

УДК 539.144.3+539.142.2

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА K -ГАРМОНИК К РАСЧЕТУ СВОЙСТВ АТОМНЫХ ЯДЕР

(обзор)

*А. И. Базь, Ю. Т. Гринь,
В. Ф. Дежин, М. В. Жуков*

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

Дается обзор работ по применению метода K -гармоник к расчету свойств атомных ядер. Для ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ приведены результаты расчетов с учетом нескольких K -гармоник, на основе которых можно сделать выводы о достаточной быстрой сходимости ряда по K -гармоникам и достаточно высокой точности метода. Для более тяжелых ядер расчеты энергии связи выполнены пока только в приближении минимального K . Приведены результаты расчетов характеристик (энергии связи, квадрупольного момента и др.) основного состояния ряда несферических ядер.

Проводится сравнение метода K -гармоник с методом Хартри — Фока и методом вариационного расчета в осцилляторном базисе.

The survey of calculations of the atomic nucleus properties with the K -harmonic method is given. For nuclei ${}^3\text{H}$ and ${}^3\text{He}$ the practical convergence of the K -harmonic series for the ground state wave function and energy is demonstrated. For heavier nuclei the binding energy calculations are performed only in the K_{min} -approximation. The results of calculations of the ground state properties (binding energy, quadrupole moment etc.) for the ground state of some nonspherical nuclei are presented. The K -harmonic method is compared with the Hartree—Fock method and the variation method of calculation in the oscillator basis.

1. ВВЕДЕНИЕ

Суть метода K -гармоник заключается во введении очень удобной ортонормированной системы многочастичных функций — так называемых K -гармоник, или гиперсферического базиса, и в создании аппарата для работы с ними. Впервые этот метод был предложен Ю. А. Симоновым в 1965 г.

В первых работах, опубликованных в 1966 г. [1, 35, 41], с помощью нового метода решалась задача о свойствах ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. С тех пор появилось много статей, в основном отечественных, в которых методика K -гармоник постепенно совершенствовалась

и применялась ко все более широкому кругу ядернофизических задач.

Исторически первой областью приложения метода явились легчайшие ядра ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$. Для них сделан очень полный расчет и при заданных силах между нуклонами вычислена волновая функция этих ядер с любой нужной точностью. Обзор основных работ, посвященных расчетам легчайших ядер, дается в параграфе 4.

При использовании метода K -гармоник в вычисления не приходится вводить никаких внешних параметров, кроме вида и структуры нуклон-нуклонных потенциалов. Вполне понятно поэтому, что сразу после возникновения новой методики стали делаться попытки применить ее к расчету ядер более тяжелых, чем α -частица. Это стало возможным после появления работы [42, 44], в которой был найден способ конструирования K -гармоник низших порядков для ядер с произвольным A . После этого исследования пошли по нескольким направлениям. Стала выясняться теоретическая структура волновой функции ядра в низших приближениях метода. Была построена общая схема нижних возбужденных состояний ядер, позволяющая с единой точки зрения и с единой методикой рассматривать ядерные уровни любого типа (одночастичные, колебательные, вращательные и т. д.), а также рассчитывать энергию ядра в этих состояниях, его форму и прочие свойства. Эти вопросы будут рассмотрены в параграфах 5 и 8.

Основной задачей другого направления было получение более подробных данных о силах между нуклонами из таких общих свойств ядер, как их полная энергия связи и радиус. Обе величины рассчитываются в пределах метода K -гармоник (точнее, для энергии связи находится нижняя граница) и оказываются очень чувствительными к взаимодействию нуклон — нуклон; их результаты будут изложены в параграфе 6.

Есть еще по крайней мере два направления, в которых применение метода K -гармоник позволило сильно продвинуться вперед и получить очень важные результаты. Во-первых, это теория очень тяжелых ядер с $A \rightarrow \infty$ (в пределе — ядерной материи) и неразрывно связанный с ней вопрос о насыщении ядерных сил [28, 29]. Во-вторых, только начинающееся использование K -гармоник в задачах непрерывного спектра и, в частности, при расчете ядерных реакций [24, 27, 50, 51].

По характеру рассматриваемых физических проблем оба эти направления сильно отличаются как друг от друга, так и от тех приложений к теории ядра, о которых было сказано выше. Их следует рассматривать отдельно, а ограниченный объем заставляет нас вовсе отказаться от обсуждения этих важных проблем в настоящем обзоре.

2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

При построении теории ядра наиболее привлекательной является точка зрения, согласно которой все без исключения свойства ядра, состоящего из A нуклонов, содержатся в нерелятивистском уравнении Шредингера

$$\left\{ -\hbar^2/(2m) \sum_{i=1}^A \partial^2/\partial \mathbf{r}_i^2 + \sum_{i>j}^A \hat{V}(i, j) - E \right\} \Psi(1, 2, \dots, A) = 0, \quad (1)$$

где m — масса нуклона (разницей масс нейтрона и протона пренебрегаем); \mathbf{r}_i — его координата; $\hat{V}(i, j)$ — оператор взаимодействия i -го и j -го нуклонов; E — полная энергия системы A нуклонов за вычетом энергии покоя самих нуклонов. Каждый нуклон описывается пятью переменными — тремя пространственными координатами вектора \mathbf{r}_i и дискретными координатами μ_i и τ_i , обозначающими проекции спина и изоспина. Итак, волновая функция $\Psi(1, 2, \dots, A)$ зависит от $3A$ пространственных и $2A$ спин-изоспиновых координат.

Фактически, когда для описания свойств ядер пишется уравнение Шредингера (1), делается важное предположение, правдоподобное, но не самоочевидное: считается, что применительно к задачам ядерной физики нуклоны можно рассматривать как бесструктурные нерелятивистские частицы. Средняя кинетическая энергия нуклонов в ядре не превышает $30\text{--}50$ Мэв, и это является обоснованием применения нерелятивистской кинематики к нуклонам. Предположение о бесструктурности нуклона требует более подробных комментариев. Радиус мезонной шубы нуклона порядка $0,7\text{--}0,9$ ферми, как это следует из данных об электрических и магнитных форм-факторах нуклона. Отсюда заключаем, что нуклоны можно рассматривать в ядернофизических задачах как точечные бесструктурные частицы, если в ядре они не перекрываются своими внутренними волновыми функциями, т. е. если нуклоны отдалены от своих соседей на расстояния порядка $1,5 \div 2$ ферми. Имеются два обстоятельства, способствующие этому: 1) принцип Паули и 2) экспериментально установленное отталкивание, действующее между нуклонами на малых расстояниях. Насколько эти два фактора обеспечивают достаточно большие расстояния между соседними нуклонами в ядре, пока до конца не ясно. Очень многое зависит от конкретного вида взаимодействия между нуклонами.

Имеется еще одно важное предположение, заложенное в уравнение (1). Именно, взаимодействие $\hat{V}(i, j)$ между нуклонами считается парным и зависящим только от координат двух взаимодействующих нуклонов. Другими словами, предполагается, что наличие других нуклонов в ядре не меняет вида взаимодействия

между i -м и j -м нуклонами, и оно оказывается таким же, как если бы эти два нуклона находились в пустоте (пустотное взаимодействие). Справедливость такого предположения о характере взаимодействия нуклонов должна проверяться на опыте. Примем это предположение как удобную рабочую гипотезу.

3. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ МЕТОДА К-ГАРМОНИК

Пусть рассматривается какое-то ядро, состоящее из A нуклонов. Исходным для метода K -гармоник является нерелятивистское уравнение Шредингера (1) этой системы. Удобно с самого же начала отделить движение общего центра масс. Для этого переходим от координат \mathbf{r}_i отдельных нуклонов к новым переменным:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= 1/A \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i; \quad \xi_l = \\ &= 1/\sqrt{l(l+1)} \left[\sum_{j=1}^l \mathbf{r}_j - l\mathbf{r}_{l+1} \right]; \quad l = 1, 2, \dots (A-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{R} — координата центра тяжести ядра, а $(A-1)$ координат Якоби трансляционно инвариантны и зависят лишь от относительного расположения A нуклонов. При этом имеем тождественно

$$d\tau_{3A} \equiv \prod_{i=1}^A d\mathbf{r}_i = A^{3/2} d\mathbf{R} \prod_{j=1}^{A-1} d\xi_j \equiv A^{3/2} d\mathbf{R} d\tau_{3A-3} \quad (3)$$

и

$$\Delta_{3A} = \sum_{i=1}^A \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_i^2} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + \sum_{j=1}^{A-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \equiv \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + \Delta_{3A-3}. \quad (4)$$

Совокупность $3(A-1)$ компонент векторов ξ_j можно рассматривать как компоненты одного вектора ρ в $3(A-1)$ -мерном пространстве, натянутом на реперы $\xi_j/|\xi_j|$. Для квадрата длины ρ^2 этого вектора получаем с помощью (2)

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{A-1} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^A (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \equiv \frac{1}{A} \sum_{i>j}^A (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i^2 - A\mathbf{R}^2. \quad (5)$$

Элемент объема в этом $3(A-1)$ -мерном пространстве можно записать как

$$d\tau_{3A-3} = \prod_{i=1}^{A-1} d\xi_i = \rho^{3A-4} d\rho d\Omega_\rho. \quad (6)$$

Здесь Ω_ρ обозначает совокупность $(3A-4)$ углов, определяющих направление вектора ρ в $(A-1)$ -мерном пространстве. Переход

к переменным ρ и Ω_ρ в исходном уравнении Шредингера (1) осуществляется с помощью формулы [см. (4)]

$$\Delta_{3A-3} = 1/\rho^{3A-4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{3A-4} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \Delta_{\Omega_\rho}/\rho^2, \quad (7)$$

где Δ_Ω — угловая часть многомерного лапласиана.

($3A - 4$) угла Ω_ρ можно вводить разными способами, но их конкретный вид нас интересовать не будет. Все дальнейшее построение не зависит от выбора системы многомерных углов, коль скоро справедливы соотношения (6) и (7).

Волновая функция Ψ , являющаяся решением уравнения Шредингера (1), в системе центра инерции зависит от совокупности $\Omega_{\mu\tau}$ $2A$ -спин-изоспиновых переменных и от длины ρ и направления Ω_ρ $3(A - 1)$ -мерного вектора ρ . В методе K -гармоник Ψ -функцию можно записать в виде разложения

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = \rho^{-(3A-4)/2} \sum_{K, \gamma} \chi_{K\gamma}(\rho) U_{K\gamma}(\Omega_\rho, \Omega_{\mu\tau}), \quad (8)$$

где для состояний с положительной (отрицательной) четностью $K=0, 2, 4, \dots (1, 3, 5, \dots)$; $U_{K\gamma}$ — полный набор ортонормированных функций в пространстве ($3A - 4$) угловых и $2A$ спин-изоспиновых переменных:

$$\int d\Omega_\rho U_{K'\gamma'}^\dagger U_{K\gamma} = \delta_{KK'} \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (9)$$

И в этой формуле, и везде ниже мы не выписываем явно знака суммирования по спин-изоспиновым переменным; оно всегда подразумевается выполненным при вычислении любых матричных элементов. В качестве обобщенных угловых функций $U_{K\gamma}$ (K -гармоник) удобно пользоваться собственными функциями угловой части многомерного лапласиана:

$$\Delta_{\Omega_\rho} U_{K\gamma} = -(K + 3A - 5) U_{K\gamma}. \quad (10)$$

Здесь K — целые положительные числа $K \geq K_{\min}$, в важности которых для метода K -гармоник мы скоро убедимся, а индекс γ обозначает набор всех остальных чисел, характеризующих K -гармонику $U_{K\gamma}$. Общий вид и метод построения K -гармоник низших порядков даны в работах [4, 44, 46]. Детальный вид этих функций для $K = K_{\min}$ будет приведен ниже.

Подставляя разложение (8) в исходное уравнение Шредингера (1) и используя (4), (7), (9) и (10), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для входящих в (8) функций $\chi_{K\gamma}$:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K + 1)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (E + W_{K\gamma}^{K\gamma}(\rho)) \right\} \chi_{K\gamma}(\rho) = \\ = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K'\gamma' \neq K\gamma} W_{K'\gamma'}^{K'\gamma'}(\rho) \chi_{K'\gamma'}(\rho). \quad (11)$$

Здесь $\mathcal{L}_K = K + \frac{3A-6}{2}$, а матричные элементы $W_{K\gamma}^{K'\gamma'}(\rho)$, имеющие значение эффективных взаимодействий, равны

$$W_{K\gamma}^{K'\gamma'}(\rho) = \int d\Omega_\rho U_{K'\gamma'}^+ \left(\sum_{i>j}^A \hat{V}(i, j) \right) U_{K\gamma}. \quad (12)$$

Система уравнений (11) и формулы (8) и (12) являются точными и составляют фундамент метода K -гармоник.

Сделаем несколько замечаний:

1. Метод конструирования K -гармоник $U_{K\gamma}(\Omega_\rho)$ основан на известной теореме теории гармонических функций: на многомерной сфере $|\rho| = \text{const}$ практически любую функцию можно разложить в ряд по гармоническим полиномам $\mathcal{P}_{K\gamma}(\rho)$ — однородным полиномам степени K , построенным из $3(A-1)$ компонент вектора ρ и удовлетворяющим уравнению Лапласа:

$$\Delta_{3A-3} \mathcal{P}_{K\gamma}(\rho) = 0. \quad (13)$$

Поэтому K -гармоники $U_{K\gamma}(\Omega_\rho)$ можно определить как угловые части полиномов $\mathcal{P}_{K\gamma}(\rho)$:

$$U_{K\gamma}(\Omega_\rho) = \rho^{-K} \mathcal{P}_{K\gamma}(\rho). \quad (14)$$

Легко видеть, что из (13), (14) и (7) сразу следует выражение (10).

2. Разложение (8) волновой функции можно рассматривать как разложение в ряд по гармоническим полиномам. Для разложений такого типа имеются строгие теоремы сходимости [14].

3. Величина $K_{\text{мин}}$ — минимального значения квантового числа K — определяется свойствами симметрии волновой функции, и в первую очередь требованиями принципа Паули. Для не слишком легких ядер ($A \geq 20$) выполняется неравенство $K_{\text{мин}} > A$. Ниже покажем, как вычислять $K_{\text{мин}}$ для любого конкретного ядра, а пока приведем для иллюстрации значения $K_{\text{мин}}$ для некоторых ядер (табл. 1).

Таблица 1

Значения $K_{\text{мин}}$ для различных ядер

Ядро	${}^4\text{He} (A=4)$	${}^{12}\text{C} (A=12)$	${}^{16}\text{O} (A=16)$	${}^{20}\text{Ne} (A=20)$	${}^{40}\text{Ca} (A=40)$
$K_{\text{мин}}$	0	8	12	20	60

4. Хотя разложение (8) сходится строго, немаловажным является вопрос о скорости сходимости: достаточно ли ограничиться одним-двумя первыми членами разложения или необходимо суммировать весь бесконечный ряд?

