

УДК 539.128

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛАГРАНЖИАНЫ

Д. В. Волков

Физико-технический институт
АН УССР, Харьков

Рассмотрены некоторые математические аспекты феноменологического описания голдстоуновских частиц. Рассмотрение проведено для произвольной группы G внутренних симметрий и для произвольной группы, содержащей в качестве подгруппы группу Пуанкаре.

Some mathematical aspects of phenomenological description of Goldstone particles are considered. Consideration is performed for an arbitrary inner symmetry group and for an arbitrary group with the Poincaré group as a subgroup.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в физике элементарных частиц успешно используется метод феноменологических лагранжианов (ФЛ). Возник этот метод как простой способ представления результатов алгебры токов для киральной $SU(2) \otimes SU(2)$ -группы [1]. Метод ФЛ был обобщен на киральную $SU(3) \otimes SU(3)$ -группу [2], несколько позже на произвольную полупростую группу внутренних симметрий [3], а затем — и на группы, содержащие в качестве подгруппы группу Пуанкаре [4]. В настоящее время метод ФЛ достаточно разработан и имеет сравнительно простую математическую технику, позволяющую стандартным образом проводить феноменологическое описание взаимодействий произвольных голдстоуновских частиц [5].

Основу метода ФЛ составляет предположение, что матричные элементы S -матрицы после выделения вклада полюсных членов являются в области сравнительно невысоких энергий гладкими функциями импульсов частиц и, следовательно, их можно получить по обычным правилам Фейнмана с учетом только диаграмм типа дерева из некоторого лагранжиана, содержащего феноменологические константы. Содержательность метода ФЛ проявляется при наличии дополнительных требований типа наличия опре-

деленной симметрии, которые позволяют установить соотношения между константами, входящими в определение ФЛ.

Для случая взаимодействующих голдстоуновских частиц требования симметрии являются определяющими. Как известно, эти частицы возникают в системах с вырожденным вакуумом, симметрия которого ниже симметрии исходного лагранжиана, описывающего некоторые первичные взаимодействия. Появление голдстоуновских частиц обычно качественно интерпретируется как реакция системы, направленная на восстановление симметрии, нарушенной вследствие вырождения вакуума.

Метод ФЛ позволяет дать понятию восстановление симметрии вполне определенный смысл: вырождение вакуума нарушает алгебраическую симметрию системы, т. е. симметрию, при которой трансформационные свойства операторов определяются линейными представлениями соответствующей группы; голдстоуновские частицы восстанавливают симметрию системы. При этом трансформационные свойства операторов этих частиц определяются нелинейными преобразованиями, что вместе с требованием инвариантности ФЛ относительно рассматриваемых преобразований соответствует симметрии динамического типа. Внутренний механизм возникновения голдстоуновских частиц, так же как и механизм восстановления симметрии, остается при этом вне области рассмотрения метода ФЛ.

Введение феноменологических полей голдстоуновских частиц и определение их трансформационных свойств относительно рассматриваемой группы преобразований можно провести следующим стандартным образом. Пусть G — непрерывная группа симметрии некоторого исходного лагранжиана, приводящего к выражению вакуума и к возникновению голдстоуновских частиц, и H — ее максимальная подгруппа, оставляющая вакуум инвариантным. Представим произвольное преобразование группы G в виде произведения:

$$G = K(a)H(b), \quad (1)$$

где $H(b)$ — преобразование подгруппы H ; $K(a)$ — преобразование, принадлежащее к левому смежному классу группы G по подгруппе H ; a и b — соответствующие параметры, определяющие параметризацию группового пространства группы G .

Действие слева на элемент группы G произвольным преобразованием той же группы

$$G(g)K(a)H(b) = K(a')H(b') \quad (2)$$

позволяет определить, каким образом параметры a и b преобразуются при преобразованиях группы:

$$a^{\alpha'} = a^{\alpha} (a^{\alpha}, g); \quad (3)$$

$$b^{m'} = b^m (b^m, a^{\alpha}, g). \quad (3a)$$

Существенно, что для параметризации (1) преобразование (3) не содержит параметров b . За исключением явного выделения в G подгруппы H (b) и соответствующего ей смежного класса $K(a)$, параметризация (1) является совершенно произвольной. Каждая из параметризаций $K(a)$ соответствует определенному выбору координат в пространстве G/H . При изменении параметризации $K(a)$ соответственно меняются и преобразования (3). Однако, как показывает последующее рассмотрение (см. параграф 2), указанный произвол в выборе системы координат в G/H не существен для описания взаимодействия голдстоуновских частиц в методе ФЛ.

Метод ФЛ сопоставляет каждому параметру a^α локальное поле голдстоуновских частиц $A^\alpha(x)$, так что для локальных полей $A^\alpha(x)$ выполняется закон преобразования (3)*:

$$A^{\alpha'}(x) = a^{\alpha'}(A^\alpha(x), g). \quad (4)$$

Использование линейных представлений подгруппы H вместе с преобразованием (3а) позволяет определить так называемые индуцированные представления для преобразования группы G (см. параграфы 4 и 5). Сопоставление компонентам таких представлений локальных полей $\psi^m(x)$ позволяет определить трансформационные свойства полей, не являющихся полями голдстоуновских частиц. При определенных трансформационных свойствах полей относительно преобразований группы G построение ФЛ сводится к нахождению инвариантов рассматриваемых преобразований, содержащих минимальное число производных от локальных полей.

Вследствие нелинейности преобразований (3) и (3а) относительно параметров a и b соответственно полей $A^\alpha(x)$ использование метода ФЛ приводит к установлению определенных соотношений для матричных элементов S -матрицы с различным числом взаимодействующих частиц.

Применения метода ФЛ в физике элементарных частиц для конкретных групп симметрии, особенно для киральных $SU(2) \otimes SU(2)$ - и $SU(3) \otimes SU(3)$ -групп, посвящены обзоры [6].

Основная цель настоящего обзора состоит в рассмотрении некоторых общих моментов метода ФЛ, а также в установлении связи между методами и понятиями, использующимися при рассмотре-

* Заметим, что однозначное сопоставление параметров a^α и локальных полей $A^\alpha(x)$ не всегда имеет место. Так, при рассмотрении групп симметрии, для которых группа Пуанкаре является подгруппой (см. параграф 6), некоторые из параметров a^α определяют пространственно-временные координаты. Кроме того, при наличии у группы симметрии абелевых подгрупп число полей голдстоуновских частиц может быть меньше числа параметров a^α (см. параграф 6).

нии ФЛ, и методами и понятиями современной дифференциальной геометрии *, связанными с идеями Э. Картана и приведенными в последнее десятилетие к построению общей теории расслоенных пространств [8—10] и связностей на них (см., например, [10]). Вместе с тем, насколько это возможно, мы старались не пользоваться современной математической терминологией и ограничиваться в основном рассмотрением только идейной стороны вопроса. В параграфах 2—4 проводится рассмотрение некоторых свойств ФЛ для полупростых групп внутренних симметрий. В параграфе 2 рассматриваются ковариантные свойства S -матрицы, построенной в приближении диаграмм типа дерева, относительно преобразований локальных полей $A^\alpha(x)$. В качестве ФЛ при этом используется квадратичная форма

$$L = g_{\mu\nu}(A^\alpha(x)) \partial A^\mu \partial A^\nu / 2, \quad (5)$$

где ∂A^μ — производные от полей по пространственно-временным переменным. Индексы этих переменных в (5) и в дальнейших формулах опущены.

Элементы матрицы рассеяния, получаемые в результате суммирования диаграмм типа дерева для лагранжиана (5), допускают перестройку к явно ковариантному виду по отношению к произвольным преобразованиям полей голдстоуновских частиц. То, что такая перестройка всегда возможна, является следствием общей теоремы аксиоматической теории поля [11] и аналогичной теоремы в рамках лагранжевого подхода [12] о независимости матричных элементов S -матрицы на массовой поверхности от выбора интерполирующих полей **.

При интерпретации коэффициентов квадратичной формы как метрического тензора соответствующие матричные элементы являются функциями тензора кривизны рассматриваемого пространства и его ковариантных производных. Указанное свойство матричных элементов иллюстрируется сначала на простейших случаях диаграмм с тремя и четырьмя внешними линиями. После чего рассматривается общая итерационная процедура построения матричного элемента с произвольным числом внешних линий.

Итерационная процедура содержит два существенных момента: 1) учет всех возможных редукций полюсных диаграмм к эффективному контактному взаимодействию и 2) использование классификации контактных взаимодействий по схемам Юнга относительно перестановок индексов полевых операторов. Оба указан-

* Геометрический подход к методу ФЛ развивался в работах [5, 7].

** Справедливость указанной теоремы для совокупности диаграмм типа дерева была показана Намбу [13] на основе полуклассического рассмотрения и в работе Каллана и др. [3], как следствие однородности рассматриваемой совокупности диаграмм по отношению к масштабному преобразованию полей.

ных момента имеют простую геометрическую интерпретацию. Первый из них соответствует преобразованию метрического тензора к новой системе координат, в то время как выделение в матричных элементах определенных схем Юнга соответствует определенному выбору системы координат, известной в дифференциальной геометрии под названием нормальной системы координат. В результате указанной процедуры редуцированный матричный элемент представляется в виде суммы двух слагаемых, первое из которых получается в результате явно ковариантной процедуры перехода к нормальной системе координат, а второе соответствует функции преобразования от исходной к нормальной системе координат. Это слагаемое обращается в нуль на массовой поверхности частиц.

В параграфе 3 исследуются ограничения на метрический тензор для случая, когда рассматриваемое пространство обладает транзитивной группой движения. Затронутый вопрос относится к хорошо изученной области теории групп и классической дифференциальной геометрии. Поэтому в параграфе 3 приводятся лишь некоторые формулы, иллюстрирующие на примере симметрических пространств структуру метрического тензора в нормальной системе координат. Вследствие общей связи теории симметрических пространств с теорией полупростых групп случай симметрических пространств наиболее интересен для физических приложений. В частности, хорошо известные киральные симметрии относятся к этому случаю.

В параграфе 3 приводится также доказательство эквивалентности принципа Адлера [14], состоящего в требовании обращения в нуль матричных элементов S -матрицы на массовой поверхности при стремлении одного из импульсов голдстоуновских частиц к нулю, требованию симметрии феноменологического лагранжиана относительно транзитивной группы. Доказательство указанного утверждения для матричных элементов с произвольным числом внешних линий основывается на учете дополнительной редукции полюсных диаграмм к контактными, возникающей при стремлении к нулю одного из импульсов частиц, и проводится посредством итерационной процедуры, аналогичной используемой в параграфе 2.

Результаты этого параграфа, так же как и параграфа 2, имеют простую геометрическую интерпретацию: редуцированный матричный элемент в соответствии с классификацией по схемам Юнга представляется в виде двух слагаемых, первое из которых воспроизводит известное уравнение Киллинга для инвариантности метрической формы, а второе, обращающееся в нуль на массовой поверхности, соответствует бесконечно малому преобразованию группы симметрии.

В параграфе 4 проводится рассмотрение взаимодействий голдстоуновских частиц с полями других частиц. Теория расслоен-

ных пространств и связностей на них [10] позволяет дать строгое математическое описание рассматриваемого в этом параграфе вопроса. В соответствии с общим планом обзора мы ограничиваемся рассмотрением только определяющих понятий, основными из которых являются группа голономии и связность с заданной группой голономии.

Вследствие того что рассматриваемые в физике элементарных частиц симметрии являются нарушенными, геометрическая точка зрения может быть полезна для установления характера возможных нарушений. В параграфе 4 приводится пример определения свойств ФЛ из геометрических требований, менее жестких, чем требования симметрии. В параграфе 5 рассматриваются дифференциальные формы Картана и приводится сводка основных соотношений между этими формами, используемых в методе ФЛ.

Более сложные группы симметрии, содержащие в качестве подгрупп как группы внутренних симметрий, так и группу Пуанкаре, рассмотрены в параграфе 6. Показано, что построение ФЛ для таких групп естественно производить не на основе инвариантной квадратичной формы, как это делается для случая групп внутренних симметрий, а на основе инвариантного относительно преобразований группы 4-объема в некотором n -мерном пространстве, определяемом структурой рассматриваемой группы симметрии. Использование дифференциальных форм Картана оказывается удобным и в этом более общем случае. В качестве примера проводится рассмотрение ФЛ для группы конформных преобразований.

1. КОВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА S -МАТРИЦЫ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ПОЛЕЙ

При определенном преобразовании (4) нахождение ФЛ для голдстоуновских частиц сводится к нахождению инвариантов этих преобразований, содержащих минимальное число производных. Вследствие того что пространство G/H является однородным относительно преобразований G , не существует инвариантных функций, не содержащих производных от A^α и отличных от постоянной. Поэтому минимальное число производных, удовлетворяющее требованию релятивистской инвариантности, равно двум и наиболее общее выражение для эффективного лагранжиана взаимодействия в длинноволновом пределе имеет вид:

$$L = g_{\mu\nu} (A^\alpha) \partial A^\mu \partial A^\nu / 2. \quad (5)$$

Процессы взаимодействия между голдстоуновскими частицами в длинноволновом пределе определяются полюсными диаграммами

типа дерева для S -матрицы:

$$S = \left[\frac{(i)^n}{n!} \right] \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T^* (L' (x_1) \dots L' (x_n)), \quad (6)$$

где L' — лагранжиан взаимодействия

$$L' = \sum_{k=1} L^{(k)}; \quad L^{(k)} = \partial^k \dots g_{\mu\nu} (0) A \dots A \cdot \partial A^\mu \partial A^\nu / 2 \cdot k! \quad (7)$$

(для упрощения формул в выражениях, симметричных по отношению к операторам A^α , заменяем индексы внутренних переменных точками); T^* — оператор упорядочения по времени, который при наличии производных от операторов поля определяется соотношением

$$T^* (\partial A (x), B (y)) = \partial T (A (x), B (y)), \quad (8)$$

где T — обычное T -произведение. При отсутствии производных T^* совпадает с T .

Убедимся, что матричные элементы S -матрицы, определенные посредством соотношений (5) — (8), не зависят от выбора полей $A^\alpha (x)$ при условии, что все частицы находятся на массовой поверхности $\partial^2 A^\alpha = 0$.

При произвольном преобразовании полей

$$A^{\mu'} = A^{\mu'} (A^\mu) \quad (9)$$

производные ∂A^μ преобразуются как вектора в пространстве, где A^μ являются координатами, а величина $g_{\mu\nu} (A^\alpha)$ преобразуется как тензор и может быть отождествлена с метрическим тензором этого пространства.

Для доказательства, что S -матрица на массовой поверхности не зависит от выбора полей, достаточно показать, что ее можно представить в виде функции от явно ковариантных величин по отношению к преобразованиям (9).

Рассмотрим сначала простейшие примеры. Процессы с участием трех частиц описываются диаграммами с одной вершиной:

$$L^{(1)} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} A^\alpha \partial A^\mu \partial A^\nu / 2. \quad (10)$$

Используя известное соотношение между производными от метрического тензора и символом Кристоффеля

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha, \nu} + \Gamma_{\nu\alpha, \mu}, \quad (11)$$

свойства симметрии последних по отношению к перестановке двух первых индексов

$$\Gamma_{\alpha\beta, \nu} = \Gamma_{\beta\alpha, \nu} \quad (12)$$

и сохранение 4-импульса в вершине, соответствующее обращению в нуль производных от произведения всех операторов, присутствующих в вершине, можно записать (10) в виде

$$L^{(1)} = -\Gamma_{\dots\rho} A \cdot A \cdot \partial^2 A^\rho / 2. \tag{13}$$

Вследствие наличия в (13) оператора $\partial^2 A^\rho$ это выражение обращается в нуль, если все частицы находятся на массовой поверхности.

Процессы с участием четырех частиц описываются диаграммой с одной вершиной

$$L^{(2)} = \partial^2_{\dots} g_{\mu\nu} A \cdot A \cdot \partial A^\mu \partial A^\nu / 2 \cdot 2! \tag{14}$$

и полюсной диаграммой с двумя вершинами (13).

В тех случаях, когда связи операторов в двух различных вершинах (13) не содержат операторов с производными $\partial^2 A^\rho$, соответствующий матричный элемент имеет полюс вследствие наличия пропагатора и обращается в нуль на массовой поверхности вследствие наличия операторов $\partial^2 A^\mu$ в обеих вершинах.

При наличии связей, содержащих $\partial^2 A^\mu$ в какой-либо из вершин, полюсной график сводится к некоторому эффективному контактному взаимодействию. Действительно, как видно непосредственно из соотношения




$$\partial^2 \langle T (A^\mu(x) A^\nu(y)) \rangle = -i g^{\mu\nu} \delta(x-y), \tag{15}$$

знаменатель полюса пропагатора сокращается в этом случае с квадратом 4-импульса в числителе, возникающим вследствие наличия квадрата производной.

Результирующее контактное взаимодействие вместе с вкладом от (14) можно записать в виде:

$$(\partial^2_{\dots} g_{\mu\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\dots} - 4\partial_\rho g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\dots\mu} + 2\Gamma_{\mu\dots\rho} \Gamma^\rho_{\dots\nu}) A \cdot A \cdot \partial A^\mu \partial A^\nu / 4. \tag{16}$$

Выражение (16) не является ковариантным и поэтому зависит от выбора полей. Покажем, что это выражение можно преобразовать к виду, который содержит явно ковариантную часть, отличную от нуля на массовой поверхности, и нековариантную часть, равную нулю на массовой поверхности. Для этого четырехиндексную величину в скобках выражения (16) разложим по схе-

мам Юнга  ,  и  относительно перестановок

соответствующих индексов. Часть выражения (16), соответствующую второй и третьей из этих схем, можно на основе тех же преобразований, которые были проделаны при переходе от (10) к (13), представить в виде, содержащем три оператора без производных

и один оператор вида $\partial^2 A^\rho$. Действительно, для обеих рассматриваемых схем Юнга всегда существуют три симметричных индекса, два из которых свертываются с операторами без производных и один с первой производной. Вследствие указанной симметрии такое выражение можно записать в виде производной от произведения трех операторов, а затем, пользуясь сохранением 4-импульса, перебросить эту производную на оставшийся оператор ∂A^ρ , что и приводит к оператору $\partial^2 A^\rho$.

Для первой из выписанных выше схем Юнга такого преобразования сделать нельзя, так как полученное в результате такого преобразования, если бы оно было возможно, выражение было бы симметрично по крайней мере по трем индексам, что противоречило бы симметрии рассматриваемой схемы Юнга.


Преобразованное в соответствии с изложенными замечаниями выражение (16) имеет вид:

$$-R_{\mu, \nu} A^\mu A^\nu \partial A^\alpha \partial A^\beta / 6 + [\Gamma_{\rho, \nu, \rho}^\rho \Gamma_{\rho, \nu} + 3\Gamma_{\rho, \nu}^\rho \Gamma_{\rho, \nu} - \partial_\nu \Gamma_{\mu, \nu} \Gamma_{\mu, \nu}] A^\mu A^\nu \partial^2 A^\alpha / 6, \tag{17}$$

где $R_{\alpha\mu, \beta\nu}$ — тензор кривизны пространства G/H в начале координат:

$$R_{\alpha\mu, \beta\nu} = \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu, \alpha} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta, \alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^\gamma \Gamma_{\alpha\nu, \gamma} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\alpha\beta, \gamma}. \tag{18}$$

Представление (17) решает сформулированную выше задачу: первое слагаемое вследствие ковариантности тензора кривизны не изменяется при преобразованиях, оставляющих неподвижным начало координат; второе слагаемое зависит от системы координат, однако вследствие наличия операторов $\partial^2 A^\nu$ оно обращается в нуль на массовой поверхности.

Не представляет особого труда провести аналогичное рассмотрение для большего числа частиц. При этом полюсные члены в матричных элементах будут соединять или явно ковариантные блоки между собой или с нековариантными членами с $\partial^2 A^\rho$ на внешних линиях. В этом случае результат на массовой поверхности не будет зависеть от выбора полей. По крайней мере один из операторов, обуславливающий полюсный член, будет содержать $\partial^2 A^\rho$, в этом случае полюсной член редуцируется к контактному взаимодействию. Суммарный вклад всех контактных взаимодействий с одинаковым числом полевых операторов можно представить в виде суммы слагаемых двух типов соответственно принадлежности к схеме Юнга  (I тип) или к схемам

Юнга  и  (II тип) относительно перестановки индексов полевых операторов. Указанные схемы исчер-

пывают все возможные схемы Юнга, так как во все контактные взаимодействия входят только два оператора с производными. Слагаемые, соответствующие типу I, дают явно ковариантные выражения. Слагаемые же типа II приводятся к выражениям, содержащим $\partial^2 A^p$, и либо обращаются в нуль, если частицы находятся на массовой поверхности, либо приводят к дальнейшей редукции полюсных диаграмм в контактные для процессов с большим числом частиц.

При большом числе частиц описанная выше процедура становится весьма громоздкой. Поэтому приведем здесь доказательство ее справедливости для произвольного числа частиц без построения явных выражений для соответствующих матричных элементов.

Рассмотрим общую структуру матричного элемента с n внешними линиями в полюсном приближении в предположении, что все матричные элементы с меньшим числом линий известны. Для этого возьмем произвольную диаграмму с n внешними линиями и с $k + 1$ вершинами. Соответственно в этой диаграмме будет k внутренних линий. Проведем два различных способа выделения составных частей рассматриваемой диаграммы. Первый способ состоит в выделении на диаграмме какой-либо из вершин и отделинии от этой вершины частей, связанных с ней одной внутренней линией. При таком способе соответственно числу вершин будет $k + 1$ различных представлений исходной диаграммы. При втором способе будем проводить деление диаграммы на две части, пересекая какую-либо из внутренних линий. При этом способе деления соответственно числу внутренних линий будет k различных представлений исходного матричного элемента.

Так как каждое из рассматриваемых представлений исходной диаграммы дает один и тот же матричный элемент и так как число вершин всегда на единицу больше числа внутренних линий, то, взяв сумму всех различных представлений диаграммы при первом способе ее деления и вычитая из нее все представления диаграммы при втором способе, снова получим матричный элемент, соответствующий рассматриваемой диаграмме. Суммируя по всем различным диаграммам, найдем для первого способа разбиения сумму диаграмм, в которых одна из вершин исходного лагранжиана соединена каким-то числом внутренних линий с полными матричными элементами низших приближений. При втором способе разбиения получим диаграммы, в которых два матричных элемента низшего порядка связаны одной внутренней линией.

Для диаграмм с пятью внешними линиями схематическое изображение матричного элемента в виде суммы полюсных диаграмм и в виде полюсных диаграмм с матричными элементами низших порядков в качестве вершин дано на рис. 1 и 2. Каждой из диаграмм рис. 2 соответствуют определенные диаграммы рис. 1. Диаграммам A , B и D соответствует по одной диаграмме a , b и c .

Каждой из диаграмм C и E соответствует две диаграммы b и c . Так как диаграмма E дает вклад со знаком минус, суммарный вклад диаграмм на рис. 2 такой же, как на рис. 1.

Рассмотрим теперь, при каких условиях полюсная диаграмма редуцируется к контактному взаимодействию. Как было видно

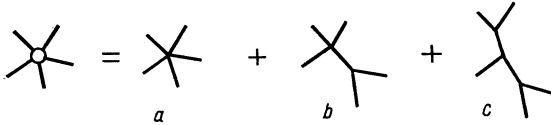


Рис. 1. Схема матричного элемента в виде суммы полюсных диаграмм.

из рассмотренного ниже примера, для редукции диаграммы необходимо сократить знаменатель полюсного члена с квадратом импульса виртуальной частицы, что возможно только в случае наличия в соответствующей вершине оператора $\partial^2 A^0$.

