ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА,
1973, ТОМ 4, ВЫП. 1

УДК 539.126

# СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ТЕОРЕМА КВАНТОВАНИЯ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА?

*Ю. Д. Усачев*

Физический институт им. П.Н. Лебедева,
г. Москва

Анализируется теорема квантования магнитного заряда. Указываются трудности, возникающие при различных доказательствах этой теоремы. Приводятся доводы в пользу отсутствия теоремы квантования магнитного заряда и анализируются последствия этого предположения для экспериментальных поисков монополей.

The theorem on quantization of magnetic charge is analysed. The difficulties arising in different proofs of this theorem are pointed out. Some arguments against the theorem of magnetic charge quantization are presented. The consequences of the invalidity of this theorem are discussed in connection with the experimental searches of monopoles.

## ВВЕДЕНИЕ

Более сорока лет назад Дираком [1] впервые был поставлен вопрос о существовании изолированного магнитного полюса (монополя). С тех пор появилось немало теоретических и экспериментальных работ, посвященных проблеме магнитного заряда, однако и сейчас эта проблема еще далека от завершения. До сих пор отсутствуют как экспериментальные указания на его обнаружение, так и сколько-нибудь серьезные теоретические запреты на его существование.

В теоретических работах физический образ магнитного заряда не претерпел за сорок лет каких бы то ни было существенных изменений. Что же касается экспериментов, прогресс, достигнутый в них за последнее время, привел к довольно пессимистическим оценкам. Очередная неудача в попытках обнаружения монополя Дирака на вновь запускаемом ускорителе приводила к двоякому результату. С одной стороны, отодвигался нижний предел на массу монополя, а с другой — уменьшался верхний предел сечения его рождения. Эксперименты, выполненные с монополями из космоса, отодвигали нижнюю границу на поток, доводя его до совершенно мизерных значений. Создавшаяся ситуация такова, что порой трудно решить: являются ли полученные экспериментальные данные доказательством отсутствия монополей в природе, или же эти данные должны стимулировать на новые уточнения в экспериментальных поисках.

Основное свойство монополя, вытекающее из теории Дирака,— это прежде всего большая величина магнитного заряда $g$ ($g = 68{,}5e$) и, следовательно, способность сильно ионизовать. Частица, обладающая таким свойством, появившись в свободном состоянии, не могла бы остаться незамеченной экспериментаторами. Тем не менее, как уже было сказано, эксперимент приводит скорее к пессимистическим прогнозам.

Анализ существующей на настоящий момент теоретической и экспериментальной ситуации подсказывает по крайней мере три возможных объяснения факта экспериментального необнаружения монополя.

1. Монополь не существует в природе. Подобную точку зрения нельзя признать достаточно обоснованной, по крайней мере по двум причинам: во-первых, доказательство «несуществования» в рамках эксперимента практически невозможно из-за всегда имеющихся перспектив дальнейшего более тонкого экспериментального исследования, во-вторых, в рамках существующей теории отсутствуют какие бы то ни было теоретические запреты на существование магнитного заряда.

2. Монополь из-за очень большой константы связи не появляется в одиночном состоянии, а всегда в виде связанной пары монополь — антимонополь, которая в дальнейшем аннигилирует. В последнее время новейшие экспериментальные исследования пошли по пути обнаружения именно различных продуктов этой аннигиляции, являющейся косвенным подтверждением существования магнитного заряда.

3. Подлинный физический образ монополя не соответствует образу, создаваемому теорией Дирака. Прежде всего можно предположить, что различие касается величины магнитного заряда. Если допустить, что величина этого заряда много меньше той, которая предсказывается теорией Дирака [1] ($g = 68{,}5e$) или Швингера [2] ($g = 137e$), то ясно, что доказательство подобного допущения повлекло бы за собой подлинную революцию в экспериментальной методике обнаружения магнитного заряда. По существу это означало бы, что поиск магнитного заряда велся до сих пор «не там, где нужно».

Это третье возможное объяснение факта необнаружения монополя является весьма радикальным и предполагает, в сущности, отказ от теорем Дирака и Швингера о величине магнитного заряда:

По Дираку: $eg/\hbar c = k/2 \qquad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ldots);$ (1)

По Швингеру: $eg/\hbar c = k \qquad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ldots).$ (2)

В настоящей статье детально обсуждается третья возможность.