Можно привести некоторые соображения в пользу быстрой сходимости.

Свойства NN -взаимодействия таковы, что наиболее сильно оно проявляется в S -состоянии, а в остальных состояниях ($l > 0$) центробежная энергия пары значительно больше ядерного взаимодействия. По этой причине гармоники с $K = K_{\min}$ отвечают минимуму энергии, а гармоники с $K > K_{\min}$, в которых возбуждены дополнительные парные моменты, соответствуют большей энергии возбуждения. Следовательно, относительный вклад в волновую функцию основного и низколежащих возбужденных состояний гармоник с $K > K_{\min}$ должен быть мал по сравнению с основной ($K = K_{\min}$) гармоникой. Количественно вопрос о сходимости исследовался пока только для ядер с $A = 3, 4$, и была показана достаточно быстрая практическая сходимость.

К сказанному следует добавить, что так как с увеличением A уменьшается разность средних относительных орбитальных моментов для соседних K , то с ростом A сходимость ухудшается; однако вопрос о том, начиная с каких A это ухудшение станет существенным, еще ждет своего решения прямыми расчетами.

4. РАСЧЕТЫ ЛЕГЧАЙШИХ ЯДЕР ($A = 3, 4$)

Общие замечания. Не имея возможности подробно говорить о всех работах (их слишком много), сделаем их выборочный обзор, имея в виду в основном обсуждение двух вопросов: 1) практическая сходимость ряда по K для волновой функции и энергии связи; 2) зависимость энергии связи и других характеристик ядра от вида NN -потенциалов. Последнее особенно важно, так как пока нет единого мнения о форме и величине разных компонент NN -потенциала. Сравнение расчетных характеристик легчайших ядер с экспериментом позволяет получить дополнительные сведения о NN -потенциалах.

Потенциалы, которые используются в настоящее время в ядерных расчетах, подобраны в основном из условия, чтобы они хорошо описывали задачу двух тел (дейтон, NN -рассеяние). Потенциал между i -м и j -м нуклонами принято записывать в виде *

$$\begin{aligned} \hat{V}(i, j) = & V_{33}(r_{ij}) P_{\sigma}^{+} P_{\tau}^{+} + V_{31}(r_{ij}) P_{\sigma}^{+} P_{\tau}^{-} + V_{13}(r_{ij}) P_{\sigma}^{-} P_{\tau}^{+} + \\ & + V_{11}(r_{ij}) P_{\sigma}^{-} P_{\tau}^{-} + (\mathbf{LS}) [V_3^{LS}(r_{ij}) P_{\tau}^{+} + V_1^{LS}(r_{ij}) P_{\tau}^{-}] + \\ & + \frac{3(\sigma_i \mathbf{r}_{ij})(\sigma_j \mathbf{r}_{ij}) - r_{ij}^2 \sigma_i \sigma_j}{r_{ij}^2} [V_3^t(r_{ij}) P_{\tau}^{+} + V_1^t(r_{ij}) P_{\tau}^{-}], \end{aligned} \quad (15)$$

* В этом обзоре не будем касаться вопроса о членах другого типа, например L^2 -членах, нелокальных потенциалах, N -частичных силах и т. д. Вводить их без необходимости нецелесообразно.

где r_{ij} — радиус-вектор относительного расстояния между нуклонами; σ — матрицы Паули; P^+ (P^-) — проекционный оператор в триплетное (синглетное) спиновое (для σ) или изоспиновое (для τ) состояния; L — относительный орбитальный момент; S — полный спиновый момент пары нуклонов; $V_{ab} = V_{2S+1, 2T+1}$; T — изоспин пары нуклонов; $V_a^t (V_a^{LS}) = V_{2T+1}^t (V_{2T+1}^{LS})$.

Такие NN -потенциалы, взятые из различных работ, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Ряд потенциалов (центральных четных или центральных четных плюс тензорные), использовавшихся в расчетах по методу K -гармоник

$$(V_{ab} = \sum_i V_{ab}^{(i)} f(r/\tau_{ab}^{(i)}))$$

Вариант	$f(x)$	i	$V_{31}^{(i)}, \text{ Мэв}$	$\tau_{31}^{(i)}, \text{ ферми}$	$V_{13}^{(i)}, \text{ Мэв}$	$\tau_{13}^{(i)}, \text{ ферми}$	Литература
1	Прямоугольная яма	1	-35,4	2,043	-13,63	2,583	[48]
2	e^{-x}	1	-192,7	0,664	-107,97	0,710	[48]
3	e^{-x}/x	1	-52,39	1,377	-46,91	1,17	[48]
4	e^{-x^2}	1	-51,5	1,6	$V_{13} = V_{31}$		[11]
5	e^{-x^2}	1	600	0,426	800	0,43	[49]
		2	-70	1,414	-70	1,250	
		3	-27,6	1,622	-21	1,443	
6	e^{-x}/x	1	-29,03	1,58	$V_{13} = V_{31}$		[12]
7	e^{-x}/x	1	4545,1	0,3215	$V_{13} = V_{31}$		[31]
		2	-900,73	0,6431	$V_{13} = V_{31}$		
8	e^{-x}	1	-179,13	0,578	-107,97	0,710	[13, 48]
			$V_1^t = -56,57 \text{ Мэв}; \tau_1^t = 0,973 \text{ ферми}$				
9	e^{-x}/x	1	-38,56	1,275	-46,88	1,170	[13, 48]
			$V_1^t = -28,18 \text{ Мэв}; \tau_1^t = 1,594 \text{ ферми}$				

Большинство из них подобраны по характеристикам дейтона и низкоэнергетическому NN -рассеянию, и лишь потенциалы вариантов 5 и 7 — по NN -рассеянию в большом диапазоне энергий. Потенциалы вариантов 1—7 — центральные, вариантов 8 и 9 — центральные плюс тензорные. Потенциалы V_{31} и V_{13} называются четными (они действуют только в состояниях $L = 0, 2, 4, \dots$), потенциалы V_{33} и V_{11} — нечетными ($L = 1, 3, 5, \dots$). Потенциал V_{31} — триплетный по спину, V_{13} — синглетный по спину.

Радиальная часть потенциала записывается в виде

$$V_a(r) = \sum_i V_a^{(i)} f(r/\tau_a^{(i)}), \tag{16}$$

где $a = 33; 31; 13; 11; 3$ или 1 для тензорных и LS -сил. Для разных потенциалов в сумму по i может входить от одного до трех членов; аналитический вид функции f задан (см. табл. 2).

Во всех расчетах легчайших ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, выполненных к настоящему времени, нечетные потенциалы $V_{33}(r)$ и $V_{11}(r)$, так же как тензорный V_3^T и спин-орбитальные V^{LS} , полагались равными нулю. Это связано, во-первых, с тем, что об этих компонентах NN -потенциала мало что известно и, во-вторых, свойства легчайших ядер слабо зависят от этих компонент.

Практическая сходимость ряда по K -гармоникам зависит от конкретного вида NN -потенциалов, особенно от наличия или отсутствия в них отталкивающей сердцевины и от относительной роли тензорных сил. Ниже эти случаи будут рассмотрены отдельно.

Всегда следует помнить, что при вычислении энергии связи методом K -гармоник выполняется вариационное свойство: расширение количества гармоник, включаемых в расчет, может только увеличить энергию связи ядра. Поэтому если мы рассчитываем энергию связи, пользуясь приближенной функцией с конечным $K_{\text{макс}}$

$$\Psi_{K_{\text{макс}}} = \sum_{K=K_{\text{мин}}}^{K_{\text{макс}}} \sum_{\nu} \chi_{K\nu}(\rho) U_{K\nu},$$

и получаем для энергии связи значение, превышающее экспериментальное, то можно сделать однозначный вывод о непригодности используемых в расчете NN -потенциалов: они являются чересчур притягивающими. Этим мы будем неоднократно пользоваться ниже.

Центральные силы без отталкивающей сердцевины. Впервые метод K -гармоник применялся в расчетах энергий связи и волновых функций ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ [2, 3, 43]. В этих работах тензорные, спин-орбитальные и нечетные (V_{33} и V_{11}) потенциалы полагались равными нулю, четные потенциалы V_{31} , V_{13} выбирались в виде прямоугольной ямы, экспоненты или гауссианы (варианты 1, 2, 3 в табл. 2). Все использованные потенциалы давали правильные значения энергии связи дейтона и длин NN -рассеяния. Для энергий связи легчайших ядер, однако, уже в низшем приближении получили существенно различающиеся результаты (табл. 3). Видно, что потенциалы вариантов 2 и 3 должны быть «изъяты из употребления»: они дают слишком большие энергии связи, которые могут только увеличиться, если включить в рассмотрение следующие K -гармоники. По этой причине подробно рассмотрим сейчас только результаты для прямоугольной ямы, для которой расчет энергии связи дает величину, значительно более близкую к экспериментальной, чем потенциалы вариантов 2 и 3.

Таблица 3

Энергия связи ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ для потенциалов вариантов 1—3 из табл. 2

Вариант	Учитываемые K	$E, \text{Мэв}$		
		${}^3\text{H}$	${}^3\text{He}$	${}^4\text{He}^*$
1	0	$7,435 \pm 0,06$	—	$31,518 \pm 0,0005$
	0; 2	$8,41 \pm 0,045$	—	$32,02 \pm 0,005$
	0; 2; 4	$8,426 \pm 0,004$	$7,658 \pm 0,03$	—
2	0	$9,12 \pm 0,12$	—	$43,62 \pm 0,12$
3	0	$9,62 \pm 0,12$	—	$55,5 \pm 1,0$

* Для ${}^4\text{He}$ результаты приведены без кулоновской поправки, которая для $K = K_{\text{мин}}$ и для потенциала 1 составляет $0,95 \text{ Мэв}$ (по расчетам [2]).

В табл. 3 показано, как изменяется расчетная энергия связи ядра ${}^3\text{H}$ при постепенном расширении базиса функций, включаемых в волновую функцию: сначала учитывается только наименьшая гармоника $K = 0$, потом к ней добавляется член с $K = 2$, а затем в расчет включается следующая гармоника с $K = 4$.

Волновая функция ядра оказалась практически целиком состоящей из члена, отвечающего гармонике с наименьшим $K = K_{\text{мин}} = 0$. Так, для ядра ${}^3\text{H}$ при учете гармоник до $K = 4$ включительно оказалось, что $\sim 98\%$ времени ядро находится в состоянии с $K = 0$, $1,28\%$ — в состоянии с $K = 2$ и лишь $\sim 0,5\%$ — в состоянии с $K = 4$.

Центральные силы с отталкивающей сердцевинной. Эксперименты по NV -рассеянию при энергиях $200\text{--}400 \text{ Мэв}$ свидетельствуют о сильном отталкивании, которое действует между нуклонами, находящимися на расстоянии $\sim 0,4\text{--}0,6 \text{ ферми}$.

Из общих соображений ясно, что сходимость ряда по K должна ухудшаться при наличии жесткой сердцевины во взаимодействии между нуклонами * из-за возникающей сильной корреляции между нуклонами на малых расстояниях. Кроме того, сам метод расчета может стать неприменимым, ибо некоторые, если не все, матричные элементы от NV -потенциалов обращаются в бесконечность. Один из возможных способов модификации метода K -гармоник в применении к потенциалам с жесткой сердцевиной был предложен Ю. А. Симоновым и А. М. Бадалян [45] (см. также [6]).

* Потенциалом с мягкой сердцевиной принято называть потенциал, конечный при $r \rightarrow 0$ или стремящийся к $+\infty$ не быстрее, чем r^{-2} . Если $V(r) = +\infty$ для $r \leq r_0$ или $V(r) \rightarrow +\infty$ как r^{-n} ($n > 2$), то такой потенциал принято называть потенциалом с жесткой сердцевиной.

Остановимся более подробно на расчетах случая, когда у потенциалов имеется мягкая сердцевина. Особенно важными являются работы Рипелле [36] (см. также доклад на проблемном симпозиуме по физике ядра, Новосибирск, 1970) и Еренса [23]. С точки зрения интересующего нас вопроса о сходимости ряда по K результаты обоих авторов подобны, поэтому ниже приводим

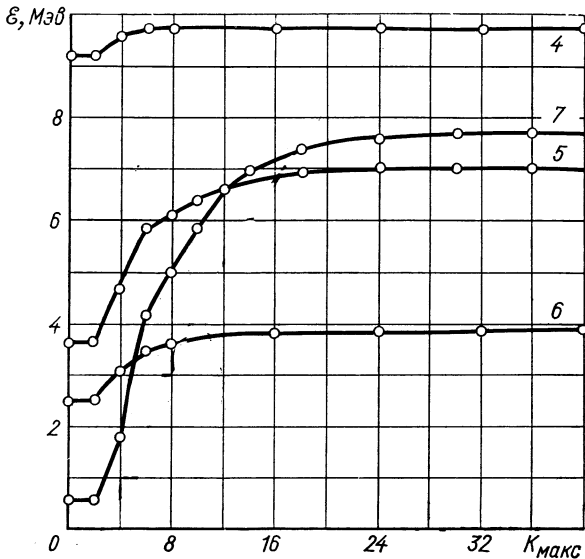


Рис. 1. Зависимость расчетной энергии связи ядра $A = 3$ от числа учитываемых K -гармоник для потенциалов 4—7 из табл. 2 (у кривых проставлены номера потенциалов).

лишь результаты работы Еренса, полученные для ядра $A = 3$ с потенциалами вариантов 4—7 из табл. 2. Зависимость энергии связи ядра $A = 3$ от числа учитываемых K -гармоник для потенциалов вариантов 4—7 показана на рис. 1. Для потенциалов вариантов 4 и 6, не имеющих сердцевины, наблюдается быстрая сходимость. Потенциалы вариантов 5 и 7 с сильным отталкиванием на малых расстояниях, поэтому для получения точного значения энергии связи оказывается необходимым учесть довольно много членов ряда по K , причем для потенциала варианта 7, у которого сердцевина «жестче», таких членов больше, а в приближении $K = K_{\min} = 0$ ядро становится почти не связанным.

В табл. 4 приведены относительные веса состояний с различными K для потенциалов вариантов 4 и 7. Из этой таблицы видно, что даже в случае потенциала с сильным отталкиванием подавляющий вклад в нормировку дает гармоника с $K = K_{\min}$.

Таблица 4

Вклад (в %) в нормировку волновой функции состояний с различными K для потенциалов 4 и 7 из табл. 2

K	Вариант 4	Вариант 7	K	Вариант 4	Вариант 7
0	99,17	98,75	8	0,018	0,083
4	0,63	0,566	10	0,008	0,093
6	0,172	0,352	12	0,003	0,080

Центральные и тензорные силы. Давно известно, что кроме центральных между нуклонами действуют еще и тензорные силы, проявлением которых служит отличный от нуля квадрупольный момент дейтона. Поэтому насущно необходимым является использование при расчете свойств ядер потенциалов, которые включают центральные и тензорные члены, подогнанные по двухнуклонным данным. Такими являются потенциалы 8 и 9 в табл. 2 с радиальной зависимостью экспоненциального и юкавского типов.

