ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА, 1972, ТОМ 3, ВЫП. 3

УДК 539.12.172

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. I

Ю. М. Широков

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

В работе ставятся две цели: во-первых, дать единую и наиболее общую точку зрения на проблему формулировки условий релятивистской инвариантности; во-вторых, изложить те следствия из условий релятивистской инвариантности, которые либо не отражены вовсе, либо не изложены с достаточной полнотой в существующих учебниках и монографиях. В публикуемой первой части работы содержится общая математическая формулировка задачи о релятивистской инвариантности в терминах групп автоморфизмов алгебраических систем и теория неприводимых представлений группы Пуанкаре. Получена полная система как унитарных, так и неунитарных неприводимых представлений этой группы, включающая открытые за последние годы представления с одномерными малыми группами.

The purpose of the paper is twofold. The first one is to present the unifield and most general viewpoint on the problem of the formulation of the relativistic invariance conditions. The second one is to review those of the consequences following from the invariance conditions which were so far either not included at all or treated incompletely in the existing textbooks and monographs. The first part of the whole work which is presented below contains the general formulation of the problem of the relativistic invariance in terms of the group automorphisms of the algebraic systems and also the theory of the irreducible representations of the Poincarè group. The complete system of the unitary as well as nonunitary irreducible representations of the group is obtained including the representations corresponding to the one-dimensional little groups which were discovered recently.

1. ГРУППА ПУАНКАРЕ

1. Физическая теория называется релятивистски инвариантной, если она согласована с опытным фактом одинаковости законов природы во всех инерциальных системах отсчета. Множество всех геометрических преобразований четырехмерного пространства-времени, связывающих между собой различные инерциальные системы отсчета, образует группу $\mathcal{P}_{st}$, называемую общей

группой Пуанкаре. Поэтому математическая формулировка релятивистской инвариантности основана на теории общей группы Пуанкаре.

Общая группа Пуанкаре определяется как множество линейных неоднородных преобразований четырехмерного радиус-вектора x^α

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x'^\beta + a^\alpha, \tag{1}$$

где $a^\alpha \in R_4$, а действительные 4×4-матрицы Λ^α_β удовлетворяют условию

$$\Lambda^\alpha_\beta g_{\alpha\gamma} \Lambda^\gamma_\varepsilon = g_{\beta\varepsilon}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3; метрический тензор $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$ задан соотношениями

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

По повторяющемуся в одночлене индексу подразумевается суммирование, если не оговорено противное. Обычным образом определены операции поднятия и опускания индексов $\Lambda^\alpha_\beta g_{\alpha\gamma} = \Lambda_{\gamma\beta}$, $\Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha\gamma}$ и т. д.

Если наложить на матрицы Λ^α_β условие

$$\Lambda^0_0 > 0, \tag{3}$$

то получается не содержащая отражений во времени ортохронная группа Пуанкаре $\mathcal{P}_s$. Если же к условию (3) добавить

$$\det \Lambda = 1, \tag{4}$$

то получится собственная группа Пуанкаре $\mathcal{P}$, которую мы в дальнейшем для краткости будем называть группой Пуанкаре. Группа $\mathcal{P}$ — максимальная связная подгруппа группы $\mathcal{P}_{st}$.

Соотношение (1) представляет собой одну из реализаций группы $\mathcal{P}_{st}$. Более формальное определение этой группы состоит в том, что каждому допустимому набору (Λ, a) значений величин Λ^α_β, a^α сопоставляется элемент $G(\Lambda, a)$ группы $\mathcal{P}$, а групповая операция умножения задана условием

$$G(\Lambda_1, a_1)\, G(\Lambda_2, a_2) = G(\Lambda_3, a_3), \tag{5}$$

где

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2, \quad a_3 = \Lambda_1 a_2 + a_1. \tag{6}$$

Для сокращения записи в (5), (6) опущены тензорные индексы. В физике используется большое количество разнообразных реализаций группы $\mathcal{P}$. В частности, такими реализациями являются все линейные представления этой группы.

2. Группа $\mathcal{P}$ является десятипараметрической локально компактной группой Ли. Отсюда следует, что в окрестности любого

элемента, в частности в окрестности единицы, десять параметров группы можно выбрать так, чтобы для этого элемента имели смысл производные любого порядка по всем параметрам. Это дает возможность вводить инфинитезимальные преобразования группы

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha}_{\beta} x'^{\beta} + \xi^{\alpha}, \tag{7}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, ξ^{α}, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — бесконечно малые величины. В соответствии с (7) элемент $G(\Lambda, a)$ группы в окрестности единицы I можно представить в виде

$$G(\Lambda, a) = \mathrm{I} + \xi^{\alpha}\partial_{\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}, \tag{8}$$

где $\partial_{\alpha} = \partial G/\partial a^{\alpha}$; $N^{\alpha\beta} = \partial G/\partial\Lambda_{\alpha\beta}$ при $a^{\alpha} = 0$, $\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

Требование выполнения группового закона (5) в окрестности единицы приводит к перестановочным соотношениям для величин ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$:

$$\left.\begin{aligned} &[\partial^{\alpha}, \partial^{\beta}] = 0; \quad [N^{\alpha\beta}, \partial^{\gamma}] = g^{\beta\gamma}\partial^{\alpha} - g^{\alpha\gamma}\partial^{\beta}; \\ &[N^{\alpha\beta}, N^{\gamma\varepsilon}] = g^{\alpha\varepsilon}N^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}N^{\varepsilon\beta} - g^{\beta\varepsilon}N^{\alpha\gamma} - g^{\gamma\beta}N^{\varepsilon\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Соотношения (9) образуют алгебру Ли группы Пуанкаре. В алгебре Ли операцией умножения является взятие коммутатора от перемножаемых величин. Умножение в алгебрах Ли неассоциативное. Замкнутая алгебра Ли группы Пуанкаре содержит всего десять элементов (по числу параметров группы). Поэтому изучение алгебры Ли часто оказывается существенно более простым, чем изучение соответствующей группы. Глубокая причина такого упрощения кроется в том, что при переходе к алгебре Ли фактически используется очень сильная теорема Понтрягина — Мальцева — Монтгомери — Циппина (см., например [1]) о том, что пространство параметров группы Ли является аналитическим многообразием.

3. Наряду с группами часто рассматриваются соответствующие групповые алгебры. Для дискретной группы переход к алгебре единствен и состоит в том, что для элементов группы вводятся дополнительные операции сложения и умножения на числа. Для непрерывной группы и, в частности, для группы Ли можно строить различные групповые алгебры. Каждая из этих алгебр имеет свой запас элементов и свои топологические свойства (см., например, [2, 3]). Одной из таких алгебр является ассоциативная оболочка или, что то же, обертывающая алгебра алгебры Ли.

Обертывающей алгеброй $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ для группы Пуанкаре является линейная оболочка всевозможных произведений элементов ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$ алгебры Ли. Элементами такой алгебры являются многочлены вида $\sum_{m,\,n} C_{mn}\partial^m N^n$, где C_{mn} — комплексные числа; $\partial^m N^n$ — соответственно произведения m каких-либо компонент ∂^α и n каких-либо компонент $N^{\alpha\beta}$ (как одинаковых, так и различных). Заметим, что само введение операции дифференцирования элементов группы уже подразумевает переход к алгебре, поскольку для того чтобы дифференцировать элементы группы, нужно уметь их вычитать один из другого и делить на числа.

4. Задание алгебры Ли не вполне эквивалентно заданию исходной группы, поскольку одной и той же алгебре Ли могут соответствовать несколько локально изоморфных групп. Алгебре Ли (9) соответствует не только собственная группа Пуанкаре $\mathcal{P}$, но и ее универсальная накрывающая группа (см. например [2, 4]) $\tilde{\mathcal{P}}$. Группа $\tilde{\mathcal{P}}$ реализуется 4×4-матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & \underset{\sim}{a}(A^+)^{-1} \\ 0 & (A^+)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где A — 2×2 унимодулярная матрица; $\underset{\sim}{a}$ — 2×2-матрица вида

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \sigma_\alpha, \tag{11}$$

$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, σ_i — матрицы Паули; A^+ — матрица, эрмитово сопряженная A [5, 6].

Соответствие между группами $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$ устанавливается приравниванием векторов a^α в (2), (11) и соотношением

$$\Lambda^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\sigma_\alpha A \sigma_\beta A^+). \tag{12}$$

Из (12) видно, что каждому элементу группы $\mathcal{P}$ соответствуют два элемента группы $\tilde{\mathcal{P}}$, различающиеся знаком матрицы A. Эти два элемента переводятся один в другой умножением (с любой стороны) на элемент $I_{2\pi}$, соответствующий евклидову повороту на угол 2π в любой плоскости. Так как $I^2_{2\pi} = \mathrm{I}$, то элементы I, $I_{2\pi}$ образуют абелеву инвариантную подгруппу группы $\tilde{\mathcal{P}}$, называемую фундаментальной группой [4]. Группа $\mathcal{P}$ является фактор-группой группы $\tilde{\mathcal{P}}$ по фундаментальной группе. Заметим, что $\mathcal{P}$ — не подгруппа $\tilde{\mathcal{P}}$.

Наглядно различие групп $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$ сводится к тому, что поворот на угол 2π в $\mathcal{P}$ равен единичному преобразованию, а в $\tilde{\mathcal{P}}$ — независимому элементу $I_{2\pi}$ центра группы. Возникает естественный вопрос: которая из групп, $\mathcal{P}$ или $\tilde{\mathcal{P}}$, отражает симметрию реального мира? На этот вопрос сейчас вряд ли можно дать окончательный ответ. Решающим доводом в пользу $\widetilde{\mathscr{P}}$ было бы обнаружение в природе экспериментально наблюдаемых величин, изменяющихся при повороте на 2π. Отсутствие таких величин постулируется (а не доказывается, как часто считают) в известной работе [7]. Решающим доводом в пользу группы $\mathscr{P}$ было бы полное устранение из теории спинорных представлений. Такое устранение спиноров из физики вряд ли будет произведено, хотя оно и не столь безнадежно, как кажется на первый взгляд. Действительно, спинорные представления используются для описания соответствующих состояний и полей. Но состояния можно описывать матрицей плотности, которая согласно только что упомянутому постулату из работы [7] не имеет компонент, преобразующихся по двузначным представлениям группы $\mathscr{P}$. А спинорные поля, как правило, используются в виде билинейных комбинаций, также преобразующихся по однозначным представлениям. Так, функции Вайтмана не равны нулю лишь при четном числе спинорных полей, входящих в них. Однако из-за отсутствия последовательной теории нельзя категорически утверждать, что в ней не требуются одиночные спинорные поля.

5. Группы $\mathscr{P}$, $\widetilde{\mathscr{P}}$ не содержат отражений. Неэквивалентных элементов отражений в эти группы можно ввести три:

а) элемент I_s инверсии пространственных координат

$$x^i = -x'^i, \quad x^0 = x'^0; \tag{13}$$

б) элемент I_t отражения времени

$$x^i = x'^i, \quad x^0 = -x'^0; \tag{14}$$

в) элемент I_{st} отражения всех четырех координат

$$x^\alpha = -x'^\alpha. \tag{15}$$

По определению

$$I_s I_t = I_{st}. \tag{16}$$

Переход от собственной группы $\mathscr{P}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}$) к общей $\mathscr{P}_{st}$ ($\widetilde{\mathscr{P}}_{st}$) осуществляется введением в собственную группу дискретных элементов I_s, I_t, I_{st}. Перестановочные соотношения элементов I_s, I_t, I_{st} с ∂^α, $N^{\alpha\beta}$, а следовательно, и со всеми элементами собственной группы вытекают из (13) — (15):

$$\begin{gathered}\partial^i I_s + I_s \partial^i = 0; \quad [\partial^0, I_s] = 0; \quad [N^{ij}, I_s] = 0;\\ N^{io} I_s + I_s N^{io} = 0;\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}[\partial^i, I_t] = 0; \quad \partial^0 I_t + I_t \partial^0 = 0;\\ [N^{ij}, I_t] = 0; \quad N^{io} I_t + I_i N^{io} = 0;\end{gathered} \tag{18}$$

$$\partial^\alpha I_{st} + I_{st} \partial^\alpha = 0; \quad [N^{\alpha\beta}, I_{st}] = 0. \tag{19}$$

Согласно (13) — (15), квадрату каждого отражения соответствует тождественное преобразование координат $x^\alpha = x'^\alpha$. Поэтому в группе $\mathcal{P}_{st}$ квадраты всех отражений равны единице:

$$I_s^2 = I_t^2 = I_{st}^2 = \mathrm{I} \quad \text{для} \quad \mathcal{P}_{st}. \tag{20}$$

Однако в группе $\widetilde{\mathcal{P}}_{st}$ тождественному преобразованию координат соответствуют два элемента, I и $I_{2\pi}$. Поэтому здесь квадрат каждого из неэквивалентных отражений можно независимо положить равным либо I, либо $I_{2\pi}$. Таким образом, существуют восемь математически не эквивалентных друг другу групп $\widetilde{\mathcal{P}}_{st}$ [8]. Исследование представлений этих групп и их физической различимости проведено в [9, 10].

6. Группа $\mathcal{P}$ не является ни простой, ни даже полупростой. Она имеет нормальный делитель — абелеву группу 4-трансляций T_4, элементам которой соответствуют преобразования $G(\mathrm{I}, a)$. Соответствующей фактор-группой является собственная группа Лоренца $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}/T_4, \tag{21}$$

реализуемая преобразованиями $G(\Lambda, 0)$ с соблюдением условий (3), (4). В математической классификации группа $\mathcal{L}$ обозначается $SO(3,1)$. Обе группы, T_4 и $\mathcal{L}$, локально компактны. Универсальная накрывающая группа $\widetilde{\mathcal{L}}$ для $\mathcal{L}$ изоморфна группе $SL(2, C)$ комплексных унимодулярных 2×2-матриц A.

Группа $\mathcal{L}$ является не только фактор-группой, но и подгруппой $\mathcal{P}$, так что $\mathcal{P}$ представляет собой полупрямое произведение

$$\mathcal{P} = T_4 \otimes \mathcal{L}. \tag{22}$$

В п. 3 увидим, что эта связь групп T_4 и $\mathcal{L}$ эффективно используется для построения неприводимых представлений группы $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Подчеркнем, что в этом параграфе рассматривались только сами группы и порождаемые ими алгебры, но не соответствующие линейные представления.

2. ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ УСЛОВИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

1. Обычно при формулировке условий релятивистской инвариантности квантовой теории ограничиваются требованием того, чтобы векторы состояния преобразовывались по непрерывному унитарному представлению группы $\mathcal{P}$. Такая формулировка, однако, не является ни достаточно полной, ни достаточно общей. А как полнота, так и общность здесь желательны, поскольку именно в проблеме релятивистской инвариантности коренятся трудности построения последовательной динамической теории.