Доказательства теорем (1) и (2) подразделяются на три типа: 1) доказательства, вытекающие из требования однозначности волновой функции; 2) доказательства, полученные с помощью теоретико-групповых рассмотрений; 3) доказательства Саха и Вильсона [3], стоящие несколько особняком от остальных.

Мы рассмотрим доказательства всех трех типов и укажем на аргументы, которые позволяют, на наш взгляд, отказаться от теорем (1) и (2) или, во всяком случае, отметить серьезные трудности, возникающие при их доказательствах [4, 5].

## 1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Существуют две исходные посылки теории магнитного заряда.

1. Покоящийся магнитный заряд является источником кулоновского магнитного поля:

$$\mathbf{H} = g\mathbf{r}/r^3 = -g \operatorname{grad} (1/r), \tag{3}$$

где $g$ — магнитный заряд. Стремление полностью симметризовать свойства электрического и магнитного зарядов можно естественно выразить с помощью (3).

2. На нерелятивистский электрон, движущийся в поле покоящегося магнитного заряда, действует сила Лоренца:

$$d\mathbf{p}/dt = (e/c)[\mathbf{v}, \ \mathbf{H}] = -e[\mathbf{v}, \operatorname{grad} (1/r)]/c. \tag{4}$$

Это соотношение отражает тот факт, что электрону «безразлично», в каком магнитном поле он движется: создаваемом ли обычными электронными токами и описываемом с помощью обычного вектора-потенциала $A_\mu$, или же в поле монополя (3). Сила Лоренца, выраженная через $\mathbf{H}$, в обоих случаях будет иметь один и тот же вид (4).

Следует подчеркнуть, что соотношения (3) и (4) — постулаты теории. Они разумны в той мере, в какой мы хотим сохранить «равноправие» электрических и магнитных зарядов.

В дальнейшем будем следовать в основном логике первой статьи Дирака [1], в которой одна из частиц (электрическая или магнитная) считается покоящейся. Релятивистское обобщение, проведенное Дираком во второй статье [1], не меняет сути дела, но сильно усложняет аппарат. Для наших целей — выявить физические трудности теории монополя Дирака — достаточно ограничиться случаем покоящегося в начале координат монополя, и поэтому формулы (3) и (4) не нуждаются в дальнейшем в релятивистском обобщении, которое производится без всяких сложностей.

Электродинамику без монополей можно получить, варьируя лагранжиан:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{св}} + \mathscr{L}_{\text{вз}},$$

где $\mathscr{L}_{\text{св}}$ — лагранжиан свободного движения; $\mathscr{L}_{\text{вз}}$ — лагранжиан взаимодействия («минимальное» взаимодействие):

$$\mathscr{L}_{\text{вз}} = j_\mu A_\mu. \tag{5}$$

В этом случае, как легко видеть, уравнения движения для частицы, полученные с помощью обычной вариационной процедуры, с неизбежностью имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left\{-\operatorname{grad} A_0 - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{A}]\right\}. \tag{6}$$

Отождествляя, как обычно,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} A_0 - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \tag{7а}$$

$$H = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{7б}$$

получаем обычную электродинамику без монополей, так как из (7б) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv 0, \tag{8}$$

в то время как в электродинамике с монополями, согласно (3),

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 4\pi g\delta(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Возникает вопрос: как, оставляя взаимодействие минимальным, т. е. сохраняя (5), добиться выполнения (9)?

Дирак решает эту задачу, придавая вектору-потенциалу специфический вид (в дальнейшем вектор-потенциал подобного вида будем обозначать буквой **B**):

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r}\cdot\frac{[\mathbf{n}, \mathbf{r}]}{r - \mathbf{nr}}. \tag{10}$$

В этом выражении **n** — единичный ненаблюдаемый, согласно Дираку, вектор, направление которого произвольно и не влияет на физические следствия теории.