Подробные расчеты с нецентральными силами проделаны в работе [22]. Авторы рассчитывали свойства ядра ${}^3\text{H}$ для набора потенциалов, из которых выбрали потенциалы вариантов 8 и 9.

Для нецентральных потенциалов сохраняется только полный момент $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, но не полные орбитальные и спиновые моменты L и S в отдельности, поэтому полная волновая функция есть сумма не только по K , ν , но и по L и S , таким, что $\mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J}$:

$$\Psi^{JM} = \rho^{-5/2} \sum_{L,S} \chi_{L, K\nu}^{JS}(\rho) U_{LK\nu}^{JMS}(\Omega_\rho, \Omega_{\text{от}}).$$

Здесь $U_{LK\nu}^{JMS}$ — антисимметричные по перестановкам частиц спин-угловые функции, зависящие от спиновых, изоспиновых координат частиц и от углов в шестимерном пространстве; ν — дополнительное квантовое число, различающее гармоники с одинаковыми K .

В работе [22] учитывались все возможные состояния с $J = T = 1/2$ для $K = 0; 2; 4$, за исключением состояний с $L = 1$, которые дают незначительный вклад в энергию связи и волновую функцию, ибо их перекрестные матричные элементы с основным состоянием ($K = L = 0$) равны нулю. Для удобства перенумеруем состояния следующим образом:

$$1 - \chi_{000}^{1/2\ 1/2}; \quad 2 - \chi_{021}^{1/2\ 1/2}; \quad 3 - \chi_{221}^{1/2\ 3/2}; \\ 4 - \chi_{040}^{1/2\ 1/2}; \quad 5 - \chi_{042}^{1/2\ 1/2}; \quad 6 - \chi_{241}^{1/2\ 3/2}; \quad 7 - \chi_{242}^{1/2\ 3/2}.$$

Введем обозначение $P = \int_0^\infty |\chi_{LK\nu}^{JS}|^2 d\rho$.

Таблица 5

Энергия связи и вклад компонент $\chi_{\alpha K \nu}^{JS}$ волновой функции 3N в нормировочный интеграл

Вариант потенциала	Номера учитываемых состояний	$ E $, Мэв	P, %						
			$\chi_{000}^{1/2 1/2}$	$\chi_{021}^{1/2 1/2}$	$\chi_{221}^{1/2 3/2}$	$\chi_{040}^{1/2 1/2}$	$\chi_{042}^{1/2 1/2}$	$\chi_{241}^{1/2 3/2}$	$\chi_{242}^{1/2 3/2}$
8	1-5	5,49	—	—	—	—	—	—	—
8	1-7	7,72	95,457	0,097	2,791	0,375	0,029	0,684	0,568
9	1,3	3,61	96,9372	0	3,0628	0	0	0	0
9	1-3	3,63	96,9346	0,0048	3,0605	0	0	0	0
9	1, 2, 4, 5	1,04	—	—	—	—	—	—	—
9	1-5	4,15	—	—	—	—	—	—	—
9	1-7	7,31	95,673	0,0059	2,755	0,344	0,00002	0,716	0,506

Результаты численного счета для потенциалов вариантов 8 и 9 сведены в табл. 5. Прежде всего необходимо обратить внимание на большое значение компонент с $L = 2$ ($\chi_{221}^{1/2 3/2}$, $\chi_{241}^{1/2 3/2}$, $\chi_{242}^{1/2 3/2}$, примесь которых к полной волновой функции обязана тензорным силам: расчет без учета этих компонент (см. пятую строку табл. 5) приводит к очень слабо связанной системе ($\mathcal{E} = 1,04$ Мэв), а расчет с учетом только двух компонент $\chi_{000}^{1/2 1/2}$ и $\chi_{221}^{1/2 3/2}$ дает для энергии связи величину, близкую к получаемой с пятью функциями 1—5 (см. строки 3 и 6 табл. 5). Относительно велик и вклад этих компонент в нормировочный интеграл. Существенна разница в результатах расчета с пятью и семью компонентами (см. строки 1,2 и 6,7 табл. 5), что говорит как о важности компонент 6 и 7, так и о необходимости проверки сходимости включением и других более высоких компонент.

Подведем итоги. По результатам многочисленных работ, посвященных теории легчайших ядер, приходим к выводу: 1) при заданном виде NN -потенциала ядра с $A = 3$ и 4 могут быть рассчитаны сейчас с любой заданной точностью; 2) единственное, что мешает провести такой расчет,— недостаточное знание NN -потенциала. Уточнение его параметров по данным о фазах NN -рассеяния, свойствам дейтона, тритона, 3He , 4He и т. д. является сейчас одной из важнейших задач; 3) ряд по K -гармоникам оказался достаточно быстро сходящимся. Однако при наличии в ядерных силах отталкивающей сердцевины и особенно для полного учета тензорных сил необходимо включать в расчет значительное количество K -гармоник. Они важны для получения точных численных результатов, хотя их относительный вклад в волновую функцию мал (см. табл. 4 и 5). Даже в худшем из приведенных выше случаев основная K -гармоника имеет относитель-

ный вес более 90%, а все остальные — порядка нескольких процентов. Такое несоответствие между вкладом разных K -гармоник в энергию связи и в волновую функцию заключается в том, что энергия связи — разность двух больших величин — потенциальной (\overline{W}) и кинетической (\overline{T}) энергий (например, у ${}^3\text{H}$ $\overline{W} \approx \approx 60 - 100 \text{ Мэв}$).

Каждая энергия в отдельности (\overline{W} и \overline{T}) меняются незначительно при учете высших K -гармоник (всего лишь на несколько процентов), однако их разность — энергия связи — может измениться очень сильно.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА K -ГАРМОНИК К БОЛЕЕ СЛОЖНЫМ ЯДРАМ, ЧЕМ ${}^4\text{He}$

Сейчас имеется уже довольно большое количество работ, в которых с помощью метода K -гармоник рассчитывались основные свойства ядер, более тяжелых, чем ${}^4\text{He}$. В первую очередь, рассчитывались энергия связи и радиусы ядер [7, 10, 39].

До сих пор все расчеты такого рода были сделаны в $K_{\text{мин}}$ -приближении, когда в разложении (8) для волновой функции ядра удерживаются только члены с наименьшим значением K . При этом оказалось, что формулам метода K -гармоник в $K_{\text{мин}}$ -приближении можно придать четкий физический смысл и возникающая теоретическая схема оказывается во многом более физической и гибкой, чем, например, схема оболочечной модели [8, 44]. Ниже приведем основные результаты теории, а численные расчеты обсудим в следующем параграфе.

В $K_{\text{мин}}$ -приближении волновая функция ищется в виде конечной суммы членов с $K = K_{\text{мин}}$:

$$\Psi(1, \dots, A) = \rho^{-(3A-4)/2} \sum_{\gamma} \chi_{\gamma}(\rho) U_{\gamma}. \quad (17)$$

Здесь γ — индекс, нумерующий гармоники $U_{K\gamma}$ при $K = K_{\text{мин}}$. Индекс $K_{\text{мин}}$ у χ и U для простоты опущен. Вместо бесконечной системы уравнений (11) имеем теперь конечную систему:

$$\left\{ \frac{d}{d\rho^2} - \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{\gamma}^{\gamma}(\rho)] \right\} \chi_{\gamma}(\rho) = \\ = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\gamma' \neq \gamma} W_{\gamma'}^{\gamma}(\rho) \chi_{\gamma'}(\rho), \quad (18)$$

где $\mathcal{L} = K_{\text{мин}} + 3(A-2)/2$. Вид входящих в (17) гармоник $U(\Omega)$ был установлен Ю. А. Симоновым [44]:

$$U_{\gamma}(\Omega_{\rho}, \Omega_{st}) = \frac{B}{\rho^{K_{\text{мин}}} \sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Phi_{\omega_1}(1), & \Phi_{\omega_1}(2), & \dots, & \Phi_{\omega_1}(A); \\ \Phi_{\omega_2}(1), & \Phi_{\omega_2}(2), & \dots, & \Phi_{\omega_2}(A); \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{\omega_A}(1), & \Phi_{\omega_A}(2), & \dots, & \Phi_{\omega_A}(A), \end{vmatrix} \quad (19)$$

где B — нормировочная постоянная; функции $\Phi_{\omega_p}(i)$ ($i = 1, 2 \dots A$) являются функциями координат i -го нуклона:

$$\Phi_{\omega_p}(i) = C_{n_p l_p} r_i^{2n_p + l_p} Y_{l_p m_p} \left(\frac{r_i}{r_i} \right) \alpha_{\mu_p \tau_p}; \quad (20)$$

$$C_{nl} = \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{[\Gamma(n+1) \Gamma(n+l+3/2)]^{1/2}}. \quad (21)$$

Здесь Y_{lm} — обычная шаровая функция; $\alpha_{\mu\tau}(i)$ — спин-изоспиновая функция i -го нуклона, отвечающая проекциям спина и изоспина μ и τ соответственно, а n может принимать целые положительные значения $0, 1, 2, \dots$. Индекс ω_p у Φ_{ω} обозначает совокупность всех пяти чисел: $\omega_p \equiv \{n_p, l_p, m_p, \mu_p, \tau_p\}$. Набор этих чисел будем ниже называть состоянием нуклона.

Для того чтобы выражение в правой части (19) имело свойство K -гармоники, полная степень детерминанта должна быть наименьшей, допускаемой его структурой. При этом полная степень детерминанта и определяет величину

$$K_{\min} = \sum_{p=1}^A (2n_p + l_p). \quad (22)$$

Примем следующий порядок заполнения детерминанта (19). Строки заполняются последовательно сверху вниз, начиная с состояний Φ_{ω} с минимально возможным значением $(2n + l) = 0$. Таких состояний четыре: $\omega = (0, 0, 0, \pm 1/2, \pm 1/2)$, и они заполняют первые четыре строки. В пятую строку ни одну из этих функций поставить уже нельзя, так как тогда у детерминанта окажутся две одинаковые строки и он обратится в нуль. Можно, однако, поставить одну из двенадцати функций Φ_{ω} с $(2n + l) = 1$: $\omega = (0, 1, m, \pm 1/2, \pm 1/2)$. Этими функциями можно заполнить все строки с пятой по шестнадцатую включительно. Следующие строки должны заполняться функциями с $(2n + l) = 2$, их двадцать четыре: четыре функции с $\omega = (1, 0, 0, \pm 1/2, \pm 1/2)$ и двадцать функций с $\omega = (0, 2, m, \pm 1/2, \pm 1/2)$ и с $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Ясно, как продолжать эту процедуру дальше.

Полезно заметить, что такой способ заполнения в точности совпадает со способом построения волновой функции ядра в наименшей конфигурации модели оболочек. При этом роль радиальных волновых функций нуклонов выполняют величины r_i^{2n+l} . Это отмечалось Ю. А. Симоновым [44].

Построенная описанным выше способом K -гармоника U_{γ} удовлетворяет требованиям принципа Паули и является ортонормированной в смысле формулы (9). Первое утверждение очевидно, а второе будет доказано в следующем параграфе. Как следует из метода построения, индекс γ , характеризующий K -гармонику, представляет собой не что иное, как совокупность номеров состоя-

ний $\gamma = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_A)$, из которых построен детерминант в (19). Формулы (18)–(20) составляют замкнутую систему уравнений, описывающих задачу об A нуклонах в приближении $K = K_{\text{мин}}$.

Далее было показано [6], что с помощью тождественного преобразования гармоник $U_\gamma(\Omega)$ можно привести к виду

$$U_\gamma = \frac{B}{\rho_{K_{\text{мин}}} \sqrt{A!}} b^{K_{\text{мин}} + 3A/2} \exp[(\rho^2 + AR^2)/2b^2] \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(b)}(j)|. \quad (23)$$

Здесь $B^2 = \pi^{3/2} \Gamma \left[K_{\text{мин}} + \frac{3}{2}(A-1) \right] / 2$;

$$\tilde{\Phi}_{\omega}^{(b)}(j) = R_{nl}^{(b)}(r_j) Y_{lm}(j) \alpha_{\mu\tau}(j); \quad (24)$$

$$R_{nl}^{(b)}(r) \equiv b^{-3/2} \left[\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)} \right]^{1/2} \exp[-r^2/2b^2] L_n^{l+1/2}(r^2/b^2); \quad (25)$$

$L_n^{l+1/2}(x)$ — полином Лагерра. Смысл преобразования гармоник к виду (23) заключается в том, что возникшие при этом функции $\tilde{\Phi}_{\omega}^{(b)}(j)$ оказываются тождественно совпадающими с волновой функцией нуклона в осцилляторном потенциале:

$$U_{\text{осц}}(r) \equiv \frac{\hbar^2}{2mb^2} (r/b)^2. \quad (26)$$

Таким образом, хотя никакой самосогласованный потенциал в теорию не вводится, гармоника (23) имеет вид, схожий со слэтеровским детерминантом, построенным на одночастичных волновых функциях нуклона в осцилляторном поле (26). Этот факт не случаен, он имеет теоретико-групповое обоснование, на котором здесь не будем останавливаться.

Входящий в (23)–(25) параметр b имеет смысл радиального параметра осциллятора (26). Надо подчеркнуть, что введен этот параметр исключительно из соображений удобства и фактически гармоника U_γ от него не зависит. Формула (23) является тождеством, справедливым при любом значении b :

$$\frac{d}{db} U_\gamma = \frac{d^2}{db^2} U_\gamma = \frac{d^3}{db^3} U_\gamma = \dots = 0.$$

То же самое относится и к входящим в формулу (23) для U_γ величинам ρ и R . Фактически U_γ от них не зависит, но, как мы сейчас увидим, очень удобно писать U_γ именно в таком виде.