Предполагая, что в вершинах, соответствующих матричным элементам низших порядков, выделены части, в которых все

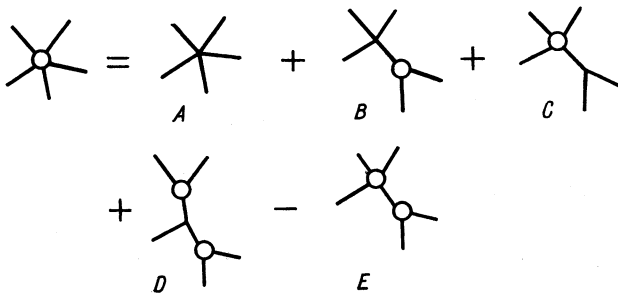


Рис. 2. Схема матричного элемента в виде суммы полюсных диаграмм с матричными элементами низших порядков (с меньшим числом линий) в качестве эффективных вершин.

полюса редуцированы к контактным взаимодействиям, разложим эти вершины на два слагаемых соответственно схемам Юнга типа I и II.

Для редуцированных матричных элементов, соответствующих слагаемым схемы типа II, легко построить систему уравнений, позволяющих получить их значения в высших приближениях по известным матричным элементам в низших приближениях. Действительно, каждому матричному элементу такого вида соответствует график, в котором одна из вершин содержит оператор $\partial^2 A$ на внешней и не содержит таких операторов на внутренних линиях. Пересечем все внутренние линии, примыкающие к рас-

смастриваемой вершине, тогда отсеченные части графика, для того чтобы обеспечить редукцию полюсов, соответствующих пересекаемым линиям, должны содержать операторы $\partial^2 A$ на этих линиях, т. е. соответствовать матричным элементам низших порядков типа II. Результирующую систему уравнений можно изобразить графически в виде суммы всех возможных диаграмм, в каждой из которых имеется одна вершина, соответствующая исходному лагранжиану с оператором $\partial^2 A$, на внешней линии, и остальные линии, примыкающие к этой вершине, или являются



Рис. 3. Схема представления редуцированного матричного элемента типа II в виде суммы полюсных диаграмм с редуцированными вершинами низших порядков.

Точки на линиях обозначают операторы, содержащие вторые производные по пространственным переменным.

внешними, или связаны с матричными элементами типа II в низших приближениях. Для 4-хвостки схема представления матричного элемента для рассматриваемого случая дана на рис. 3.

Система уравнений для полного редуцированного матричного элемента, т. е. содержащего слагаемые типа I и II, получается

как следствие систем уравнений, рассмотренных выше. Для того чтобы система уравнений, соответствующая рис. 1, приводила к редуцированным матричным элементам, необходимо, чтобы одна из вершин, примыкающих к каждой внутренней линии, содержала оператор $\partial^2 A$, т. е. такой оператор должен содержаться или в вершине исходного лагранжиана, или в эффективном матричном элементе низшего порядка. Легко, однако, заметить, что в результате уравнений типа, изображенных на рис. 3, матричные элементы диаграмм, для которых редукция имеет место вследствие наличия операторов $\partial^2 A$ только в вершинах исходного лагранжиана, сокращаются с матричными элементами, соответствующими диаграммам вида *E* на рис. 2, в которых только одна из вершин содержит оператор $\partial^2 A$.

Схема системы уравнений для определения полного редуцированного матричного элемента для случая 5-хвостки изображена на рис. 4. В общем случае редуцированный матричный элемент для *n*-хвостки дается суммой всех возможных диаграмм, в каждой из которых имеется одна вершина исходного лагранжиана, соединенная всеми возможными способами с редуцированными диаграммами типа II низших приближений с операторами $\partial^2 A$, входящими во внутреннюю линию, минус сумма всех возможных диаграмм с двумя редуцированными вершинами типа II с операторами $\partial^2 A$ от обеих вершин, входящими во внутреннюю линию. Чтобы построить матричные элементы *S*-матриц на основе редуцирован-

ных матричных элементов, необходимо учесть все возможные свертки операторов, не содержащих операторы $\partial^2 A$.

Заметим, что уравнения, рассмотренные выше, применимы и в более общем случае частиц с произвольным спином и массой. Действительно, при выводе этих уравнений используется только условие сокращения знаменателей полюсных членов с аналогичными множителями в эффективных матричных элементах; вид

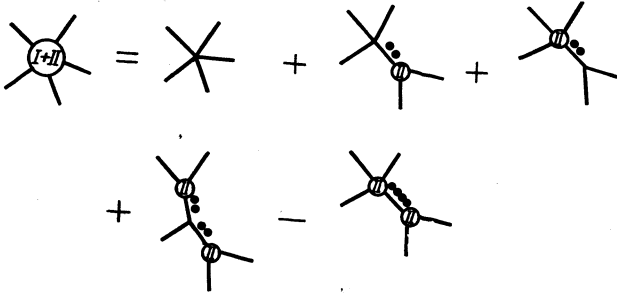


Рис. 4. Схема представления редуцированного матричного элемента в виде полюсных диаграмм с редуцированными вершинами низшего порядка типа II.

уравнения движения частиц не является при этом существенным. В Приложении I дается вывод рассмотренных выше уравнений, основанный на квазиклассическом подходе.

Покажем теперь, что редуцированная n -хвостка типа I не зависит от выбора полевых операторов. Для этого сравним описанную выше процедуру с известной процедурой перехода от произвольной системы координат в римановом пространстве к так называемой нормальной системе координат, которая определяется условиями

$$\partial^n (\dots \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{19}$$

(скобка означает симметризацию по соответствующим индексам) и в которой не равные нулю производные метрического тензора определяются только через явно ковариантные величины: тензор кривизны и его ковариантные производные*.

Условия (19) эквивалентны условиям

$$\partial^n (\dots \Gamma_{\alpha\beta}, \gamma) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{20}$$

для символов Кристоффеля с нижними индексами.

В терминах производных от метрического тензора условие (20) соответствует обращению в нуль той их части, которая при перестановке индексов преобразуется по схемам Юнга типа II.

* См. Приложение II.

Пусть g_{mn} и $\tilde{g}_{\mu\nu}$ — метрические тензоры соответственно в произвольной и римановой нормальной системе координат и

$$\left. \begin{aligned} \partial A^m / \partial A^\mu &= \binom{m}{\mu}; \\ \partial^n A^m / \partial A^\alpha \partial A^\beta \dots \partial A^\mu &= \binom{m}{\dots \mu} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

производные преобразования от одной системы координат к другой, т. е.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{mn} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu}. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) n раз по координатам в римановой системе координат и приравнявая нулю вклады в производные от схем Юнга типа II, можно по заданному g_{mn} определить производные для $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и коэффициенты (21).

Производная от $\tilde{g}_{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial^e \dots \tilde{g}_{\mu\nu} &= \partial^e \dots g_{mn} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu} \binom{\cdot}{\cdot} \dots \binom{\cdot}{\cdot} + \dots + \\ &+ (e! / \prod_{p=1}^{\infty} \alpha_p! (p!)^{\alpha_p} n_\mu! n_\nu!) \partial^k \dots g_{mn} \overbrace{\binom{\cdot}{\cdot} \dots \binom{\cdot}{\dots}}^{k \text{ скобок}} \binom{m}{\dots \mu} \times \\ &\times \binom{n}{\dots \nu} + \dots + g_{mn} \binom{m}{\dots \mu} \binom{n}{\nu} + g_{mn} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\dots \nu}, \quad (23) \end{aligned}$$

где k точек в $\partial^k \dots g_{mn}$ и соответственно k верхних точек в скобках $\binom{\cdot}{\dots}$ означают индексы, по которым проводится суммирование:

α_p — число скобок $\binom{\cdot}{\dots}$ с p нижними индексами; n_μ и n_ν —

число нижних индексов, исключая μ и ν , в скобках $\binom{m}{\dots \mu}$

и $\binom{n}{\dots \nu}$. Числа α_p удовлетворяют соотношениям: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n_\mu + n_\nu = l$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Последние два слагаемых в (23) относятся к представлениям типа II по отношению к перестановкам свободных индексов и определяются однозначно из требования, чтобы вклад таких представлений в $\partial^e \dots \tilde{g}_{\mu\nu}$ равнялся нулю.

Матрицы $({}^m_\mu)$ в начале координат произвольны, что соответствует свободе в выборе метрического тензора в начале координат; мы примем, что $({}^m_\mu) |_{A=0} = \delta^m_\mu$. Тогда из последних слагаемых в (23) определяются все величины (\dots^m_μ) .

Домножим соотношение (23) на полевые операторы $A \dots A \cdot \partial A^\mu \partial A^\nu$ и на $1/2 \cdot e!$ и сравним его с выражением для редуцированной $e + 2$ -хвостки, процедура получения которой была сформулирована выше. Сопоставим величину

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \partial^{n \dots} \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \binom{n}{\dots \nu} \right) A \dots A \cdot \partial A^\mu \partial A^\nu \quad (24)$$

редуцированному контактному взаимодействию, в котором первое слагаемое соответствует представлениям типа II, а второе—типа I относительно перестановок индексов. Заметим, что (24) соответствует левой части и последним двум слагаемым правой части в формуле (23).

Последнее слагаемое в (24) можно записать в виде

$$\frac{1}{(n+1)!} g_\rho \cdot \binom{\cdot}{\dots} \underbrace{A \dots A \cdot \partial^2 A^\rho}_{n+1 \text{ операторов}} \quad (25)$$

Общее слагаемое операторов в (23), содержащее производственные $\partial^k \dots g_{mn}$, соответствует диаграмме с одной вершиной (7) и несколькими вершинами (25). При этом скобки (\dots) соответствуют случаю, когда сператор $\partial^2 A$ в вершине (25) связывается с оператором A без производных в вершине (7), а скобки (\dots^m_μ) и (\dots^{ν}_ν) соответствуют аналогичным связям, но с операторами ∂A в вершине (7). Множители g_ρ , при свертке с $g^{\rho\nu}$ в связях операторов (15) переходят в символы Кронекера. Факториалы $(\rho!)^{\alpha_\rho}$, $n_\mu!$ и $n_\nu!$ в знаменателе коэффициента возникают вследствие соответствующих множителей в (25). При этом учитывают множители $(n_\mu + 1)$ и $(n_\nu + 1)$, которые при наличии связи оператора с производной возникают как следствие дифференцирования $(n_\mu + 1)$ операторов без производных в (25). Множители $(\alpha_\rho!)^{-1}$ в коэффициентах (23) появляются вследствие наличия $(k!)^{-1}$ в (7) и множителя $k!/P(\alpha_\rho!)$, дающего число возможных связей (7) с α_1, α_2 и т. д. тождественных вершин. Знак коэффициента определяется множителями $(i)^n$ в (5) и множителями $(-i)$ для каждой связи операторов (15) и является положительным.

Аналогично слагаемые в (23), не содержащие производных от метрического тензора ($k = 0$), соответствуют связи двух вершин (25), и при этом связываются два оператора $\partial^2 A$ в каждой вершине. Свертка таких операторов

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \langle T(A^\mu(x), A^\nu(y)) \rangle = i \partial_x \partial_y g^{\mu\nu} \delta(x - y). \quad (26)$$

При перебросе производных на соответствующие вершины получим, учитывая (25), выражение для слагаемых с $k=0$ в (23), отличающиеся, однако, вследствие различия в знаках (15) и (26), знаком от последних. Это соответствует сформулированному нами ранее правилу выбора знаков (см. рис. 4). Таким образом, мы показали, что задачи нахождения производных $g_{\mu\nu}$ в нормальной системе координат и построения редуцированных матричных элементов с лагранжианом (10) математически эквивалентны. Поэтому при построении S -матрицы на массовой поверхности, независимо от исходной системы координат, результат всегда соответствует нормальной системе координат и не зависит от выбора исходной системы.

При этом оказывается, однако, существенным, чтобы преобразование системы координат оставляло неподвижной точку, в окрестности которой проводится разложение по степеням поля. Если же разложение в ряд проводится по степеням $A - A_0$, то S -матрица будет функцией тензора кривизны и его ковариантных производных в точке A_0 и, следовательно, будет зависеть от ее выбора.