Вычисляя rot **B** по компонентам с помощью обычных правил дифференцирования, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = -g\mathbf{r}/r^3 = g\operatorname{grad}(1/r). \tag{11}$$

Абсурдность полученного равенства очевидна, что проверяется непосредственно применением операции дивергенции к обеим частям равенства. Очевидно, ошибка произошла потому, что мы не учли сингулярность $\mathbf{B}$ вдоль направления, задаваемого вектором $\mathbf{n}$ (вдоль «нити», как называет этот вектор Дирак). Поэтому правильно вычислить $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ в точках на нити и бесконечно близких к ней можно только с помощью интегральной теоремы (теоремы Стокса) для бесконечно малого контура, охватывающего особенность:

$$\mathbf{N}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \lim_{\Delta S\to 0}\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}/\Delta S, \tag{12}$$

где $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к бесконечно малой поверхности $\Delta S$, ограниченной контуром $L$. Производя эти вычисления в частном случае, когда вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль положительной оси $z$ ($\mathbf{n}\equiv\mathbf{k}$), в отличие от (11) получаем (см. работу [6]):

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{B} = g\operatorname{grad}(1/r) + \mathbf{k}\cdot 4\pi g\theta(z)\,\delta(x)\,\delta(y). \tag{13}$$

В общем случае [5]

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{B} = g\operatorname{grad}(1/r) + \mathbf{n}8g\theta(\mathbf{nr})\,\delta[r^2-(\mathbf{nr})^2]. \tag{14}$$

Магнитное поле, как видно из (14), делится на две части: кулоновское поле $g\cdot\operatorname{grad}(1/r)$ и сингулярное поле в нити. Полный поток такого поля через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, равен нулю:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}\equiv 0, \tag{15}$$

так как поток кулоновского магнитного поля через замкнутую поверхность полностью компенсируется потоком сингулярного поля, подводимого через нить.

Уравнения движения, получаемые с помощью вариационного принципа из $\mathcal{L}_{\text{вз}} = \mathbf{jB}$, где $\mathbf{B}$ определяется формулой (10), имеют вид

$$d\mathbf{p}/dt = e/c\,[\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{B}] = eg/c\,[\mathbf{v}, \{\operatorname{grad}(1/r) + 8\mathbf{n}\theta(\mathbf{nr})\,\delta(r^2-(\mathbf{nr})^2)\}]. \tag{16}$$

Если первый член в точности соответствует кулоновскому характеру искомого магнитного поля, то второй, во-первых, нарушает исходный постулат (4) теории и, во-вторых, приводит к нефизическим $\delta$-образным «толчкам» в силе Лоренца.

Следующий этап в построении теории монополя Дирака заключается в попытке получить чисто кулоновский характер $\mathbf{H}$ для монополя, а заодно избавиться от нефизических членов в силе Лоренца. Это Дирак делает уже в рамках квантовой механики.

## 2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ МОНОПОЛЯ ДИРАКА

Введем вслед за Дираком специальный принцип («вето Дирака»), запрещающий электронам попадать на нить, т. е. приравняем нулю волновую функцию электрона на нити:

$$\psi = 0 \text{ (на нити)}. \tag{17}$$

Если электроны не попадают на нить и, следовательно, не чувствуют магнитный поток, подводимый по ней к началу координат, то

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = g \operatorname{div}\operatorname{grad}(1/r) = -4\pi g\delta(\mathbf{r}) \tag{18}$$

в отличие от (15), т. е. поток магнитного поля через замкнутую поверхность, состоящую из сферы и вырезанного из нее бесконечно тонкого цилиндра, окружающего нить, отличен от нуля.

Как видно, условие (17) «исправляет» заодно и силу Лоренца, в которой при соблюдении этого условия исчезают $\delta$-образные толчки.

Выведем теперь соотношение Дирака (1). Для этой цели воспользуемся требованием градиентной инвариантности теории.

Пусть состояние электрона, рассеивающегося на покоящемся в начале координат монополе, определяется уравнением Шредингера, в гамильтониан взаимодействия которого включен вектор-потенциал (10). Замена вектора-потенциала (10), зависящего от единичного вектора $\mathbf{n}_1$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) = \frac{g}{r}\cdot\frac{[\mathbf{n}_1, \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}_1\mathbf{r}},$$

на вектор-потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$, точно так же зависящего от другого единичного вектора $\mathbf{n}_2$ ($\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{n}_1$), не должна изменить физические результаты градиентно-инвариантной теории, если

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2) = g \operatorname{grad}\chi. \tag{19}$$

В этом случае волновая функция электрона, рассеиваемого монополем, должна измениться на фазовый множитель:

$$\psi(\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)) = \exp\left(-\frac{ieg}{\hbar c}\chi\right)\psi(\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)). \tag{20}$$

Подсчет величины $g\chi$ можно провести на основании (19):

$$g[\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)] = \int\limits_{(L)}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\,[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)]. \tag{21}$$

В правой части записан криволинейный интеграл по некоторому пути $L$ с начальной точкой в $\mathbf{r}_0$ и конечной в $\mathbf{r}$. Равенство (21) имеет место, конечно, лишь в том случае, если справедливо соотношение (19). К его справедливости мы еще вернемся позже.