В общем случае входящий в (23) детерминант из одночастичных функций $\det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}(j)|$ не обладает определенными значениями полного момента J и изоспина T . Методика построения функций с заданными J и T из детерминантов хорошо разработана в оболочечной модели (см., например, [32]). Используя ее, получаем,

что функции $U_{JT\nu}$ с заданными J , T и ν (ν — все остальные квантовые числа, необходимые для классификации многонуклонного состояния) строятся в виде линейных суперпозиций с известными коэффициентами $C_{JT\nu}^\nu$:

$$U_{JT\nu}(\Omega) \equiv \sum_{\gamma} C_{JT\nu}^\gamma U_{\gamma}(\Omega) = \\ = \frac{B}{\rho^K} b^{K+3A/2} \exp[(\rho^2 + AR^2)/2b^2] \sum_{\gamma} C_{JT\nu}^\gamma \frac{1}{\sqrt{A!}} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(b)}(j)|. \quad (27)$$

Здесь через γ обозначается, как и выше, совокупность однонуклонных квантовых чисел:

$$\gamma = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_A\}; \\ \omega_p = \{n_p, l_p, m_p, \mu_p, \tau_p\}.$$

Используя формулу (27), можно представить волновую функцию ядра с заданными J , T в $K_{\text{мин}}$ -приближении:

$$\Psi_{JT}(1, 2, \dots, A) = \\ = \frac{B}{\rho^{K + \frac{3A-4}{2}}} b^{K+3A/2} e^{(\rho^2 + AR^2)/2b^2} \sum_{\nu} \chi^{(\nu)}(\rho) \Psi_{JT\nu, \text{обол}}^{(b)}(1, 2, \dots, A). \quad (28)$$

Здесь введена функция

$$\Psi_{JT\nu, \text{обол}}^{(b)}(1, 2, \dots, A) = \sum_{\gamma} C_{JT\nu}^\gamma \frac{1}{\sqrt{A!}} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(b)}(i)|, \quad (29)$$

которая по построению и по смыслу является функцией, называемой в оболочечной модели с гармоническим самосогласованным полем $U_{\text{осц}}(r)$ волновой функцией ядра.

Как видно, эта функция хотя и входит в выражение для волновой функции $\Psi(1, 2, \dots, A)$, но не описывает всю зависимость от координат r_1, r_2, \dots, r_A нуклонов. Таким образом, волновая функция $\Psi(1, 2, \dots, A)$ в $K_{\text{мин}}$ -приближении имеет тот же тип симметрии, что и оболочечная функция $\Psi_{JT\nu, \text{обол}}^{(b)}(1, 2, \dots, A)$.

Приведем, наконец, еще одно полезное выражение для волновой функции в $K_{\text{мин}}$ -приближении. При этом используем то, что, как мы скоро увидим, есть веские основания полагать пока произвольный параметр

$$b = \bar{b} = \rho / \sqrt{K + 3(A-1)/2}. \quad (30)$$

Тогда волновая функция принимает вид

$$\Psi_{JT}(1, 2, \dots, A) = \frac{\pi}{2^{1/4}} e^{A(R/\bar{b})^2/2} (\bar{b})^2 \times \\ \times \sum_{\nu} \chi^{(\nu)}(\bar{b} \sqrt{K + 3(A-1)/2}) \Psi_{JT\nu, \text{обол}}^{(\bar{b})}(1, 2, \dots, A), \quad (34)$$

где характерный радиус \bar{b} и координата R центра тяжести должны быть выражены через координаты нуклонов:

$$\bar{b}^2 = \sum_{i>j}^A (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 / \{A [K + 3(A-1)/2]\};$$

$$R^2 = \left(\frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i \right)^2. \quad (32)$$

Интерпретировать последнее выражение для $\Psi(1, 2, \dots, A)$, если это вообще нужно, следует так: величина $\Psi(1, 2, \dots, A)$ представляет собой суперпозицию оболочечных функций $\Psi_{JT\nu, \text{обол}}^{(\bar{b})}(1, 2, \dots, A)$, которые отвечают радиусам осцилляторного потенциала \bar{b} , определяющимся взаимным расположением нуклонов; функция распределения по радиусам осциллятора \bar{b} задается множителями

$$e^{A(R/\bar{b})^2/2} (\bar{b})^2 \chi^{(\nu)} [\bar{b} \sqrt{K + 3(A-1)/2}], \quad (33)$$

причем последний из них должен находиться как решение дифференциальных уравнений (13), куда входят эффективные взаимодействия.

Вычислим матрицы эффективных взаимодействий. Известно несколько способов вычисления входящих в систему уравнений (18) матричных элементов $W_\nu^{\nu'}$ [3, 5, 8, 16, 39]. Опишем один из них [8]. Выше мы видели, что K -гармоники U_ν по структуре очень близки к слэтеровским детерминантам, а для последних методика вычисления матричных элементов хорошо известна. Основным для дальнейшего является тождество [см. (23)]

$$W_\nu^{\nu'}(\rho) = \int d\Omega_\rho U_\nu^+ \left[\sum_{i>j}^A \hat{V}(i, j) \right] U_\nu =$$

$$= \int_C ds D(s, \rho^2) \int \prod_i^A d\mathbf{r}_i \frac{1}{\sqrt{A!}} \{ \det | \tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(b)+}(i) | \} \times$$

$$\times \left[\sum_{i>j}^A \hat{V}(i, j) \right] \frac{1}{\sqrt{A!}} \{ \det | \tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(b)}(j) | \}. \quad (34)$$

Здесь следует полагать $b = s^{-1/2}$:

$$D(s, \rho^2) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{iB^2}{\rho^{2K+3A-5}} (s/\pi)^{3/2} s^{-K-3A/2} e^{s\rho^2} \quad (35)$$

и интегрировать по ds вдоль мнимой оси с обходом точки $s=0$ справа.

Входящий в (34) интеграл по координатам нуклонов легко вычисляется, и для $W_\gamma^{\gamma'}$ получаются следующие формулы:

$$W_\gamma^{\gamma'}(\rho) = \sum_{i>j}^A \int_C ds D(s, \rho^2) \{ \langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1, 2) | \omega_i \omega_j \rangle - \langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1, 2) | \omega_j \omega_i \rangle \}, \quad (36)$$

если $\gamma = \gamma'$, т. е. $\omega_i = \omega'_i$, $i = 1, 2, \dots, A$;

$$W_\gamma^{\gamma'}(\rho) = \sum_{i=1}^{A-1} \int_C ds D(s, \rho^2) \{ \langle \omega_i \omega_A | \hat{V}(1, 2) | \omega_i \omega'_A \rangle - \langle \omega_i \omega_A | \hat{V}(1, 2) | \omega'_A \omega_i \rangle \}, \quad (37)$$

если γ отличается от γ' одним однонуклонным состоянием, т. е. $\omega_i = \omega'_i$ при $i = 1, 2, \dots, (A - 1)$; $\omega_A \neq \omega'_A$;

$$W_\gamma^{\gamma''}(\rho) = \int ds D(s, \rho^2) \{ \langle \omega_{A-1} \omega_A | \hat{V}(1, 2) | \omega''_{A-1}, \omega''_A \rangle - \langle \omega_{A-1} \omega_A | \hat{V}(1, 2) | \omega''_A, \omega''_{A-1} \rangle \}, \quad (38)$$

если γ отличается от γ'' двумя однонуклонными состояниями, т. е. $\omega_i = \omega''_i$ при $i = 1, 2, \dots, (A - 2)$; $\omega_{A-1} \neq \omega''_{A-1}$, ω''_A ; $\omega_A \neq \omega''_{A-1}$, ω''_A .

В этих формулах матричные элементы нуклон-нуклонного взаимодействия

$$\langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1, 2) | \omega_k \omega_l \rangle = \int dr_1 dr_2 \tilde{\Phi}_{\omega_i}^{(b)+}(1) \tilde{\Phi}_{\omega_j}^{(b)+}(2) \hat{V}(1, 2) \tilde{\Phi}_{\omega_k}^{(b)}(1) \tilde{\Phi}_{\omega_l}^{(b)}(2). \quad (39)$$

Из определения однонуклонных состояний [см. (24)] видно, что это не что иное, как несимметризованный матричный элемент от взаимодействия между первым и вторым нуклонами, взятый по собственным функциям осциллятора. Появление прямых и обменных матричных элементов от $\hat{V}(1, 2)$ в формулах (36) — (38) связано с антисимметрией K -гармоник U_γ и U_γ .

Матричные элементы (39) зависят от параметра $b = s^{-1/2}$, который входит в определение однонуклонных состояний Φ [см. (24)]. Поэтому (36) — (38) нельзя вынести из-под знака интеграла. Тем не менее формулы (36) — (38) для эффективных взаимодействий можно подвергнуть дальнейшему упрощению. Произведем в этих формулах интегрирование по s , воспользовавшись методом пере-

вала. В результате получим вместо (36) — (38) соответственно

$$W_{\gamma}^{\nu}(\rho) \approx \sum_{i>j}^A \{ \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \rangle - \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}_j \bar{\omega}_i \rangle \}; \quad (40)$$

$$W_{\gamma}^{\nu'}(\rho) \approx \sum_{i=1}^{A-1} \{ \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_A | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}_i \bar{\omega}'_A \rangle - \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_A | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}'_A \bar{\omega}_i \rangle \}; \quad (41)$$

$$W_{\gamma}^{\nu''}(\rho) \approx \langle \bar{\omega}_{A-1} \bar{\omega}_A | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}_{A-1} \bar{\omega}''_A \rangle - \langle \bar{\omega}_{A-1} \bar{\omega}_A | \hat{V}(1, 2) | \bar{\omega}''_A \bar{\omega}_{A-1} \rangle. \quad (42)$$

Здесь матричные элементы от $\hat{V}(1, 2)$ по-прежнему определяются формулой (39). Черта над буквой однонуклонного состояния (например, $\bar{\omega}_i$) обозначает, что параметр s , входящий в однонуклонные состояния $\bar{\Phi}^{(b)}$, заменен на

$$s \rightarrow [K + 3(A - 1)/2]/\rho^2. \quad (43)$$

Другими словами, в качестве однонуклонных состояний $\bar{\omega}_i$ в выражениях (40) — (42) используются функции нуклона в осцилляторной яме

$$U_{\text{осц}}(r) = \frac{\hbar^2}{2m\rho^4} [K + 3(A - 1)/2]^2 r^2. \quad (44)$$

Характерный радиус \bar{b} и частота $\bar{\nu}$ этого осциллятора равны

$$\bar{b} = \rho / \sqrt{K + 3(A - 1)/2}; \quad \bar{\nu} = \frac{\hbar}{m\rho^2} [K + 3(A - 1)/2]. \quad (45)$$

Волновые функции нуклона в осцилляторе (44) и (45) даются общими формулами (24), в которых $s^{-1/2}$ необходимо заменить на \bar{b} .

Имея в виду именно эти соображения, для параметра b в волновой функции (28) было взято значение $b = \bar{b}$, что привело к формулам (31) и (32) для волновой функции.

До сих пор рассматривали схему, где в качестве однонуклонных состояний выбирают состояния с фиксированными n, l, m, μ, τ , и ее естественно назвать (l, m, μ) -схемой. С таким же успехом можно выбирать однонуклонные состояния с фиксированными n, l, j, m_j, τ . Такую схему можно назвать (l, j, m_j) -схемой. Переход от одной схемы к другой тривиален, и мы на этом не останавливаемся.

Рассмотрим общую схему расчета и ее связь с оболочечной моделью. Если нуклон-нуклонное взаимодействие $\hat{V}(i, j)$ задано, то расчет свойств ядра сводится в приближении $K = K_{\text{мин}}$ к простой схеме расчета: а) например, с помощью формул оболочечной модели строятся гармоники $U_{JT\nu}$, отвечающие определенным значениям таких квантовых чисел, как момент, изотопический спин и т. д.; б) далее вычисляется матрица эффективных взаимодействий:

$$W_{JT\nu}^{JT\nu'}(\rho) = \sum_{\gamma, \gamma'} (C_{JT\nu}^{\gamma})^* C_{JT\nu'}^{\gamma'} W_{\gamma}^{\gamma'}(\rho);$$

в) эти функции подставляются в систему уравнений (18); решение этой системы дает спектр энергий E и собственные функции $\chi_\nu(\rho)$; г) далее, если в этом есть необходимость, строится полная отвечающая найденным состоянием волновая функция, используя, например, формулу (28).

В расчетах можно применять всю ту мощную технику, которая была разработана для оболочечной модели, так как эта схема расчета отличается от расчета по оболочечной модели только одним: собственные значения энергии в оболочечной модели находятся из соответствующего секулярного уравнения, а в методе K -гармоник — из решения системы дифференциальных уравнений. Отметим, что и на последнем этапе расчетов можно провести определенные параллели между обеими методиками [8].

При сравнении волновых функций, получаемых в $K_{\text{мин}}$ -приближении метода K -гармоник $\Psi_{K_{\text{мин}}}$ (1, 2, . . . , A) и в оболочечной модели $\Psi_{\text{обол}}$ (1, 2, . . . , A), замечаем гораздо большую гибкость и предпочтительность K -гармонических функций. Проявляется это в том, что в оболочечной модели размеры системы задаются с самого начала формой самосогласованного потенциала. В методе K -гармоник, где все определяется видом нуклон-нуклонных потенциалов $\hat{V}(i, j)$, форма и размер системы находятся автоматически. Используя оболочечный язык, волновую функцию $\Psi_{K_{\text{мин}}}$ можно записать как суперпозицию оболочечных функций $\Psi_{\text{обол}}$, отвечающих непрерывному набору самосогласованных потенциалов [см. (31) и (32)]. При этом распределение по радиальному параметру b целиком зависит от взаимодействия между нуклонами и меняется от уровня к уровню.

Из всего сказанного становится ясно, что теория $K_{\text{мин}}$ -приближения в настоящее время полностью разработана. Несмотря на очевидные отличия (аксиоматическое и физическое) от идеологии и методов оболочечной модели, оба подхода имеют много общего, особенно в методике расчета и в виде некоторых формул.

В частности, матричные элементы $W_{K_{\text{мин}}^\nu}^{K_{\text{мин}}^\nu}(\rho)$ очень просто связаны с матричными элементами $Q_{\text{обол}}^{(b)}$, фигурирующими в оболочечной модели с гармоническим самосогласованным потенциалом:

$$Q_{\text{обол}}^{(b)} = \langle \Psi_{\text{обол}}^{(b)}; \sum_{i>j}^A \hat{V}(i, j) \Psi_{\text{обол}}^{(b)} \rangle. \quad (46)$$

Именно [см. (34) и (35)],

$$W_{K_{\text{мин}}^\nu}^{K_{\text{мин}}^\nu}(\rho) \equiv \{ \Gamma [K_{\text{мин}} + (3A - 3)/2] / (2\pi i \rho^{2K_{\text{мин}} + 3A - 5}) \} \times \\ \times \int ds \frac{e^{s\rho^2}}{s_{K_{\text{мин}} + (3A - 3)/2}} Q_{\text{обол}}^{s-1/2} \approx Q_{\text{обол}}^{(\bar{b})}, \quad (47)$$

где \bar{b} определяется формулой (45).

В работе [25] проведен анализ $(K_{\text{мин}} + 1)$ -приближения и показано, что и в этом приближении метода K -гармоник остается сходство с оболочечной моделью. В частности, имеет место соотношение между матричными элементами, аналогичное приведенному выше.

Очень интересен и важен вопрос о том, какие поправки дадут члены с $K > K_{\text{мин}}$ к результатам, полученным в $K_{\text{мин}}$ -приближении. Сколько-нибудь полный ответ имеется только для случая систем из трех и четырех нуклонов (см. параграф 4). В общем случае имеем только общие формулы [40] для учета членов с $K = K_{\text{мин}} + 2$, но нет никаких количественных результатов. Из общих формул работы [40] следует, что с учетом членов с $K = K_{\text{мин}} + 2$ уменьшается формальное сходство с оболочечной моделью. Поправки типа $K = K_{\text{мин}} + 2$ существенно отличаются от поправок к оболочечным функциям, возникающим при учете примешивания более высоких конфигураций.

