

УДК 539.1

## ТЕОРЕМА ЛЕВИНСОНА

*П. Береги, Б. Н. Захарьев,  
С. А. Ниязгулов*

Объединенный институт ядерных  
исследований, г. Дубна

Дается обзор работ, в которых устанавливаются соотношения между разностью фазовых сдвигов рассеяния при нулевой и бесконечной энергиях и числом связанных состояний системы. Рассматриваются случаи взаимодействия двух частиц с помощью локального и нелокального потенциалов, потенциалов, зависящих от импульса, от энергии, а также рассеяния заряженных частиц. Показано, как теорема Левинсона формулируется для многоканального рассеяния, для систем трех и более частиц и т. д.

A review of papers devoted to the connection between the phase shifts at zero and infinite energies and the number of bound states of the quantum mechanical system is presented. The cases when the two-body potential is local, nonlocal, velocity-dependent, energy-dependent and the scattering of charged particles are considered. The Levinson's theorem for many-channel scattering, for systems of three or more particles is also presented.

### ВВЕДЕНИЕ

В процессе развития любого раздела науки и накопления все большего объема информации из общей массы полезных сведений постепенно выкристаллизовываются отдельные положения, имеющие характер общих законов, отражающих в очень концентрированной форме особенно глубокие связи, присущие объектам исследования. В квантовой теории рассеяния к фундаментальным результатам такого рода следует отнести *теорему Левинсона*.

В своей первоначальной форме [1] эта теорема устанавливает связь между разностью фазовых сдвигов парциальных волн  $\delta_l(E)$  ( $l$  — орбитальный момент) при нулевой и бесконечной энергиях  $E$  относительного движения двух сталкивающихся

частиц и числом  $m$  связанных состояний этих частиц с данным  $l$  \*:

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = m_l \pi. \quad (1)$$

При этом предполагалось, что частицы не имеют спина, взаимодействуют с помощью локального сферически симметричного потенциала, на который к тому же накладывались ограничительные условия

$$\int_0^{\infty} r |V(r)| dr < \infty; \quad \int_0^{\infty} r^2 |V(r)| dr < \infty. \quad (2)$$

Первое из условий (2) означает, что абсолютная величина потенциала при  $r \rightarrow 0$  не должна возрастать быстрее  $1/r^{2-\varepsilon}$  (где  $\varepsilon > 0$ ), а второе — что  $|V(r)|$  убывает при  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $1/r^3$ .

Позднее оказалось, что теорему можно обобщить и для более сложных задач и существуют различные ее модификации в тех случаях, когда она непосредственно неприменима. До настоящего времени в этой области выполнено уже несколько десятков работ, в которых идея Левинсона получила значительное развитие.

Были предложены новые и в некоторых случаях более эффективные способы доказательства теоремы. Они позволили распространить ее на более широкий класс взаимодействий: для нелокальных потенциалов, для взаимодействия заряженных частиц и других сил, имеющих сингулярное поведение, для потенциалов, зависящих от скорости и от энергии. Оказалось возможным связать  $\delta_l(0) - \delta_l(\infty)$  с числом полюсов Редже определенного типа и распространить теорему на многоканальные процессы. Теорема Левинсона была сформулирована для системы трех тел. Целый ряд исследований был предпринят с целью установить ее вид в теории поля.

Таким образом, круг явлений, для которых в какой-то форме справедлива теорема Левинсона, оказался довольно обширным и представляется полезным собрать полученные в этой области результаты в одном обзоре. Это позволит быстро и довольно полно

\* Дифференциальное сечение упругого рассеяния в элемент телесного угла  $d\Omega$  выражается через  $\delta_l$  следующим образом:

$$d\sigma/d\Omega = |A(\theta)|^2,$$

где  $A(\theta) = (1/k) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_l) \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$ . Полное сечение  $\sigma$  равно сумме парциальных сечений  $\sigma_l$ :

$$\sigma = \sum_l \sigma_l = (4\pi/k^2) \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Об определении фаз  $\delta_l$  из эксперимента см. [2].

ознакомиться с данной проблемой, получить по ней систематизированный список оригинальных работ, рассеянных по многочисленным журналам.