Поставим теперь такой вопрос: какова будет разность фаз $\chi$ в случае, когда путь $L$ замкнут, т. е. точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ совпадают? Другими словами, подсчитаем

$$g\Delta\chi = g[\chi_1(\mathbf{r}) - \chi_2(\mathbf{r})] = \oint d\mathbf{r}'\,[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)], \tag{22}$$

где $\chi_1(\mathbf{r})$ и $\chi_2(\mathbf{r})$ — два значения фазы $\chi$ волновой функции в одной точке пространства при обходе по замкнутой кривой и возвращении в первоначальную точку.

Воспользуемся теоремой Стокса и формулой (14):

$$\oint_L d\mathbf{r}' \left[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)\right] = \int_S d\mathbf{S} \operatorname{rot}\left[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)\right] =$$

$$= 8g \int_S \left[\mathbf{n}_1 \theta(\mathbf{n}_1\mathbf{r})\, \delta(r^2 - (\mathbf{n}_1\mathbf{r})^2) - \mathbf{n}_2 \theta(\mathbf{n}_2\mathbf{r})\, \delta(r^2 - (\mathbf{n}_2\mathbf{r})^2)\right] d\mathbf{S}. \qquad (23)$$

Здесь $L$ — замкнутый контур; $S$ — площадь, опирающаяся на него. Из (23) видно, что если $S$ не пронизывается ни одной из двух нитей $\mathbf{n}_1$ или $\mathbf{n}_2$, то разность фаз $\Delta\chi = 0$. В противном случае можно показать, что

$$|\Delta\chi| = 4\pi. \qquad (24)$$

Можно было бы рассуждать и несколько иначе. Если мы, следуя Дираку, исключаем из рассмотрения области пространства, занятые нитями, то (19) повсюду имеет место. Но в этом случае $\chi$ — многозначный потенциал в двухсвязной области. Подсчет разности фазы при обходе по замкнутой кривой, охватывающей нить, дает тот же результат (24). Математически оба варианта рассмотрения полностью эквивалентны.

Дирак ввел естественное предположение, что разность фаз волновой функции, возникающая при обходе по замкнутому контуру, всегда кратна $2\pi$. Это означает, что возращение по замкнутому контуру в исходную точку меняет волновую функцию лишь на несущественный множитель $\exp(-i2\pi k) \equiv 1$. Поэтому при $|\Delta\chi| = 4\pi$

$$\exp(-ieg4\pi/\hbar c) = \exp(-i2\pi k) \qquad (25)$$

или

$$eg/\hbar c = k/2 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Абсолютная величина $k$ зависит от числа обходов по замкнутому контуру, а ее знак — от направления обхода.

Резюмируем основные положения теории Дирака.

1. Для описания движения электрона в поле монополя используется сингулярный на нити вектор-потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ (10). Оказывается, что использование (10) в лагранжиане взаимодействия $\mathscr{L}_{\text{вз}} = \mathbf{jB}(\mathbf{n})$ приводит после обычной процедуры варьирования к правильному выражению для силы Лоренца повсюду во всем пространстве кроме нити.

2. Чтобы получить чисто кулоновский характер магнитного поля $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ и избавиться от нефизических членов в силе Лоренца, волновая функция электрона $\psi$ на нити полагается равной нулю.

3. Нить, определенная единичным вектором $\mathbf{n}$ в (10), объявляется ненаблюдаемой, так как не допускает никакого физического истолкования.

Рассмотрим все эти три положения с точки зрения их физической совместимости.