Заметим также, что в добавление к лагранжиану (4) произвольной функции $\varphi(A(x))$ не нарушает ковариантных свойств S -матрицы на массовой поверхности. Наличие дополнительного слагаемого при условии, что $\partial_\mu \varphi(0) = 0$, приводит, во-первых, к появлению массового члена в уравнениях движения свободной частицы

$$\partial^2 A^\mu + M_\nu^\mu A^\nu = 0, \quad (27)$$

где

$$M_\nu^\mu = -g^{\mu\rho} \varphi_{,\rho\nu}(0), \quad (28)$$

и в матричных элементах S -матрицы вне массовой поверхности; и, во-вторых, к появлению новых вершин, не содержащих производных ∂A^μ и зависящих только от производных функции φ в нормальной системе координат

$$\frac{1}{n!} \partial^n \dots \tilde{\varphi} A^* \dots A^*, \quad (n \geq 3). \quad (29)$$

Для доказательства указанного утверждения достаточно рассмотреть выражение для преобразования n -й производной скалярной функции при изменении системы координат

$$\frac{1}{n!} \partial^n \dots \tilde{\varphi} = \sum_k \frac{1}{\prod_p \alpha_p! (p!)^{\alpha_p}} \partial^k \dots \varphi \underbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}_{\alpha_1} \underbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}_{\alpha_2} \dots \quad (30)$$

и сравнить это выражение с результатом, который получается при вычислении по теории возмущений для графиков вида, изо-

браженных на рис. 4. Указанные графики приводят к сумме (30), в которой индекс суммирования $k \geq 3$. Недостающее слагаемое в сумме (30) с $k=2$ можно записать в виде двух слагаемых:

$$\partial^2 \cdot \cdot \varphi \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right) \underbrace{\left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right)}_{n-1} + \partial^2 \cdot \cdot \varphi \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right), \quad (31)$$

первое из которых соответствует добавлению массового члена к функции (25), а второе возникает вследствие наличия массового члена в графиках вида, изображенных на рис. 4, со знаком минус.

Вследствие отсутствия в новых вершинах, возникающих от разложения функции φ в ряд по степеням поля, производных операторов поля по пространственным переменным наличие таких вершин не меняет вида коэффициентов преобразования, и они по-прежнему соответствуют переходу к нормальной системе координат, что и доказывает сформулированное выше утверждение.

2. СИММЕТРИЯ ФЛ И ПРИНЦИП АДЛЕРА

Перейдем к рассмотрению следствий симметрии ФЛ по отношению к преобразованиям группы G . Изучим сначала наиболее простой, но, по-видимому, наиболее существенный для физических приложений случай, когда пространство G/H является симметрическим пространством [10], т. е. пространством, для которого во всех точках

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta, \mu} = 0, \quad (32)$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta, \mu}$ — ковариантная производная тензора кривизны.

Симметрические пространства тесным образом связаны с геометрией полупростых групп Ли. Для произвольной полупростой группы Ли G всегда можно выделить подгруппу H так, что имеют место перестановочные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] &= ib_{\alpha\beta}^c Y_c; \\ [X_\alpha, Y_\beta] &= ia_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma; \\ [Y_a, Y_b] &= ic_{ab}^c Y_c, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где Y_a — генерирующие операторы подгруппы H . В пространстве G/H в этом случае всегда можно ввести метрику таким образом, что оно явится симметрическим пространством. В частности, симметрия киральных групп приводит к рассмотрению симметрических пространств.

Для симметрических пространств, как следствие (32), метрический тензор в нормальной системе координат однозначно опре-

деляется значением тензора кривизны в начале координат и имеет следующий вид:

$$g_{\mu\nu}(A^\rho) = g_{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+2)!} (m^k)_\mu^\rho g_{\rho\nu}, \quad (34)$$

где

$$m_\mu^\nu = R_{\mu\alpha\beta}^\nu A^\alpha A^\beta; \quad (35)$$

тензор кривизны выражается через структурные константы, входящие в перестановочные соотношения (33):

$$R_{\mu\alpha\beta}^\nu = -b_{\mu\alpha\beta c}^c a_{\beta c}^\nu. \quad (36)$$

Соотношения (28)–(31) полностью определяют эффективный лагранжиан взаимодействия (4) для рассматриваемого типа симметрии.

Матричные элементы S -матрицы, которые вычислены на основе ФЛ (5), определенного посредством (34), обладают следующим свойством, которое не зависит от числа частиц, участвующих в процессе взаимодействия.

Если все частицы находятся на массовой поверхности, то при стремлении 4-импульса одной из частиц к нулю, матричный элемент S -матрицы обращается в нуль (принцип Адлера [16]). В дальнейшем несколько уточним это определение.

Для случая четырех взаимодействующих частиц в соответствии с (17) и (34):

$$L^{(2)} = -R_{\cdot\mu, \cdot\nu} A^\cdot A^\cdot \partial A^\mu \partial A^\nu / 6. \quad (37)$$

Если одна из частиц имеет нулевой импульс, то выражение (35) можно записать в виде:

$$L^{(2)} = R_{\cdot\mu, \cdot\nu} A^\cdot A^\cdot \bar{A}^\mu \partial^2 A^\nu / 3, \quad (38)$$

где \bar{A}^μ — оператор частицы с нулевым импульсом и, следовательно, обращается в нуль на массовой поверхности.

Переход от (37) к (38) связан с тем, что симметрия тензора кривизны относительно перестановок индексов, как было показано

выше, соответствует схеме Юнга $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. Так как $\partial \bar{A}^\mu = 0$, опера-

тор \bar{A}^μ можно исключить при рассмотрении перестановок индексов, тогда три остальных оператора преобразуются соответственно

схеме Юнга $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ и, следовательно, их можно преобразовать к

виду, когда один из операторов содержит вторую производную. Ана-

логичная ситуация имеет место для большего числа частиц. После выделения оператора \bar{A}^μ полюсные члены редуцируются к контактным взаимодействиям таким образом, что сумму исходных и редуцированных контактных взаимодействий можно преобразовать к виду:

$$L^{(2n)} = [2^{2n}/(2n)!] B_n (m^n)_\mu^\rho g_{\rho\nu} \bar{A}^\mu \partial^2 A^\nu, \quad (39)$$

где B_n — число Бернулли и, следовательно, обращается в нуль на массовой поверхности.

Мы не останавливаемся на выводе соотношения (39), так как ниже подробно рассмотрим эквивалентность принципа Адлера инвариантности ФЛ, не ограничиваясь классом симметрических пространств. Заметим, что (39) не является полным матричным элементом S -матрицы, а является лишь некоторой эффективной вершиной. Чтобы построить полный матричный элемент, необходимо рассмотреть свертки операторов в вершинах (34) и (39), не содержащих операторы $\partial^2 A$.

Требование инвариантности ФЛ относительно преобразований группы G можно записать в виде

$$\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha = 0 \quad (40)$$

(уравнения Киллинга), где ξ^α — векторное поле на G/H , связанное с каким-либо из генерирующих операторов группы соотношением

$$X = i\xi^\alpha \partial_\alpha. \quad (41)$$

Будем рассматривать преобразования (41), соответствующие смещениям начала координат. Для таких преобразований ξ^α можно записать в виде:

$$\xi^\alpha = \varepsilon^\alpha + \varepsilon^\beta f_\beta^\alpha, \quad (42)$$

где ε^α — постоянный вектор. Компоненты ε^α можно выбрать произвольно, так как все генерирующие операторы смежных классов можно представить в виде (42), и число таких независимых операторов совпадает с размерностью пространства G/H .

Дифференцируя (40) n раз, получаем:

$$\begin{aligned} & \partial^{n+1} \dots \alpha g_{\mu\nu} + \dots + \frac{n!}{m!(n-m)!} \partial^{m+1} f_\alpha^\beta \partial^{n-m-1} g_{\mu\nu} + \\ & + \dots + \frac{n!}{m!(n-m)!} \partial^{m+1} f_\alpha^\beta \partial^{n-m} g_{\mu\beta} + \dots + \\ & + \frac{n!}{m!(n-m)!} \partial^{m+1} f_\alpha^\beta \partial^{n-m} g_{\nu\beta} + \dots + \\ & + g_{\mu\beta} \partial^{n+1} f_\alpha^\beta + g_{\nu\beta} \partial^{n+1} f_\alpha^\beta = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

Соотношения (43) необходимы и достаточны для того, чтобы выполнялся принцип Адлера. Выполнение его означает, что матричный элемент S -матрицы с фиксированным числом внешних линий можно представить в виде суммы полюсных диаграмм с редуцированными матричными элементами в качестве вершин и одной вершиной вида

$$f_{n-2}^{(\dots\alpha, \rho A \cdot A \cdot \dots A \cdot \bar{A}^\alpha \partial^2 A_\rho),} \quad (44)$$

содержащей оператор \bar{A}^α частицы с нулевым импульсом. Поскольку все вершины предполагаются редуцированными, связи операторов, соответствующие полюсам, не содержат операторы $\partial^2 A$. Так как вершина (44) содержит оператор $\partial^2 A$ для внешней частицы, то, если все частицы находятся на массовой поверхности, эта вершина обращается в нуль. Если при переходе к пределу знаменатели полюсов не обращаются в нуль, то и весь матричный элемент в рассматриваемом пределе обращается в нуль.

Покажем, что если редуцированные вершины, содержащие оператор \bar{A}^α с n и меньшим числом внешних линий, имеют вид (44), то из требования симметрии лагранжиана (40) следует, что редуцированные вершины с $n + 1$ внешними линиями также имеют вид (44). Как будет видно непосредственно из доказательства, справедливо и обратное утверждение, т. е. если редуцированные вершины, содержащие оператор \bar{A} , имеют вид (44) для произвольного числа внешних линий, то выполняется соотношение (40) и лагранжиан инвариантен относительно некоторой транзитивной группы.

Для простоты будем пользоваться нормальной системой координат. В этом случае редуцированные вершины, не содержащие \bar{A} ,

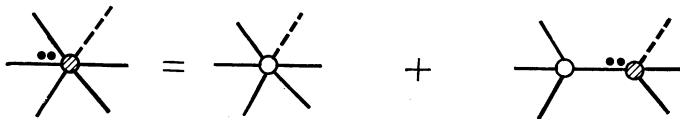


Рис. 5. Схема изображения редукции диаграмм низших порядков, приводящей к принципу Адлера: пунктиром изображена линия, соответствующая частице с нулевым импульсом.

совпадают с производными от метрического тензора. Чтобы найти редуцированный матричный элемент с $n + 1$ внешними линиями, необходимо учесть все возможные редукции полюсных членов. Так как только выражения (44) содержат операторы $\partial^2 A$, то все возможные диаграммы, приводящие к редукции, имеют вид, показанный на рис. 5, где пунктирной линией изображен оператор

частицы с нулевым импульсом. В общем случае диаграммы, приводящие к редукции, имеют вид полюсных диаграмм с двумя вершинами, одна из которой соответствует членам разложения лагранжиана (7) по степеням поля A , а другая имеет вид (44). Причем свертка, соответствующая полюсу, содержит оператор $\partial^2 A$ в (44).

Умножим (43) на $\bar{A}^\alpha A^\rho \dots A^\nu \partial A^\mu \partial A^\nu / 2 \cdot n!$, тогда вклад рассматриваемых диаграмм совпадет с выражением (43) без двух последних слагаемых при условии, что

$$f^{\dots\alpha, \rho} = \partial^{\dots z} f^\beta_\alpha g_{\beta\rho} / (k - 2)! \tag{45}$$

При этом члены в (43) соответствуют: первое слагаемое — взаимодействию (7); второе и третье, а также четвертое — полюсной диаграмме, в которой связь оператора $\partial^2 A$ в (44) происходит соответственно с A или с ∂A . Наличие последних двух слагаемых в (43) означает, что при наличии симметрии сумму рассматриваемых диаграмм можно преобразовать к виду (44), т. е. принцип Адлера выполняется и для матричных элементов с $n + 1$ частицами.

И наоборот, если выполняется принцип Адлера и имеет место (44), то это означает, что в суммарном матричном элементе отсутствуют представления со схемой Юнга типа I относительно перестановок индексов операторов частиц с ненулевым импульсом и что, как следствие, имеет место соотношение (43). Таким образом, принцип Адлера эквивалентен требованию инвариантности лагранжиана относительно преобразований группы G .