Строго все формулы этого параграфа следует рассматривать как формулы первого приближения метода K -гармоник. Вместе с тем приближение этого метода имеет большое сходство с формулами оболочечной модели и значительно превосходит последний по гибкости. Поэтому представляется вполне естественным использовать формулы низших приближений метода K -гармоник для полуфеноменологических расчетов спектров ядер — расчетов того типа, которые делаются в рамках ортодоксальной оболочечной модели. Работы такого полуфеноменологического типа начинают появляться в литературе [25], и такой подход представляется многообещающим.

6. РАСЧЕТЫ СВОЙСТВ ЯДЕР С $A > 4$

К настоящему времени проведено значительное количество численных расчетов в $K_{\text{мин}}$ -приближении в области ядер с $A > 4$ [7, 9, 10, 38, 39]. Прежде чем перейти к изложению основных результатов этих работ, остановимся кратко на некоторых особенностях ядер с $A > 4$ по сравнению с $A \leq 4$.

Если свойства легчайших ядер почти не зависят от нечетных NN -потенциалов V_{33} и V_{11} , действующих в состояниях с относительным моментом пары нуклонов $l = 1, 3, 5, \dots$, то у ядер с $A > 4$ это уже не так. Нечетные потенциалы при $A > 4$ имеют весьма большое значение в теории ядер более тяжелых, чем α -частица. При этом надо отметить, что истинный вид потенциалов V_{33} и V_{11} сейчас плохо известен.

В ядрах с $A < 4$ нуклоны находятся друг относительно друга почти исключительно в s -состоянии. Если $A > 4$, то принцип Паули запрещает всем нуклонам находиться в s -состоянии относительного движения; часть нуклонных пар находится в p -, d -

f - и t . д. состояниях, и вклад в энергию дают все четыре центральных потенциала. Относительный вклад четных и нечетных потенциалов можно оценить, зная вероятность ω_{ST} того, что

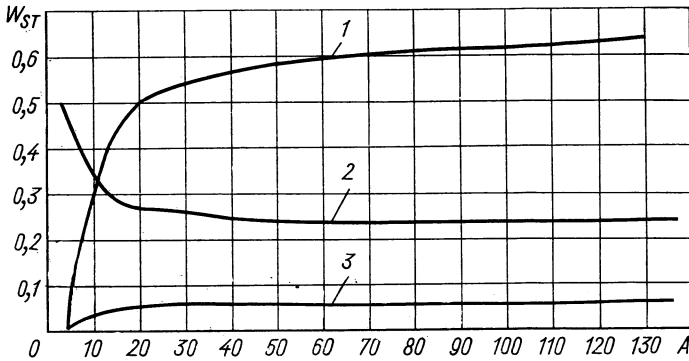


Рис. 2. Вероятность нахождения пары нуклонов W_{ST} в данном спин-изоспиновом состоянии для дважды магических ядер:
 1 — $S = 1, T = 1$; 2 — $S = 0, T = 1$ и $S = 1, T = 0$; 3 — $S = 0, T = 0$.

пара нуклонов в ядре A имеет заданные значения суммарного спина S и изоспина T . Для примера на рис. 2 приведены значения ω_{ST} для ряда ядер с $Z = N = A/2$. Видно, что потенциал V_{33} входит почти с таким же весом, как сумма потенциалов V_{31} и V_{13}

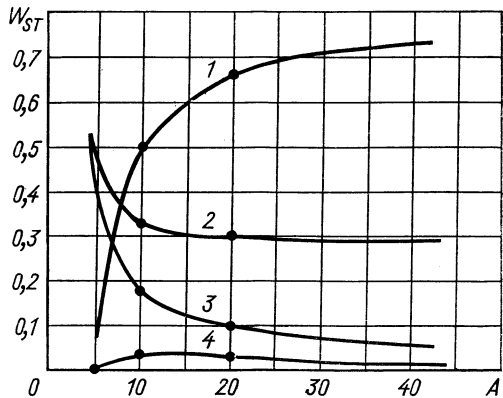


Рис. 3. Вероятность нахождения пары нуклонов W_{ST} в данном спин-изоспиновом состоянии для изотопов ядра He ($Z = 2$):
 1 — $S = 1, T = 1$; 2 — $S = 0, T = 1$; 3 — $S = 1, T = 1$; 4 — $S = 0, T = 0$.

(потенциал V_{11} входит по-прежнему с малым относительным весом). Поэтому даже малый потенциал V_{33} может давать существенный вклад в энергии связи основных состояний ядер.

Еще большее значение будет иметь потенциал V_{33} для случая сильно нейтроноизбыточных изотопов какого-либо элемента. В качестве примера на рис. 3 показаны значения W_{ST} для маги-

ческих изотопов He ($Z = 2$). Видно, что состояние с $S = 1, T = 1$ оказывается наиболее вероятным для изотопов с большим избытком нейтронов, а расчеты показывают, что само существование или несуществование сильно нейтроноизбыточных ядер практически целиком зависит от формы и величины потенциала V_{33} . Это обстоятельство впервые было обнаружено при расчете возможных свойств гипотетического ядра ^{10}He [7] (табл. 6). Из табл. 6 видна

Таблица 6

NN -потенциалы и соответствующая им энергия связи ядра ^{10}He в $K_{\text{мин}}$ -приближении

V_{13}			V_{31}			V_{33}				$E_{\text{св}}, \text{Мэв}$
$\tau_{13}^c, \text{ферми}$	$V_{13}^c, \text{Мэв}$	$V_{13}^0, \text{Мэв}$	$\tau_{31}^c, \text{ферми}$	$V_{31}^c, \text{Мэв}$	$V_{31}^0, \text{Мэв}$	$\tau_1, \text{ферми}$	$\tau_2, \text{ферми}$	$V_1, \text{Мэв}$	$V_2, \text{Мэв}$	
0	0	13,6	0	0	+35,3	—	—	0	0	19,5
0,49	49,75	14,3	0,49	49,75	+37,9	—	—	0	0	19,5
0	0	13,6	0	0	+35,3	2,45	—	1,17	0	26,5
0,49	49,75	14,3	0,49	49,75	+37,9	2,45	2,84	7,77	8,08	50,0
0	0	13,6	0	0	+35,3	2,45	2,84	7,77	8,08	56,6
0	0	13,6	0	0	+35,3	2,45	2,84	8,39	8,7	62,3

Примечание.

Потенциалы V_{13} и V_{31} имеют вид $V_{ab}(r) = \begin{cases} V_{ab}^c, & 0 < r \leq \tau_{ab}^c; \\ -V_{ab}^0, & \tau_{ab}^c < r \leq \tau_{ab} \\ 0, & r > \tau_{ab}. \end{cases}$

Потенциал V_{33} имеет вид $\begin{cases} -V_1, & r < \tau_1; \\ V_2, & \tau_1 < r < \tau_2; \\ 0, & \tau_2 < r. \end{cases}$

Для всех наборов $\tau_{13}=2,583, \text{ферми}, \tau_{31}=2,04 \text{ ферми}$.

сильная чувствительность результата к параметрам и форме V_{33} . Небольшими изменениями V_{33} можно сделать ядро ^{10}He как несвязанным, так и слишком сильно связанным. Забегая вперед, заметим, что экспериментальные значения энергий связи и радиусов дважды магических ядер указывают, по-видимому, на отталкивающий характер потенциала V_{33} .

Остановимся теперь на роли тензорного потенциала при расчетах энергии связи ядер с $A > 4$. У всех не слишком легких ядер спины нуклонов почти полностью компенсируют друг друга. Поэтому собственно тензорные силы между нуклонами дают очень малый вклад в энергию ядра (с LS -силами ситуация такая же), которая в основном определяется центральными NN -потенциалами. Роль тензорных сил в другом: они существенно входят в задачу двух и трех тел, и поэтому величины центральных потенциалов,

определяемых из данных о NN -рассеянии, свойствах дейтона, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, сильно зависят от предположений о величине и форме тензорных сил, которые делаются при обработке соответствующих экспериментальных данных. Например, часто тензорными силами пренебрегают, и при этом для центральных компонент потенциалов получаются некие эффективные величины. Если, однако, этого пренебрежения не делать и явно вводить в расчет

Таблица 7

Расчет энергии связи ядра ${}^{12}\text{C}$ в $K_{\text{мин}}$ -приближении с нецентральными потенциалами, имеющими форму Юкавы и подогнанными к низкоэнергетическому NN -рассеянию и энергии связи дейтона [47]

V_{13} , Мэв	τ_{13} , ферми	V_{31} , Мэв	τ_{31} , ферми	V_1^t , Мэв	τ_1^t , ферми	Вклад, D -волны в дейтоне, %	Расчетная энергия связи ${}^{12}\text{C}$, Мэв	Непосредственный вклад тензорных сил	Уменьшение расчетной энергии из-за перенормировки цент- ральных потенциалов
46,88	1,17	50,70	1,38	—	—	0	110,7	—	—
46,88	1,17	48,98	1,35	5,58	1,6	1,6	73,2	6,2	31,3
46,88	1,17	44,38	1,35	11,98	2,4	2,4	40,0	6,7	64,0

фаз NN -рассеяния, свойств дейтона и т. д. тензорные силы, то для центральных потенциалов получаются уже другие значения, отличные от эффективных. Именно этот эффект, иногда называемый перенормировкой центральных потенциалов тензорными силами, является наиболее важным при расчете свойств не слишком легких ядер.

Приведем в качестве примера результаты расчета ядра ${}^{12}\text{C}$, выполненного с учетом тензорных сил [38]. Оказалось (табл. 7), что хотя вклад самих тензорных сил в энергию связи ${}^{12}\text{C}$ мал (~ 6 Мэв), их учет приводит к значительной перенормировке центральных потенциалов, и в результате этого расчетная энергия связи уменьшается на 31 Мэв в случае тензорных сил, приводящих к $1,6\%$ примеси D -состояния в дейтоне, и на 64 Мэв в случае сил, дающих $2,4\%$ -ную примесь. Этот пример показывает, насколько осторожным надо быть при учете роли тензорных сил.

Перейдем теперь к изложению основных результатов, полученных при расчете ядер с $A > 4$ в $K_{\text{мин}}$ -приближении метода K -гармоник. Цель расчетов состоит в том, чтобы, используя данные по энергиям связи и радиусам ядер, получить сведения о NN -взаимодействии. Как правило, рассчитывают энергию связи и радиусы основных состояний магических ядер.

Еще раз заметим, что нахождение сведений о NN -взаимодействии из энергий связи ядер опирается сейчас только на вариацион-

Таблица 8

Потенциалы V_{13} и V_{31} из работы (аналитический вид такой же, как в табл. 6) [39]

Вариант потенциалов	V_{31}				V_{13}			
	V_{31}^c , Мэв	τ_{31}^c , ферми	V_{31}^0 , Мэв	τ_{31} , ферми	V_{13}^c , Мэв	τ_{13}^c , ферми	V_{13}^0 , Мэв	τ_{13} , ферми
I	0	0	35,31	2,043	0	0	13,63	2,583
II	70	0,6	41,85	1,98	70	0,6	16,97	2,48
III	100	0,6	43,73	1,96	100	0,6	17,87	2,45
IV	50	1,0	74,93	1,75	50	1,0	25,74	2,28
V	70	1,0	81,74	1,73	70	1,0	29,25	2,22

Таблица 9

Энергии связи E и радиусы R ядер ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$ в $K_{\text{мин}}$ -приближении для вариантов набора потенциалов табл. 8

Ядро	I		II		III		IV		V		$E_{\text{эсп}}$, Мэв	$R_{\text{эсп}}$, ферми
	E , Мэв	R , ферми	E , Мэв	R , ферми	E , Мэв	R , ферми	E , Мэв	R , ферми	E , Мэв	R , ферми		
${}^4\text{He}$	31,5	1,2	28,2	1,31	26,7	1,34	20,8	1,42	1,72	1,47	28,3	1,61
${}^{16}\text{O}$	25,9	1,62	214	1,87	199	1,93	142	2,13	111	2,22	127,6	2,65
${}^{40}\text{Ca}$	1854	1,5	1385	1,66	1208	1,74	758	2,05	536	2,14	342	3,7

ный характер расчета, т. е. для данных потенциалов получаем верхнюю границу на энергию ядра (или нижнюю границу на энергию связи ядра). Таким образом, если рассчитанная энергия связи ядра для данных потенциалов оказывается больше экспериментального значения, то это прямо указывает на непригодность данных потенциалов, так как любой учет следующих гармоник может только увеличить разницу между экспериментальным и расчетным значениями энергий связи.

В первых работах рассчитывались энергии связи и радиусы ядер в области $4 \leq A \leq 40$ в предположении $V_{33} = 0$ [39] с потенциалами V_{13} и V_{31} , подогнанными по длинам рассеяния и эффективным радиусам. В табл. 8 приводятся параметры использованных потенциалов V_{13} и V_{31} , а в табл. 9 — результаты, которые находятся для этих потенциалов. Оказалось, что с чисто притягивающими потенциалами V_{31} и V_{13} (вариант I из табл. 8 и 9) расчет предсказывает коллапс * всех ядер, начиная с ${}^{16}\text{O}$. Были

* Под коллапсом ядра здесь подразумевается, что расчетный радиус существенно меньше экспериментального, а расчетная энергия связи существенно больше экспериментальной.

сделаны попытки исправить положение введением в потенциалы V_{13} и V_{31} мягкой отталкивающей сердцевины (варианты II—V табл. 8) с радиусом — 0,6 — 1 ферми и высотой 50—100 Мэв. (Потенциалы V_{31} и V_{13} в вариантах II—V табл. 8 также подогнаны по длинам рассеяния и эффективным радиусам.)

Как видно из табл. 9, введение отталкивания в четные потенциалы не спасает положения: хотя отталкивание значительно уменьшает расчетную энергию связи более легких ядер (^4He и ^{16}O), относительно тяжелый ^{40}Ca оказывается в коллапсе.

Чтобы спасти положение, оказалось необходимым включить в рассмотрение потенциал V_{33} . Для того чтобы изучить роль и влияние этого потенциала, удобно выбирать все NN -потенциалы в форме суммы двух гауссовых кривых:

$$V(r) = V_r \exp[-(r/\tau_r)^2] - V_a \exp[-(r/\tau_a)^2], \quad (48)$$

где $V_r, V_a > 0$. Этот выбор имеет то преимущество, что позволяет проводить сравнение с известными потенциалами Волкова [15].

Далее будем рассматривать только такие ядра, свойства которых в $K_{\text{мин}}$ -приближении зависят только от двух комбинаций NN -потенциалов: $(V_{13} + V_{31})/2, (9V_{33} + V_{11})/10$. В связи с этим ниже будем полагать $V_{13} = V_{31}$ и $V_{33} = V_{11}$, что позволяет оставлять свободные параметры для более тщательной подгонки по фазам рассеяния.

