \beta$ и $p^0 = e^{a'} \operatorname{ch} b$; $p^1 = e^{a'} \cos \alpha$; $p^2 = e^{a'} \times \sin \alpha$; $p^3 = -e^{a'} \operatorname{sh} b$.

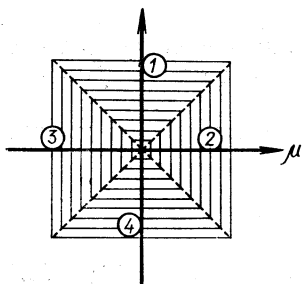
Интегрируя на конусе * $p^2 = 0$, из (3.1), (3.2) получаем коэффициенты перехода в виде

$$\langle \mu\nu | l_\mu \rangle = \eta^* 2^{i\sigma} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} l+\Lambda'+1, & l-\mu'+1 \\ l-\Lambda'+1, & l+\mu'+1 \end{matrix} \right]^{1/2} \Gamma \left[\begin{matrix} j'-m'+1, & j'+m'+1 \\ \Lambda'-\mu'+1, & \Lambda'+i\sigma+1 \end{matrix} \right] {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -l+\Lambda', & l+\Lambda'+1, & j'-m'+1 \\ \Lambda'-\mu'+1, & \Lambda'+i\sigma+1 \end{matrix} \right], \quad (3.4)$$

где $\Lambda' = \frac{1}{2} (|\Lambda + \mu| + |\Lambda - \mu|)$; $\mu' = \frac{1}{2} (|\Lambda + \mu| - |\Lambda - \mu|)$;

$$j' = \frac{1}{2} (\Lambda' - 1 + i\sigma); \quad m' = \frac{1}{2} (\mu' + i\nu) \quad (\Lambda = j_0).$$

Соответственно знакам величин $\Lambda + \mu$, $\Lambda - \mu$ получаем четыре области в Λ , μ -плоскости (см. рисунок). С помощью соотношений между функциями Томэ — Виппла [27] можно показать (см. работы [22], [24], что коэффициенты перехода в этих областях совпадают. Следует отметить, что при произвольном выборе фазы η коэффициенты перехода в областях 1, 2, 3, 4 отличаются фазовым множителем. Фаза η в уравнении (3.3) была подобрана так, чтобы эти коэффициенты совпадали в указанных выше областях.



Коэффициенты переразложения (3.4) допускают простую интерпретацию. Сферические функции (3.2) являются собственными функциями операторов J^2 , K^2 , J_3 , K_3 , а функции же (3.1) — операторов $(J + K)^2$, $(J_3 + K_3)$. Поэтому естественно интерпретировать коэффициенты перехода (3.4) как комплексные коэффициенты Клебша — Гордана группы вращения, так как J и K удовлетворяют алгебре Ли двух независимых угловых моментов. Возможность такой интерпретации была замечена авторами в работе [21] (см. также работу [16]). Точный смысл этого утверждения заключается в следующем: исходя из подходящего вида коэффициентов Клебша — Гордана [22], [24] можно показать, что коэффициенты перехода (3.4) связаны с коэффициентами векторного сложения следующим образом:

$$\langle \mu\nu | l_\mu \rangle = e^{\pm i\pi(j_2+m_2)} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi(-j_1-j_2+j_3)}{\sin \pi(j_2+m_2) \sin \pi(j_2-m_2)} \right]^{1/2} \times C(j_1 j_2 j_3; m_1 m_2) (J m(j_2 + m_2) \geq 0), \quad (3.5)$$

* Скалярное произведение определяется обычным образом:

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \langle f | p \rangle^* \langle p | g \rangle.$$

где

$$\left. \begin{aligned} j_2 &\equiv j = \frac{1}{2}(j_0 - 1 + i\sigma); & m_1 &\equiv m = \frac{1}{2}(\mu + i\nu); \\ j_2 &\equiv -j^* - 1 = \frac{1}{2}(-j_0 - 1 + i\sigma); & m_2 &\equiv m^* = \frac{1}{2}(\mu - i\nu); \\ j_3 &\equiv l; & m_3 &\equiv \mu. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

С помощью коэффициентов (3.4) можно получить простое выражение для функции буста $d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}(\chi)$. Очевидно, что матричный элемент оператора $e^{i\chi N_3}$ имеет тривиальный вид в базисе унитарных спиноров, а именно

$$\langle \mu\nu | e^{i\chi N_3} | \mu\nu' \rangle = e^{i\chi\nu\delta}(\nu - \nu').$$

Поэтому для функции буста (3.3) справедливо интегральное представление:

$$d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{i\chi\nu} \langle \mu\nu | l_\mu \rangle^* \langle \mu\nu | l'_\mu \rangle. \quad (3.7)$$