Для реализации условий релятивистской инвариантности прежде всего необходимо определить действие группы $\mathscr{P}$ на множестве $\mathscr{M}$ *всех* объектов, используемых в рассматриваемой физической теории. Множество $\mathscr{M}$ может содержать элементы самой различной природы, такие, как векторы состояния, операторы, функции Грина, операция T-произведения и т. д.

Действием группы $\widetilde{\mathscr{P}}$ на произвольном множестве $\mathscr{M}$ является отображение прямого произведения $\{\widetilde{\mathscr{P}}\} \times \mathscr{M}$ на $\mathscr{M}$:

$$\{\widetilde{\mathscr{P}}\} \times \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}. \tag{23}$$

где $\{\widetilde{\mathscr{P}}\}$ — множество элементов группы $\widetilde{\mathscr{P}}$. Этим отображением каждой паре G, X, где $G \in \widetilde{\mathscr{P}}$, $X \in \mathscr{M}$, сопоставляется определенный элемент $(G, X) = Y$, где $Y \in \mathscr{M}$. Отображение (23) должно удовлетворять трем условиям: а) согласованности со структурой группы $\widetilde{\mathscr{P}}$; б) согласованности с топологическими свойствами пространств $\{\widetilde{\mathscr{P}}\}$ и $\mathscr{M}$; в) согласованности с другими (например, алгебраическими) структурными свойствами пространства $\mathscr{M}$. Заметим, что отображение (23) не обязано быть линейным.

Согласованность (23) с групповой структурой выражается соотношением

$$(G_1, G_2, X) = (G_1, (G_2, X)), \tag{24}$$

которое должно выполняться для любых G_1, $G_2 \in \widetilde{\mathscr{P}}$, $X \in \mathscr{M}$. Физический смысл (24) состоит в том, что все величины и соотношения теории можно непротиворечивым способом переводить из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Свойство б) заключается в том, что на множестве $\mathscr{M}$ задана некоторая топология и что отображение (24) непрерывно относительно топологий пространств $\{\widetilde{\mathscr{P}}\} \times \mathscr{M}$ и $\mathscr{M}$. Смысл этого требования состоит в том, что физическая система выглядит почти одинаково в двух почти не различающихся инерциальных системах отсчета.

Совокупность требований а) и б) составляет необходимую и достаточную систему условий пассивной релятивистской инвариантности. Наличие пассивной инвариантности дает возможность записывать уравнения движения в формально ковариантной форме и совершать преобразования от одной инерциальной системы к другой.

Требование в) означает, что при отображении (23) остаются неизменными все соотношения, имеющиеся в теории (уравнения движения, множество допустимых решений этих уравнений, выражения для средних от операторов и т. д.). Математически отображение (23) должно осуществлять реализацию группы $\widetilde{\mathscr{P}}$ автоморфизмами алгебраической структуры (в самом широком смысле этого термина) и других возможных структур (в частности, мер), заданными на множестве $\mathscr{M}$.

Совокупность требований а) — в) составляет необходимую и достаточную систему условий активной релятивистской инвариантности физической теории. Только существование активной инвариантности обеспечивает эквивалентность всех инерциальных систем отсчета. Понятия пассивной и активной инвариантности были введены Вигнером (см. например [11]).

Множество $\{\mathscr{P}\}$ может либо целиком входить в $\mathscr{M}$ как подмножество, либо не иметь с $\mathscr{M}$ ни одного общего элемента. В первом случае (когда $\{\mathscr{P}\} \subset \mathscr{M}$) автоморфизм (23) называется внутренним, а во втором (когда $\{\mathscr{P}\} \cap \mathscr{M} = \phi$) — внешним. Ни та, ни другая возможность не запрещена какими-либо общими физическими соображениями.

2. Отображение (23) часто бывает удобно расширить введением действия величин ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$ и других элементов групповой алгебры $\mathscr{A}(\widetilde{\mathscr{P}})$ на множестве $\mathscr{M}$

$$\{\mathscr{A}\} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}, \tag{25}$$

где $\{\mathscr{A}\}$ — множество элементов обертывающей алгебры $\mathscr{A}(\widetilde{\mathscr{P}})$. При заданном (23) отображение (25) единственно, если оно существует. Но существование (25), вообще говоря, не следует из физических соображений и тем самым не является обязательным ни для всех элементов $\{\mathscr{A}\}$, ни для всех элементов $\mathscr{M}$. Тем не менее переход к гомоморфизму (25), даже не всюду определенному, часто применяется, так как использование элементов алгебры Ли и полиномов от них часто сильно упрощает выкладки.

3. Существование автоморфизма (23), удовлетворяющего требованиям а) — в), представляет собой самую общую формулировку условия релятивистской инвариантности, применимую к любой физической теории. Конкретизуем это условие для квантовой теории в ее традиционной формулировке. В этом случае основными составляющими множества $\mathscr{M}$ являются: а) векторы состояния Ψ, Φ, ... некоторого сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$; б) линейные операторы A, B, ..., действующие на векторы состояния. Эти операторы, в свою очередь, образуют линейное пространство, которое обозначим $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, поскольку оно является линейной оболочкой пространства $\mathscr{H}$.

Реализация автоморфизма (23) для векторов состояния состоит в том, что каждому преобразованию G из $\widetilde{\mathscr{P}}$ сопоставляется непрерывное линейное унитарное преобразование $U_{\mathscr{H}}(G)$ векторов состояния

$$\Psi = U_{\mathscr{H}}(G)\,\Psi', \tag{26}$$

где

$$UU^{+} = U^{+}U = \mathrm{I}. \tag{27}$$

Операторы U осуществляют унитарное непрерывное представление группы $\tilde{\mathcal{P}}$.

Для операторов автоморфизм (23) также может быть записан в виде линейного непрерывного (но уже не обязательно унитарного) преобразования

$$A = T_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(G)\, A' \tag{28}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Но этим преобразование для операторов не исчерпывается. Надо еще учесть, что до преобразования оператор действовал из пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, а преобразованный оператор должен действовать из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_1$, где пространство $\mathcal{H}_1$ получается из $\mathcal{H}$ преобразованием (26). Полностью преобразованный оператор должен совпадать с исходным:

$$UA'U^{-1} = A. \tag{29}$$

Согласно условию в), совокупность соотношений, определяющих конкретную релятивистскую квантовую теорию (коммутаторы, уравнения движения и др.), должна оставаться неизменной при совместном действии преобразований (26), (28), (29).

4. Сформулируем условия релятивистской инвариантности для естественных обобщений стандартной схемы квантовой теории.

Описание состояния обобщается при переходе от вектора состояния к матрице плотности ρ. Матрица плотности является вектором гильбертова пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$, где $\mathcal{H}'$ — пространство, сопряженное $\mathcal{H}$. Соответственно действие элемента G группы $\tilde{\mathcal{P}}$ на ρ осуществляется оператором

$$V_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'}(G) = U_{\mathcal{H}}(G) \otimes U^*_{\mathcal{H}'}(G), \tag{30}$$

действующим в пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$. В (30) звездочкой отмечено комплексное сопряжение. Отметим, что преобразование (30) может содержать неунитарную часть, несмотря на унитарность $U_{\mathcal{H}}(G)$. Причины возникновения такой с виду парадоксальной ситуации будут обсуждаться в параграфе 5, п. 8.

Дальнейшее обобщение понятия состояния совместно с обобщением понятия физической величины производится в алгебраическом подходе к квантовой теории поля. В этом подходе наблюдаемые являются элементами некоторой алгебры. На множестве элементов этой алгебры определены внутренние операции сложения, ассоциативного умножения и инволюции $B \to B^+$, а также внешняя операция умножения на комплексные числа. Кроме того, в алгебре вводится некоторая топология. Частным случаем алгебры наблюдаемых является алгебра операторов гильбертова пространства. В последнем случае инволюция становится эрмитовым сопряжением.

Состояния в алгебраическом подходе описываются линейными положительными функционалами, задаваемыми на множестве элементов алгебры. Положительным называется функционал $F(B)$, удовлетворящий при любом элементе B условию

$$F(B^+B) \geqslant 0. \tag{31}$$

Частным случаем положительного функционала является матрица плотности. Различие между положительными функционалами и матрицами плотности аналогично различию между обобщенными и обычными функциями.

Для формулировки условий релятивистской инвариантности функционал $F(B)$ удобно переписать в более симметричной форме $(F, B) \equiv F(B)$. По определению величина (F, B) равна среднему значению наблюдаемой B в состоянии F:

$$\bar{B} = (F, B). \tag{32}$$

Преобразованием G функционал F преобразуется по некоторому непрерывному (но не обязательно унитарному) представлению, осуществляемому операторами $V(G)$, действующими в пространстве функционалов (которое сопряжено пространству элементов B):

$$F = V(G)\, F'. \tag{33}$$

Среднее значение $\bar{B}$ также преобразуется по некоторому непрерывному представлению группы

$$\bar{B} = T(G)\, \bar{B}', \tag{34}$$

где по определению

$$\bar{B}' = (F', B). \tag{35}$$

Сопоставляя (33), (35), получим, что условие релятивистской инвариантности для элементов алгебры записывается в форме

$$(VF, B) = (F, TB). \tag{36}$$

Условие (36) содержит как элементы алгебры, так и функционал. Естественно потребовать, чтобы релятивистская инвариантность для элементов алгебры формулировалась независимо от функционалов. Для этого необходимо, чтобы каждому элементу G сопоставлялась унарная операция $\tau(G)$, действующая на элементы алгебры таким образом, что

$$T(G)\, B = B\tau(G). \tag{37}$$

Унарной операцией в алгебре называется любое гомоморфное отображение множества в себя (см., например, [12]). Знак унарной операции принято писать справа от элемента, на который она действует. Умножение унарных операций по определению ассоциативно. Поэтому, если линейные преобразования $T(G)$ образуют представление группы $\tilde{\mathcal{P}}$, то унарные операции $\tau(G)$ осуществляют реализацию этой группы. Действительно,

$$T_1T_2B = T_1B\tau_2 = B\tau_1\tau_2.$$

Структура операции $\tau(G)$ может быть различной. В частном случае алгебры операторов гильбертова пространства операция τ является пространственным изоморфизмом (29):

$$B\tau = U^{-1}BU. \tag{38}$$

В общем случае операция τ является групповым автоморфизмом (внешним или внутренним) на множестве элементов алгебры. Нетривиальность введения унарных операций состоит в том, что при некоторых предельных переходах (например, при переходе от алгебр фон Неймана к алгебрам C^*) в соотношении (38) операторы U перестают существовать, в то время как операция τ остается.

В алгебраическом подходе (как и в обычной формулировке квантовой теории) операция умножения наблюдаемых инвариантна относительно действия группы $\tilde{\mathcal{P}}$. Из результатов работы [13] следует, что в квантовой теории можно вводить не только инвариантные, но и ковариантные операции умножения наблюдаемых. Открывающиеся здесь возможности пока совершенно не исследованы.

3. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

1. Из предыдущего параграфа следует, что в любой релятивистски-инвариантной теории важную роль играют линейные представления группы Пуанкаре, причем не только унитарные. Здесь мы изложим введенную Вигнером [14] и детально разработанную Макки (см., например, [15]) конструкцию, позволяющую перечислить и построить все известные неприводимые представления этой группы. Эта конструкция применима не только к группе $\mathcal{P}$, но и к любому полупрямому произведению типа (22), в котором нормальный делитель коммутативен, а неприводимые представления соответствующей фактор-группы и некоторых ее подгрупп известны [1].

Пусть мы имеем неприводимое представление $\mathcal{P}_\chi$ группы $\mathcal{P}$, осуществляемое линейными операторами $U(G)$, действующими в некотором топологическом пространстве $\mathcal{H}$. Представление не обязательно унитарно, так что соответствующее пространство

---

[1] Здесь и ниже мы будем исследовать как однозначные, так и двузначные представления группы $\mathcal{P}$, т. е. все представления группы $\tilde{\mathcal{P}}$.

не обязательно гильбертово. Представление $\mathcal{P}_X$ можно сузить на подгруппу т. е. рассматривать его как представление (вообще говоря, уже приводимое) группы T_4. Все неприводимые представления коммутативной группы T_4 известны. Они одномерны. Каждое из них характеризуется четверкой комплексных чисел p_α. Преобразованию

$$x^\alpha = x^{\alpha\prime} + a^\alpha \tag{39}$$

группы T_4 соответствует в представлении элемент $\exp(-\mathrm{i}p_\alpha x^\alpha)$. Для унитарных представлений все числа p_α действительны.

2. На группе T_4 можно естественным образом определить действие группы $\mathcal{L}$. Именно, каждому элементу $G(\Lambda) \in \mathcal{L}$ можно сопоставить преобразование

$$G(a) = G(\Delta)\, G(a')\, G^{-1}(\Lambda) \tag{40}$$

элемента $G(a) \in T_4$. В этом пункте мы существенно используем то, что группа $\mathcal{P}$ представляет собой полупрямое произведение (22). Воспользовавшись (5), (6), получим, что соотношение (40) выражает 4-векторный характер величины a^α

$$a^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a'^\beta. \tag{41}$$

Математически (40) есть гомоморфизм группы $\mathcal{L}$ в группу автоморфизмов группы T_4.

Гомоморфизм (40) порождает действие группы $\mathcal{L}$ на многообразии $\{p^\alpha\}$ неприводимых представлений группы T_4. Именно потребуем, чтобы под действием преобразования $G(\Lambda)$ элемент $\exp(-\mathrm{i}p_\alpha a^\alpha)$ представления группы T_4 сохранял свой вид

$$\exp(-\mathrm{i}p_\alpha a^\alpha) = \exp(-\mathrm{i}p'_\alpha a'^\alpha).$$

Тогда из (41) получим, что p^α тоже преобразуется как 4-вектор

$$p^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta p'^\beta. \tag{42}$$

Множество $[p^\alpha]$ всех 4-векторов $\Lambda^\alpha_\beta p^\beta$ при фиксированном p^α и всевозможных Λ называется орбитой элемента p^α. Для любых двух точек орбиты существует хотя бы одно преобразование Λ, переводящее одну точку в другую. Многообразие $\{p^\alpha\}$ все расслаивается на отдельные орбиты. Каждая точка многообразия принадлежит одной и только одной орбите.

3. Вернемся теперь к сужению неприводимого представления $\mathcal{P}_X$ группы $\mathcal{P}$ на подгруппу T_4. Ограничимся рассмотрением только таких представлений группы $\mathcal{P}$, которые вполне приводимы по отношению к T_4. В этом случае сужение $\mathcal{P}_X$ на T_4 является прямым интегралом одномерных представлений T_4. Из предыдущего следует, что если представление, характеризуемое 4-вектором p^α, принадлежит рассматриваемому неприводимому

представлению $\mathcal{P}_X$ группы $\mathcal{P}$, то и вся орбита этого 4-вектора принадлежит $\mathcal{P}_X$.