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГОЛДСТОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ С ДРУГИМИ ЧАСТИЦАМИ

Перейдем к рассмотрению, каким образом метод ФЛ позволяет описывать взаимодействие голдстоуновских частиц с другими частицами. Имея в виду применение метода ФЛ не только к точным, но и к нарушенным симметриям, рассмотрим сначала схему включения взаимодействия с другими полями для случая, когда ФЛ голдстоуновских частиц имеет вид (5) с произвольной метрической формой, и лишь затем перейдем к рассмотрению случая точной симметрии.

Соответственно для метрической формы (5) можно ввести в каждой точке пространства A^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) некоторый ортогональный базис. Задавая в каждом базисе в качестве новых независимых переменных компоненты ψ_i какого-либо представления SO -группы, перейдем к рассмотрению расширенного, так называемого расслоенного пространства с координатами A^α и ψ_i , которые можно использовать для описания как голдстоуновских, так и других частиц.

Определяя каким-либо образом параллельный перенос и ковариантное дифференцирование, например введением обычной римановой связности, можно ковариантным образом включить в ФЛ члены, содержащие любое представление $SO(n)$ -группы и его производные. Указанная процедура аналогична хорошо известной процедуре включения спиноров в общей теории относительности.

Для метода ФЛ существенно следующее обстоятельство. Введение ортогонального базиса в различных точках пространства не является однозначной процедурой. При переходе к новому базису сохраняется ковариантность выражений, входящих в ФЛ, однако явная функциональная зависимость этих выражений от A^α имеет различный вид в различных базисах таким образом, что матричные элементы S -матрицы также различны в этих базисах.

Можно показать (см. работы [4]), что если все частицы находятся на массовой поверхности, то матричные элементы S -матрицы, полученные в результате суммирования диаграмм типа дерева, допускают перестройку к не зависящему от выбора базиса виду. Матричные же элементы S -матрицы вне массовой поверхности содержат дополнительные, зависящие от выбора базиса члены, которые простым образом связаны с функцией преобразования от произвольно рассматриваемого базиса к базису, определяемому параллельным переносом по геодезическим линиям базиса в начале координат. Используемая для доказательства указанных утверждений процедура перестройки матричных элементов аналогична рассмотренной в параграфе 2, основана на разложении производений операторов поля по схемам Юнга и редукции полюсных членов для полей ψ_i , и мы не будем останавливаться на ней подробно.

Более существенным с физической точки зрения является то обстоятельство, что мультиплеты других частиц могут не допускать их классификации по представлениям $SO(n)$ -группы и допускать только ограниченную классификацию по представлениям какой-либо из ее подгрупп. Например, для случая нарушенной $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии форма (5) соответствует восьмерному риманову пространству, однако известные мультиплеты барионов и других частиц не допускают классификации соответственно представлениям $SO(8)$ -группы, а допускают ограниченную их классификацию только по представлениям $SU(3)$ -группы, являющейся подгруппой $SO(8)$ -группы. В этом случае требование существования ковариантных производных для отдельных $SU(3)$ -мультиплетов является сильным ограничением на структуру риманова пространства.

В общем случае для введения ковариантных производных для каждого представления какой-либо подгруппы H группы $SO(n)$ необходимо и достаточно, чтобы пространство было таким, что при обходе по любому замкнутому циклу различные геометриче-

ские объекты претерпевали преобразование подгруппы H , т. е. чтобы группа H была так называемой группой голономии рассматриваемого пространства *. При наличии определенной группы голономии H ковариантные производные для всех мультиплетов группы H определяются в базисе, полученном параллельным переносом по кривым базиса в начале координат, и имеют в общем случае вид

$$D\psi_i = \partial\psi_i + (\lambda_m)_i^k \theta^m (\partial A) \psi_k, \tag{46}$$

где матрицы λ^m — генераторы группы H для рассматриваемого представления. В методе ФЛ первое слагаемое в (46) определяет обычную производную по пространственно-временным переменным, а второе добавку, обусловленную изменением базиса при переходе от точки $A^\alpha(x)$ к точке $A^\alpha(x) + dx \partial A^\alpha(x)$ **.

При преобразовании базиса ковариантная производная (46) преобразуется так же, как ψ_i . При заданной группе голономий ковариантные по отношению к локальным преобразованиям базисов величины соответствуют инвариантам группы H , составленным из ψ_i , $D\psi_i$ и компонент $\omega_i(\partial A)$ вектора ∂A^α в рассматриваемом базисе.

Покажем, что при переходе к случаю, когда пространство с метрикой (5) является однородным пространством с группой симметрий G , инварианты относительно преобразований подгруппы H становятся также инвариантами относительно преобразований группы G . Действительно, если, считая, что определенные параллельным переносом локальные базисы жестко связаны с пространством, произвести какое-либо преобразование пространства, соответствующее группе G , то новые базисы в произвольной точке будут отличаться некоторым поворотом от старого базиса в той же точке. Легко убедиться, что результирующий поворот всегда есть преобразование группы голономии ***.

* Заметим, что для рассмотренного выше примера нарушенной $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии требование существования римановой связности с группой голономии $SU(3)$ однозначно определяет структуру риманова пространства. Для нарушенной группы $SU(2) \otimes SU(2)$ аналогичное требование не приводит к каким-либо ограничениям [17].

** Определение «ковариантной производной» (46) совпадает с обычным определением ковариантного дифференциала в геометрии римановых пространств и пространств аффинной связности при учете зависимости полей A^α от пространственных координат x . Заметим, что в формуле (46) поля считаются не зависящими от A^α . В том случае, когда такая зависимость возникает, например при переходе к другому базису, к (46) необходимо добавить слагаемое $d\psi/dA^\alpha dA^\alpha$ (см. параграф 5).

*** Для этого достаточно определить базисы параллельным переносом вдоль кривой $A'BA$, где A — начальная, A' — конечная и B — неподвижная точки преобразования; $A'B$ и BA — геодезические, соединяющие соответствующие точки.

Для разных точек пространства преобразования базисов будут различными. Описанная выше процедура, вследствие отнесения компонент представления к базисным ортам в каждой точке пространства, определяет преобразование группы G для каждого представления группы голономии H . Из описанной выше процедуры также следует, что любая H -инвариантная комбинация, построенная из компонент различных представлений группы H , оказывается также инвариантной и относительно определенных указанным выше образом преобразований группы G .

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КАРТАНА

В предыдущем параграфе было показано, что при построении ФЛ удобно пользоваться математическим аппаратом дифференциальной геометрии. Здесь приведем некоторые формулы, которые позволяют простым образом получить основные соотношения метода ФЛ посредством использования дифференциальных форм Картана.

Описание геометрии римановых пространств и пространств аффинной связности на основе использования дифференциальных форм проводилось в классических работах Э. Картана (см., например, [10, 11]).

Основу такого описания составляют структурные уравнения Картана:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^i)' &= \omega^k \Lambda \omega_k^i - \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \Lambda \omega^k; \\ (\omega_i^j)' &= \omega_i^k \Lambda \omega_k^j - \frac{1}{2} R_{ikh}^j \omega^k \Lambda \omega^h, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

устанавливающие связь дифференциальных форм ω^i и ω_i^k с тензорами кривизны R_{ikh}^j и кручения T_{jk}^i . Штрих в формуле (47) означает внешнее дифференцирование, а знак Λ — внешнее произведение дифференциальных форм.

В пространстве с координатами a^α в некотором базисе, непрерывным образом зависящем от параметров b^i , дифференциальная форма ω^i определяет вектор da^α , т. е.

$$\omega^i = \omega^i(a, b, da), \quad (48)$$

а форма

$$\omega_i^k = \omega_i^k(a, b, da, db) \quad (49)$$

определяет [преобразование компонент вектора при изменении базиса

$$dB^i(a, b) = -\omega_k^i(a, b, 0, db) B^k \quad (50)$$

и ковариантный дифференциал вектора

$$DB^i = \frac{\partial B^i}{\partial a} da + \omega_k^i(a, b, da, 0) B^k. \quad (51)$$

Как следствие формулы (47) и определений (50) и (51) базис DB^i преобразуется по формуле (50).

В случае, если группа голономии рассматриваемого пространства (см. параграф 4) является подгруппой аффинной группы, формы ω_k^i , являются линейной комбинацией генераторов группы голономии:

$$\omega_k^i(a, b, da, db) = (\lambda_\alpha)_k^i \theta^\alpha(a, b, da, db), \quad (52)$$

и соответственно преобразование компонент вектора (50) и определение ковариантных производных (51) можно провести для любого представления группы голономии.

Если рассматриваемое пространство является однородным пространством с транзитивной группой симметрии, то формы Картана можно выразить через дифференциальные формы ω^i и θ^α , определяющие структуру группы [10, 11]

$$\left. \begin{aligned} (\omega^i)' &= C_{k\alpha}^i \omega^k \Lambda \theta^\alpha + \frac{1}{2} C_{kl}^i \omega^k \Lambda \omega^l; \\ (\theta^\alpha)' &= \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \Lambda \theta^\gamma + \frac{1}{2} C_{kl}^\alpha \omega^k \Lambda \omega^l, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где $C_{k\alpha}^i$, C_{kl}^i , C_{kl}^α и $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные постоянные группы, генераторы которой удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [Y_\alpha, Y_\beta] &= i C_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma; \\ [X_k, Y_\alpha] &= i C_{k\alpha}^i X_i; \\ [X_k, X_l] &= i C_{kl}^\alpha Y_\alpha + i C_{kl}^m X_m. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

В соотношениях (54) явно выделены операторы Y_α , относящиеся к подгруппе H , и генераторы X_i относятся к определенным представлениям подгруппы H . При параметризации элементов группы посредством представления

$$G(a, b) = K(a) H(b) \quad (55)$$

дифференциальные формы ω^i и θ^α определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{-1}(a, b) dG(a, b) &= i \omega^i(a, b, da) X_i + \\ &+ i \theta^\alpha(a, b, da, db) Y_\alpha. \end{aligned} \quad (56)$$

Соотношения (53) являются следствием определения (56) и перестановочных соотношений (54).

Структурные уравнения группы (53) всегда можно записать в виде уравнений (47). Рассмотрим в качестве примера произвольную полупростую группу при выборе в ней подгруппы так, чтобы структурные постоянные со своими латинскими индексами равнялись нулю:

$$C^i_{ik} = 0. \quad (57)$$

Сравнивая уравнения (47) и (53), получаем

$$\omega^i_k = C^i_{k\alpha} \theta^\alpha \quad (58)$$

и

$$T^i_{jk} = 0; \quad R^j_{ikl} = -C^j_{i\alpha} C^\alpha_{kl}. \quad (59)$$

Используя определение ковариантной производной и известные свойства структурных постоянных, легко показать, что

$$R^j_{ihl}; m = 0, \quad (60)$$

т. е. пространство является симметрическим.

Вследствие того что матрицы $C^i_{k\alpha}$ реализуют представление подгруппы H [см. формулу (52)], она является группой голономии рассматриваемого симметрического пространства. Как отмечалось выше, в этом случае ковариантные производные существуют для каждого представления подгруппы H .

В формулах (47)–(58) удерживалась зависимость от параметров b , характеризующих выбор локального базиса. Это оказывается удобным при рассмотрении свойств симметрии форм ω^i и θ^α . Действительно, при действии слева на (55) произвольным элементом группы G выражение (56) не изменяется, следовательно, при преобразованиях группы формы ω^i и θ^α являются инвариантами, т. е.

$$\omega^i(a, b, da) = \omega^i(a', b', da'); \quad (61)$$

$$\theta^\alpha(a, b, da, db) = \theta^\alpha(a', b', da', db'). \quad (62)$$

При этом существенным оказывается то, что правые части соотношений (61) и (62) содержат преобразованные значения параметров b и db .

Соотношения (61) и (62) в свою очередь определяют преобразования группы

$$a' = a'(a, g); \quad (63)$$

$$b' = b'(a, b, g). \quad (64)$$

Соотношение (63) определяет преобразование координат при преобразованиях группы; соотношение (64) показывает, что базис в точке с координатами a преобразуется в новый базис.