## 3. КРИТИКА ТЕОРИЙ ДИРАКА

На основании (14)

$$\operatorname{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)-\mathbf{B}(n_2)]=$$
$$=8g\,[\mathbf{n}_1\theta(\mathbf{n}_1\mathbf{r})\,\delta(r^2-(\mathbf{n}_1\mathbf{r})^2)-\mathbf{n}_2\theta(\mathbf{n}_2\mathbf{r})\,\delta(r^2-(\mathbf{n}_2\mathbf{r})^2)], \tag{26}$$

что противоречит исходной для вывода (1) посылке (19), поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\chi\equiv 0$. В (26) $\operatorname{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)-\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)]$, как видно, отличен от нуля на нитях. На первый взгляд, эта несовместимость с (19) не представляется существенной, поскольку отличие имеет место лишь в одномерной области. Однако более подробный анализ показывает, что это не так.

Рассмотрим сначала этот вопрос с физической точки зрения. В самом деле, что означает градиентное преобразование (20) в уравнении Шредингера? Замена в нем вектора-потенциала $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ на $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ означает, что в первом случае наблюдаемое магнитное поле определялось соотношением $\mathbf{H}_1=\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$, а во втором $-\mathbf{H}_2=\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$. Если в (19) $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)-\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ действительно градиент, то $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{H}_2$, но на самом деле из (26) видно, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)-\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2\neq 0. \tag{27}$$

Иными словами, переход от уравнения Шредингера с вектором-потенциалом $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ к уравнению с вектором-потенциалом $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ означает, что реальное магнитное поле изменилось. В самом деле, поле на нити $\mathbf{n}_1$ $\mathbf{H}_1'=\mathbf{n}_1\theta(\mathbf{n}_1\mathbf{r})\,\delta(r^2-(\mathbf{n}_1\mathbf{r})^2)$, соответствующее вектору-потенциалу $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ в первом уравнении, исчезает, но при этом возникает магнитное поле на нити $\mathbf{n}_2$ $\mathbf{H}_2'=\mathbf{n}_2\theta(\mathbf{n}_2\mathbf{r})\,\delta(r^2-(\mathbf{n}_2\mathbf{r})^2)$, соответствующее вектору-потенциалу $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ во втором уравнении (кулоновские части при этом, конечно, не меняются). Как очевидно, никакое градиентное преобразование не может изменить реального магнитного поля. Поэтому, если найдется такое преобразование, которое заменяет $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ на $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$, то такое преобразование нельзя назвать градиентным. И наоборот, если справедливо (19), то это означает, что $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2$.

Итак, можно ли разность $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)-\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ представить в виде градиента? Ответ на этот вопрос чрезвычайно важен. Положительный ответ означал бы, что теория Дирака непротиворечива и соотношение (1) становится необходимым следствием теории. Отрицательный ответ ставит под сомнение непротиворечивость не только исходных посылок теории Дирака, но и справедливость самого соотношения (1) о квантовании магнитного заряда, которое выведено как следствие предположения (19) о градиентной инвариантности теории.

Приведем некоторые математические соображения, опровергающие возможность представления разности $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ в виде градиента от некоторой скалярной функции $g\chi(\mathbf{r})$. Можно показать, что вектор-потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ (10) можно единственным образом представить в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}) = -g \operatorname{rot}\{\mathbf{n} \ln (r - \mathbf{nr})\}, \tag{28}$$

т. е. не содержит градиентной части в однозначном разложении

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{B}' d^3 r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}' d^3 r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$ повсюду, что можно показать с помощью соответствующей интегральной теоремы. Несколько модифицированное выражение для $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ получено также и в работе [2] (различие обусловлено тем, что в теории Швингера рассматриваются две нити вместо одной у Дирака).

Из (28) непосредственно следует, что равенство (19) невозможно.

В этом можно легко также убедиться и иным образом. Направляя вектор $\mathbf{n}_1$, например, по оси $x$, а $\mathbf{n}_2$ — по оси $y$, можно провести непосредственное интегрирование по различным путям в (21). Легко показать, что интеграл в (21) зависит от пути и для различных путей приводит к совершенно различным выражениям для $\chi(\mathbf{r})$. Это, конечно, согласуется с (28) и противоречит (19). Невозможность определить скалярную функцию $\chi(\mathbf{r})$ с помощью (21) делает бессодержательным и соотношение (20).