4. Для каждого фиксированного 4-вектора p_0^α существует подгруппа l (группы $\mathcal{L}$), по отношению к которой этот вектор стационарен. По определению в l входят те и только те элементы $\lambda \in \mathcal{L}$, для которых

$$p_{(0)}^{\alpha} = \lambda_{\beta}^{\alpha} p_{(0)}^{\beta}. \tag{43}$$

Малые группы всех 4-векторов p^α, лежащих на одной орбите, изоморфны друг другу. Малые группы элементов разных орбит могут быть как изоморфными, так и существенно различными.

Построим для каждой орбиты в некотором смысле тривиальное неприводимое представление группы $\mathcal{P}$. Это представление реализуется на пространстве функций $\Psi(p^\alpha)$ (для сокращения мы часто будем писать $\Psi(p)$), областью определения которых является заданная орбита. Преобразованию $G(\mathrm{I}, a^\alpha)$ в представлении соответствует

$$\Psi(p) = \exp(-\mathrm{i} p_\alpha a^\alpha)\,\Psi'(p), \tag{44}$$

а преобразованию $G(\Lambda, 0)$ соответствует оператор $U_0(\Lambda)$, определяемый соотношением

$$\Psi(p) = U_0 \Psi' = \Psi'(\Lambda^{-1} p). \tag{45}$$

То, что преобразования (44), (45) определяют представление, легко проверяется непосредственно. Формальную проверку неприводимости мы проведем ниже сразу для более широкого класса представлений.

Для полного задания представления необходимо указать класс функций, на которых оно определено. Этот класс функций должен быть стабильным по отношению к преобразованиям (44), (45).

Для соблюдения свойства б) из параграфа 2 п. 1 в пространстве $\{\Psi(p)\}$ функций $\Psi(p)$ необходимо задать топологию, причем такую, чтобы преобразования (44), (45) были непрерывны по отношению к параметрам группы: для элемента группы, близкого к единичному, преобразованная функция Ψ' должна быть близка к исходной. Сформулированные условия оказываются не слишком жесткими. Существуют различные топологические пространства, в которых эти условия соблюдаются. Для унитарных представлений таким пространством является гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Но это унитарное представление можно сузить на пространство S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций или, напротив, расширить на пространство S' обобщенных функций умеренного роста. Следуя принятой в физике традиции, мы не будем считать существенно различными представления, у которых операторы преобразований имеют одинаковую форму, но действуют в пространствах, различающихся классом функций и топологией в пространстве этих функций. Рассматриваемое представление названо тривиальным, поскольку из (43), (45) следует, что в нем для каждого фиксированного p_0^α тривиально действие соответствующей малой группы

$$\Psi(p_0^\alpha) = U(\lambda)\,\Psi(p_0^\alpha). \tag{46}$$

5. Выведем полезное вспомогательное соотношение, связывающее преобразование Лоренца для элементов орбиты с преобразованиями малой группы. Рассмотрим фиксированный 4-вектор $p_{(0)}^\alpha$, его малую группу l и орбиту $[p_{(0)}^\alpha]$. Каждой точке p^α орбиты сопоставим фиксированный элемент $\nu_\beta^\alpha(p_{(0)}, p)$ группы $\mathcal{L}$, такой, что

$$p_{(0)}^\alpha = \nu_\beta^\alpha(p_{(0)}, p)\,p^\beta. \tag{47}$$

Очевидно, что свойством (47) наряду с ν обладают все элементы типа $\lambda\nu$. Эта неоднозначность для нас несущественна. Заметим, что множество $\{\nu\}$ элементов ν не образует группы из-за того, что подгруппа l не является нормальным делителем группы $\mathcal{L}$.

Произвольный элемент Λ группы l преобразует каждый вектор орбиты $p \in [p_{(0)}]$ в вектор p' той же орбиты

$$p = \Lambda p'. \tag{48}$$

С другой стороны, согласно (47)

$$p = \nu^{-1}(p_{(0)}, p)\,\nu(p_{(0)}, p')\,p' \equiv \nu^{-1}\nu' p'. \tag{49}$$

Отсюда

$$\nu\Lambda(\nu')^{-1}p_{(0)} = p_{(0)},$$

так что

$$\nu\Lambda(\nu')^{-1} = \lambda. \tag{50}$$

Конкретный вид преобразования λ группы l в (50) зависит от векторов p, p'.

6. Исследуем теперь неприводимое представление общего вида группы $\mathcal{P}$. Если сужение этого представления на группу T_4 содержит представление $p_{(0)}^\alpha$, то оно содержит и всю орбиту $[p_{(0)}^\alpha]$. Поэтому и в общем случае неприводимое представление также может быть реализовано на функциях $\Psi(p)$, где множество $[p]$ составляет орбиту, но значениями этих функций будут уже, вообще говоря, не числа, а векторы в некотором линейном пространстве. Другими словами, неприводимое представление будет реализовано на функциях $\Psi(p, m)$, где m — совокупность дополнительных (непрерывных или дискретных) переменных, которые мы будем называть спиновыми. Для того, чтобы приблизиться

к дираковским символам, введем переобозначение:

$$\Psi(p^\alpha, m) \equiv \langle p^\alpha, m \mid \Psi \rangle. \tag{51}$$

По смыслу переменных p^α преобразования трансляций и в общем случае должны сохранить форму (44)

$$\langle p, m \mid \Psi \rangle = \exp(-\mathrm{i}pa\langle p, m \mid \Psi' \rangle. \tag{52}$$

Далее, при фиксированном $p^\alpha = p^\alpha_{(0)}$ преобразования малой группы согласно (43) останутся диагональными по $p^\alpha_{(0)}$, но по переменной m будут осуществлять некоторое нетривиальное представление элементов λ группы l операторами $\langle m \mid U(\lambda) \mid m' \rangle$

$$\langle p_{(0)}, m \mid \Psi \rangle = \langle m \mid U(\lambda) \mid m' \rangle \langle p_{(0)}, m' \mid \Psi' \rangle. \tag{53}$$

Получим теперь для $\langle p_{(0)}, m \mid \Psi \rangle$ преобразование $U(\nu)$. Это преобразование должно осуществлять поворот (47) вектора $p_{(0)}$ и может как-то действовать на спиновые переменные

$$\langle p_{(0)}, m \mid \Psi \rangle = \langle p_{(0)} \mid U_0(\nu) \mid p \rangle \langle m \mid U_1(p_{(0)}, p) \mid m' \rangle \langle p, m' \mid \Psi' \rangle. \tag{54}$$

Здесь оператор U_0 тот же, что и в (45). Умножением всех функций Ψ на U_1 всегда можно устранить U_1 из (54), не изменив преобразований (52). Поэтому, не ограничивая общности, положим в (54) $U_1 = \mathrm{I}$:

$$\langle p, m \mid \Psi \rangle = \langle p_{(0)} \mid U_0(\nu) \mid p \rangle \langle p, m \mid \Psi' \rangle, \tag{55}$$

где, как и в (45)

$$\langle p, m \mid \Psi \rangle = \langle \nu^{-1} p, m \mid \Psi \rangle = \langle p_{(0)}, m \mid \Psi \rangle. \tag{56}$$

Теперь построим оператор $U(\Lambda)$ произвольного преобразования Лоренца для функции $\langle p, m \mid \Psi \rangle$, воспользовавшись тем, что, согласно (50), преобразование Λ можно представить в виде произведения трех сомножителей:

$$\Lambda = \nu^{-1}(p_{(0)}, p)\,\lambda(p, p')\,\nu(p_{(0)}, p'), \tag{57}$$

где для каждого сомножителя соответствующий оператор U известен. Комбинируя (53), (55) и (57), получим для преобразования вектора состояния $\langle p, m \mid \Psi \rangle$ оператором $U(\Lambda)$ окончательное выражение:

$$\langle p, m \mid \Psi \rangle = \langle p \mid U_0(\Lambda) \mid p' \rangle \langle m \mid \lambda(p, p') \mid m' \rangle \times$$
$$\times \langle p', m' \mid \Psi' \rangle = \langle m \mid \lambda(p, \Lambda^{-1}p) \mid m' \rangle \langle \Lambda^{-1}p, m' \mid \Psi' \rangle. \tag{58}$$

Тривиальные представления (44) — (46) являются частным случаем только что полученных представлений общего вида. В этом частном случае тривиально неприводимое представление малой группы.

7. Резюмируя, можно сказать, что метод Вигнера — Макки перечисления и построения неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$ состоит в следующем. Выбирается 4-вектор $p^{\alpha}_{(0)}$, компоненты которого — комплексные (в частном случае действительные) числа. Строится многообразие $[p^{\alpha}_{(0)}]$, образующее орбиту этого 4-вектора. Вводится линейное топологическое пространство $\{\Psi(p^{\alpha})\}$ функций некоторого класса на орбите $[p^{\alpha}_{(0)}]$. Далее ищется малая группа l 4-вектора $p^{\alpha}_{(0)}$ и строится система неприводимых представлений этой группы. Каждой паре $[p^{\alpha}_{(0)}]$, l^{X}, где l^{X} — неприводимое представление малой группы орбиты $[p^{\alpha}_{(0)}]$, соответствует одно неприводимое представление групы $\mathcal{P}$. Это представление реализуется операторами, действующими в пространстве $\{\Psi(p^{\alpha})\} \otimes \{\langle m \mid \Phi\rangle\}$, где $\{\langle m \mid \Phi\rangle\}$ — пространство, в котором действует неприводимое представление l^{X}. Операциям трансляций и 4-вращений соответствуют преобразования (52), (58).

Не вдаваясь в математические тонкости, поясним неприводимость полученных представлений. Согласно одному из определений неприводимости (см. [16], гл. III, § 3), представление неприводимо, если любой замкнутый оператор, коммутирующий со всеми операторами представления, кратен единичному оператору. Рассмотрим оператор $\hat{B}$, действующий на функции $\langle p, m \mid \Psi\rangle$ и обладающий только что отмеченным свойством коммутативности. Из перестановочности $\hat{B}$ с трансляциями следует, что в отношении переменных p^{α} действие этого оператора сводится к умножению на некоторую функцию от p^{α}. Из свойств коммутативности с элементами малой группы следует, что при $p^{\alpha} = p^{\alpha}_{(0)}$ действие оператора $\hat{B}(p^{\alpha}_{(0)})$ на спиновые переменные сводится к умножению на число. Далее под действием преобразования Лоренца $\nu^{\alpha}_{\beta}(p^{\alpha}_{(0)}, p)$ из (47) оператор $\hat{B}(p_{(0)})$ должен не измениться по свойству коммутативности и перейти в $\hat{B}(p)$ согласно (56)

$$U^{-1}(\nu)\hat{B}(p_{(0)})U(\nu) = \hat{B}(p_{(0)}) = \hat{B}(\nu^{-1}p_{(0)}) = \hat{B}(p).$$

Поэтому оператор $\hat{B}(p)$ единичен по спиновым переменным при всех p, а по переменным p^{α} является оператором умножения на инвариантную функцию от величин p^{α}. Но все такие функции постоянны на орбите и поэтому являются числами, характеризующими рассматриваемое представление. Таким образом, оператор $\hat{B}$ кратен единичному.

8. Обсудим теперь вопрос о полноте полученной системы неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$. Прежде всего степень полноты зависит от степени полноты множеств неприводимых представлений всех малых групп. Как мы увидим дальше, для всех мыслимых малых групп найдены все неприводимые пред

ставления, так что в этом отношении полнота рассмотрения не ограничена. Другим ограничивающим моментом является допущение о разложимости неприводимого представления группы $\mathcal{P}$ в прямой интеграл представлений группы T_4. Для унитарных представлений справедливость этого допущения доказывается. Для неунитарных представлений аналогичного доказательства нет. Поэтому не исключено, например, что существуют такие неприводимые представления группы $\mathcal{P}$, сужения которых на T_4 не вполне приводимы. Существование таких представлений вполне вероятно, поскольку группа T_4 имеет обширную систему не вполне приводимых представлений, простейшее из которых осуществляется 2×2-матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & a^{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ситуация осложняется еще и тем, что для неунитарных бесконечномерных представлений может вызвать осложнения даже корректная постановка задачи о разложении представления на неприводимые.

Наконец, третий источник возможного расширения системы неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$ связан с тем, что существуют различные определения неприводимости представления, эквивалентные в случае конечномерных представлений, но неэквивалентные в случае бесконечномерных представлений. Различные определения неприводимости перечислены и обсуждены в [16] (гл. III, § 3), где, например, указано, что при выполнении критерия неприводимости использованного нами в п. 6, пространство представления может обладать инвариантным подпространством.

С точностью до перечисленных в этом пункте ограничений конструкция (52), (58) дает возможность получения полной системы неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

1. В конструкции Вигнера — Макки классификация неприводимых представлений сводится к классификации орбит на многообразии $\{p^{\alpha}\}$, установлению типов малых групп для различных орбит $[p^{\alpha}_{(0)}]$ и нахождению неприводимых представлений малых групп.

Начнем с общей классификации орбит. Каждая орбита однозначно определяется одним из любых ее элементов. В общем случае 4-вектор p_{α} является комплексным и может быть записан в форме

$$p_{\alpha} = q_{\alpha} - \mathrm{i} r_{\alpha}, \tag{59}$$

где q_α, r_α — действительные 4-векторы. Орбита вырезает из восьмимерного действительного многообразия 4-векторов q_α, r_α некоторое подмногообразие меньшей размерности.

2. Покажем, что размерности орбит могут равняться только пяти, трем и нулю и что эти орбиты имеют соответственно одно-, трех- и шестипараметрические малые группы.

В невырожденном случае общего положения векторы q_α, r_α оба не равны нулю и не параллельны:

$$q_\alpha r_\beta - q_\beta r_\alpha \neq 0. \tag{60}$$

Такая пара векторов определяет двумерную плоскость в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. При преобразованиях группы Лоренца эта плоскость меняет ориентацию, но взаимное расположение векторов q и r на плоскости остается неизменным. Поэтому размерность орбиты здесь равна числу вращательных степеней свободной плоскости, т. е. пяти. Действительно, при преобразованиях группы $\mathscr{L}$ 4-вектор q_α пробегает трехмерное многообразие, а 4-вектор r_α при фиксированном q_α пробегает двумерное многообразие.

Элементами малой группы по определению являются те и только те преобразования группы Лоренца, которые не изменяют вектор p_α. В невырожденном случае (60) группа l — однопараметрическая и состоит из всех поворотов в двумерной плоскости, полностью ортогональной плоскости векторов q, r (напомним, что в четырехмерном пространстве двумерные плоскости полностью ортогональны, если каждая прямая одной плоскости перпендикулярна каждой прямой другой плоскости).