Параметры первых трех наборов потенциалов Волкова (1, 2 и 3) [15], для которых произвольно положено $V_{33} = -0,2V_{13}$, приведены в табл. 10. Потенциалы 1, 2 и 3 хорошо описывают

Таблица 10

Набор NN -потенциалов, имеющих вид (48)

Вариант набора потенциала	$V_{31}^r, \text{ Мэв}$	$\tau_{31}^r, \text{ ферми}$	$V_{31}^a, \text{ Мэв}$	$\tau_{31}^a, \text{ ферми}$	$V_{33}, \text{ Мэв}$	$\tau_{33}, \text{ ферми}$
1	144,86	0,82	83,34	1,6	$\left\{ \begin{array}{l} V_{33} = -0,2 V_{31} \\ 9,8 \\ 16,9 \\ 83,8 \\ 214,0 \\ 644,0 \\ 65 \\ 12 \\ 11,8 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,95 \\ 1,6 \\ 1,05 \\ 0,82 \\ 0,65 \\ 1,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{array} \right.$
2	61,14	1,01	60,65	1,8		
3	106,67	1,05	106,67	1,5		
4	144,86	0,82	83,34	1,6		
5	144,86	0,82	83,34	1,6		
6	144,86	0,82	83,34	1,6		
7	144,86	0,82	83,34	1,6		
8	144,86	0,82	83,34	1,6		
9	120	0,95	61,3	2,05		
10	120	0,95	61,3	2,05		
11	120	0,95	61,3	2,05		

Примечание. Для потенциалов 4—11 V_{33} имеет только отталкивающую часть ($V_{33}^r=0$).

двухчастичные данные и энергию связи ${}^4\text{He}$; различные варианты отличаются друг от друга величиной и радиусом мягкой отталкивающей сердцевинки. Получающиеся для этих потенциалов значения энергий связи и радиусов ядер ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$ приведены на рис. 4 (кривые 1, 2 и 3). Видно, что ядро ${}^{40}\text{Ca}$ оказывается сколлапсированным и для таких потенциалов. Отметим при этом, что потенциалы 1, 2 и 3 не удовлетворяют условиям насыщения [28].

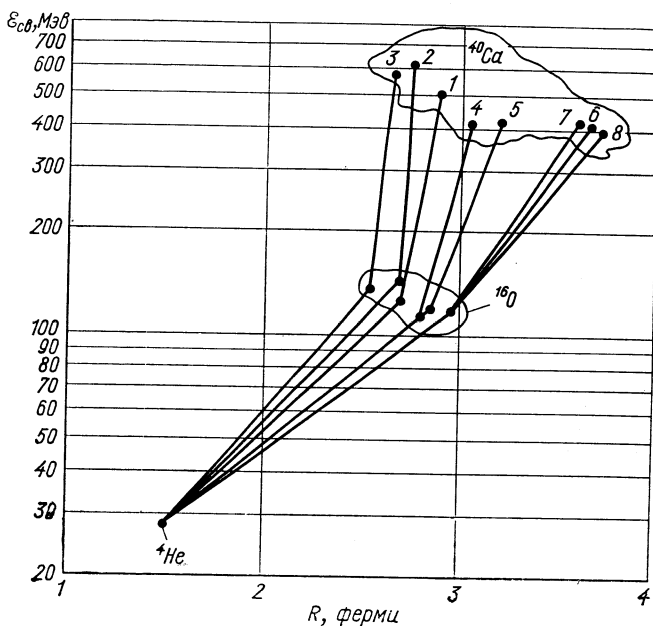


Рис. 4. Зависимость расчетной энергии связи и радиусов ядер для ряда NN -потенциалов.

Цифры соответствуют вариантам табл. 10.

Для того чтобы исследовать чувствительность расчета к параметрам потенциала V_{33} , в работе [9] было произвольно зафиксировано V_{13} в форме потенциала Волкова I (см. рис. 4). Тем самым обеспечивается согласие расчетов с данными о длинах рассеяния нуклон — нуклон и с данными об энергии связи и радиусе ${}^4\text{He}$. Потенциал V_{33} выбирается чисто отталкивающий в форме (48) с $V_a = 0$. Параметры V_{33}^r и τ_{33}^r подбираются так, чтобы получить правильные значения энергии связи и радиуса ${}^{16}\text{O}$, и с этими параметрами рассчитываются далее энергия связи и радиус ${}^{40}\text{Ca}$. Параметры V_{33}^r и τ_{33}^r приведены в табл. 10 (варианты 4—8), а рассчитанные величины для ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$ — на рис. 4, кривые 4—8. Из табл. 10 видно, что параметры V_{33} можно менять в широкой области.

Естественно поэтому ожидать, что эти потенциалы должны давать существенно различные фазы рассеяния $\delta_{l=1}(E)$. Однако это не так, что видно из рис. 5, где приведена фаза $\delta_{l=1}(E)$ для разных наборов потенциалов. Фазы отличаются на величину $< 1^\circ$ при E л.с. < 70 Мэв, и поэтому различить такие V_{33} , исходя из данных о рассеянии нуклонов при умеренных энергиях, практически не представляется возможным. В то же время, как следует из кривых рис. 4, эти потенциалы приводят к существенно разным результатам для энергии связи и радиуса ^{40}Ca .

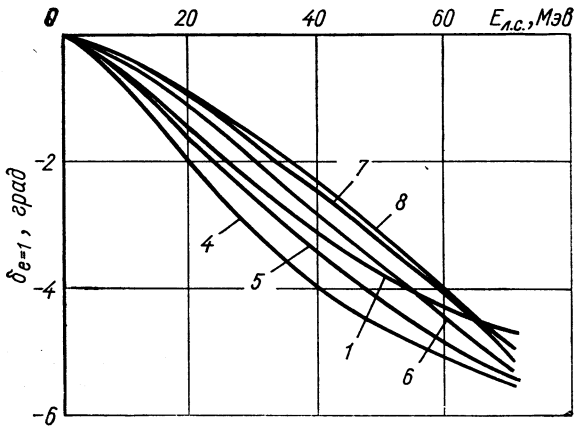


Рис. 5. Зависимость p -фазы NN -рассеяния от энергии в лабораторной системе для различных потенциалов V_{33} .

Еще более подробное исследование роли потенциала V_{33} было проведено в работе [10], где рассчитывались энергии связи и радиусы ядер ^4He , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{92}Zr , ^{176}Yb , ^{244}Pu . Потенциалы выбирались в виде [48]. Расчет проводился для наборов потенциалов из табл. 10 (варианты 1, 9, 10, 11). Результаты приведены на рис. 6. Кривая I проведена через экспериментальные точки. Номера у остальных кривых — это варианты набора потенциалов. Из рис. 6 видно, что, во-первых, потенциал I приводит к сильному коллапсу (это уже наблюдалось и в предыдущем рассмотрении), во-вторых, удается подобрать такие потенциалы, чтобы согласовать расчетные кривые с экспериментальной, и, в-третьих, чувствительность свойств ядер к параметрам потенциала V_{33} оказалась очень большой. Последнее следует из сравнения кривых 10 и 11 . Отличие в параметрах потенциалов для этих кривых всего лишь на 1,7% в величине V_{33} (все остальные параметры точно совпадают). Однако сами кривые 10 и 11 сильно разошлись

Подведем теперь некоторые итоги:

1. Расчеты энергий связи E и радиусов R различных ядер показали, что нечетные потенциалы V_{33} и V_{11} имеют очень важное значение, и без их введения невозможно получить общее согласие между расчетными и экспериментальными значениями E и R .

2. Чтобы предотвратить расчетный коллапс средних и тяжелых ядер, нечетные потенциалы необходимо брать отталкивающими. Только таким образом удастся добиться примерной линейности энергии связи как функции A во всем интервале $4 \leq A \leq 250$.

Эти выводы получены с помощью расчетов в $K_{\text{мин}}$ -приближении, но имеют совершенно общий характер, так как они основаны лишь на вариационном свойстве расчетов. Учет следующих приближений метода K -гармоник может изменить численные значения потенциалов, но не общие выводы, сформулированные выше.

Наиболее актуальной задачей, которую сейчас уже надо начинать решать, является аккуратный подбор параметров NN -потенциалов, исходя из данных рассеяния нуклон — нуклон и значений энергий и

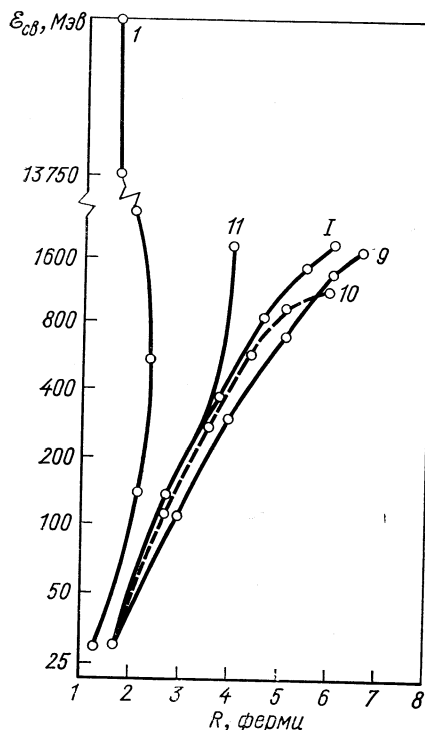


Рис. 6. Зависимость расчетной энергии связи от радиусов ядер для ряда NN -потенциалов:

1 — экспериментальные данные; остальные цифры соответствуют вариантам табл. 10.

радиусов всех известных сейчас ядер. При этом совершенно необходимо явно вводить в рассмотрение тензорные силы между нуклонами, LS -силы и, возможно, L^2 -силы.

7. СРАВНЕНИЕ МЕТОДА K -ГАРМОНИК С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

Представляет интерес провести сравнение (в тех случаях, когда это возможно) результатов, полученных методом K -гармоник, с результатами других методов, в частности метода Хартри — Фока и метода расчета в осцилляторном базисе. Хотя расчетов,

выполненных этими тремя методами, опубликовано довольно много, сравнение затруднено тем, что почти каждый автор работает со своим собственным набором NV -потенциалов. Тем не менее некоторые «точки соприкосновения» имеются.

Некоторые сравнительные данные для ядер ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, полученные методом Хартри — Фока и в основном приближении метода K -гармоник и метода осцилляторного базиса, приведены в табл. 11. Результаты для ${}^3\text{He}$ взяты из настоящего обзора (метод

Таблица 11

Сравнение результатов расчетов энергии связи основных состояний ряда ядер методом K -гармоник, методом осцилляторного базиса, полученных в основном приближении, а также методом Хартри—Фока

Вариант набора потенциалов	$\mathcal{E}_{\text{св}}$ без учета кулоновского взаимодействия, $M\text{эв}$									
	${}^3\text{H}$		${}^4\text{He}$			${}^{16}\text{O}$			${}^{40}\text{Ca}$	
	K -гармоник	Осцилляторный базис	K -гармоник	Осцилляторный базис	$X-\Phi$	K -гармоник *	Осцилляторный базис	$X-\Phi$	K -гармоник *	Осцилляторный базис
1 (табл. 1)	7,4	5,8	—	—	—	—	—	—	—	—
1 (табл. 10)	—	—	28,58	28,1	28,01	142	144	144,5	603	605
2 (табл. 10)	—	—	29,4	28,88	28,88	158	157	156,9	736	739
3 (табл. 10)	—	—	29,26	28,55	28,55	151	147	147,3	702	680
8 (табл. 10)	—	—	—	—	—	133	135	—	484	483
5 (табл. 10)	—	—	—	—	—	134	133	—	510	504

* Значения $\mathcal{E}_{\text{св}}$ для ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$ в методе K -гармоник получены приближенно (см. подробнее [26]). Точные значения несколько больше этих и по крайней мере не меньше соответствующих значений для метода осцилляторного базиса.

K -гармоник) и из работы [34] (метод осцилляторного базиса). Сравнительные данные для ${}^4\text{He}$ по методу Хартри — Фока и методу K -гармоник взяты из работ [33, 37], остальные результаты — из работы [26].

Принципиально метод K -гармоник и метод осцилляторного базиса подобны друг другу: в их основе лежит способ разложения волновой функции по полному набору базисных функций и в обоих методах можно получить сколь угодно точный результат, взяв достаточное количество членов разложения. Поэтому сравнение этих двух методов можно осуществить по двум направлениям: 1) по результатам расчетов в основном приближении и 2) по скорости сходимости. Сравнение по первому направлению сделано в табл. 11, из которой видно, что для ${}^3\text{H}$ в основном приближении метод K -гармоник дает лучшие результаты, чем метод осцилляторного базиса. Для более тяжелых ядер ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$ их результаты близки друг к другу.

Что касается второго направления, то, хотя в работе [34] показана довольно быстрая сходимость расчетных значений энергии основного состояния ${}^3\text{H}$ в методе осцилляторного базиса для потенциала типа прямоугольной ямы, для окончательного заключения требуются еще дополнительные сравнительные вычисления. На наш взгляд, методы K -гармоник и осцилляторного базиса будут иметь сравнимые скорости сходимости только в случае простых потенциалов. Для потенциалов более сложной структуры, имеющих отталкивающую сердцевину и существенно различающиеся радиальные зависимости для синглетной, триплетной и тензорной компонент, метод K -гармоник должен оказаться более предпочтительным из-за большей гибкости волновой функции.

Это соображение относится и к легчайшим (${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$), и к более тяжелым (${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$) ядрам.

Кроме того, и в случае простейших потенциалов гауссова типа возможны случаи, когда метод осцилляторного базиса будет работать гораздо хуже, чем метод K -гармоник. Сошлемся на рис. 4 работы [10], из которого видно, что волновые функции низших приближений обоих методов различаются весьма значительно.

В заключение этого параграфа несколько слов о сравнении результатов метода Хартри — Фока и метода K -гармоник. Между методами есть принципиальная разница, которая состоит в том, что если в методе K -гармоник можно получить сколь угодно точный результат, то в методе Хартри — Фока это невозможно: он дает только нижнюю границу для энергии связи.

Из приведенных в табл. 11 сравнительных данных метода Хартри — Фока и метода K -гармоник в основном приближении видно, что они дают близкие результаты, причем несколько худшие у метода Хартри — Фока. Для «реалистических» потенциалов — потенциалов с отталкивательными сердцевинами (именно для таких потенциалов приведены в табл. 11 сравнительные данные по этим двум методам) энергия связи, полученная в основном приближении метода K -гармоник, довольно сильно отличается от точной. Поэтому для легчайших ядер (${}^3\text{H}$, ${}^3,4\text{He}$) следует отказаться от применения метода Хартри — Фока в пользу метода K -гармоник: в последнем уже разработана техника учета высших гармоник и можно получать сколь угодно точные результаты для этих ядер.