При фиксированном выборе базиса, например при $b = 0$, дифференциальные формы ω^i и θ^α не являются инвариантными. Их преобразование при бесконечно малых преобразованиях группы можно определить на основе структурных уравнений (53).

Действительно, в этом случае (64) можно записать в виде

$$b' = \delta b(a, 0, g). \tag{65}$$

Из-за независимости форм ω^i от дифференциалов db , как следствие (53), получим

$$\delta\omega^i = -C_{h\alpha}^i \theta^\alpha(a, 0, 0, \delta b) \omega^h(a, 0, da), \tag{66}$$

т. е. при преобразованиях группы G формы ω^i преобразуются как представления подгруппы H с параметрами преобразования, зависящими от координат a .

Преобразование (66) применимо к любому представлению подгруппы H , если в нем матрицы $C_{h\alpha}^i$ заменить матрицами соответствующего представления, т. е.

$$\delta\psi = -\lambda_\alpha \theta^\alpha(a, 0, 0, \delta b) \psi. \tag{67}$$

Ковариантные производные для представления ψ определяются соотношением

$$D\psi = d\psi + \lambda_\alpha \theta^\alpha(a, 0, da, 0) \psi. \tag{68}$$

Как следствие уравнений (68) при преобразованиях группы G $D\psi$ преобразуется так же, как ψ , т. е. соответственно формуле (67). Таким образом, для написания лагранжиана инвариантного относительно преобразования группы G достаточно составить из ω^i , ψ и $D\psi$ все возможные комбинации, инвариантные относительно подгруппы H *.

Найдем ω^i и θ^α , входящие в выражение для ковариантных производных для случая симметрических пространств. В нормальной системе координат, соответствующей экспоненциальной параметризации (55) $x^\mu = a^\mu t$, уравнения (47) можно записать в виде [11]:

$$\left. \begin{aligned} \partial \bar{\omega}^i / \partial t &= da^i + a^h \omega_k^i; \\ \partial \omega_e^i / \partial t &= -R_{ejk}^i a^j \bar{\omega}^k, \end{aligned} \right\} \tag{69}$$

где $\omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i$ при $t = 0$; $\bar{\omega}^i(t, a^j; da^h)|_{t=0}$ и $\omega_e^i \times \times (t, a^j; da^h)|_{t=0} = 0$.

Вследствие равенства нулю ковариантных производных тензора кривизны и вследствие того, что базис определяется операцией параллельного переноса, компоненты R_{ejk}^i являются постоянными

* Этот результат совпадает с полученным в работе [3].

и уравнение (69) элементарно интегрируется:

$$\omega^i |_{t=1} = \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (m^n)_k^i da^k; \quad (70)$$

$$\omega_k^i |_{t=0} = \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} R_{kje}^i a^j (m^n)_p^l da^p, \quad (71)$$

где $m_e^i = R_{kne}^i a^k a^n$.

Заметим, что формула (29) из п. 3 является следствием (70) и соотношения

$$g_{\mu\nu} \partial a^\mu \partial a^\nu = g_{ik} \omega^i \omega^k. \quad (72)$$

5. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ДЛЯ ГРУПП СИММЕТРИИ, СОДЕРЖАЩИХ В КАЧЕСТВЕ ПОДГРУППЫ ГРУППУ ПУАНКАРЕ

Метод инвариантных форм Картана может применяться также и для групп симметрии, преобразования которых относятся не только к внутренним переменным, но и к пространственно-временным координатам и переменным спина. Пусть G — такая группа симметрии. Представим произвольный элемент группы G в виде

$$G = \exp(iPx) K(a) H(b) L(l), \quad (73)$$

где P — оператор энергии импульса; x — пространственно-временные координаты; $L(l)$ — конечное преобразование собственной группы Лоренца; $H(b)$ — подгруппа преобразований внутренних симметрий, оставляющая вакуум инвариантным. Произведение $\exp(iPx) K(a)$ параметризует левый смежный класс группы G по подгруппе HL .

Представление (73) соответствует рассмотренному ранее представлению (1) с выделенными явно преобразованиями, соответствующими группе Пуанкаре. Из представления (73) непосредственно следует, что при действии на него слева преобразованием группы Пуанкаре координаты x преобразуются обычным способом.

При действии на (73) слева произвольным элементом группы G координаты x преобразуются сами через себя или совместно с параметрами a , в зависимости от того, является произведение KHL подгруппой или нет. При построении ФЛ последний случай принципиально ничем не отличается от первого, если не считать чисто психологического затруднения, связанного с тем обстоятельством, что при замене параметров a полями голдстоуновских частиц $A(x)$ координаты x' при преобразованиях группы G являются функциями старых координат x и полей $A(x)$.

Для нахождения ФЛ для группы (73) построим инвариантные формы Картана (56). Для генераторов, соответствующих двум первым сомножителям, эти формы имеют вид

$$\omega^i(x, a, dx, da, b, l). \quad (74)$$

Как следует из параграфа 5, любая комбинация форм (5), инвариантная при фиксированных значениях b и l относительно преобразований из подгруппы HL , не зависит от параметров b и l и является инвариантом группы G . Для того чтобы такую комбинацию можно было использовать для построения ФЛ, необходимо и достаточно представить ее в виде произведения некоторой функции на элемент 4-объема d^4x для пространственно-временных переменных. Простейшая комбинация такого вида соответствует внешнему произведению четырех форм (74). Действительно, при подстановке в (74) вместо параметров a полей голдстоуновских частиц $A(x)$ дифференциалы da заменяются дифференциалами $\frac{\partial A}{\partial x} dx$, вследствие чего антисимметризованное произведение четырех форм ω^i становится пропорциональным d^4x и множитель перед d^4x является функцией, зависящей от координат x , полей $A(x)$ и их производных. Заметим, что каждый из сомножителей не инвариантен относительно группы G ; инвариантно только все произведение в целом.

Внешнее произведение четырех форм ω^i имеет простой геометрический смысл и соответствует бесконечно малому инвариантному относительно преобразований группы G 4-объему в n -мерном пространстве с координатами x и a .

Более сложные инварианты группы G можно строить следующим образом. Обозначим W_k произвольное внешнее произведение (не обязательно инвариантное относительно группы G) четырех форм (74). Каждая из таких форм пропорциональна d^4x . Составим из форм W_k выражение, инвариантное относительно преобразований подгруппы HL и однородное степени единица относительно элемента d^4x . Такое выражение будет инвариантно относительно преобразований группы G и пропорционально d^4x и, следовательно, может использоваться для построения ФЛ.

Простейшие после форм W_i выражения такого типа и содержащие минимальное число производных от полей имеют вид $W_i W_i / W_0$, где W_i — формы, полученные антисимметризацией трех форм, соответствующих операторам энергии — импульса, и одной формы, соответствующей генераторам, входящим в $K(a)$; W_0 — инвариантный объем, построенный из четырех форм, соответствующих операторам энергии — импульса. Легко видеть, что для случая группы G , являющейся прямым произведением группы Пуанкаре и группы внутренних симметрий, выражение $W_i W_i / W_0$ совпадает с рассмотренным ранее выражением (72).

Использование дифференциальных форм, связанных с генераторами, входящими в H и L , позволяет стандартным образом определить ковариантное дифференцирование для произвольного представления подгруппы HL и включить в рассматриваемую схему взаимодействия с другими полями. При этом компоненты таких полей можно добавить в виде множителей к выражениям вида $W_i W_j / W_0$ с единственным требованием, чтобы результирующие выражения, определяющие структуру ФЛ, были инвариантны относительно подгруппы HL . Ковариантные же дифференциалы дополнительных полей рассматриваются наравне с дифференциальными формами (74) и входят структурными единицами во внешние произведения W_i .

При наличии среди параметров a или среди дополнительных полей представлений группы Лоренца с полудцелым спином построение ФЛ для соответствующих полей проводится с помощью антикоммутирующих величин.

Заметим, что при построении ФЛ рассмотренным выше методом число полей голдстоуновских частиц может быть меньше числа параметров a . Указанное обстоятельство связано с тем, что ФЛ определен с точностью до полных производных по пространственно-временным координатам. Поэтому если какое-либо из полей голдстоуновских частиц или, что то же самое, какой-нибудь из параметров α^α входит только под знаком полной пространственной производной, то наличие такого поля не сказывается на физических свойствах системы. Вместе с тем, вследствие того, что при преобразованиях группы G члены вида полных производных преобразуются совместно с частью ФЛ для других полей голдстоуновских частиц, структура ФЛ нетривиальным образом зависит от учета таких членов. В дальнейшем проиллюстрируем настоящее замечание на примере ФЛ, инвариантного относительно конформной группы.

Выше была рассмотрена общая схема построения ФЛ для группы G с параметризацией (73), выделяя при этом явно группу Лоренца и группу внутренних симметрий H , по отношению к которым использовались линейные представления. Укажем на интересную возможность замены в представлении (73) произведения HL более общим выражением, не сводящимся к прямому произведению группы Лоренца на группу внутренних симметрий. В качестве примера приведем группу $SL(6, C)$ и другие релятивистские обобщения группы $SU(6)$.

В рассматриваемой схеме, при действии на представление (73) справа преобразованием такой группы, координаты x преобразуются совместно с полями голдстоуновских частиц, вследствие чего рассматриваемый подход существенно отличается от обычных схем релятивизации $SU(6)$ -симметрии и может быть свободен от присущих им трудностей.

Как пример использования рассмотренной выше схемы приведем построение ФЛ для случая симметрии конформной группы*.

Генераторы конформной группы удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [M_{\mu\nu}, D] &= 0; \\ [P_\mu, D] &= iP_\mu; \\ [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= -i(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu); \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}); \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0; \\ [D, K_\mu] &= iK_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где P_μ — операторы энергии импульса; $M_{\mu\nu}$, D и K_μ — соответственно генераторы группы Лоренца, масштабных и собственно конформных преобразований. Для краткости в (75) опустили хорошо известные перестановочные соотношения между операторами P_μ и $M_{\mu\nu}$, определяющими группу Пуанкаре.

В соответствии с представлением (73) запишем произвольный элемент конформной группы в виде:

$$G = \exp(iPx) \exp(iK\varphi) \exp(iD\eta), \quad (76)$$

где φ^μ и η — векторное и скалярное поля голдстоуновских частиц.

Для рассматриваемой параметризации выражение $G^{-1}dG$, определяющее дифференциальные формы Картана в соответствии с (56), имеет вид:

$$\begin{aligned} G^{-1}dG &= L^{-1}(\exp(-iD\eta) \exp(-iK\varphi) iP dx \times \\ &\quad \times \exp(iK\varphi) \exp(iD\eta) + \\ &+ \exp(-iD\eta) iK d\varphi \exp(iD\eta) + iD d\eta) L + L^{-1}dL. \end{aligned} \quad (77)$$

Используя (75), легко найти дифференциальные формы, соответствующие различным генераторам:

$$\omega(P)^\mu = dx^\mu \exp(-\eta); \quad (78)$$

$$\omega(D) = d\eta - 2\varphi dx; \quad (79)$$

$$\omega(K)^\mu = (d\varphi^\mu + 2\varphi^\mu(\varphi dx) - dx^\mu \varphi^2). \quad (80)$$

В выражениях (78) обозначение в скобках у дифференциальной формы означает, какому генератору в разложении (56) данная форма соответствует. В этом выражении для краткости опустили не существенные для дальнейшего лоренцовы матрицы в (77) и форму $\omega(M)^{\mu\nu}$.

Инвариантные внешние произведения четырех форм ω , не содержащие производных от полей η и φ^μ выше второй степени, имеют

* ФЛ для конформной группы был впервые рассмотрен в работе [4] (см. также обзоры [15]).

ВИД:

$$W(P, P, P, P) = \exp(-4\eta) d^4x; \quad (81)$$

$$W(K, P, P, P) = (\partial\varphi - 2\varphi^2) \exp(-2\eta) d^4x; \quad (82)$$

$$W(K, K, P, P) = [(\partial\varphi)^2 - \partial_\mu\varphi^\nu \partial_\nu\varphi^\mu - 2\partial_\mu(\varphi^\mu\varphi^2)] d^4x, \quad (83)$$

где обозначение генераторов в скобках соответствует формам, входящим во внешнее произведение.