Вырожденным случаем расположения векторов q_α, r_α будет их параллельность:

$$q_\alpha r_\beta - q_\beta r_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \sum_\alpha |q_\alpha|^2 + \sum_\alpha |r_\alpha|^2 > 0. \tag{61}$$

Заметим, что условиями (61) допускается равенство одного (но не обоих) вектора нулю, что следует считать частным случаем параллельности. Теперь пара q_α, r_α фактически сводится к одному вектору, который определяет в четырехмерном пространстве прямую. Ориентация этой прямой определяется тремя параметрами (например, четырехмерными полярными углами), так что орбита представляет собой трехмерное многообразие. Малая группа такой орбиты — трехпараметрическая подгруппа группы $\mathscr{L}$, состоящая из преобразований, не меняющих одного направления в четырехмерном пространстве.

Наконец, крайним вырожденным случаем является тождественное равенство нулю всего 4-вектора p_α:

$$p_\alpha = 0. \tag{62}$$

В этом случае орбита сводится к одной точке, а малая группа совпадает со всей группой $\mathscr{L}$.

Интересно, что в приведенной классификации отсутствуют двухпараметрические и четырехпараметрические малые группы, хотя подгруппы таких типов у группы $\mathscr{L}$ существуют.

3. Дадим теперь полную классификацию неприводимых представлений, соответствующих невырожденным орбитам, т. е. выполнению условия (60).

Прежде всего нам надо провести в восьмимерном пространстве q_α, r_α «разделение переменных», отражающее расслоение на орбиты. Именно, из этих 8 переменных надо выделить 3 инварианта, которые для заданной орбиты постоянны и тем самым для неприводимого представления являются характеризующими это представление числами. За эти три инварианта естественно выбрать q^2, r^2 и $(rq)^2 - q^2r^2$. Оставшиеся пять переменных (которые мы здесь не конкретизуем) будут описывать точки орбиты.

Для фиксированной орбиты каждый из инвариантов может быть положительным, отрицательным и равным нулю. При этом не все мыслимые комбинации знаков инвариантов оказываются возможными.

Тип малой группы определяется только знаком инварианта $(rq)^2 - r^2q^2$.

Если

$$(rq)^2 - r^2q^2 = \delta^2 > 0, \tag{63}$$

то плоскость векторов q^α, r^α времениподобна, т. е. сводится преобразованиями группы $\mathscr{L}$ к плоскости x^0, x^3. Соответственно, малая группа является одномерной группой вращений $U(1)$ (например, вращений в плоскости x^1, x^2). При этом мы должны рассматривать как однозначные, так и двузначные представления малой группы. Неприводимые представления группы $U(1)$ все одномерны и унитарны. Каждое из них характеризуется числом j, пробегающим все целые и полуцелые значения

$$j = 0, \ \pm\frac{1}{2}, \ \pm 1, \ \pm\frac{3}{2}, \ \ldots \tag{64}$$

Для орбит типа (63) каждый из 4-векторов q_α, r_α может быть времениподобным, пространственноподобным или лежащим на световом конусе. Кроме того, при заданных значениях q^2, r^2 и δ^2 существуют четыре различных орбиты, различающиеся значениями знаковых инвариантов, таких как $\operatorname{Sgn} q_0$ при $q^2 > 0$. Введем такие унифицированные обозначения для неприводимых представлений группы $\mathscr{P}$. Каждое представление будем обозначать буквой $\mathscr{P}$ с верхними и нижними индексами. Нижние индексы будут характеризовать орбиту, верхние — неприводимое представление малой группы. Кроме того, обозначим

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= \varkappa^2 \text{ при } q^2 > 0; \\ q^2 &= -\Pi^2 \text{ при } q^2 < 0; \\ r^2 &= \frac{1}{4}\gamma^2 \text{ при } r^2 > 0; \\ r^2 &= -\frac{1}{4}\Xi^2 \text{ при } r^2 < 0. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Различные неприводимые представления, имеющие орбиты, удовлетворяющие (63), таковы: $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa,\,\pm\gamma,\,\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa,\,\pm 0,\,\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\pm 0,\,\pm\gamma,\,\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\pm 0,\,\pm 0,\,\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa,\,\Xi,\,\pm\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\pm 0,\,\Xi,\,\pm\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\Pi,\,\pm\gamma\pm\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\Pi,\,\pm 0,\,\pm\delta}$; $\mathscr{P}^j_{\Pi,\,\Xi,\,\pm\delta,\,\pm}$. Здесь верхний индекс всюду характеризует представление малой группы, а нижние — значение инвариантов q^2, r^2, $(rq)^2 - r^2q^2$. Знак перед первым (вторым, третьим) нижним индексом указывает знак q_0, (r_0, rq). Знак, стоящий после всех нижних индексов в представлении $\mathscr{P}^j_{\Pi,\,\Xi,\,\pm\delta,\,\pm}$, относится к знаку четвертой компоненты вектора $r_\alpha - q_\alpha\,(rq)/q^2$, который для рассматриваемых представлений времениподобен.

Менее разветвленной является система орбит, подчиненных условию

$$(rq)^2 - r^2q^2 = 0; \quad r_\alpha q_\beta \neq 0, \tag{66}$$

означающему, что плоскость векторов q^α, r^α касательна к световому конусу. У такой плоскости одно направление ориентировано вдоль конуса, а остальные — пространственноподобны. Преобразованиями Лоренца такая плоскость совмещается с $x^0 + x^3$, x^1. Малая группа сводится к подгруппе преобразований группы $\mathscr{L}$ в плоскости $x^0 + x^3$, x^2, также касательной к конусу. Группа l здесь изоморфна одномерной группе трансляций T_1. Преобразования этой группы являются пограничными между лоренцовыми бустами и трехмерными поворотами, поскольку подходящим преобразованием эквивалентности $\Lambda \overline{\overline{N}}^{\alpha\beta} \Lambda^{-1}$ генераторы трехмерных поворотов и лоренцовых бустов сводятся соответственно к N^{13} и N^{30}, а генератор преобразований группы l сводится к $N^{13} + N^{30}$. Преобразования этой группы можно назвать «винтовыми бустами». Неприводимые представления малой группы одномерны. Каждое из них характеризуется комплексным числом, которое мы обозначим σ. Каждому значению σ на комплексной плоскости соответствует одно представление. Различных типов орбит здесь меньше, чем в случае (63), потому что теперь ни один из 4-векторов q, r не может быть времениподобным. Наконец, следует учесть, что фиксированным орбите и представлению малой группы соответствуют два неприводимых представления группы $\mathscr{P}$ — одно однозначное и одно двузначное. Список неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$ для орбит (66) таков: $\mathcal{P}^{\sigma}_{\pm 0, \Xi, 0}$, $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\pm 0, \Xi, 0}$, $\mathcal{P}^{\sigma}_{\Pi, \pm 0, 0}$, $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\Pi, \pm 0, 0}$, $\mathcal{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$, $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$. Штрихами отмечены двузначные представления. Остальные обозначения те же, что и выше. Единственным исключением является знак, стоящий после всех индексов в представлениях $\mathcal{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$, $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$. Смысл этого знака здесь следующий. Если выбрать координатные оси так, чтобы векторы q^{α}, r^{α} лежали в плоскости $x^0 + x^3$, x^2, причем так, чтобы вектор q^{α} был направлен вдоль x^2, то при заданных Π^2, Ξ^2 и знаке pq компонента вдоль $x^0 + x^3$ вектора r^{α} оказывается определенной только по абсолютной величине. Знак этой компоненты и отмечен в конце обозначений $\mathcal{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$, $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$.

Еще беднее система орбит, векторы которых удовлетворяют условию

$$(rq)^2 - r^2q^2 = -\Delta^2 < 0. \tag{67}$$

Для таких орбит плоскость векторов r^{α}, q^{α} пространственно подобна и может быть совмещена преобразованиями группы $\mathcal{L}$ с плоскостью x^1, x^2. Малая группа сводится к лоренцовым бустам в плоскости x^3, x^0. Эта группа также изоморфна T_1 и, следовательно, имеет только одномерные неприводимые представления. Каждое представление мы и здесь будем характеризовать комплексным числом σ.

Векторы q_{α} и r_{α} при выполнении (67) могут быть только пространственно подобными. Единственным знаковым инвариантом является знак величины qr. Соответствующий список неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$ исчерпывается однозначными представлениями $\mathcal{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm\Delta}$ и двузначными представлениями $\mathcal{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm\Delta}$.

Подчеркнем, что все перечисленные в этом пункте неприводимые представления группы $\mathcal{P}$ неунитарны из-за неунитарности операторов трансляций.

Однопараметрические малые группы для группы $\mathcal{P}$ были обнаружены и проклассифицированы Бельтраметти и Лузатто в [17], где, однако, не была проведена детальная классификация орбит. В явной форме неприводимые представления для орбит (63), (67) получены и детально проанализированы Бертран и Ридо в [18].

4. Перейдем к более привычному случаю (61) параллельных 4-векторов q_{α} и r_{α}. Условия (61) будут выполнены автоматически, если положить

$$p_{\alpha} = \exp (i\eta)\, k_{\alpha}, \tag{68}$$

где η — действительное число $\pi/2 \geqslant \eta > -\pi/2$, k_{α} — вектор с действительными компонентами. Инвариант η является одной из характеристик неприводимого представления группы (для представлений рассматриваемого в этом пункте типа). Но η не является характеристикой орбиты. Тем самым, конечно, и тип малой группы не зависит от η. Инвариантом, характеризующим орбиту, является k_α^2. Трехмерное многообразие орбиты является (в четырехмерном пространстве векторов k_α) полостью двуполостного гиперболоида при $k^2 > 0$, полой конуса при $k^2 = 0$ и однополостным гиперболоидом при $k^2 < 0$. При $k^2 \geqslant 0$ дополнительным инвариантом будет знак $\operatorname{Sgn} k_0$ компоненты k_0.

Тип малой группы определяется знаком инварианта k^2. Если

$$k^2 > 0, \tag{69}$$

то 4-вектор p^α можно преобразованиями группы $\mathscr{L}$ совместить с осью x^0. Соответствующая малая группа изоморфна группе трехмерных евклидовых вращений и локально изоморфна группе $SU(2)$. Неприводимые представления этой группы общеизвестны. Все они унитарны и конечномерны. Каждое представление характеризуется одним инвариантом j, пробегающим все целые и полуцелые неотрицательные числа: $j = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ \ldots$ Размерность каждого представления равна $2j + 1$.

Орбиты, подчиненные условиям (68), (69), характеризуются значениями двух инвариантов η и k^2, а также знаком компоненты k_0. Инварианты η и k^2 просто выражаются через введенные в невырожденном случае инварианты q^2, r^2:

$$q^2 = k^2 \cos^2 \eta, \quad r^2 = k^2 \sin^2 \eta. \tag{70}$$

Поэтому для представлений в вырожденном случае (68) можно использовать обозначения, сходные с введенными для невырожденного случая, но в вырожденном случае не выписывать третий нижний индекс. Тогда неприводимые представления группы $\mathscr{P}$ с орбитами, удовлетворяющими (69), сведутся к $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa,\,\pm\gamma}$. При $\gamma = 0$ представления унитарны и будут обозначаться $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa}$.

В случае

$$k^2 = 0, \quad k^\alpha \neq 0 \tag{71}$$

4-вектор p^α лежит на световом конусе. Преобразованиями координат вектор p^α можно ориентировать так, чтобы его компоненты приняли значения $p^1 = p^2 = 0$, $p^3 = p^0$. Соответствующая малая группа, как известно, изоморфна группе $U(1) \otimes T_2$ двумерных евклидовых движений. Эту группу можно получить, например, так. Проведем преобразование координат

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) = x^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) = x^-, \quad x^1 = x^1, \quad x^2 = x^2. \tag{72}$$

Тогда метрический тензор превратится в

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицы Λ^{α}_{β}, не меняющие вектор с компонентами $p^{+} \neq 0$, $p^{-} = p^{1} = p^{2} = 0$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \Lambda^{+}_{b} & \Lambda^{+}_{-} \\ 0 & \Lambda^{a}_{b} & \Lambda^{a}_{-} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

где a, $b = 1$, 2; $\sum\limits_{a,\, c=1,\, 2} \Lambda^{a}_{b}\Lambda^{c}_{d}g_{ac} = g_{bd}$, $\sum\limits_{a,\, c} \Lambda^{a}_{b}\Lambda^{c}_{-}g_{ac} = -\Lambda^{+}_{c}$, $\sum\limits_{ab} \Lambda^{a}_{-}\Lambda^{b}_{-}g_{ab} = -2\Lambda^{+}_{-}$. Легко проверить, что матрицы (73) образуют трехпараметрическую группу, изоморфную группе умножения трехмерных матриц

$$\begin{pmatrix} \Lambda^{a}_{b} & \Lambda^{a}_{-} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и тем самым группе движений

$$y^{a} = \Lambda^{a}_{b}y'^{b} + \Lambda^{a}_{-} \equiv \Lambda^{a}_{b}y'^{b} + z^{a}. \tag{74}$$

Роль трансляций в этой группе играют винтовые бусты. Поскольку малая группа в рассматриваемом случае сама полупростая, то для нахождения ее неприводимых представлений можно, в свою очередь, использовать конструкцию Вигнера — Макки. Из-за малости размерности пространства, в котором осуществляется группа движений, система неприводимых представлений здесь не очень громоздка.

Одномерные неприводимые представления группы T_2 нумеруются двумерными комплексными векторами π_a (напомним, что метрический тензор здесь равен $g_{ab} = -\delta_{ab}$). Смещению $y^{a} = y'^{a} + z^{a}$ в представлении соответствует элемент $\exp(i\pi_a z^a)$. В невырожденном случае

$$\pi^{a} \neq 0 \tag{75}$$

пространство орбиты $[\pi^a]$ одномерно. Малая группа орбиты тривиальна (т. е. сводится к единичному элементу). Поэтому каждой невырожденной орбите соответствует единственное неприводимое представление, названное в параграфе 3 тривиальным. Это представление реализуется в пространстве функций (надлежащим образом выбранного класса) $\Phi(\pi_a) \equiv \langle \pi_a \mid \Phi \rangle$, у которых носитель сосредоточен на орбите. Операции трансляций и поворотов имеют соответственно вид [ср. (44), (45)]

$$\Phi(\pi_a) = \exp(\mathrm{i}\pi_a z^a)\,\Phi'(\pi_a), \tag{76}$$

$$\Phi(\pi^a) = \Phi'\{(\Lambda^{-1})^a_b\,\pi^b\}. \tag{77}$$

Переменные π_a для заданной орбиты сводятся к полярному углу φ, меняющемуся в пределах $4\pi \geqslant \varphi \geqslant 0$. На функции $\Phi(\varphi)$ налагается условие периодичности $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 4\pi)$ для двузначных представлений и $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ — для однозначных. Таким образом, каждой орбите соответствуют два неприводимых представления группы $\mathscr{P}$ — одно двузначное и одно однозначное. Каждая неэквивалентная орбита характеризуется значениями трех инвариантов: Q^2, R^2 и QR, где

$$\pi_a = Q_a + \mathrm{i}R_a, \tag{78}$$

Q_a, R_a — действительные 2-векторы.