Что касается более тяжелых ядер, то до тех пор, пока не будет развита техника учета высших K -гармоник для этих ядер, оба метода будут равноправны. Но в данном случае следует иметь в виду исключительную простоту расчета в основном приближении метода K -гармоник.

8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К-ГАРМОНИК К РАСЧЕТУ ДЕФОРМАЦИЙ

Многие атомные ядра являются деформированными. Может оказаться, что специфические статические и динамические свойства этих ядер будут существенно зависеть от какой-либо части нуклон-нуклонного взаимодействия (15). Поэтому желательно разработать схему расчета деформированных ядер с помощью метода К-гармоник, имеющего дело с реальным NV -взаимодействием.

Описание деформированных состояний в обычной формулировке метода К-гармоник (см. параграф 3) требует учета большого числа гармоник. Действительно, волновая функция (20) как бы соответствует состояниям частиц в «сферической» осцилляторной яме. В деформированном ядре среднеквадратические радиусы по осям различны. Параметр квадратуральной деформации β_2 , характеризующий отклонение ядра от сферичности, имеет величину около 0,2—0,35 в ядрах тяжелых и редкоземельных элементов и может достигать 0,8 в легких ядрах. Кроме того, возможны состояния кластерного типа, когда нуклоны концентрируются вокруг двух или нескольких центров. Ясно, что волновая функция таких ядер или состояний может описываться только весьма сложной суперпозицией волновых функций типа (8). Поэтому возникает мысль придать методу К-гармоник вид, удобный для описания деформированных состояний. Соответствующий формализм был разработан в статье [17], которой и будем ниже следовать.

Так как деформированное состояние предполагает, что во внутренней системе координат распределение нуклонов по осям не симметрично, то удобно ввести вместо переменной ρ коллективные координаты q_{st} в виде

$$q_{st} = \sum_{i=1}^A \tilde{r}_i^s \tilde{r}_i^t \quad (s, t = 1, 2, 3). \quad (49)$$

Здесь \tilde{r}_i^s — s -ая компонента координаты i -го нуклона, отсчитанная от центра инерции ядра, т. е. $\tilde{r}_i^s = \tilde{r}_i^s - R_{\text{ц}}^s$, где $R_{\text{ц}}^s$ — координата центра инерции ядра. Поскольку $q_{\text{ц}}$ — симметричный тензор, то имеется всего шесть коллективных координат. Полную волновую функцию можно разложить в ряд по произведениям волновой функции $\Phi_{\alpha}(q_{st})$ на внутреннюю волновую функцию $\Phi_{\alpha}(\dots \mathbf{r}_i \dots)$.

Индекс α включает в себя обозначения набора квантовых чисел, характеризующих волновую функцию

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(q_{st}) \Phi_{\alpha}(\dots \mathbf{r}_i \dots). \quad (50)$$

Функции Φ_α предполагаются гармоническими по каждому направлению внутренних осей. Тогда вместо одного числа K необходимо ввести три квантовых числа \mathbf{K} (K_x, K_y, K_z), являющихся номерами K -гармоник во внутренней системе координат, связанной с главными осями ядра. Уравнения для φ_α получены в работе [17]. Так же, как и (11), они представляют систему зацепляющихся уравнений, точное решение которой невозможно. Однако они могут служить исходным пунктом для проведения различных приближенных расчетов структуры атомных ядер.

В качестве простейшего приближения можно рассмотреть случай, когда состояние деформированного ядра описывается одной функцией Φ_α с одним каким-либо набором чисел K_x, K_y, K_z . Такой подход может рассматриваться как вариационный. В этом случае в сумме (50) надо оставить только один член.

Уравнение для φ находится из вариационного принципа $\delta W = \delta (\Psi, \hat{H} \Psi)$ при условии $(\Psi, * \Psi) = 1$. При этом варьируется коллективная функция φ , а функция Φ_α фиксирована. Переменные q_{st} являются функциями \mathbf{r}_i , поскольку имеет место соотношение (49). Чтобы рассматривать их как независимые, вводится дополнительное интегрирование

$$\int dq_{st} \delta \left(q_{st} - \sum_{s=1}^A \tilde{r}_i^s r_i^t \right).$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$dq_{st} = dq_{11} dq_{22} dq_{33} dq_{12} dq_{13} dq_{23}.$$

Тогда в интеграле

$$W = \int d\mathbf{r}_{3A} dq_{st} \Psi^* \hat{H} \Psi \delta \left(q_{st} - \sum_{i=1}^A \tilde{r}_i^s r_i^t \right), \quad (51)$$

а q_{st} можно считать независимыми от r_i .

Поскольку рассматриваются связанные состояния, то внутреннюю волновую функцию Φ_α можно выбрать действительной. Варьируем по φ при фиксированном Φ_α получается выражение для коллективного гамильтониана:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{4}{D^2} \sum_{pst} \frac{\partial}{\partial q_{st}} D^2(q) q_{tp} \frac{\partial}{\partial q_{ps}} \right] - \\ & -\frac{\hbar^2}{2mD^2} \int dq_{st} \delta \left(q_{st} - \sum_{i=1}^A \tilde{r}_i^s r_i^t \right) \left(\sum_{i=1}^A \Phi_\alpha \Delta_i \Phi_\alpha \right) + \\ & + D^{-2} \sum_{m \neq p} \int d\mathbf{r}_{3A} \delta \left(q_{st} - \sum_{i=1}^A \tilde{r}_i^s r_i^t \right) \Phi_\alpha \left(\frac{1}{2} V_{mp} \right) \Phi_\alpha, \quad (52) \end{aligned}$$

где

$$D^2 = \int dr_{3A} \Phi_\alpha^2 \delta \left(q_{st} - \sum_{i=1}^A \widetilde{r}_i^s \widetilde{r}_i^t \right). \quad (53)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^A \Delta_i \Phi_\alpha = 0, \quad (54)$$

и вводя волновую функцию $\chi' = D\Phi$, получаем выражение для гамильтониана в виде

$$\mathcal{H}\chi' = (T + V)\chi' = E\chi', \quad (55)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2}{m} \sum_{stp} \pi_{st} q_{tr} \pi_{ps} - \frac{2}{m} \sum_{stp} D^{-1} (\pi_{st} q_{tr} \pi_{ps} D); \\ V &= D^{-2} \int dr_{3A} \delta \left(q_{st} - \sum_{i=1}^A \widetilde{r}_i^s \widetilde{r}_i^t \right) \Phi \left(\frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \hat{U}_{nm} \right) \Phi_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Здесь введено обозначение

$$\pi_{st} = -i [(1 + \delta_{st})/2] \cdot \partial / \partial q_{st}. \quad (57)$$

Исследование уравнений (55) и (56) можно проводить как в лабораторной системе координат, так и во внутренней, связанной с главными осями ядра, системе. Имея в виду в дальнейшем исследование статистических деформаций, удобно рассматривать ядро в главных осях. При этом ядро как бы «останавливается». Тогда

$$q_{st} = \delta_{st} q_{ss}; \quad \pi_{st} = \delta_{st} \pi_{ss} = -i \delta_{st} \partial / \partial q_{ss}.$$

Уравнение (55) принимает вид

$$-\frac{4\hbar^2}{m} \left[\sum_s \frac{\partial}{\partial q_s} q_s \frac{\partial}{\partial q_s} - \sum_s D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q_s} q_s \frac{\partial D}{\partial q_s} \right) \right] \chi' + (W_{\text{кк}} - E) \chi' = 0. \quad (58)$$

Для вычисления эффективной потенциальной энергии необходим определенный выбор внутренней волновой функции. В соответствии с требованиями гармоничности по осям x, y, z функция Φ_α берется в виде

$$\Phi = \frac{C}{\sqrt{A!}} \det | \Pi_n (\dots r_i \dots) |, \quad (59)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Pi_n &= C_{n_1 n_2 n_3} r_1^{n_1} r_2^{n_2} r_3^{n_3}; \\ C_{n_1 n_2 n_3} &= \left(\frac{2^{n_1 + n_2 + n_3}}{\pi^3 n_1! n_2! n_3!} \right)^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

C — нормировочная постоянная; $\alpha_{s\mu}$ — спин-изоспиновая функция.

Полиномы Φ_α (59) линейно связаны с полиномами, вводимыми в работе [44]. Однако в таком подходе не фиксируется момент частицы на данной орбитали, а пишутся степени декартовых координат частицы. Для дважды магических ядер полиномы тождественно совпадают. В случае же немагических ядер предлагаемый способ построения волновой функции может оказаться более удобным, так как он имеет дело с состояниями частицы в деформированном ядре, где одночастичный момент не является интегралом движения. Порядок заполнения детерминанта (59) функциям Π_n таков: Π_{000} ; $\Pi_{100}\Pi_{010}\Pi_{001}$; $\Pi_{200}\Pi_{020}\Pi_{002}\Pi_{110}\Pi_{101}\Pi_{011}$ и т.д.

Этот порядок соответствует заполнению оболочки в деформированном осцилляторе. Последовательность заполнения внутри оболочки с данным $K = K_1 + K_2 + K_3$, но различными K_1, K_2, K_3 определяется минимальностью энергии состояния с данным K . В возбужденных состояниях порядок существенно нарушается, что соответствует перепутыванию уровней в сильнодеформированном осцилляторе. Основному состоянию всегда будет соответствовать функция с минимальными K_t по осям $K_{1\text{мин}}, K_{2\text{мин}}, K_{3\text{мин}}$.

Величина $K_t = \sum_{i=1}^A n_i^t$ ($t = 1, 2, 3$). Коэффициенты в формуле (60) подобраны так, чтобы для минимальных K_t можно было преобразовать $\det |\Phi_n|$ в $\det |\tilde{\Phi}_n|$, состоящий из функций

$$\tilde{\Phi}_n(\mathbf{r}^i) = \frac{H_{n_1}(r_1^i) H_{n_2}(r_2^i) H_{n_3}(r_3^i)}{[2^{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3! \pi^{3/2}]^{1/2}}, \quad (61)$$

где $H_{n_t}(r_t^i)$ — полиномы Эрмита степени n_t . Для вычисления нормировочного коэффициента D и матричных элементов от одночастичных и двухчастичных операторов используется метод, развитый в работе [17] и являющийся обобщением способа расчета, приведенного в [8]. Тогда функции, входящие в выражение для матричного элемента, могут быть приведены к виду

$$U_n = \Psi_{n_1}(\sqrt{s_1} r_1) \Psi_{n_2}(\sqrt{s_2} r_2) \Psi_{n_3}(\sqrt{s_3} r_3), \quad (62)$$

где

$$\Psi_{n_t}(\sqrt{s_t} r_t) = (s_t/\pi)^{1/4} (2^{n_t} n_t!)^{-1} \exp(-s_t r_t^2/2) H_{n_t}(\sqrt{s_t} r_t) \quad (63)$$

осцилляторная волновая функция. Используя ортогональность функций, входящих в это выражение, легко получить, вычисляя (53), что

$$D^2 = N^2 \prod_{t=1}^3 q_t^{[K_t + (A-3)/2]},$$

а

$$D^{-1} \left(\sum_{t=1}^3 \pi_t q_t \pi_t D \right) = - \sum_{t=1}^3 [(A-3)/2 + K_t]^2 (4q_t)^{-1}. \quad (64)$$

Вклад в потенциальную энергию коллективного движения от взаимодействия между нуклонами имеет вид

$$\begin{aligned}
 W_{\text{КК}} = & D^{-2} \int d\tau_{3(A-1)} \Phi(\dots \mathbf{r}_i \dots) \left[\frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \hat{U}_{nm} \right] \Phi(\dots \mathbf{r}_i \dots) \times \\
 & \times \delta \left(q_t - \sum_{i=1}^A r_i^2 \right) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp_1 dp_2 dp_3 S(p_1 p_2 p_3) \times \\
 & \times \int d\tau_{3A} \det U_n \left[\dots \mathbf{r}_i \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{1/2} \dots \right] \left(\sum_{n>m} \hat{V}_{nm} \right) \times \\
 & \times \det \left| U_n \left[\dots \mathbf{r}_i \sqrt{\frac{p_i}{q_i}} \dots \right] \right| \left[\int A! dp_1 dp_2 dp_3 S(p_1 p_2 p_3) \right]^{-1}, \quad (65)
 \end{aligned}$$

где

$$S(p_1 p_2 p_3) = \prod_{t=1}^3 p_t^{-[K_t + (A-1)/2]} \exp(p_i). \quad (66)$$

Таким образом, уравнение (58) для коллективной переменной принимает вид

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\hbar^2}{m} \left[\sum_{t=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_t} q_t \frac{\partial}{\partial q_t} - \sum_{t=1}^3 (A-3+2K_t)^2 / 16 q_t \right] \chi' + \\
 + [W_{\text{КК}}(q_1 q_2 q_3) - E] \chi' = 0. \quad (67)
 \end{aligned}$$

В координатах $X_t = \sqrt{q_t}$ с помощью замены $\chi' = \chi(X_1 X_2 X_3)^{1/2}$ уравнение (67) получается в виде

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{t=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial X_t^2} - \frac{(A-2+2K_t)(A-4+2K_t)}{4X_t^2} \right] \chi + \\
 + (W_{\text{КК}} - E) \chi = 0. \quad (68)
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (68) дает энергию состояния E и его волновую функцию.

Изложенный выше метод был применен в работах [18, 19] для расчета свойств легких ядер. Хорошо известно, что многие легкие ядра обладают большим внутренним квадрупольным моментом в основном и возбужденном состояниях. Это подтверждается наличием ротационных полос, построенных на этих состояниях, и большими вероятностями $E2$ -переходов внутри полос. В работе [18] вычислены энергии связи, среднеквадратические радиусы, квадрупольные моменты и формы ядер ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$ в основном состоянии, а в работе [19] сделаны расчеты этих же величин для четно-четных ядер $N=Z$ в оболочке $2s-1d$. Пространственное состояние нуклона характеризуется символом $[n_1 n_2 n_3]$, где n_t — показатель степени в формуле (60).

Исходя из условия максимального перекрытия волновых функций и соответственно максимальной (по абсолютной величине) энергии связи, каждое пространственное состояние заполняется четырёхкратно с суммарным спином S и изоспином T , равными 0. Это обстоятельство отмечает индекс 4 под символом $[n_1 n_2 n_3]$. Вычислим энергии всех возможных заполнений с $K = = K_{\text{мин}}$. Расчеты показали, что основным состояниям ядер соответствуют заполнения:

$$\begin{aligned} & {}^8\text{Be} - [(000)_4, (001)_4]; \quad {}^{12}\text{C} - [(000)_4, (100)_4, (010)_4]; \\ & {}^{16}\text{O} - [(000)_4, (100)_4, (010)_4, (001)_4]; \quad {}^{20}\text{Ne} - [({}^{16}\text{O}), (002)_4]; \\ & {}^{24}\text{Mg} - [({}^{16}\text{O}), (002)_4, (101)_4]; \quad {}^{28}\text{Si} - [({}^{16}\text{O}), (200)_4, (020)_4, (110)_4]; \\ & {}^{32}\text{S} - [({}^{40}\text{Ca}), (002)_4^G, (011)_4^G]; \quad {}^{36}\text{Ar} - [({}^{40}\text{Ca}), (002)_4^G]. \end{aligned}$$

Здесь для сокращения введено обозначение $({}^{16}\text{O})$ — заполнение кислорода, $({}^{40}\text{Ca}) = [({}^{16}\text{O}), (200)_4, (020)_4, (002)_4, (110)_4, (101)_4, (011)_4]$. Индекс G обозначает дырочное состояние.