Инвариантные выражения вида $W_i W_i / W_0$, содержащие минимальное число производных от полей и независимые от (82) и (83), имеют следующий вид:

$$\frac{W^\mu(D, P, P, P) W_\mu(D, P, P, P)}{W(P, P, P, P)} = (\partial\eta - 2\varphi)^2 \exp(-2\eta) d^4x; \quad (84)$$

$$\frac{W(K, P, P, P) W(K, P, P, P)}{W(P, P, P, P)} = (\partial\varphi - 2\varphi^2)^2 d^4x; \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & \frac{W_{\mu\nu}(K, P, P, P) W^{\mu\nu}(K, P, P, P)}{W(P, P, P, P)} = \\ & = \frac{1}{4} (\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu) (\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu) d^4x. \end{aligned} \quad (86)$$

В выражения (85) и (86) входят две формы, содержащие генераторы K, P, P и P , скалярного и тензорного типа в зависимости от сверток индексов соответствующих дифференциальных форм. ФЛ для полей η и φ^μ представляется в виде комбинации форм (82)–(86) с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим теперь, можно ли построить конформно-инвариантный ФЛ, используя только поле η . Кинетический член для такого поля содержится в (84), однако производные от поля η входят в это выражение вместе с полем φ_μ . Для устранения последнего заметим, что из (84) и (82) можно составить следующую линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} & [0,5(\partial\eta - 2\varphi)^2 \exp(-2\eta) + (\partial\varphi - 2\varphi^2) \exp(-2\eta)] d^4x = \\ & = [0,5(\partial\eta)^2 \exp(-2\eta) + \partial(\varphi \exp(-2\eta))] d^4x, \end{aligned} \quad (87)$$

в которой поле φ^μ входит только под знаком полной производной.

Таким образом, ФЛ для поля η может быть взят в виде (87). Заметим, что второе слагаемое нельзя полностью отбросить, так как при преобразованиях конформной группы только выражение (87) в целом является инвариантным.

В общем случае с включением полей, взаимодействующих с полем η , условие, чтобы поле φ^μ входило только под знак полной производной, эквивалентно известному условию [16], при котором лагранжиан, инвариантный относительно масштабных преобразований, становится также конформно-инвариантным.

В заключение заметим, что рассмотренная выше возможность уменьшения числа полей голдстоуновских частиц связана с тем, что, во-первых, существуют слагаемые типа (82), имеющие вид внешних произведений, и, во-вторых, с тем, что исключаемые поля соответствуют генераторам некоторой абелевой подгруппы*.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Покажем, что уравнения для редуцированного матричного элемента, сформулированные на основе рассмотрения диаграмм Фейнмана, могут быть получены использованием квазиклассического подхода. Такой подход при рассмотрении полюсных диаграмм использовался в работе Намбу [13]. Здесь воспроизведем некоторые результаты этой работы, а также рассмотрим некоторое обобщение подхода, используемого Намбу, для получения интересующего нас уравнения. S -Матрицу в представлении взаимодействия можно представить в виде

$$S = T \left[\exp \left(i \int L_{\text{int}}(\varphi) d^4x \right) \right] \quad (\text{I.1})$$

или соответственно в виде нормального произведения

$$S = N \left[\exp \left(\frac{1}{2} \iint \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Delta(x-x') \frac{\delta}{\delta\varphi(x')} d^4x d^4x' \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i \int L_{\text{int}}(\varphi) d^4x \right) \right]. \quad (\text{I.2})$$

В формулах (I.1) и (I.2) используется нейтральное скалярное поле φ :

$$\Delta(x-x') = \langle T\varphi(x)\varphi(x') \rangle \quad (\text{I.3})$$

пропагатор свободного поля.

Обобщение на произвольное число Бозе и ферми-полей можно произвести без каких-либо затруднений. Введем в качестве вспомогательной величины функцию S_η :

$$S_\eta = N \left[\exp \left(\frac{1}{2} \eta \iint \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Delta(x-x') \frac{\delta}{\delta\varphi(x')} d^4x d^4x' \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i \int L_{\text{int}}(\varphi) d^4x \right) \right], \quad (\text{I.4})$$

т. е.

$$S_\eta |_{\eta=1} = S. \quad (\text{I.5})$$

Представляя S_η в виде

$$S_\eta = \exp [iA(\eta, \varphi)], \quad (\text{I.6})$$

где $A(\eta, \varphi)$ соответствует сумме всех связанных диаграмм, и дифференцируя (I.6) и соответственно (I.4) по η , получаем следующее уравнение, определяющее функцию $A(\eta, \varphi)$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} - \frac{i}{2} \iint \frac{\delta A}{\delta\varphi(x)} \Delta(x-x') \frac{\delta A}{\delta\varphi(x')} d^4x d^4x' - \\ - \frac{1}{2} \iint \Delta(x-x') \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')} d^4x d^4x' = 0 \quad (\text{I.7})$$

* Пример исключения полей голдстоуновских частиц посредством аналогичной процедуры рассмотрен недавно для случая спиновых волн в работе [17].

совместно с «начальным» условием

$$A(0, \varphi) = \int L_{\text{int}}(\varphi) d^4x. \quad (\text{I.8})$$

Соотношение (I.7) является точным. Переход к квазиклассическому приближению соответствует пренебрежению в (I.7) последним слагаемым. Действительно, A в формуле является безразмерной величиной, выраженной в единицах \hbar . Второе слагаемое содержит лишнюю степень A по сравнению с третьим слагаемым, поэтому последнее стремится к нулю, если \hbar стремится к нулю.

Легко видеть, что при разложении $A(\eta, \varphi)$ по степеням η пренебрежение в (I.7) третьим слагаемым соответствует учету полюсных диаграмм и отбрасыванию диаграмм с замкнутыми петлями. Приближенное уравнение можно записать в виде уравнения Гамильтона — Якоби

$$\delta A / \delta \eta + H(\delta A / \delta \varphi(x)) = 0 \quad (\text{I.9})$$

с гамильтонианом

$$H(\pi(x)) = -\frac{i}{2} \int \int \pi(x) \Delta(x-x') \pi(x') dx dx' \quad (\text{I.10})$$

и обобщенными импульсами

$$\pi(x) = \delta A / \delta \varphi(x). \quad (\text{I.11})$$

Уравнение (I.9) легко интегрируется в общем виде при произвольных начальных условиях. В дальнейшем для простоты записи положим, что имеется конечное число переменных φ^i и π^i ($i=1, 2, \dots$). Соответственно уравнения перепишем в виде

$$\delta A / \delta \eta + H(\pi) = 0; \quad (\text{I.12})$$

$$H(\pi) = d^{ik} \pi_i \pi_k / 2; \quad (\text{I.13})$$

$$\pi_i = \delta A / \delta \varphi^i; \quad A(0, \varphi) = A_0(\varphi).$$

Действие A для гамильтониана H определяется известным соотношением

$$A = \int_{\varphi_0, \eta=0}^{\varphi, \eta} L(d\varphi/d\eta) d\eta, \quad (\text{I.14})$$

где $L(d\varphi/d\eta)$ — функция Лагранжа, соответствующая гамильтониану (I.13)

$$L(d\varphi/d\eta) = (d^{-1})_{ik} (d\varphi^i/d\eta) (d\varphi^k/d\eta) / 2, \quad (\text{I.15})$$

и интегрирование в (I.14) производится вдоль траектории частицы

$$\varphi^i = \alpha^i \eta + \varphi_0^i, \quad (\text{I.16})$$

что приводит к следующему выражению для $A(\eta, \varphi)$:

$$A(\eta, \varphi) = \frac{1}{2} (d^{-1})_{ik} \alpha^i \alpha^k \eta = \frac{1}{2} (d^{-1})_{ik} \frac{(\varphi^i - \varphi_0^i)(\varphi^k - \varphi_0^k)}{\eta}. \quad (\text{I.17})$$

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям, построим на основе выражения (I.17) общий интеграл уравнения (I.12) (см., например, [22]). Для этого добавим к (I.17) произвольную константу интегрирования, которую в свою очередь будем считать произвольной функцией от φ_0 , а φ_0 функциями φ и η , определяемыми условиями

$$\delta A / \delta \varphi_0^i = 0, \quad (\text{I.18})$$

т. е.

$$A(\eta, \varphi) = \frac{1}{2} (d^{-1})_{ik} \frac{(\varphi^i - \varphi_0^i)(\varphi^k - \varphi_0^k)}{\eta} + C(\varphi_0); \quad (I.19)$$

$$- (d^{-1})_{ik} \frac{(\varphi^k - \varphi_0^k)}{\eta} + \frac{\partial C}{\partial \varphi_0^i} = 0 \quad (I.20)$$

или

$$A(\eta, \varphi) = C(\varphi_0) + \frac{1}{2} d^{ik} \frac{\partial C}{\partial \varphi_0^i} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varphi_0^k} \eta; \quad (I.21)$$

$$\varphi_0^i = \varphi^i - d^{ik} \frac{\partial C}{\partial \varphi_0^k} \eta. \quad (I.22)$$

Из (I.19) следует, что при $\eta = 0$

$$A(0, \varphi) = C(\varphi), \quad (I.23)$$

т. е. функция C определяется начальными условиями и выражается через лагранжиан взаимодействия.

Дифференцируя (I.21) по φ , легко убедиться, что

$$\partial A(\eta, \varphi) / \partial \varphi = \partial C(\varphi_0) / \partial \varphi_0. \quad (I.24)$$

Подставляя (I.24) в (I.21), получаем

$$A(1, \varphi) = A_0[\varphi^i - d^{ik} \partial A(1, \varphi) / \partial \varphi^k] + d^{ik} (\partial A(1, \varphi) / \partial \varphi^i) \cdot (\partial A(1, \varphi) / \partial \varphi^k) / 2. \quad (I.25)$$

Члены разложения $A(1, \varphi)$ по степеням φ можно представить графически диаграммами, изображенными на рис. 2. Действительно, разложение $A_0(\varphi)$ в ряд дает, вследствие (I.8), вершины исходного лагранжиана взаимодействия. Замена одной или нескольких степеней φ^i вторым слагаемым в аргументе A_0 в (I.25) приводит к графикам, в которых вершины лагранжиана взаимодействия связываются с одним или несколькими эффективными матричными элементами (напомним, что величина d^{ik} при переходе к полевым величинам играет роль пропагаторов). Последнее слагаемое можно сопоставить диаграмме с двумя эффективными матричными элементами, связанными внутренней линией.

Приведенный выше вывод заимствован из работы Намбу [13]. Рассмотрим теперь обобщение соотношения (I.25), которое учитывало бы возможную редукцию полюсных диаграмм, вследствие наличия в некоторых вершинах операторов $\partial^2 A$ [или $(\partial^2 - m^2) A$ при наличии массового члена], в контактное взаимодействие. Нашей целью будет получение уравнения, аналогичного (I.25), для редуцированных матричных элементов и уравнения, связывающего последние с элементами матрицы рассеяния.

Сформулируем задачу следующим образом: пусть есть какой-то рецепт разбиения операторов φ на два класса φ_1 и φ_2 , удовлетворяющий условию, что лагранжиан взаимодействия является линейной функцией относительно операторов φ_2 . Например, в интересующем нас случае к классу φ_2 относятся операторы φ под знаком второй производной по пространственным координатам.

Соответственно указанному разбиению все пропагаторы также разделяются на два класса: содержащие один или два оператора φ_2 или не содержащие таких операторов. Проведем вычисление S -матрицы в квазиклассическом приближении в два этапа. Сначала просуммируем вклад всех диаграмм, в которые входят только пропагаторы, содержащие по крайней мере один оператор φ_2 , а затем, используя полученное в результате такого суммиро-

вания выражение и учитывая оставшиеся пропагаторы с двумя операторами φ_1 , найдем выражение для суммы всех возможных диаграмм.