Неприводимые представления группы $U(1) \otimes T_2$ теперь можно классифицировать тремя действительными числами Q, R и ζ, где $Q \geqslant 0$, $R \geqslant 0$, $Q^2 + R^2 > 0$, $\pi > \zeta \geqslant -\pi$,

$$Q_1 = Q\cos\varphi, \quad Q_2 = Q\sin\varphi, \quad R_1 = R\cos(\varphi + \zeta),$$
$$R_2 = R\sin(\varphi + \zeta). \tag{79}$$

При $R = 0$ представления унитарны и не зависят от ζ. Для получения системы неприводимых представлений группы $\mathscr{P}$ осталось получить классификацию орбит, удовлетворяющих условию (71). Каждая такая орбита характеризуется инвариантом η и инвариантным знаком $\operatorname{Sgn} k_0$ компоненты k_0.

Записывая, как и в предыдущих случаях, верхними индексами характеристики неприводимого представления малой группы, а нижними характеристики соответствующей орбиты, две системы неприводимых представлений группы $\mathscr{P}$, удовлетворяющих (71), можно обозначить $\mathscr{P}^{Q,\,R,\,\zeta}_{\pm 0,\,\eta}$ и $\mathscr{P}'^{Q,\,R,\,\zeta}_{\pm 0,\,\eta}$. Здесь нештрихованные представления однозначны, штрихованные — двузначны относительно $\mathscr{P}$. Представления унитарны при $R = \zeta = \eta = 0$. Будем их обозначать $\mathscr{P}^{Q}_{\pm 0}$, $\mathscr{P}'^{Q}_{\pm 0}$.

Кроме только что указанных группа двумерных движений имеет еще неприводимые представления, соответствующие крайнему вырожденному случаю

$$\pi_a = 0. \tag{80}$$

При этом орбита 2-вектора π_a сводится к одной точке, а соответствующая малая группа локально изоморфна одномерной группе вращений. Все неприводимые представления этой группы одномерны. Каждое характеризуется числом $\pm j$, где $j = 0$, $1/2$, 1, 3/2, . . . Соответствующие неприводимые представления группы $\mathcal{P}$ обозначим $\mathcal{P}^{\pm j}_{\pm 0, \eta}$. Эти представления при $\eta = 0$ унитарны; будем их обозначать $\mathcal{P}^{\pm j}_{\pm 0}$.

При

$$k^2 < 0 \tag{81}$$

4-вектор p^α преобразованиями группы $\mathcal{L}$ можно направить вдоль одной из пространственных осей, например, x^3. Малая группа такого вектора изоморфна трехмерной группе Лоренца $O\,(2, 1)$ и локально изоморфна действительной спинорной группе $SL\,(2, R)$, образуемой двурядными действительными унимодулярными матрицами. Группа $SL\,(2R)$ некомпактна, так что ее унитарные неприводимые представления бесконечномерны. Среди неунитарных представлений есть и конечномерные, получающиеся из представлений группы $SU\,(2)$ унитарным приемом Вейля.

Унитарные неприводимые представления группы $SL\,(2, R)$ были получены Баргманом в 1947 году [19]. Неунитарные неприводимые представления были получены автором в 1957 г. [20]. Приведем эти представления в форме, в которой они были получены в 1962 г. в [16] (гл. VII).

Неприводимые представления группы $SL\,(2, R)$ можно разбить на пять классов, которые обозначим (ξ), (ξ'), (j), $(+j)$, $(-j)$. Представления (ξ), (ξ') можно реализовать в пространстве функций $\Phi\,(x) \equiv \langle x \mid \Phi \rangle$, где $\infty > x > -\infty$, удовлетворяющих таким условиям: а) функции $\Phi\,(x)$ бесконечно дифференцируемы; б) бесконечно дифференцируемы также функции $|\,x\,|^{2\xi}\,\Phi\,(-1/x)$ для представлений (ξ) и $|\,x\,|^{2\xi}\,\mathrm{Sgn}\,x\,\Phi\,(-1/x)$ для представлений (ξ'). Каждому комплексному значению ξ можно сопоставить два представления (ξ) и (ξ') группы $SL\,(2, R)$, одно из которых однозначно (по отношению к $O\,(2, 1)$), а другое — двузначно. Однозначные представления неприводимы лишь при $\xi \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и двузначные — лишь при $\xi \neq \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ В остальных точках представления (ξ), (ξ') эквивалентны соответственно $\left(\frac{1}{2} - \xi\right)$ и $\left(\frac{1}{2} - \xi'\right)$. Поэтому можно считать, что пространство допустимых значений (ξ) ограничено полуплоскостью

$$\mathrm{Re}\,\xi \geqslant -1/2 \text{ при } \mathrm{Im}\,\xi > 0 \text{ и } \mathrm{Re}\,\xi > -1/2 \text{ при } \mathrm{Im}\,\xi < 0 \tag{82}$$

с выколотыми точками 0, 1, 2 . . . для неприводимых представлений (ξ) и с выколотыми точками $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ для неприводимых представлений (ξ'). Простейшая реализация группы $SL\,(2, R)$ осуществляется действительными унимодулярными двурядными матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{83}$$

где $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Каждой такой матрице в представлениях (ξ), (ξ') соответствует преобразование

$$\Phi(x) = |-\gamma x + \alpha|^{2\xi} \operatorname{Sgn}^{\varepsilon}(-\gamma x + \alpha)\, \Phi'((\delta x - \beta)/(-\gamma x + \alpha)), \tag{84}$$

где $\varepsilon = 0$ для однозначных представлений (ξ) и $\varepsilon = 1$ — для двузначных представлений (ξ'). Представления (ξ) унитарны, когда величина $\xi(\xi + 1)$ действительна и отрицательна:

$$\xi(\xi + 1) < 0. \tag{85}$$

Представления (ξ') унитарны при действительности $\xi(\xi + 1)$ и выполнении неравенства

$$\xi(\xi + 1) < -1/4. \tag{86}$$

Строго говоря, представления, реализованные в пространстве бесконечно дифференцируемых функций, не унитарны ни при каких ξ. Однако при соблюдении одного из условий (85), (86) в этом пространстве можно ввести инвариантное скалярное произведение. Пополнив пространство по этому скалярному произведению, получим унитарное представление в гильбертовом пространстве.

Перейдем теперь к перечисленным выше исключительным значениям ξ, названным в [16] целыми точками. Чтобы выделить эти точки, введем в них (и только в них) переобозначение $\xi = j$, где $j = -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$

Прежде всего укажем, что каждой целой точке, кроме точки $j = -1/2$, соответствует конечномерное представление (j) в пространстве размерности $2j + 1$. Это представление можно реализовать в пространстве полиномов $\Phi(x)$ степени $\leqslant 2j$. В такой реализации элементу (83) группы $SL(2, R)$ соответствует преобразование, имеющее тот же вид, что и (84):

$$\Phi(x) = (-\gamma x + \alpha)^{2j} \Phi'((\delta x - \beta)/(-\gamma x + \alpha)). \tag{87}$$

Легко проверить, что пространство полиномов указанных выше степеней инвариантно относительно преобразований (87).

Неприводимые представления в целых точках не исчерпываются конечномерными. Каждой целой точке (включая $j = -1/2$) соответствуют еще два неэквивалентных друг другу неприводимых представления ($+j$) и ($-j$). Они реализуются в пространствах функций $\Phi(x)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям а), б), а также условию в): функции $\Phi(x)$ граничны к функциям, аналитичным в верхней полуплоскости для представлений $(+j)$ и в нижней полуплоскости для представлений $(-j)$. Иначе говоря, фурье-образы

$$\widetilde{\Phi}(\omega) = \int dx \exp(-\mathrm{i}\omega x)\, \Phi(x) \tag{88}$$

имеют носитель, сосредоточенный на положительной полуоси для представлений $(+j)$ и на отрицательной полуоси — для представлений $(-j)$. Преобразования, соответствующие элементу (83), для обоих неприводимых представлений $(+j)$ и $(-j)$ имеют одинаковую форму:

$$\Phi(x) = (-\gamma x + \alpha)^{-2(j+1)} \Phi'(\delta x - \beta)/(-\gamma x + \alpha). \tag{89}$$

Для представлений $(\pm j)$ также можно ввести инвариантное скалярное произведение. Пополнение соответствующих пространств по этому скалярному произведению превращает представления в унитарные.

Орбиты, подчиненные условиям (68), (81), характеризуются значениями инвариантов η и k^2. Воспользовавшись соотношениями (65), (70), эти инварианты можно выразить через Π, Ξ. Каждой паре неотрицательных значений Π, Ξ соответствуют две орбиты, различающиеся знаком η. Комбинируя различные представления малой группы с различными орбитами, получим полную систему неприводимых представлений группы $\mathcal{P}$ с орбитами, удовлетворяющими условиям (68), (81). В эту систему входят представления $\mathcal{P}^{\xi}_{\Pi, \pm\Xi}$, $\mathcal{P}'^{\xi}_{\Pi, \pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{\Pi, \pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{j}_{\Pi, \pm\Xi}$. Знак перед Ξ всюду указывает знак η, т. е. отмечает, параллельны или антипараллельны векторы q_α, r_α. Представления унитарны (при соответствующем выборе пространства спиновых переменных), когда $\Xi = 0$ и унитарно представление малой группы. Эти унитарные представления обозначим $\mathcal{P}^{\xi}_{\Pi}$, $\mathcal{P}'^{\xi}_{\Pi}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{\Pi}$.

Классификация унитарных представлений с орбитами (69) и (71) получена Вигнером [14]. Полученная Баргманом [19] полная система унитарных неприводимых представлений группы $SL(2, R)$ позволила получить классификацию унитарных представлений с орбитами (81). В работах автора [20—22] перечислены и построены в явной форме унитарные и неунитарные неприводимые представления группы $\mathcal{P}$ для рассматриваемого в этом пункте случая (68) при ограничениях $\eta = 0$ в (68) и $R = 0$ в (78). Обобщение на случай $\eta \neq 0$ проведено Цванцигером [23]. Случай $R \neq 0$ в (78), видимо, нигде не отмечался.

5. Для полноты рассмотрения надо отметить случай (62) вырождения орбиты 4-вектора в точку. В этом случае система неприводимых представлений группы $\widetilde{\mathcal{P}}$ совпадает с системой неприводимых представлений группы $\widetilde{\mathcal{L}} = SL(2, C)$. Для каж-

Сведем все перечисленные неприводимые представления группы $\mathscr{P}$ в таблицу с указанием основных характеристик этих представлений

Представления	Размерность орбиты	Малая группа	Число параметров малой группы	Размерность представлений малой группы	Унитарность
$\mathscr{P}^{j}_{\pm\varkappa, \pm\gamma, \delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\pm\varkappa, \pm 0, \delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\pm 0, \pm\gamma, \delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\pm 0, \pm 0, \delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\pm\varkappa, \Xi, \pm\delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\pm 0, \Xi, \pm\delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\Pi, \pm\gamma, \pm\delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\Pi, \pm 0, \pm\delta}$, $\mathscr{P}^{j}_{\Pi, \Xi, \pm\delta, \pm}$	5	$U(1)$	1	1	Неунитарны
$\mathscr{P}^{\sigma}_{\pm 0, \Xi, 0}$, $\mathscr{P}'^{\sigma}_{\pm 0, \Xi, 0}$, $\mathscr{P}^{\sigma}_{\Pi, \pm 0, 0}$, $\mathscr{P}'^{\sigma}_{\Pi, \pm 0, 0}$, $\mathscr{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$, $\mathscr{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm 0, \pm}$		Группа винтовых бустов изоморфн. T_1			
$\mathscr{P}^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm\Delta}$, $\mathscr{P}'^{\sigma}_{\Pi, \Xi, \pm\Delta}$		Группа бустов, изоморфн. T_1			
$\mathscr{P}^{j}_{\pm\varkappa, \pm\gamma}$	3	$SU(2)$	3	$2j+1$	Унитарны при $\gamma = 0$
$\mathscr{P}^{Q, R, \xi}_{\pm 0, \eta}$, $\mathscr{P}'^{Q, R, \xi}_{\pm 0, \eta}$		Группа движений плоскости $U(1) \otimes T_2$		∞	Унитарны при $R = 0$, $\eta = 0$
$\mathscr{P}^{\pm j}_{\pm 0, \eta}$				1	Унитарны при $\eta = 0$
$\mathscr{P}'^{\xi}_{\Pi, \pm\Xi}$		$SL(2, R)$ Локально изоморфн. $O(2, 1)$		∞	Унитарны при $\Xi = 0$, $\operatorname{Im}\xi = 0$, $\xi(\xi+1) < 0$
$\mathscr{P}^{\xi}_{\Pi, \pm\Xi}$					Унитарны при $\Xi = 0$, $\operatorname{Im}\xi = 0$, $\xi(\xi+1) < -\frac{1}{4}$
$\mathscr{P}^{\pm j}_{\Pi, \pm\Xi}$					Унитарны при $\Xi = 0$
$\mathscr{P}^{j}_{\Pi, \pm\Xi}$				$2j+1$	Неунитарны

дого такого представления группы $\tilde{\mathscr{P}}$ преобразования трансляций единичны, а преобразования 4-поворотов такие же, как и для соответствующего представления группы $\tilde{\mathscr{L}}$. Теорию неприводимых представлений группы $\tilde{\mathscr{L}}$ опустим, поскольку она детально изложена во многих обзорах и монографиях (см. например [24]).

5. ПОЛУЧЕНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ В ЯВНОМ ВИДЕ

1. Результаты предыдущих двух параграфов содержат классификацию неприводимых представлений группы $\tilde{\mathscr{P}}$ и дают возможность получить эти представления в явной форме. Для получения конкретного вида любого из перечисленных в параграфе 4 представлений необходимо проделать следующее: а) провести параметризацию точек орбиты представления, т. е. ввести на многообразии орбиты координаты, число которых равно размерности орбиты; б) вывести формулы преобразований группы Лоренца для координат точек орбиты; в) фиксировать на орбите 4-вектор $p^{\alpha}_{(0)}$ и сопоставить каждой точке p^{α} орбиты $[p^{\alpha}_{(0)}]$ одно преобразование $\nu(p_{(0)}, p)$ группы $\mathscr{L}$, удовлетворяющее (47); г) вычислить преобразование $\lambda(p_{(0)}, p)$ по формуле (50) для всех Λ^{α}_{β}; д) получить явный вид операторов требуемого неприводимого представления соответствующей малой группы; е) задать подходящую топологию пространства, в котором действуют операторы искомого представления.