При этом следует иметь в виду, что справедливость всего сказанного можно удостоверить лишь с помощью достаточно аккуратного обращения с обобщенными функциями, критерием которого является применение интегральных теорем. Иллюстрацией сказанному является, в частности, и формула (14). Из нее видно, что $\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{n})$ и $g \operatorname{grad}(1/r)$ совпадают повсюду во всех точках пространства, за исключением точек на нити. Однако интеграл по замкнутому контуру, охватывающему нить, от $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ отличен от нуля, в то время как интеграл по абсолютно произвольному замкнутому контуру от $g \operatorname{grad}(1/r)$ тождественно равен нулю. Именно поэтому поле $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ остается соленоидальным, а поле $g \operatorname{grad}(1/r)$ — градиентным. По той же самой причине разность $\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ нельзя представить и градиентом от некоторой скалярной функции $g\chi(\mathbf{r})$.

Вывод, полученный здесь, ставит под сомнение справедливость теоремы квантования магнитного заряда (1) и, следовательно, его наименьшую величину:

$$|g| = 137\,|e|/2. \tag{29}$$

Заметим, что существует множество различных вариантов выводов соотношения (1), основанных на требовании однозначности фазы волновой функции. Однако вариант, приведенный выше, нам представляется наиболее строгим. Как видно, ему тем не менее присущи серьезные трудности.

Следует заметить, что с помощью вектора-потенциала, содержащего $m$ нитей [4, 5]:

$$\mathbf{B}' = \frac{g}{mr} \sum_{s=1}^{m} \frac{[\mathbf{n}_s, \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}_s \mathbf{r}}, \tag{30}$$

который также удовлетворяет основному требованию теории Дирака — получить правильную силу Лоренца повсюду вне нитей, мы можем найти любое «квантование» магнитного заряда. В самом деле, при $m = 1$ имеем теорию Дирака [1]; при $m = 2$ и $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$

$$\mathbf{B}^{\text{Шв}} = \frac{g}{2r} \left[ \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}\mathbf{r}} - \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{r}]}{r + \mathbf{n}\mathbf{r}} \right] \tag{31}$$

получаем теорию Швингера [2].

В отличие от теории Дирака в работе [2] магнитный поток к началу координат подводится по двум нитям, и поэтому «правило квантования» выглядит в форме (2). Следовательно, величина минимального магнитного заряда в работе [2] определяется соотношением

$$|g| = 137\,|e|. \tag{32}$$

Теория Швингера по существу не меняет основных положений теории Дирака, если отвлечься от разницы в следствиях (29) и (32). Ей присущи все те же трудности, что и теории Дирака, поэтому не будем останавливаться на ней специально.

В общем случае (30) дает минимальное значение магнитного заряда, в $m$ раз больше дираковского:

$$|g| = m\frac{137}{2}\,|e|, \tag{33}$$

в чем легко удостовериться, повторяя приведенный выше вывод соотношения (1) с вектором-потенциалом (30) и охватывая контуром одну из нитей. В случае охвата контуром двух и более нитей величина минимального магнитного заряда будет соответственно меняться.

Нам кажется, что принципиальная возможность работать в теории Дирака с вектором-потенциалом (30) подчеркивает слабые стороны теорий, использующих потенциалы типа (10) и (31). Проанализируем теперь вопрос о совместимости второй и третьей исходных посылок теории Дирака, сформулированных в п. 3.

Вето Дирака ($\psi = 0$ на нити) приводит к тому, что наблюдаемая величина $\psi^*\psi$ на нити также обращается в нуль. Можно показать, что обращение в нуль $\psi^*\psi$ на нити происходит плавно [4]. Следовательно, эффект этот можно наблюдать: электроны, рассеиваемые на монополе, будут «чувствовать» нить. Изменение направления вектора $\mathbf{n}$ в $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ приведет к изменению картины рассеяния при различных положениях вектора $\mathbf{n}$. Иными словами, условие $\psi^*\psi$ на нити приводит на самом деле к наблюдаемости самой нити. Вопрос о наблюдаемости нити имеет поэтому два аспекта: с одной стороны, условие $\psi = 0$ на нити устраняет $\delta$-образные «толчки» в силе Лоренца (16), делая их как бы ненаблюдаемыми; с другой стороны, это же условие делает саму нить наблюдаемой в разъясненном выше смысле.

Казалось бы, прямой ответ о наблюдаемости нити может дать решение задачи о рассеянии электронов на покоящемся монополе. Действительно, эта задача решалась в работе [7]. Однако автор уже исходил из предпосылки, что нить ненаблюдаема и ее ориентация в пространстве не имеет существенного значения. Поэтому в целях упрощения математического решения автор расположил вектор $\mathbf{n}$ нити параллельно падающему электронному пучку. Естественно, что в этом случае эффект рассеяния электронов на нити, если он имеет место, замаскирован цилиндрической симметрией задачи.