Для проведения указанной процедуры введем в качестве множителя для каждого пропагатора параметры η_1 и η_2 , соответственно тому содержит рассматриваемый пропагатор только операторы φ_1 или также один или два оператора φ_2 . Повторяя рассуждения, аналогичные рассмотренным выше, придем к следующему уравнению Гамильтона — Якоби с двумя «временами» для величины $A = A(\varphi_1, \varphi_2, \eta_1, \eta_2)$, совпадающей с рассмотренной ранее величиной $A = A(\varphi, \eta)$ при $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ и $\eta_1 = \eta_2 = \eta$

$$\partial A / \partial \eta_1 + \frac{1}{2} d^{ik} \partial A / \partial \varphi_1^i \cdot \partial A / \partial \varphi_1^k / 2 = 0; \quad (I.26)$$

$$\partial A / \partial \eta_2 + d^{ik} \partial A / \partial \varphi_1^i \cdot \partial A / \partial \varphi_2^k + \frac{1}{2} d^{ik} \partial A / \partial \varphi_2^i \cdot \partial A / \partial \varphi_2^k = 0 \quad (I.27)$$

при начальных условиях

$$A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 0) = A_0(\varphi_1, \varphi_2). \quad (I.28)$$

При $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ $A_0(\varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с введенной ранее величиной $A_0(\varphi)$, соответствующей лагранжиану взаимодействия.

Указанные выше два этапа нахождения элементов S -матрицы отвечают последовательному интегрированию сначала уравнения (I.27) с начальными условиями (I.28), а затем уравнения (I.26) при начальных условиях, задаваемых функцией $A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1)$.

Интегрирование уравнения (I.27) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1) = & A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20}) + d^{ik} \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{10}^i} \cdot \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{20}^k} + \\ & + \frac{1}{2} d^{ik} \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{20}^i} \cdot \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{20}^k}, \end{aligned} \quad (I.29)$$

где

$$\varphi_{10}^i = \varphi_1^i - d^{ik} \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{20}^k}; \quad (I.30)$$

$$\varphi_{20}^i = \varphi_2^i - d^{ik} \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{20}^k} - d^{ik} \frac{\partial A_0(\varphi_{10}, \varphi_{20})}{\partial \varphi_{10}^k}. \quad (I.31)$$

Соотношения (I.28) получаются из (I.21), если учесть матричную структуру гамильтониана H , связанную с дополнительными индексами 1 и 2 операторов φ_1 и φ_2 .

Предположение о линейности лагранжиана взаимодействия $A_0(\varphi_1, \varphi_2)$ относительно операторов φ_2 позволяет привести соотношения (I.29) к виду, не содержащему явно производных $\partial A / \partial \varphi_1^i$. Действительно, записывая условие линейности в виде

$$A_0(\varphi_1, \varphi_2) = A_1(\varphi_1, 0) + \left[\frac{\partial A_0(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} \right] \varphi_2, \quad (I.32)$$

подставляя (I.32) в (I.29) — (I.31) и учитывая, что, как следствие (I.24)

$$\partial A_0 / \partial \varphi_{10} = \partial A / \partial \varphi_1; \quad \partial A_0 / \partial \varphi_{20} = \partial A / \partial \varphi_2, \quad (I.33)$$

получаем

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1) = & A_0(\varphi_1^i - d^{ik} \partial A / \partial \varphi_2^k, \varphi_2^i - d^{ik} \partial A / \partial \varphi_2^k) + \\ & + d^{ik} \partial A / \partial \varphi_2^k \cdot \partial A / \partial \varphi_2^i / 2. \end{aligned} \quad (I.34)$$

Разложение соотношений (I.34) в ряд по степеням φ можно представить графически диаграммами, изображенными на рис. 4, аналогично тому, как это имело место для соотношений (I.25).

Заметим, что структура соотношений (I.34) позволяет избежать явного построения функции $A_0(\varphi_1, \varphi_2)$ и дает возможность провести разделение операторов φ на φ_1 и φ_2 непосредственно в аргументе функции $A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1)$. Действительно, для $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ соотношение (I.34) можно записать в виде:

$$A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1) = A_0(\varphi^i - d^{ik} \partial A(\varphi_1, \varphi_2) / \partial \varphi_2^k) + d^{ik} \partial A(\varphi_1, \varphi_2) / \partial \varphi_2^i \cdot \partial A(\varphi_1, \varphi_2) / \partial \varphi_2^k / 2. \tag{I.35}$$

После вычисления n -й степени φ в левой части равенства (I.35) распределение операторов φ между φ_1 и φ_2 можно задать произвольно и затем использовать для подстановки в правую часть равенства для вычисления $n + 1$ -й и более высоких степеней. При этом необходимо лишь потребовать, чтобы $A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1)$ была линейной функцией относительно φ_2 . При этом условии функция $A_0(\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющая требованию линейности относительно φ_2 , как следствие (I.35), всегда существует и может быть определена по заданной $A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1)$.

Интегрирование уравнения (I.26), вследствие отсутствия в нем производных $\partial A / \partial \varphi_2$, производится таким же образом, как уравнения (I.12). Результат можно представить в виде обычного разложения теории возмущений с лагранжианом $A(\varphi_1, \varphi_2, 0, 1)$, в котором φ_2 рассматривается как некоторое заданное внешнее поле.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

В пространстве аффинной связности роль прямых играют геодезические линии, определяемые уравнениями

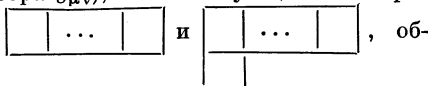
$$d^2 x^\mu / ds^2 + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (dx^\nu / ds) (dx^\lambda / ds) = 0. \tag{II.1}$$

При преобразовании координат эти уравнения не изменяются, а символы Кристоффеля преобразуются по следующей формуле:

$$\Gamma_{\nu'\lambda'}^{\mu'} = A_{\mu\nu'\lambda'}^{\mu''\nu\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu''} + A_{\rho}^{\mu'} \partial_{\nu'} A_{\lambda'}^{\rho}. \tag{II.2}$$

Наличие последнего слагаемого в формуле (II.2) позволяет использовать произвол в выборе системы координат для наложения определенных дополнительных условий на символы $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

В качестве таких дополнительных условий потребуем, чтобы линейные комбинации производных символа Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu, \lambda}^*$ (или, что то же самое, производных метрического тензора $g_{\mu\nu}$), соответствующие симметризации индексов по схемам Юнга вида



ращались в нуль в начале координат.

Покажем, что наложенное нами дополнительное условие выполняется в нормальной системе координат, в которой, по определению, решение уравнений (II.1) имеет вид [10, 23]:

$$x^\mu = a^\mu s. \tag{II.3}$$

Из (II.3) следует, что

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu a^\nu a^\lambda = 0 \tag{II.4}$$

* При переходе от символов Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ и $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma}$ предполагаем, что рассматриваемое пространство является римановым пространством.

или после умножения на s^2

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} x^{\nu} x^{\lambda} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Аналогичное соотношение имеется для символов Кристоффеля с нижними индексами

$$\Gamma_{\nu\lambda, \mu} x^{\nu} x^{\lambda} = 0 \quad (\text{II.6})$$

и, как следствие этого выражения, для определенной комбинации производных метрического тензора

$$(\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) x^{\nu} x^{\lambda} = 0. \quad (\text{II.7})$$

Разложим выражение в скобках в формуле (II.7) в ряд по степеням x^{α} :

$$\frac{1}{n!} (2\partial_{(\alpha\dots g_{\gamma)\mu} - \partial_{\mu(\alpha\dots g_{\gamma})}) x^{\alpha} \dots x^{\gamma}, \quad (\text{II.8})$$

где по индексам в круглых скобках проводится симметризация. Вследствие произвольности x из (II.8) следует, что

$$2\partial_{(\alpha\dots g_{\gamma)\mu} - \partial_{\mu(\alpha\dots g_{\gamma})} = 0. \quad (\text{II.9})$$

Умножая (II.8) на x^{μ} , аналогично получаем, что комбинация производных, соответствующая полностью симметричной схеме Юнга, равна нулю, т. е.

$$\partial_{(\alpha\dots g_{\gamma)\mu} = 0. \quad (\text{II.10})$$

Из соотношений (II.8) и (II.9) следует, что и комбинации производных метрического тензора, соответствующие схемам Юнга вида

	...	

,

также равны нулю.

Действительно, выделяя явно индекс μ в выражении (II.10), запишем последнее в виде:

$$2\partial_{(\alpha\dots g_{\gamma)\mu} + n\partial_{\mu(\alpha\dots g_{\gamma})} = 0, \quad (\text{II.11})$$

где n — ранг производной.

Как следствие (II.9) и (II.11)

$$\partial_{(\mu\dots g_{\nu)\lambda} = 0; \quad (\text{II.12})$$

$$\partial_{\mu(\dots g_{\nu\lambda}) = 0, \quad (\text{II.13})$$

т. е. при симметризации по произвольным индексам, кроме одного фиксированного, соответствующие комбинации производных обращаются в нуль. Комбинации, соответствующие рассматриваемой схеме Юнга, получаются из (II.12) или (II.13) антисимметризацией μ с одним из индексов в скобках и, следовательно, также равны нулю.

Приведенные рассуждения легко обратить, т. е. показать, что из требования обращения в нуль комбинации производных метрического тензора, соответствующих рассматриваемым схемам Юнга, следует (II.5) и (II.6), т. е. система координат, удовлетворяющая указанному требованию, является нормальной.

ЛИТЕРАТУРА

- Weinberg S. Phys. Rev. Lett., 1967, 18, 507; Schwinger J. Phys. Lett., 1967, 24B, 473; Wess J., Zumino B. Phys. Rev., 1967, 163, 1727.
- Gronin J. A. Phys. Rev., 1967, 161, 1483; Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ P2-3554, 1967; Волков Д. В. «Письма в ЖЭТФ», 1968, 7, 385; Macfarlane A. J., Weisz P. H. Nuovo cimento, 1968, 55A, 853; Bardeen W. A., Lee B. W. Phys. Rev., 1969, 177, 2389.

3. Coleman S., Wess G., Zumino B. Phys. Rev., 1969, 177, 2239; Callan C. G. e.a. Phys. Rev., 1969, 177, 2247.
4. Salam A., Strathdee J. Phys. Rev., 1969, 184, 1760; Isham C. J., Salam A., Strathdee J. Phys. Lett., 1970, 31B, 300.
5. Goldstone J. Nuovo cimento, 1961, 19, 155; Salam A., Weinberg S., Goldstone J. Phys. Rev., 1962, 127, 965; Nambu Y., Jona-Losinio G. Phys. Rev., 1961, 122, 345.
6. Weinberg S. The 14-th International Conference on High Energy Physics. Vienna, 1968; Zumino B. 15 Международная конференция по физике высоких энергий. Киев, 1970; Gasiorowicz S., Geffen D. A. Rev. Mod. Phys., 1969, 41, 531.
7. Волков Д. В. Препринт ИТФ-69-75, Киев, 1969.
8. Карган Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
9. Карган Э. Геометрия римановых пространств. Перев. с англ. М., ОНТИ, 1936; Карган Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Изд-во МГУ, 1963.
10. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960; Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
11. Haag R. Phys. Rev., 1958, 112, 669; Ruelle D. Helv. Phys. Acta, 1962, 35, 34; Borchers H. I. Nuovo cimento, 1960, 25, 270.
12. Chisholm I. S. R. Nucl. Phys., 1961, 26, 469.
13. Nambu Y. Phys. Lett., 1968, 26B, 626.
14. Adler S. L. Phys. Rev., 1965, 137B, 1022; 1965, 139B, 1638.
15. Zumino B. Brandeis University Physics Summer Institute Lectures, 1970; Carruthers P. Phys. Reports, 1971, 10, 3.
16. Callan C. G., Coleman S., Jackiw R. Ann. Phys., 1970, 59, 42.
17. Волков Д. В., Желтухин А. А., Блиох Ю. П. ФТТ, 1971, 13, 1668.
18. Salam A., Strathdee J. Phys. Rev., 1969, 184, 1750.
19. Meetz K. J. Math. Phys., 1969, 10, 589; Isham C. J. Nuovo cimento, 1969, 61A, 188.
20. Волков Д. В. ТМФ, 1972, 11, 173.
21. Weinberg S. Phys. Rev., 1968, 166, 1568.
22. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика. М., Физматгиз, 1958.
23. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1948.