2. Каждое неприводимое представление группы $\tilde{\mathscr{P}}$ можно попытаться расширить до представления обертывающей алгебры $\mathscr{A}(\tilde{\mathscr{P}})$ (см. параграф 1 п. 3). Такое расширение удобно тем, что оно дает возможность ввести инфинитезимальные генераторы ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$ из (8) и строить вместо представления группы представление ее алгебры Ли. Последнее по существу сводится к отысканию в пространстве представления операторов ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$, удовлетворяющих (9). Вместо ∂^{α}, $N^{\alpha\beta}$ в физике обычно используют величины

$$p^{\alpha} = \mathrm{i}\partial^{\alpha}, \quad M^{\alpha\beta} = \mathrm{i}N^{\alpha\beta}. \tag{90}$$

Соотношения (9) алгебры Ли для величин p^{α}, $M^{\alpha\beta}$ имеют привычный для физиков вид:

$$\left.\begin{aligned} &[p^{\alpha}, p^{\beta}] = 0, \ [M^{\alpha\beta}, p^{\gamma}] = \mathrm{i}(-p^{\beta}g^{\alpha\gamma} + p^{\alpha}g^{\beta\gamma}); \\ &[M^{\alpha\beta}, M^{\gamma\varepsilon}] = -\mathrm{i}(g^{\alpha\varepsilon}M^{\gamma\beta} + g^{\alpha\gamma}M^{\beta\varepsilon} - g^{\beta\varepsilon}M^{\gamma\alpha} - g^{\gamma\beta}M^{\alpha\varepsilon}). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Эти соотношения часто называют условиями релятивистской инвариантности квантовой теории. Для физических векторов состояния операторы p^α, $M^{\alpha\beta}$ эрмитовы и имеют физический смысл соответственно 4-импульса и 4-момента.

Введение генераторов группы $\tilde{\mathscr{P}}$ часто упрощает выкладки и делает их более наглядными. Так, для нахождения явного вида операторов представления вместо описанной в параграфе 1 процедуры обычно оказывается проще (после параметризации орбиты и нахождения явного вида генераторов малой группы) найти явный вид генераторов, действующих в прямом произведении пространства орбиты на пространство представления малой группы и удовлетворяющих соотношениям (91). Здесь, однако, строго говоря, надо еще убедиться, что полученные генераторы «интегрируемы», т. е. допускают получение соответствующих конечных преобразований. Эта «интегрируемость» инфинитезимальных генераторов не всегда имеет место. Даже для таких «хороших» групп, как группа трехмерных вращений, существуют бесконечномерные представления в окрестности единицы, не продолжимые на всю группу.

3. Согласно условию б) из параграфа 2 операторы представления $U(G)$ должны быть непрерывными как по отношению к пространству, в котором они действуют, так и по отношению к группе $\tilde{\mathscr{P}}$. Условие непрерывности операторов $U(G)$ допускает различные математические формулировки, поскольку в бесконечномерных пространствах существуют различные неэквивалентные типы сходимости операторов (см., например, [3, 25]). Выбор того или иного типа сходимости, вообще говоря, ограничен физическими требованиями. Эти ограничения часто оказываются не очень жесткими. Поэтому они нередко даже не формулируются в физических работах, связанных с использованием представлений группы $\tilde{\mathscr{P}}$.

Для унитарных представлений в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ естественным является условие слабой непрерывности, согласно которому скалярные произведения $(\Phi, U(G)\Psi)$ должны быть непрерывными функциями на группе при любых $\Phi, \Psi \in \mathscr{H}$.

При намерении продолжить представление группы Пуанкаре до представления группы Ли и ее обертывающей алгебры надо иметь в виду, что из непрерывности представления операторов группы не следует существование генераторов p^α, $M^{\alpha\beta}$ для всех векторов гильбертова пространства, ибо из непрерывности функции $(\Phi, U(G)\Psi)$ не следует ее дифференцируемость. Обеспечение неограниченной дифференцируемости операторов $U(G)$ по параметрам группы может быть достигнуто либо сужением гильбертова пространства до пространства S бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций, либо, наоборот, расширением $\mathscr{H}$ до пространства S' (сопряженного S в терминах функционального анализа) обобщенных функций умеренного роста. Действительно, в первом случае из пространства определения оператора исключаются «плохие» векторы, а во втором в пространство значений вводятся векторы, соответствующие действию полиномов по генераторам на эти «плохие» векторы. Тройка пространств $S \subset \mathscr{H} \subset S'$ носит название оснащенного гильбертова пространства [26]. В теории оснащенных пространств доказывается законность использования инфинитезимальных операторов и их собственных функций (т. е. нормировки на δ-функцию). Неунитарные представления обычно строят в пространствах типа либо S, либо S', что позволяет вводить инфинитезимальные генераторы.

4. Построение неприводимых представлений начнем с класса $\mathscr{P}^j_{\pm\varkappa,\ \pm\gamma,\ \delta}$. Для упрощения записи ограничимся положительными значениями $\varkappa$ (т. е. случаем $q_0 > 0$), так как соответствующее обобщение тривиально.

Параметризацию орбиты начнем с того, что разложим 4-вектор r^α из (59) на составляющие, направленные параллельно и перпендикулярно q^α:

$$r^\alpha = q^\alpha r^\beta q_\beta/\varkappa^2 + r^\alpha_\perp, \tag{92}$$

где

$$r^\alpha_\perp q_\alpha = 0;\ r^\alpha q_\alpha = \sqrt{\varkappa^2\gamma^2/4 + \delta^2};\ r^2_\perp = -\delta^2/\varkappa^2. \tag{93}$$

Пространственно подобный вектор $r^\alpha_\perp$ можно выразить через 3-вектор R^i той же длины, что и $r^\alpha_\perp$:

$$\left.\begin{aligned} r^0_\perp = -q_i R^i/g_0;\ r^i_\perp = R^i - g^i\,(q_j R^j/\varkappa\,(q_0+\varkappa);\\ R^i R_i = (r_\perp)_\alpha r^\alpha_\perp. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Геометрически соотношения (94) осуществляют преобразование Лоренца для вектора $r^\alpha_\perp$ в собственную систему вектора q^α. В новой системе вектор $r^\alpha_\perp = (r^0_\perp,\ r^i_\perp)$ переходит в $(0,\ R^i)$.

Примем за параметры орбиты (т. е. в конечном счете за переменные функций, образующих пространство представления) пространственные координаты q^i 4-вектора q^α и полярные углы ϑ и φ 3-вектора R^i. За 4-вектор $p^\alpha_{(0)}$ из (47) примем такой, у которого действительная часть $q_{(0)}$ направлена вдоль оси x^0, а 3-вектор $R^i_{(0)}$ — вдоль x^3. Тогда множество преобразований $\nu\,(p,\ p_{(0)})$ группы $\tilde{\mathscr{L}}$ можно выбрать так, что удовлетворяющий условиям релятивистской инвариантности (91) генератор $M_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} M_i = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon_{ikl}M^{kl} = \mathrm{i}\varepsilon_{ikl}q^k\,\partial/\partial q_l + J^{(j)}_i;\\ M_{0i} = \mathrm{i}\sqrt{q_0}\,\frac{\partial}{\partial q^i}\sqrt{q_0} - \varepsilon_{ikl}q^k J^{(j)l}/(q_0+\varkappa). \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Здесь

$$q_0 = \sqrt{\varkappa - q_i q^i} = \sqrt{\varkappa^2 + |\,q_i q^i\,|}, \tag{96}$$

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{0123} = 1$, $J^{(j)i}$ — оператор трехмерного момента, действующий на переменные ϑ, φ и такой, что

$$J_i^{(j)} R^i = j\sqrt{-R^i R_i}\,.$$

Стоящий в скобках индекс j является инвариантной характеристикой представления и имеет одно из значений, перечисленных в (64). Напомним, что $g^{ik} = g_{ik} = -\delta_{ik}$. Компоненты $J_i^{(j)}$ можно выбрать в форме

$$\left.\begin{aligned} J_1^{(j)} &= L_1 + j\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\vartheta/2;\\ J_2^{(j)} &= L_2 + j\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\vartheta/2;\\ J_3^{(j)} &= L_3 + j, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

где L_i — обычный оператор орбитального момента

$$L_1 = \mathrm{i}\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathrm{i}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta};$$

$$L_2 = \mathrm{i}\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi} - \mathrm{i}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta};\ L_3 = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{98}$$

Легко убедиться, что генераторы $p^\alpha = q^\alpha - \mathrm{i}r^\alpha$, $M^{\alpha\beta}$, выбранные в соответствии с (92), (94), (95), (96), (97), удовлетворяют (91) и тем самым осуществляют представление алгебры Ли группы Пуанкаре. Нетрудно также проверить, что

$$\frac{1}{2\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}M^{\alpha\beta}q^\gamma r^\lambda = \frac{1}{\delta}\sqrt{q^2\,|\,r_\perp^2\,|}\,j = j. \tag{99}$$

С другой стороны, в системе координат $q^\alpha = (\varkappa, 0, 0, 0)$, $r_\perp^\alpha = (0, 0, \delta/\varkappa, 0)$ левая часть (99) превращается в $M^{12} = M_3$. Отсюда видно, что инвариант j в соответствии с изложенным в параграфе 4 п. 3 характеризует неприводимое представление малой группы — группы одномерных вращений — и может принимать значения, перечисленные в (64). Таким образом, мы получили в явной форме представления класса $\mathcal{P}^j_{+\varkappa,\ \pm\gamma,\ \delta}$. Отметим, что эти представления можно построить и в несколько ином виде, поменяв ролями 4-векторы q^α и r^α, т. е. параметризуя орбиту трехмерным вектором r^i и полярными углами вектора $q_\perp^\alpha$, взятого в собственной системе вектора r^α.

Изложенная методика почти без изменений переносится на все остальные классы представлений, имеющих малую группу $U(1)$. Впервые эти представления были получены в работе Бертран и Ридо [18], где была использована иная параметризация орбит. В [18] получены глобальные преобразования, детально разобран вопрос о топологии пространств функций, о неприводимости представлений, об инвариантных функционалах. Параметризация, предлагаемая в настоящей работе, представляется более физичной, поскольку генераторы (95) по структуре аналогичны обычной форме тех же генераторов для векторов состояния свободной частицы [см. формулы (101)], а оператор $J_i^{(j)}$ тождествен оператору трехмерного момента для свободных стабильных частиц в базисе спиральности [ср. выражения (105, 121)].

Мы не будем приводить явного вида операторов для представлений с одномерными орбитами, удовлетворяющими (66) или (67). Для орбит, удовлетворяющих (67), соответствующие глобальные выражения получены в [18].

5. Приведем теперь явный вид генераторов p^α, $M^{\alpha\beta}$ для неприводимых представлений $\mathcal{P}^j_{\pm\varkappa,\ \pm\gamma}$ с трехмерными орбитами, соответствующими выполнению условий (68), (69). Эти представления реализуются в пространстве функций $\Psi(k^i, m) \equiv \langle k^i, m \mid \Psi\rangle$, где три непрерывных переменных k^i определены на всей действительной оси, а дискретная переменная m пробегает $2j+1$ значений $m = j, j-1, \ldots -j$. При $\gamma = 0$ представления унитарны, так что пространство функций можно считать оснащенным гильбертовым. При $\gamma \neq 0$ функции следует считать либо бесконечно дифференцируемыми и спадающими на бесконечности быстрее любого полинома по $(k^i)^{-1}$ (т. е. принадлежащими пространству S), либо обобщенными функциями умеренного роста (т. е. принадлежащими пространству S').

Генераторы имеют вид

$$p^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} k^i; \quad p^0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} k^0; \tag{100}$$

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \mathrm{i}\varepsilon_{iln} k^l \frac{\partial}{\partial k_n} + j_i; \\ M_{0i} &= \frac{k_0}{\omega_k}\left(\mathrm{i}\sqrt{\omega_k}\,\frac{\partial}{\partial k^i}\sqrt{\omega_k} - \frac{\varepsilon_{iln} k^l j^n}{q_0 + \varkappa}\right), \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

где $k^2 \equiv k_\alpha k^\alpha = q^2 + r^2 = \varkappa^2 + \gamma^2/4$; $\omega_k = \sqrt{|k_i k^i| + (\varkappa^2 + \gamma^2/4)}$;

$$k_0 = \omega_k \text{ для } \mathcal{P}^j_{+\varkappa,\ \pm\gamma} \text{ и } k_0 = -\omega_k \text{ для } \mathcal{P}_{+\varkappa,\ \pm\gamma};$$

j_i — обычный оператор момента j, действующий на спиновую переменную m. Формулы (101) были получены в [27] (см. также [20, 10, 6] и др.).

Для унитарных представлений (при $\gamma = 0$) существует инвариантное скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi) \equiv \langle\Phi \mid k^i, m\rangle\langle k^i, m \mid \Psi\rangle = \sum_m \int d^3k \Phi^+(k^i, m)\,\Psi(k^i, m). \tag{102}$$

В (101) базис представления выбран так, что компонента j_3 спинового момента диагональна. Кроме этого «базиса проекции на ось x^3» в физике часто используется базис спиральности, в котором диагональна спиральность λ, т. е. проекция спина на импульс

$$n^i j_i = \lambda, \tag{103}$$

где $n^i |k^l| = k^i$. Переход к базису спиральности осуществляется трехмерным поворотом в спиновом пространстве, который ориентирует ось x^3 вдоль k^i. Этот поворот производится с помощью стандартных D-функций $D^j_{m\lambda}(\varphi, \vartheta, \psi)$ (см., например, [11, 28, 29]). При этом углы Эйлера φ, ϑ равны полярным углам вектора k^i, а третий угол Эйлера ψ, соответствующий вращению вокруг вектора k^i, может быть фиксирован произвольно. Обычно выбирают $\psi = -\varphi$ [30], хотя при $\psi = 0$ [31, 32] некоторые формулы получаются чуть менее громоздкими, а оператор трехмерного момента оказывается точно таким же, как в теории квантового волчка.