Теорема была доказана впервые в связи с изучением вопроса об однозначности обратной задачи рассеяния, т. е. задачи о восстановлении потенциала по фазам при наличии связанных состояний. Но она может оказаться полезной и при феноменологическом подборе параметров взаимодействия по экспериментальным данным. Например, глубина потенциальной ямы должна быть взята достаточной для существования такого числа уровней, на которое, согласно теореме Левинсона, указывает энергетическое поведение фаз рассеяния. Причем часто получаемая таким путем информация оказывается практически незаменимой.

Обсуждение вопросов, связанных с теоремой, может послужить хорошим поводом для того, чтобы рассмотреть и уточнить отдельные факты, относящиеся к теории рассеяния, которые не затрагиваются теоремой непосредственно, но близко к ней примыкают.

Данный обзор не избавит читателя от необходимости обращаться к оригинальным источникам при желании подробнее ознакомиться с различными вариантами доказательств и другими деталями. Авторы ставили перед собой цель дать общее представление о состоянии предмета, ознакомить с наиболее интересными аспектами проблемы, предложить в некоторых случаях дополнительные пояснения и иллюстрации тем положениям, которые до сих пор излагались еще недостаточно наглядно.

Способы доказательства соотношения (1), имеющиеся сейчас в литературе, носят довольно формальный характер. Поэтому целесообразно сначала на простом примере подробнее обсудить связь фазовых сдвигов  $\delta(0)$  и  $\delta(\infty)$  с числом связанных состояний, чтобы сделать ее возможно более очевидной.

## 1. ПРОСТОЙ СЛУЧАЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим уравнение Шредингера для волновой функции  $\Psi(k, r)$ , зависящей для каждого фиксированного значения энергии от одной переменной  $r$ , — это может быть радиальное уравнение для парциальной  $S$ -волны ( $l = 0$ ) частицы в сферически симметричном потенциале (здесь и далее в обзоре  $\hbar = 1$ ,  $2M = 1$ , где  $M$  — приведенная масса):

$$-\frac{d^2}{dr^2} \Psi(k, r) + [V(r) - k^2] \Psi(k, r) = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что  $V(r)$  удовлетворяет соотношениям (2). Зададим следующие граничные условия при  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$ :

$$\Psi(k, 0) = 0; \quad \Psi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin(kr + \delta(k))/k. \quad (4)$$

Запись асимптотического поведения  $\Psi$  в форме (4) позволяет подчеркнуть тот факт, что  $\delta$  является *фазовым сдвигом* функции  $\Psi(k, r)$  при больших  $r$  по отношению к функции  $\Psi_{\text{своб}}(k, r) = \sin(kr)/k$  для свободного движения частицы ( $V(r) \equiv 0$ ), уравнение Шредингера для которой имеет вид:

$$-\frac{d^2}{dr^2} \Psi_{\text{своб}}(k, r) - k^2 \Psi_{\text{своб}}(k, r) = 0. \quad (5)$$

Начнем с рассмотрения поведения  $\delta(k, r)$  при больших энергиях  $E = k^2$ .

Интуитивно ясно, что при энергии, много большей  $|V(r)|$  (если потенциал ограниченная функция), влиянием поля  $V(r)$  на движение частицы можно пренебречь, т. е.  $\Psi(k, r) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Psi_{\text{своб}}(k, r)$ , а, следовательно, фазовый сдвиг  $\Psi$  по отношению к  $\Psi_{\text{своб}}$  с ростом  $k$  должен исчезать:  $\delta(\infty) = 0$ .

Это совсем просто увидеть на примере прямоугольной ямы радиуса  $a$  с глубиной  $V_0$ . С ростом энергии разница в эффективных кинетических энергиях частицы в области  $r < a$  для движения свободного и в потенциале будет оставаться постоянной и равной глубине ямы  $V_0$ :

$$k'^2 - k^2 = V_0. \quad (6)$$

Разница же в частотах колебаний двух решений при  $r < a$  будет убывать. Действительно, согласно (6):

$$k'^2 - k^2 \equiv (k' - k)(k' + k) = V_0, \quad (6a)$$

и, следовательно,

$$k' - k = \frac{V_0}{k' + k} = \frac{V_0}{\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E}} \xrightarrow{E, k \rightarrow \infty} 0, \quad (7)$$

а это значит, что с ростом энергии включение потенциала все меньше будет сказываться на изменении частоты решения в области взаимодействия. Решение  $\Psi(k, r)$  будет стремиться к свободному и  $\delta(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Покажем теперь, что в этом случае при нулевой энергии фазовый сдвиг  $\delta(0)$  равен  $m\lambda$ , как это требуется согласно (1). Легко убедиться, что  $\delta(0)$  принимает лишь значения кратные  $\pi$  (за исключением особого случая, когда в потенциальной яме  $V(r)$  имеется «уровень» с нулевой энергией связи).