Решение вопроса о наблюдаемости нити может дать рассмотрение рассеяния электронного пучка на покоящемся монополе в том случае, когда нить расположена под углом к падающему пучку. Такая задача в настоящий момент решается. Появление рассеяния в этом случае давало бы прямой ответ на вопрос о непротиворечивости исходных предпосылок в работе [1].

Какие следствия повлек бы за собой эффект наблюдаемости нити? Это означало бы, что теория Дирака описывает бесконечно длинный и бесконечно тонкий соленоид, один конец которого покоится в начале координат, а другой уходит в бесконечность. Теории магнитного заряда как такового не было бы.

Чтобы закончить изложение теории Дирака, добавим еще одно замечание, касающееся нитей. Необязательно представлять нить в виде прямой линии, уходящей на бесконечность из начала координат. Нить может иметь форму любой кривой линии. Однако и в этом случае справедливо все сказанное о нитях выше.

Из-за невыполнения (19) непригодны и другие виды потенциалов $\mathbf{B}$ (например, сингулярные не на линии, а на полуплоскости).

## 4. КРИТИКА ДРУГИХ СПОСОБОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СООТНОШЕНИЙ (1) И (2)

Предыдущий способ доказательства соотношений типа (1) и (2), а также большое количество подобных были основаны на требовании однозначности фазы волновой функции. Рассмотрим теперь теоретико-групповой подход к выводу этих же соотношений — доказательства второго типа.

Существует достаточно большое количество работ, посвященных подобного рода подходу. Однако в качестве иллюстрации рассмотрим лишь одну такую работу [8], в которой выводится соотношение (2).

В работе [8] доказывается, что если момент количества движения электрона в поле покоящегося монополя записать в виде

$$\mathbf{J} = \left[\mathbf{r}, \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{B}\right)\right] + \frac{eg}{c}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{34}$$

где $\mathbf{B}$ имеет вид (10), то справедливо коммутационное соотношение

$$[J_m, J_n] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{mnk}J_k. \tag{35}$$

Из (35) следует согласно [8], во-первых, вращательная симметрия системы электрон-монополь, а, во-вторых, квантование дополнительного момента количества движения $eg/c\cdot\mathbf{r}/r$ (по правилам квантовой механики):

$$eg/\hbar c = k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Однако аккуратное обращение с сингулярной функцией $\mathbf{B}$ в (10) — учет соотношения (14) — приводит нас к выражению

$$[J_m, J_l] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{mlk}J_k + \mathrm{i}\hbar e/c\,\{r^2\varepsilon_{mlk}n_k + r_m[\mathbf{r}, \mathbf{n}]_l - r_l[\mathbf{r}, \mathbf{n}]_m\}\times$$
$$\times 8g\theta(\mathbf{nr})\,\delta[r^2 - (\mathbf{nr})^2]. \tag{36}$$

Из (36) видно, что вывод о полной вращательной симметрии системы не верен, так как компоненты $\mathbf{J}$ в (34) не образуют группу (35). Отсюда же следует, что и доказательство соотношения (2), приведенное в работе [8], не является, по меньшей мере, строгим. Добавим, что существует немало доказательств соотношений (1) и (2) с помощью теоретико-группового рассмотрения. Не будем на них останавливаться здесь, поскольку для них всех характерны те же самые трудности, что и для работы [8].

В ряду различных доказательств соотношений (1) и (2) несколько особняком стоят работы [3]. Вывод этих соотношений в работах [3] назвать доказательством можно только условно, поскольку они носят скорее иллюстративный характер. Авторы рассматривают систему из покоящихся электрического и магнитного зарядов, разделенных друг от друга некоторым расстоянием $l$. Образуя для покоящихся электрического и магнитного полей классический вектор Пойнтинга, авторы подсчитывают момент количества движения $\mathbf{M}$ этого поля относительно линии, соединяющей оба заряда:

$$\mathbf{M} = eg\mathbf{l}/c\,|\mathbf{l}|, \tag{37}$$

где $|\mathbf{l}|$ — расстояние между зарядами. Приравнивая далее $|\mathbf{M}|$ величине $k\hbar$

$$eg/c = k\hbar, \qquad (k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2 \ldots) \tag{38}$$

авторы получают соотношение (1) или (2).