Использованные волновые функции (59) не являются собственными функциями момента (за исключением основных состояний дважды магических ядер). Поэтому вычисляемая энергия является средним значением гамильтониана с некоторой добавкой, происходящей от вращательной энергии $E_{\text{вр}}$, и ее можно оценить [20] по формуле

$$E_{\text{вр}} = \sum_{t=1}^3 \frac{\langle \alpha | \hat{J}_t | \beta \rangle^2}{2J_{t\alpha}}, \quad (69)$$

где $J_{t\alpha}$ — момент инерции ядра по оси t в состоянии α ; $J_t = = \sum_{i=1}^A \hat{j}_i^2$ — оператор полного момента ядра по оси t . Величина $J_{t\alpha}$ вычисляется по формуле крекинг-модели. Тогда энергию состояния с моментом 0 можно получить как $E_{\alpha}^0 = E_{\alpha}^L - E_{\alpha\text{вр}} [E_{\alpha}^L - \text{получается из уравнения (68)]$.

Уравнение (68) решается в гармоническом приближении, т. е. эффективный потенциал, включающий в себя центробежную энергию и матричный элемент взаимодействия $W_{\text{КК}}$, раскладывается в ряд по $(X_i - X_{i\text{мин}})$ вблизи точки минимума. Если пренебречь перекрестными членами, которые обычно малы, то уравнение (68) распадается на три для гармонических осцилляторов с частотами по осям ω_i . Вычисления проводились по формулам: энергия связи

$$E_{\alpha}^L = U_{\text{мин}} + \sum_{i=1}^3 h\omega_{i\alpha}/2 + E_{\text{кул}}, \quad (70)$$

где $U_{\text{мин}}$ — энергия в точке минимума эффективной потенциальной энергии; $\hbar\omega_t$ — частота колебаний по t -й оси; $E_{\text{кул}}$ — кулоновская энергия; среднеквадратический радиус

$$\bar{R} = \langle R^2 \rangle^{1/2} = \left[\left\langle \sum_{t=1}^3 q_t \right\rangle / A \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{A} \sum_{t=1}^3 (q_t^0 + \hbar/2m\omega_t) \right]^{1/2}, \quad (71)$$

где q_t^0 — значение квадрата координаты в точке минимума эффективной потенциальной энергии; квадрупольные моменты распределения заряда

$$\left. \begin{aligned} Q_{20} &= \frac{Ze^2}{A} \left[2q_3^0 - q_1^0 - q_2^0 + \frac{\hbar}{2m} (2/\omega_3 - 1/\omega_1 - 1/\omega_2) \right]; \\ Q_{22} &= \frac{Ze^2}{A} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[q_1^0 - q_2^0 + \frac{\hbar}{2m} (1/\omega_1 - 1/\omega_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Параметры квадрупольной деформации β_2 и γ определялись по формулам

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{\pi/5} \cdot (2q_3^0 - q_1^0 - q_2^0) / (q_1^0 + q_2^0 + q_3^0) \cos \gamma; \\ \text{tg } \gamma &= \sqrt{2} Q_{22} / Q_{20} = \sqrt{3} (q_1^0 - q_2^0) / (2q_3^0 - q_1^0 - q_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Нуклон-нуклонный потенциал выбран центральным в виде (48). Расчеты проводились для вариантов сил, указанных в табл. 12.

Таблица 12

Параметры потенциалов

Номер потенциала	$U_{13}^+ = U_{31}^+$, Мэв	$U_{13}^- = U_{31}^-$, Мэв	$U_{33}^+ = U_{11}^+$, Мэв	$U_{33}^- = U_{11}^-$, Мэв	$r_{13}^+ = r_{31}^+$, ферми	$r_{13}^- = r_{31}^-$, ферми	$r_{33}^+ = r_{11}^+$, ферми
I	-80,781	118,11	24,777	0	2,012	1,172	2,012
II	-61,3	112,9	62	0	2,05	0,95	1,5

Выбор параметров потенциала I производился так, чтобы получить удовлетворительное значение среднеквадратического радиуса и энергии связи ядер ^{16}O и ^{40}Ca , а потенциал II взят из работы [10]. В табл. 13 и 14 дано сравнение рассчитанных энер-

Таблица 13

Сравнение расчетных энергий связи с экспериментальными

Ядро	^{12}C	^{16}O	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar	^{40}Ca
$E_{\text{эксц}}, \text{Мэв}$	92,16	127,6	160,6	198,25	236,5	271,8	306,7	342,05
$E_{\text{I}}, \text{Мэв}$	95,4	129,1	163,6	199,0	243,7	273,1	318,9	363,5
$E_{\text{II}}, \text{Мэв}$	94,7	125,2	157,3	193,4	239,6	269,2	316,3	362,6

Таблица 14

Сравнение расчетных среднеквадратических радиусов основных состояний с экспериментальными

Ядро	^{12}C	^{16}O	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar	^{40}Ca
$\langle R^2 \rangle_{\text{эксп}}^{1/2}$, ферми	2,43	2,64	—	2,98	3,04	3,12	—	3,50
$\langle R^2 \rangle_{\text{I}}^{1/2}$, ферми	2,6	2,74	3,01	3,29	3,4	3,44	3,45	3,54
$\langle R^2 \rangle_{\text{II}}^{1/2}$, ферми	2,7	2,75	3,16	3,35	3,48	3,51	3,54	3,55

гий связи и среднеквадратических радиусов с экспериментальными. Теоретические значения среднеквадратического радиуса превышают экспериментальные приблизительно на 10%. Сравнение квадрупольных моментов и параметров квадрупольных деформаций приведено в табл. 15 и 16. Наблюдается хорошее согласие,

Таблица 15

Сравнение расчетных квадрупольных моментов основных состояний с экспериментальными

Ядро	^{12}C	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar
$Q_{0 \text{ эксп}}$, ферми ²	25,4	53,7 61,2	71	57,6	65	55,2
$Q_{0\text{I}}$, ферми ²	22,3	59	76,2	-82,5	69,8	-55,9
$Q_{0\text{II}}$, ферми ² град	24,4	61,1	79,4	-86,7	73	-59,2

Таблица 16

Сравнение расчетных параметров β_2 и γ для основных состояний с экспериментальными

Ядро	^{12}C	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar
β_2 эксп	0,4	0,47	0,48	-0,34	-0,30	-0,22
$\gamma_{\text{эксп}}$, град	—	—	—	—	—	—
$\beta_{2\text{I}}$	0,34	0,498	0,485	-0,402	0,30	-0,206
γ_{I} , град	—	—	15,5	—	40,6	—
$\beta_{2\text{II}}$	0,36	0,487	0,495	-0,42	0,37	-0,22
γ_{II} , град	—	—	15,5	—	38,5	—

Таблица 17

Сравнение расчетных моментов инерции основных состояний с экспериментальными

 (в случае неаксиальных состояний в ^{24}Mg и ^{32}S
 даны значения моментов инерции относительно трех осей)

Ядро	^{12}C	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar
$J_{\text{эксп}}, \text{Мэв}^{-1}$	0,68	1,68	2,1	1,54	1,34	1,52
$J_{\text{I}}, \text{Мэв}^{-1}$	0,56	1,53	2,1 1,6 0,94	1,42	1,93 2,06 1,03	1,49
$J_{\text{II}}, \text{Мэв}^{-1}$	0,54	1,65	2,16 1,63 0,99	1,41	1,99 2,17 1,41	1,56

кроме ядра ^{28}Si , где расчетные данные превосходят экспериментальные на 20%. Ядра ^{24}Mg и ^{32}S неаксиальны в основном состоянии. Сравнение вычисленных и экспериментальных моментов инерции для основных состояний дано в табл. 17.

Таблица 18

Сравнение результатов расчета для основных и первых возбужденных состояний O^+ в ядрах ^{12}C и ^{16}O

Параметры	Вариант	^{12}C		^{16}O	
		Основное	Возбужденное	Основное	Возбужденное
$E_{\text{св}}, \text{Мэв}$	I II	-95,4 -94,74	-88,1 -87,1	-129,1 -125,23	123,4 118,28
$\Delta E, \text{Мэв}$	I II	0 0	7,3 7,64	0 0	5,7 6,95
$\langle R^2 \rangle^{1/2}, \text{ферми}$	I II	2,60 2,69	3,44 3,53	2,67 2,78	3,19 3,29
$Q_{20}, \text{ферми}^2$	I II	-22,3 -24,4	105 110	0 0	79,0 80,9
β	I II	0,34 0,36	0,9 0,9	0 0	0,78 0,78

Таким образом, приближение $K = K_{\text{мин}}$ в деформированных ядрах способно объяснить структуру основных состояний ядер по крайней мере до $A \sim 40-50$. Исследованию некоторых возбужденных состояний в ^{12}C и ^{16}O посвящена работа [21]. Ближайшими к основному состоянию возбужденными конфигурациями оказалась в ^{12}C $—[(000)_4(001)_4(002)_4]$, а в ^{16}O $—[(000)_4(100)_4(001)_4(002)_4]$.

Эти возбуждения являются $4p - 4h$. Результаты расчетов с потенциалами, использованными для расчета основных состояний, приведены в табл. 18. Необходимо отметить, что энергии возбужденных состояний, вычисленные на основе NV -потенциалов, подобранных по энергиям основных состояний дважды магических ядер, удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Следует обратить внимание, что основные и возбужденные состояния имеют существенно различные свойства. Так, внутренний квадрупольный момент основного состояния в ^{12}C отрицательный, а в ^{16}O равен нулю. В возбужденных состояниях этих ядер он положительный. Экспериментальное исследование таких многочастичных возбужденных состояний является весьма интересной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, 3, 1032.
2. Бадалян А. М. и др. «Ядерная физика», 1967, 6, 473.
3. Бадалян А. М., Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н. «Ядерная физика», 1968, 8, 313.
4. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1969, 9, 69.
5. Badalyan A. M., Calogero F., Simonov Yu. A. Preprint n 234, Istituto di Fizika di Roma, 1969.
6. Бадалян А. М. и др. «Ядерная физика», 1971, 13, 221.
7. Базь А. И., Демин В. Ф., Жуков М. В. «Ядерная физика», 1969, 9, 1184.
8. Базь А. И., Жуков М. В. «Ядерная физика», 1970, 11, 779.
9. Базь А. И., Жуков М. В. Доклад на Проблемном симпозиуме по теории ядра, Новосибирск, 1970.
10. Базь А. И. и др. Препринт ИАЭ-2061, 1971; «Письма ЖЭТФ», 1970, 12, 151.
11. Baker G. Gammell J. e. a. Phys. Rev., 1962, 125, 1754.
12. Bell D., Delves L. Nucl. Phys., 1970, A146, 497.
13. Biedenharn L., Blatt J., Kalos M. Nucl. Phys., 1958, 6, 359.
14. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
15. Volkov A. B. Nucl. Phys., 1965, 74, 33.
16. Горбатов А. М. «Ядерная физика», 1969, 10, 950.
17. Гринь Ю. Т. «Ядерная физика», 1970, 12, 927.
18. Гринь Ю. Т., Кочетов А. Б. «Ядерная физика», 1970, 12, вып. 6.
19. Гринь Ю. Т., Кочетов А. Б., Ананькин А. И. «Ядерная физика», в печати.
20. Гринь Ю. Т., Леинсон Л. Б. «Ядерная физика», 1971, 14, вып. 1.
21. Гринь Ю. Т., Леинсон Л. Б. «Ядерная физика», 1971, 14, вып. 4.
22. Дзюба Б. М. и др. «Ядерная физика», 1971, 13, 22.
23. Erens G. Bound-state properties of a model three-nucleon system calculated with a hyperspherical function basis. Preprint, Amsterdam, 1970.
24. Жуков М. В., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», в печати, 1972.

25. Жуков М. В., Шитикова К. В. «Ядерная физика», в печати, 1972.
26. Жуков М. В., Максименко В. Н. Препринт ИТФ-71-20Р, Киев, 1971.
27. Захарьев Б. Н., Пустовалов В. В., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1968, 8, 406.
28. Calogero F., Simonov Yu. A. Nuovo cimento, 1969, 64B, 337.
29. Тяпин А. Ф. «Ядерная физика», 1971, 14, 88.
30. Calogero F., Simonov Yu., Surkov E. Preprint N282, Instituto di Fizika di Roma, 1970.
31. Malfliet R., Tjon T. Nucl. Phys., 1969, A127, 161.
32. Mand H., Weidenmuller H. Annual Review of Nuclear Science, N.Y., 1968.
33. Максименко В. Н. Препринт ИТФ 71-1Е. Киев, 1971.
34. Мачарадзе Т. С., Михелашвили Т. Я. Препринт, Тбилиси, 1970.
35. Пустовалов В. В., Симонов Ю. А. ЖЭТФ, 1966, 51, 345.
36. De la Ripelle Fabre. Preprint, Orsay, 157, 1969.
37. Де ла Рипелль Фабр. «Ядерная физика», 1971, 13, 495.
38. Рыбаченко В. Ф., Садовой А. А., Чулков Н. М. «Ядерная физика», 1969, 10, 1156.
39. Рыбаченко В. Ф., Садовой А. А. «Ядерная физика», 1970, 12, 710.
40. Садовой А. А., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», в печати, 1971.
41. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, 3, 630.
42. Симонов Ю. А. «Ядерная проблема трех и четырех тел». В кн. «Тр. Проблемного симпозиума по теории ядра». Тбилиси, 1967.
43. Симонов Ю. А., Бадалян А. М. «Ядерная физика», 1967, 5, 88.
44. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1968, 7, 1210.
45. Симонов Ю. А., Бадалян А. М. «Ядерная физика», 1970, 11, 1318.
46. Сурков Е. Л. «Ядерная физика», 1967, 3, 908.
47. Feshbach H., Schwinger J. Phys. Rev., 1951, 84, 194.
48. Хюльтен А., Суговара М. В сб. «Строение ядра». Ч. I. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
49. Eikemeier H., Hackenbroich H. Zeit Phys., 1966, 195, 412.
50. Эфрос В. Д. Препринт ИАЭ-1633, 1968.
51. Эфрос В. Д. Препринт ИАЭ-1879, 1969.