Перейдя к базису спиральности с помощью функций $D^j_{m\lambda}(\varphi, \vartheta, -\varphi)$

$$\langle k^i, m \mid \Psi \rangle = \langle m \mid D^j(\varphi, \vartheta, -\varphi) \mid \lambda \rangle \langle k^i, \lambda \mid \Psi \rangle, \tag{104}$$

получим, что генератор p^α не изменится, а генераторы M_i, M_{i0} примут вид

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= L_1 + j_3 \cos\varphi \operatorname{tg} \vartheta/2; \\ M_2 &= L_2 + j_3 \sin\varphi \operatorname{tg} \vartheta/2; \\ M_3 &= L_3 + j_3, \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

$$M_{0i} = \frac{k_0}{\omega_k}\left(\mathrm{i}\sqrt{\omega_k}\frac{\partial}{\partial k^i}\sqrt{\omega_k} + j_3\frac{\omega_k}{|k^i|}e_i - \frac{\varkappa}{|k^i|}\varepsilon_{ikl}n^k j^l_\perp\right), \tag{106}$$

где

$$e_1 = \sin\varphi \operatorname{tg}\vartheta/2, \quad e_2 = -\cos\varphi \operatorname{tg}\vartheta/2, \quad e_3 = 0, \tag{107}$$

$$\left.\begin{aligned} j^1_\perp &= j_1(1 - 2\cos^2\varphi \sin^2\vartheta/2) - j_2 \sin 2\varphi \sin^2\vartheta/2, \\ j^2_\perp &= -j_1 \sin 2\varphi \sin^2\vartheta/2 + j_2(1 - 2\sin^2\varphi \sin^2\vartheta/2), \\ j^3_\perp &= -j_1 \cos\varphi \sin\vartheta - j_2 \sin\varphi \sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Отметим, что $e_i n^i = j^i_\perp n_i = 0$, а также, что величины $\partial/\partial k^i$ и e_i в отдельности не являются трехмерными векторами. Вектором является лишь сумма двух первых слагаемых в скобках (106). Трехмерный скаляр j_3 диагонален. Его собственные значения дают спиральность $\lambda = j_3$.

Для представлений класса $\mathcal{P}^j_{\pm\varkappa}$ получен явный вид операторов и в ряде других базисов (см., например, [33—38]).

Наиболее употребительны в настоящее время базисы проекции спина на ось x^3 и спиральности. Базис проекции на ось x^3 следует использовать в тех случаях, когда приходится учитывать релятивистский поворот спина при преобразовании Лоренца. В этом базисе, как видно из второго соотношения (101), эффект релятивистского поворота спина описывается сравнительно простым выражением и в нерелятивистском пределе имеет порядок vV, где v — скорость частицы, V — относительная скорость координатных систем. Базис спиральности удобно использовать в тех случаях, когда все выкладки ведутся в системе центра инерции сталкивающихся частиц. В этом случае спиральность становится инвариантом, что резко упрощает расчетные формулы. Однако, как видно из (106), эффект релятивистского поворота спина в представлении спиральности не только описывается громоздким выражением, но и имеет в нерелятивистском пределе порядок V/v, т. е. не мал при низких энергиях частиц. Поэтому в расчетах с учетом преобразований Лоренца для спина (см., например, [39]) базис спиральности неудобен.

Приведем еще в базисе проекции спина на ось x^3 формулу конечного преобразования Лоренца для вектора состояния $\langle k^i, m \mid \Psi \rangle$ к системе координат, движущейся с 4-скоростью u^α относительно исходной системы:

$$\left.\begin{aligned} x^i &= x'^i - \frac{u^i (u_j x'^j)}{u^0+1} + u^i x'^0, \\ x^0 &= -u_i x'^i + u^0 x'^0. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

В соответствии с (58) преобразование для $\langle k^i, m \mid \Psi \rangle$ имеет вид

$$\langle k, m \mid \Psi \rangle = \langle m \mid D^j (k, k') \mid m' \rangle \langle k', m' \mid \Psi' \rangle, \tag{110}$$

где, согласно (108),

$$k^i (k) = k^i - \frac{u^i (u^j k_j)}{u^0+1} - u^i k^0. \tag{111}$$

Трехмерный поворот $D^j (k, k')$ в спиновом пространстве определяется из (57) с учетом того, что преобразования $\nu (k, k')$ в рассматриваемом случае являются преобразованиями Лоренца в собственную систему 4-вектора k^α. Матрицей $D^j (k, k')$ определяется поворот спина при преобразовании Лоренца. Для спина 1/2 матрица $D^{1/2} (k, k')$ была получена автором в работе [40]:

$$D^{1/2} = \frac{(\omega_k + | k^\alpha |)(u_0 + 1) - (u^i \sigma_i)(u^l \sigma_l)}{\sqrt{2 (u_0 + 1)(\omega_k + | k^\alpha |)(u_\beta k^\beta + | k^\alpha |)}}. \tag{112}$$

Этой матрицей однозначно определяются углы Эйлера для поворота D^j, которые, конечно, от j не зависят. Эти углы Эйлера имеют довольно громоздкий вид [31, 41], поэтому пользоваться ими неудобно. Приведем выражения для $D^j (k, k')$ при $j > 1/2$ в более удобной форме, предложенной А. А. Чешковым [42]. Любой трехмерный поворот однозначно характеризуется единичным 3-вектором m^i ($m^i m_i = -1$), ориентированным вдоль оси поворота и углом поворота ω. Для поворота (112) ось направлена вдоль векторного произведения k^i и k'^i,

$$m_i=\frac{\varepsilon_{ijl}k^jk'^l}{|\varepsilon_{ijl}k^jk'^l|},\tag{113}$$

а угол

$$\omega=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{|\varepsilon_{ijl}k^jk'^l|}{(\omega_k+|k^\alpha|)(\omega'_k+|k'^\alpha|)+k_ik'^k}.\tag{114}$$

Матрица D^j представляет собой полином степени $2j$ по величине m^ij_i с коэффициентами a_n^j, зависящими от ω:

$$D^j(\omega,m^i)=\sum_{n=0}^{2j}a_n^j(\omega)(-\mathrm{i}m^kj_k)^n.\tag{115}$$

Как показано в [42], коэффициенты a_n^j действительны и определяются из системы уравнений

$$\cos(n\omega)=\sum_{n'=0}^{A}a_{2n'}^j(\mathrm{i}n)^{2n'};\quad \sin(n\omega)=\sum_{n'=0}^{B}a_{2n'+1}^jn(\mathrm{i}n)^{2n'},\tag{116}$$

где A равно j для целых и $j-{}^1/_2$ для полуцелых спинов, а B равно $j-1$ для целых и $j-\frac{1}{2}$ для полуцелых спинов. При целых j

$$a_0^j(\omega)=1,\quad da_{2n}^j/d\omega=a_{2n-1}^j,\tag{117}$$

а для полуцелых

$$da_{2n+1}^j/d\omega=a_{2n}^j,\tag{118}$$

так что для целых (полуцелых) спинов j достаточно решить только первую (вторую) систему (116). Эти системы для не очень больших спинов легко решаются. В частности,

$$\left.\begin{aligned}&D^{1/2}=\cos\omega/2-2\mathrm{i}(m^kj_k)\sin\omega/2;\\&D^1=1-\mathrm{i}(m^kj_k)\sin\omega+(m^kj_k)^2(\cos\omega-1);\\&D^{3/2}=\frac{1}{8}\left(9\cos\frac{\omega}{2}-\cos\frac{3\omega}{2}\right)-\frac{\mathrm{i}}{12}\left(27\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{3\omega}{2}\right)\times\\&\times(m^kj_k)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\omega}{2}-\cos\frac{3\omega}{2}\right)(m^kj_k)^3-\frac{\mathrm{i}}{3}\left(\sin\frac{3\omega}{2}-\right.\\&\left.\qquad-3\sin\frac{\omega}{2}\right)(m^kj_k)^3.\end{aligned}\right\}\tag{119}$$

Наглядное представление о повороте спина при преобразовании Лоренца дает простое качественное правило, сформулированное Ритусом [41]: спин поворачивается в ту же сторону и вокруг той же оси, что и импульс, но на меньший угол.

6. Для орбит, удовлетворяющих (71), выпишем генераторы только для неприводимых представлений $\mathcal{P}^{\pm j}_{\pm 0,\,\eta}$. При этом для упрощения записи положим $\eta = 0$, $k^0 = p^0 > 0$, так как переход к $k^0 < 0$ и к $\eta \neq 0$ тривиален. Рассматриваемые представления одномерны по спиновым переменным и реализуются в пространстве функций $\Psi(p^i) \equiv \langle p^i \mid \Psi \rangle$, где три непрерывных переменных p^i определены на всей действительной оси. Представления $\mathcal{P}^{\pm j}_{+0}$ получаются из полученных выше представлений $\mathcal{P}^{j}_{\pm\varkappa,\,\pm\gamma}$ при $\gamma = 0$ предельным переходом $\varkappa \to 0$ в базисе спиральности. В пределе представление $\mathcal{P}^{j}_{\pm\varkappa}$ расщепляется на $2j+1$ неприводимых представлений класса $\mathcal{P}^{\pm j}_{\pm 0}$. Соответствующие генераторы для неприводимых представлений получаются из (100), (105), (106), (107):

$$p^i = p^i, \quad p^0 = |p^i|, \tag{120}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= L_1 \pm j \cos\varphi \operatorname{tg} \vartheta/2; \\ M_2 &= L_2 \pm j \sin\varphi \operatorname{tg} \vartheta/2; \\ M_3 &= L_3 \pm j, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

$$M_{0i} = \mathrm{i}\sqrt{|p^i|}\,\frac{\partial}{\partial p^i}\sqrt{|p^i|} \pm je_i. \tag{122}$$

Полученные представления унитарны, но становятся неунитарными при переходе к $\eta \neq 0$.

Операторы неприводимых представлений классов $\mathcal{P}^{\xi}_{\text{П},\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}'^{\xi}_{\text{П},\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{\text{П},\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{j}_{\text{П},\,\pm\Xi}$ также приведем в инфинитезимальной форме. Генераторы T^{ab} ($a, b = 0, 1, 2$; $T^{ab} = -T^{ba}$) малой группы $SL(2, R)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [T^{10}, T^{02}] &= \mathrm{i}T^{12}; \\ [T^{10}, T^{12}] &= \mathrm{i}T^{02}; \\ [T^{02}, T^{12}] &= -\mathrm{i}T^{10}. \end{aligned} \tag{123}$$

Эти соотношения, разумеется, совпадают с третьим из соотношений (91) для соответствующих значений индексов. Величины T^{02}, T^{10}, T^{12} образуют псевдовектор в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Явный вид генераторов T^{ab} для унитарных неприводимых представлений группы $SL(2, R)$ был получен Баргманом [19], а для всех неприводимых представлений — автором работы [20]. Эти генераторы можно также получить (в ином базисе, чем в [19, 20]) из глобальных преобразований (84), (87), (89). Поэтому будем считать генераторы T^{ab} известными.

Орбиту пространственно подобного 4-вектора p^α параметризуем тремя четырехмерными полярными углами φ, ϑ, χ, где $\infty > \chi > -\infty$. Непосредственно проверяется, что в этой параметризации операторы p^α, $M^{\alpha\beta}$ для неприводимых представлений можно выбрать в форме [20]:

$$\left.\begin{aligned} p^1 &= e^{i\eta}\Pi\,\mathrm{ch}\,\chi\sin\vartheta\cos\varphi; \quad & p^2 &= e^{i\eta}\Pi\,\mathrm{ch}\,\chi\sin\vartheta\sin\varphi;\\ p^3 &= e^{i\eta}\Pi\,\mathrm{ch}\,\chi\cos\vartheta; & p^0 &= e^{i\eta}\Pi\,\mathrm{sh}\,\chi; \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= L_1 + \frac{T^{02}\,\mathrm{sh}\,\chi + T^{12}\,\mathrm{ch}\,\chi\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\mathrm{ch}\,\chi\cos\vartheta};\\ M_2 &= L_2 + \frac{T^{01}\,\mathrm{sh}\,\chi + T^{12}\,\mathrm{ch}\,\chi\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\mathrm{ch}\,\chi\cos\vartheta};\\ M_3 &= L_3 + T^{12}; \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{01} &= i\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\chi} + i\,\mathrm{th}\,\chi\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} -\\ &\quad - i\,\mathrm{th}\,\chi\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} - T^{02};\\ M_{02} &= i\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\chi} + i\,\mathrm{th}\,\chi\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} +\\ &\quad + i\,\mathrm{th}\,\chi\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + T^{10};\\ M_{03} &= i\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\chi} - i\,\mathrm{th}\,\chi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} +\\ &\quad + \frac{\mathrm{ch}\,\chi\sin\vartheta\,(T^{10}\cos\varphi - T^{02}\sin\varphi)}{1+\mathrm{ch}\,\chi\cos\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

При заданных генераторах T^{ab} формулы (124), (125), (126) дают полное описание неприводимых представлений классов $\mathcal{P}^{\xi}_{\Pi,\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}'^{\xi}_{\Pi,\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{\Pi,\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{j}_{\Pi,\,\pm\Xi}$.

Оператор Казимира малой группы

$$T^2 \equiv \frac{1}{2}T^{ab}T_{ab} = (T^{12})^2 - (T^{02})^2 - (T^{10})^2 \tag{127}$$

согласно (124)—(126) равен

$$T^2 = \frac{1}{\Pi^2}\Gamma^\sigma\Gamma_\sigma, \tag{128}$$

где

$$\Gamma_\sigma = \frac{1}{2}M^{\alpha\beta}p^\gamma\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma}. \tag{129}$$

С другой стороны, можно убедиться, что

$$T^2 = -\xi(\xi+1)$$

для представлений $\mathcal{P}^{\xi}_{\Pi,\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}'^{\xi}_{\Pi,\,\pm\Xi}$ и

$$T^2 = -j(j+1)$$

для представлений $\mathcal{P}^{\pm j}_{\Pi,\,\pm\Xi}$, $\mathcal{P}^{j}_{\Pi,\,\pm\Xi}$.

7. Остановимся кратко на существующих и возможных физических применениях различных представлений группы Пуанкаре.

Векторы состояния одиночных стабильных частиц преобразуются по унитарным неприводимым представлениям $\mathcal{P}^{j}_{+\varkappa}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{+0}$. Условиями положительности энергии и унитарности не запрещены частицы с нулевой массой, для которых векторы состояния преобразуются по унитарным представлениям $\mathcal{P}^{Q}_{+0}$, $\mathcal{P}'^{Q}_{+0}$. У таких представлений спиральность неинвариантна и может принимать либо все целые, либо все полуцелые значения. Частицы с такими свойствами не наблюдались.

Векторы состояния системы из двух стабильных частиц с ненулевыми массами преобразуются по прямому произведению $\mathcal{P}^{j_1}_{+\varkappa_1} \otimes \otimes \mathcal{P}^{j_2}_{+\varkappa_2}$. В разложении такого представления на неприводимые содержатся только представления того же типа $\mathcal{P}^{j}_{+\varkappa}$. Соответствующие формулы (аналог разложения Клебша — Гордана) были получены Чжоу Гуан Чжао и М. И. Широковым и, независимо, автором в 1958 г. [43, 44], а в дальнейшем переполучались в различной форме и исследовались в ряде работ [37, 38, 45—50].