Из сказанного выше видно, что рассмотрение ведется полуклассически. Однако основным недостатком этого вывода является то обстоятельство, что авторы не знают, какую величину они квантуют. Отсутствие лагранжева и канонического формализмов не позволяет им связать квантованные величины с физическими, получающимися из канонического формализма квантовой механики. Именно поэтому их рассмотрение носит характер полуклассической иллюстрации соотношений (1) и (2).

Подобного рода упрек можно сделать и авторам других работ, в которых в отсутствие канонического формализма выводятся соотношения (1) или (2). Требование канонического формализма необходимо в первую очередь потому, что квантовая механика — гамильтоновская теория.

В заключение этого раздела остановимся немного на работах, использующих формализм Мандельстама для вывода (1) и (2) (см., например, [9]). По своему характеру эти работы можно отнести к работам, в которых используется первый тип доказательства соотношений (1) и (2). Не останавливаясь специально на отсутствии канонического формализма, заметим, что использование пути в криволинейных интегралах, фигурирующих в этих работах, приводит к трудностям, сходным с теми, которые появляются при введении нитей. Несколько упрощая ситуацию, можно было бы сказать, что путь в криволинейном интеграле в работе [9] в некотором смысле аналогичен нити со всеми вытекающими при этом трудностями.

## 5. ВЫВОДЫ

Из всего сказанного выше следует, что ни одно из доказательств соотношений (1) или (2) не свободно от серьезных трудностей. Более того, можно думать, что эти трудности проявляются каждый раз не случайно. Так, одновременное отсутствие градиентной инвариантности в теории Дирака и отсутствие группы (35) — явления не случайные: они объединены, по-видимому, тем общим для них обстоятельством, что соотношения (1) и (2) выводятся лишь «с точностью» до $\delta$-образных особенностей, сосредоточенных на линии (нити). То же характерно и для других методов. Иными словами, можно думать, что соотношения (1) и (2) на самом деле не существуют.

Основная трудность теории магнитного заряда связана с невозможностью в настоящий момент записать лагранжиан взаимодействия поля электрона с монопольными токами (термин «ток» имеет здесь, возможно, условный смысл) и поля монополя с соответствующими электронными токами. Сейчас нельзя даже сказать, является ли эта трудность принципиальной или, так сказать, технической. Критерием правильности формулировки лагранжиана взаимодействия является постулируемый a priori вид силы Лоренца.

Лагранжиан, предложенный Дираком и Швингером, выполняет поставленную задачу не полностью. Более того, появление нитей свидетельствует о больших трудностях этой теории.

«Судьба» соотношения (1) и (2) в первую очередь затрагивает, конечно, методику эксперимента по поискам магнитного заряда. Из (29) и (32) следует, что магнитный заряд чудовищно велик. Естественно, что появление одиночного магнитного заряда такой величины не могло быть не замеченным экспериментаторами.

Однако если предположить, что величина $g$ могла бы быть иной, например много меньшей, то это повлекло бы за собой подлинную революцию в методике эксперимента по поискам магнитного заряда. Такое предположение означало бы, что до сих пор поиск магнитных зарядов велся не там, где нужно.

В пользу такого предположения говорит сам факт отсутствия строгой теории магнитного заряда.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Dirac P. A. M.** Proc. Roy. Soc., 1931, **A133**, 60; Phys. Rev., 1948, **74**, 817.
2. **Schwinger J.** Phys. Rev., 1966, **144**, 1087.
3. **Saha M. N.** Ind. J. Phys., 1936, **10**, 141; Phys. Rev., 1949, **75**, 1968; **Wilson H. A.** Phys. Rev., 1949, **75**, 309.
4. **Усачев Ю. Д.** Доклад на Всесоюзной межвузовской конференции в Ужгороде, октябрь 1968.
5. **Болотовский Б. М., Усачев Ю. Д.** Вступительная статья в сб. «Монополь Дирака». Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
6. **Wentzel G.** Progr. Theor. Phys. Suppl. 1966, **37—38**, 163.
7. **Banderet P. P.** Helv. Phys. Acta, 1946, **19**, 503.
8. **Peres A.** Phys. Rev., 1968, **167**, 1449.
9. **Calibbo N., Ferrari E.** Nuovo cimento, 1962, **23**, 1147.