Из явного вида коэффициентов перехода $\langle \mu\nu | l_\mu \rangle$ видно, что подынтегральная функция в уравнении (3.7) имеет четыре серии полюсов в комплексной ν -плоскости:

$$\left. \begin{aligned} 1) \nu &= i(\Lambda' + 1 + \mu' + 2k) - \sigma; \\ 2) \nu &= i(-\Lambda' - 1 + \mu' - 2k) + \sigma; \\ 3) \nu &= i(-\Lambda' - 1 - \mu' - 2k) - \sigma; \\ 4) \nu &= i(\Lambda' + 1 - \mu' + 2k) + \sigma \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Можно показать, что главный член подынтегральной функции (3.7) при больших $|\nu|$ имеет вид $e^{-\pi|\text{Re}\nu| - \chi \text{Im}\nu}$, и поэтому для $\chi > 0$ контур интегрирования по вещественной оси можно замкнуть на верхней полуплоскости ν . Наконец, получим следующую формулу для функции буста:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} d_{ll'\mu}^{j_0\sigma}(\chi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\Lambda' + \mu' + k)!}{k!} \frac{\langle \mu\nu | l'\mu \rangle \langle \mu\nu | l_\mu \rangle^*}{\Gamma(j' + m' + 1) \Gamma(j'^* + m'^* + 1)} \Big|_{\nu=\nu_k} e^{i\chi\nu_k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\Lambda' - \mu' + k)!}{k!} \frac{\langle \mu\nu | l'\mu \rangle \langle \mu\nu | l_\mu \rangle^*}{\Gamma(j' + m' + 1) \Gamma(j'^* - m'^* + 1)} \Big|_{\nu=\nu_k} \times \\ &\times e^{i\chi\nu_k'} \quad (\chi \geq 0), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_k &= i(\Lambda' + 1 + \mu' + 2k) - \sigma; & \nu'_k &= i(\Lambda' + 1 - \mu' + 2k) + \sigma; \\ j' &= \frac{1}{2}(\Lambda' - 1 + i\sigma); & m' &= \frac{1}{2}(\mu' + i\nu). \end{aligned}$$

Для $\chi < 0$ можно получить аналогичную формулу, если замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости. Однако вывод можно упростить, если применить условие унитарности в виде

$$d_{l'l''\mu}^{j_0\sigma}(\chi) = d_{l'l''\mu}^{j_0\sigma}(-\chi)^*.$$

В этом случае найдем, что формула (3.9) остается в силе и в случае $\chi < 0$, если в ней заменить $\nu_k \rightarrow \nu_k^*$, $\nu'_k = \nu_k^*$, $d^{j_0\sigma} \rightarrow -d^{j_0\sigma}$.

В заключение отметим, что матричные элементы унитарных представлений в базисах $O(2,1)$ и $E(2)$ можно вычислить аналогично тому, как они вычисляются в базисе $O(3)$, т. е. переходом от унитарных спиноров к базисам $O(2,1)$ и $E(2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгинов А. З. ЖЭТФ, 1956, 30, 746; 1956, 3, 589.
Долгинов А. З., Гоптыгин И. Н. ЖЭТФ, 1958, 35, 798; 1959, 37, 1441; 1958, 8, 550; 1959, 10, 1022.
2. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, 1964, 19, 1209.
3. Либерман М. А., Смородинский Я. А., Шефтель М. В. Ядерная физика, 1968, 7, 202.
4. Кузнецов Г. И. и др. «Ядерная физика», 1969, 10, 644.
5. Вердиев И. А. «Ядерная физика», 1969, 10, 1282.
6. Strom S. Ark. fys. 1965, 29, 467; 1967, 33, 465; 1969, 38, 373.
7. Вердиев И. А., Дадашев Л. А. «Ядерная физика», 1967, 6, 1094.
8. Макаров А. А., Шепелев Г. И. «Ядерная физика», 1970, 12, 1092.
9. Смородинский Я. А., Шепелев Г. И. «Ядерная физика», 1971, 13, 441.
10. Дао Ванг Дук, Нгуен Ван Хьеу. «Докл. АН СССР», 1967, 137, 1281.
11. Szego K., Toth K. Preprint of CRIP No. 70—19, 1970.
12. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
13. Шапиро И. С. «Докл. АН СССР», 1956, 106, 647.
14. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. V. N. S., 1968, 55, 233.
15. Sciarrino A., Toller M. J.M.P., 1967, 8, 1252.
16. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
17. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматиздат, 1958.
18. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.

19. Mukunda N. J.M.P., 1968, 9, 50.
20. Huszár M., Smorodinsky J. Preprint of the JINR E-2-4225, 1968.
21. Смородинский Я. А., Хусар М. Препринт ОИЯИ P2-5124, 1970; ТМФ, 1970, 4, 328.
22. Huszár M. Preprint of the JINR E2-5429, 1970.
23. Huszár M., Smorodinsky F. Comm. of the JINR E2-5020, 1970.
24. Хусар М. Диссертация. Дубна, 1970.
25. Федоров Ф. И. «Докл. АН СССР», 1962, 143, 56.
26. Кузнецов Г. И. и др. «Ядерная физика», 1969, 10, 644.
27. Slater F. L. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge, 1966.