Векторы состояния физических систем общего вида разлагаются в прямой интеграл представлений $\mathcal{P}^{j}_{+\varkappa}$, $\mathcal{P}^{\pm j}_{+0}$. Таким образом, в целом трансформационные свойства векторов состояния можно считать вполне изученными.

Во многих работах и монографиях общего характера большое внимание уделяется проективным представлениям группы Пуанкаре лучами в гильбертовом пространстве (напомним, что лучом называется множество векторов $e^{i\varphi}\Psi$, где Ψ — фиксированный вектор состояния, а $2\pi > \varphi \geqslant 0$). Использование проективных представлений позволяет исключить из теории состояния, запрещенные правилами суперотбора [7]. Однако введение проективных представлений не является необходимым. Эквивалентные результаты получаются, если пользоваться обычными представлениями, но в качестве начальных выбрать только состояния с носителем в одном из когерентных пространств. Другими словами, при решении любой конкретной задачи переход к проективным представлениям не дает ничего нового.

При исследовании аналитических свойств амплитуд рассеяния, форм-факторов, функций Грина и др. нередко оказывается полезным аналитическое продолжение по массе и энергии в комплексную область. При этом комплексные полюса, близко подходящие к физической области со стороны нефизического листа, трактуются как нестабильные частицы — резонансы. Резонансу с массой $\varkappa$, шириной γ и спином j естественно сопоставить неунитарное неприводимое представление $\mathcal{P}^{j}_{+\varkappa,\,+\gamma}$ группы Пуанкаре. Открытие неунитарных неприводимых представлений с малой группой U (1)

порождает вопрос о возможности существования нестабильных частиц, которым можно было бы сопоставлять представления $\mathcal{P}^j_{+\varkappa, +\gamma, \delta}$. Такие частицы имели бы довольно необычные свойства. Инвариантными кинематическими характеристиками такой частицы будут масса $\varkappa$, время жизни γ^{-1}, четность (поскольку возможны четные и нечетные состояния $\mathcal{P}^{+|j|}_{\varkappa, +\gamma, \delta} \pm \mathcal{P}^{-|j|}_{+\varkappa, +\gamma, \delta}$, инвариант δ, характеризующий гиперболический угол между 4-векторами q^α и r^α и инвариант $|j|$, характеризующий минимально возможное значение спина, если спином считать значение момента при $q^i = 0$. Возможными значениями спина частицы будут $|j|$, $|j| + 1$, $|j| + 2$, ... Приведенные соображения, разумеется, носят в высшей степени предварительный характер. Их целью является привлечение внимания к представлениям $\mathcal{P}^j_{+\varkappa, +\gamma, \delta}$. Подчеркнем, что эти представления, в отличие от $\mathcal{P}^j_{+\varkappa, +\gamma}$, не могут быть получены аналитическим продолжением унитарных представлений в область комплексных 4-импульсов p^α [18].

Отметим, что в [51] предложен другой метод теоретико-группововой трактовки нестабильных состояний, основанный на рассмотрении представлений полугруппы Пуанкаре, в которой вводятся только положительные (не имеющие обратных) смещения во времени.

Трансформационные свойства матриц плотности и положительных функционалов значительно более сложны по сравнению со свойствами векторов, состояния. Матрица плотности свободной частицы с ненулевой массой преобразуется по представлению $\mathcal{P}^j_{+\varkappa} \otimes \mathcal{P}^j_{-\varkappa}$. Разложение этого представления на неприводимые содержит унитарные представления классов $\mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}}$. Поэтому при переходе к большему числу частиц появляются прямые произведения с участием представлений $\mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}}$. Тем самым можно сказать, что при исследовании матрицы плотности придется иметь дело со всеми унитарными представлениями группы $\tilde{\mathcal{P}}$ и с их произведениями друг на друга. К настоящему времени получены разложения для прямых произведений всех возможных пар унитарных представлений группы Пуанкаре [37]: $\mathcal{P}^{j_1}_{\pm\varkappa_1} \otimes \mathcal{P}^{j_2}_{\pm\varkappa_2}$, $\mathcal{P}^{j_1}_{\pm\varkappa} \otimes \mathcal{P}^{\cdots}_{\pm 0}$, $\mathcal{P}^{\cdots}_{\pm 0} \otimes \mathcal{P}^{\cdots}_{\pm 0}$, $\mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}} \otimes \mathcal{P}^{j}_{\pm\varkappa}$, $\mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}} \otimes \mathcal{P}^{\cdots}_{\pm 0}$, $\mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}_1} \otimes \mathcal{P}^{\cdots}_{\text{П}_2}$.

Помимо общей громоздкости при исследовании трансформационных свойств матриц плотности (и положительных функционалов на алгебрах) возникают дополнительные трудности. Одна из трудностей связана с тем, что разложение представления некомпактной группы на неприводимые может существенно зависеть от того, на каком классе функций реализовано представление. Поясним эту трудность на примере. Рассмотрим приводимое представление группы Лоренца, реализуемое преобразованиями

$$\Psi(p) = \Psi'(\Lambda^{-1}p) \tag{130}$$

комплексных функций $\Psi(p^\alpha)$ четырех действительных переменных $p^\alpha \in R_4$. Если принять, что функции $\Psi(p)$ квадратично интегрируемы $\int d^4p \mid \Psi(p) \mid^2 < \infty$, то представление разлагается по определенной системе унитарных бесконечномерных неприводимых представлений группы $\mathscr{L}$. Но если рассмотреть пространство таких функций $\Psi(p)$, которые бесконечно дифференцируемы и имеют умеренный (т. е. не выше полиномиального) рост на бесконечности, то в разложении представления на неприводимые появятся совершенно новые неунитарные конечномерные представления, реализуемые на однородных полиномах определенного вида. Можно привести и менее тривиальный пример класса функций $\Psi(p_\alpha)$, которые, будучи разложены в интеграл Фурье по переменной p_0

$$\widetilde{\Psi}(p_i, x^0) = \int dp_0 \Psi(p_i, p_0) \exp(\mathrm{i} p_0 x^0)$$

становятся бесконечно дифференцируемыми и имеющими умеренный рост по переменным p_i, x^0. Легко убедиться, что такой класс функций инвариантен относительно преобразований Лоренца (130). Разложение на неприводимые представления группы $\mathscr{L}$ для таких нункций имеет вид

$$\Psi(p_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} p_{\alpha 1} \ldots p_{\alpha_n} \int_0^\infty ds\, \varphi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(s) \mathscr{D}_s(p_\alpha), \tag{131}$$

где $\mathscr{D}_s(p_\alpha)$ — перестановочная $\mathscr{D}$-функция Паули с массой $\sqrt{s}$

$$\mathscr{D}_s(p_\alpha) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \delta(p_\alpha p^\alpha - s) \operatorname{Sgn} p_0, \tag{132}$$

а функции $\varphi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(s)$ интегрируемы и спадают на бесконечности быстрее любого полинома по s^{-1}. По индексам $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ функции ρ не только симметричны, но и имеют нулевые свертки по любой паре индексов

$$g_{\alpha_1\alpha_2}\varphi^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \ldots = g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}\varphi^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n} = 0. \tag{133}$$

Поэтому функции $\varphi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ при фиксированном s преобразуются по неприводимым неунитарным конечномерным представлениям группы Лоренца.

Из приведенного примера видно, что фиксирование класса функций в разложении бесконечномерного представления на неприводимые является не формальной присказкой, а существенно необходимым шагом. Например, уже при разложении простейшей одночастичной матрицы плотности $\rho\,(p^{(i)}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2)$, преобразующейся по прямому произведению унитарных представлений $\mathcal{P}^{j}_{+\varkappa} \otimes \mathcal{P}^{j}_{-\varkappa}$, надо иметь в виду, что хотя с математической точки зрения полученное представление следует считать унитарным, т. е. реализующимся на функциях, удовлетворяющих условию

$$\sum_{m_1,\, m_2} \int d^3p_{(1)} d^3p_{(2)}\, |\rho^2| < \infty, \tag{134}$$

из физики условие (134) не следует. Физические условия, которым должна удовлетворять матрица плотности, имеют существенно иной вид:

$$\sum_{m} \int d^3p\rho\,(p^i,\ p^j,\ m,\ m) < \infty, \tag{135}$$

$$\rho\,(p^i,\ p^j,\ m,\ m) \geqslant 0. \tag{136}$$

Другая трудность изучения трансформационных свойств матрицы плотности связана с тем, что для некомпактных групп даже прямое произведение двух унитарных представлений может содержать неунитарную часть. Возможность появления неунитарной части обусловлена тем, что пространство квадратично интегрируемых функций, строго говоря, состоит не из функций, а из классов функций, отличающихся друг от друга лишь на множествах меры нуль. Поэтому о прямом произведении двух унитарных представлений можно лишь сказать, что оно унитарно не всюду, а только почти всюду. На множестве меры нуль представление может быть неунитарным, причем это множество может образовывать инвариантную поверхность. Такая ситуация не только возможна, но и обязательно существует для матрицы плотности. Действительно, написав выражение для среднего значения $\overline{p}_\alpha$ 4-импульса в состоянии ρ (для простоты считаем нормировку (135) единичной)

$$\overline{p}_\alpha = \sum_{m} \int d^3p\rho\,(p^i,\ p^j,\ m,\ m)\, p_\alpha, \tag{137}$$

выделяем из представления $P^{j}_{+\varkappa} \otimes P^{j}_{-\varkappa}$ неунитарное конечномерное представление, в котором трансляции единичны. Для наглядности, обозначив $\overline{p}_\alpha = \langle \alpha \,|\, \rho \rangle$, $\rho\,(p^{i}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2) \equiv \langle p^{i}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2 \,|\, \rho \rangle$, равенство (137) можно переписать в виде

$$\langle \alpha \,|\, \rho \rangle = \langle \alpha \,|\, p^{i}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2 \rangle \langle p^{i}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2 \,|\, \rho \rangle, \tag{138}$$

где $\langle \alpha \mid p^{j}_{(1)},\ p^{j}_{(2)},\ m_1,\ m_2 \rangle$ — аналог коэффициента Клебша — Гордана. Существование соотношения типа (136) является условием существования энергии и импульса у физической системы, описываемой матрицей плотности (напомним, что для матрицы плотности генераторы группы Пуанкаре, конечно, не имеют смысла импульса и момента). Появление неунитарных представлений в матрице плотности резко осложняет ее трансформационные свойства, так как для неунитарных бесконечномерных представлений не существует даже математически корректной постановки задачи о разложении на неприводимые представления [2]. С другой стороны, трансформационные свойства матриц плотности и положительных функционалов очень интересны для физики. Например, только в формализме матрицы плотности можно надеяться получить последовательное релятивистское описание движения нестабильных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы Гильберта. Сборник. М., «Наука», 1969.
2. **Желобенко Д. П.** Компактные группы Ли и их представления, М., «Наука», 1970.
3. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Перев. с англ. М., «Мир», 1969.
4. **Понтрягин Л. С.** Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.
5. **Широков Ю. М.** Диссертация. М., ФИАН, 1960.
6. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
7. **Wigner E. P., Wick C. G., Wightman A. S.** Phys. Rev., 1952, **88**, 101.
8. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1959, **36**, 879.
9. **Широков Ю. М.** Nucl. Phys., **15**, 1 (1960); там же, с. 13.
10. **Широков Ю. М.** Лекции по основаниям релятивистской квантовой теории. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1964.
11. **Wightman A. S.** L'invariance dans la méchanique quantique relativiste. In: Relation de dispersion et particules élémentaires. École d'Été de Physique Theorique. Les Houches p. 159—226. Paris, 1960.
12. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
    Кон П. М. Универсальная алгебра. Перев. с англ. М., «Мир», 1968.
13. **Широков Ю. М.** ТМФ, 1971, **9**, 333.
14. **Wigner E. P.** Ann. Math., 1939, **40**, 149.
15. **Макки Дж.** Приложение к книге: **Сигал И.** Математические проблемы релятивистской физики. Перев. с англ. М., «Мир», 1968.
16. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Обобщенные функции. Т. V. М., Физматгиз, 1962.
17. **Beltrametti E. G., Luzzatto G.**, Nuovo cimento, 1965, **36**, 1217.
18. **Bertran J., Rideau G.** Talk at the First Gunvar Källen Symposium on Theoretical Physics. Stockholm, 1968.
19. **Bargmann V.** Ann. Math., 1947, **48**, 568.
20. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1957, **33**, 1196.
21. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1957, **33**, 861.
22. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1957, **33**, 1208.
23. **Zwanziger D.** Phys. Rev., 1964, **133**, 1036.
24. **Наймарк М. А.** Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
25. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Т. 1. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
26. **Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.** Обобщенные функции. Т. IV. М., Физматгиз, 1961.

27. **Широков Ю. М.** «Докл. АН СССР», 1954, **94**, 857.
28. **Балдин А. М.** и др. Кинематика ядерных реакций. М., Атомиздат, 1968.
29. **Эдмондс А.** В сб. «Деформация атомных ядер». Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
30. **Jacob M., Wick G. C.** Ann. Phys., 1959, **7**, 404.
31. **Чешков А. А., Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1962, **42**, 144.
32. **Чешков А. А., Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1963, **44**, 1982.
33. **Lomont J. S., Moses H. E.** J. Math. and Phys., 1964, 5, 294; 1964, **5**, 1438; **Moses H. E., Wang S. C.** Nuovo cimento, 1965, **36**, 788.
34. **Raszillier I.** Nuovo cimento, 1965, **39**, 967.
35. **Lévy-Leblond J. M.** Nuovo cimento, 1965, **40**, 748.
36. **Новожилов Ю. В., Прохватилов Е. В.** «Ядерная физика», 1968, **10**, 199.
37. **Bertrand-Hameury J.** Dissertation. Paris, 1969.
38. **Joos H.** Fortschr. Phys., 1962, **10**, 65.
39. **Кожевников В. П.** и др. ТМФ, 1972, **10**, 47.
40. **Широков Ю. М.** «Докл. АН СССР», 1954, **99**, 737.
41. **Ритус В. И.** ЖЭТФ, 1961, **40**, 352.
42. **Чешков А. А.** ЖЭТФ, 1966, **50**, 144.
43. **Чжоу Гуан Чжао, Широков М. И.** ЖЭТФ, 1958, **34**, 1230.
44. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1958, 35, 1005.
45. **Pukanski L.** J. Math. and Mechn., 1961, **10**, 475.
46. **Macfarlane A. J.** J. Math. Phys., 1963, **4**, 490.
47. **Moussa P., Stora R.** Lectures in Theoretical Physics. University of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1964.
48. **Goldberg H.** J. Math. and Phys., 1966, **7**, 434.
49. **Kummer M.** J. Math. and Phys., 1966, **7**, 997.
50. **Rideau G.** Ann. Inst. Henri Poincaré, 1965, **3A**, 339.
51. **Schulman L. S.** Ann. Phys., 1970, **59**, 201.