Вне области взаимодействия (любого!) волновая функция  $\Psi(k = 0, r)$  имеет вид прямой:

$$\Psi(k = 0, r) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sin(kr + \delta(k)) = r + b, \quad (8)$$

$$\text{где } b = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta(k)}{k}.$$

В сущности прямая (8) так же, как и прямая

$$\Psi_{\text{своб}}(0, r) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sin kr = r, \quad (9)$$

является функцией вырожденных колебаний с бесконечно большим периодом (с частотой колебаний, равной нулю). А поскольку обе эти функции  $\Psi(0, r)$  и  $\Psi_{\text{своб}}(0, r)$  имеют пересечения с осью  $r$  («узлы») на конечном расстоянии  $\Delta r = b$  друг от друга, которое пренебрежимо мало по сравнению с бесконечной величиной периода их «колебаний», то фазовый сдвиг  $\delta(0)$  следует считать кратным  $\pi$ :

$$\delta(0) = n\pi. \quad (10)$$

Остается только показать, что  $n$  равно числу уровней  $m$  в яме  $V(r)$ .

Рассмотрим для простоты снова  $V(r)$  в форме прямоугольной ямы с глубиной  $V_0$  и радиусом  $a$  (перейти к более общему случаю  $V(r)$  можно, представляя  $V(r)$  приближенно в виде ступенчатой функции и переходя к пределу бесконечного числа ступенек).

Решение  $\Psi(k, r)$  имеет в двух областях  $r \geq a$  и  $r \leq a$  вид синусоид с различными частотами:

$$\Psi(k, r \leq a) = A \sin \{\sqrt{V_0 + k^2} r \equiv \varphi_1(k, r)\}; \quad (11a)$$

$$\Psi(k, r \geq a) = \frac{1}{k} \sin \{kr + \delta(k) \equiv \varphi_2(k, r)\}. \quad (11b)$$

Найдем соотношение между фазами  $\varphi_2(k, r)$  и  $\varphi_1(k, r)$ , представляющими для нас интерес, так как  $\varphi_2(0, a)$  равна искомому фазовому сдвигу  $\delta(0)$ , а  $\varphi_1(0, a)$  связана с числом уровней в потенциале  $V(r)$ .

При  $r = a$  в силу непрерывности  $\Psi$  должны быть равны значения синусоид (11a), (11b), т. е. они могут обращаться в нуль при  $r = a$  только одновременно и их фазы  $\varphi_1(k, a)$ ,  $\varphi_2(k, a)$  одновременно становятся кратными  $\pi$ . Более того, поскольку непрерывна и  $\frac{d}{dr} \Psi$ , одновременно обращаются в нуль и первые производные синусоид (11a), (11b) при  $r = a$ , когда  $\varphi_1(k, a)$  и  $\varphi_2(k, a)$  становятся кратными нечетному числу  $\pi/2$ . Очевидно, что при  $V_0 = 0$   $\varphi_1(k, a) = \varphi_2(k, a)$ , а при увеличении  $V_0$  они одновременно проходят значения  $n\pi/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и таким образом если  $\varphi_1(k, a) = n\pi$ , то и  $\varphi_2(k, a) = n\pi$ ; (12a)  
если  $\varphi_1(k, a) = (n + 1/2)\pi$ , то и  $\varphi_2(k, a) = (n + 1/2)\pi$ ; (12б)  
если  $n\pi < \varphi_1 < (n + 1/2)\pi$ , то и  $n\pi < \varphi_2 < (n + 1/2)\pi$ . (12в)

Хорошо известно, что функция  $n$ -го связанного состояния  $\Psi(k_n, r)$  имеет  $n - 1$  узел, не считая точки  $r = 0$  (рис. 1). В точке

последнего узла фаза функции  $\Psi(k_n, r)$  равна  $(n - 1)\pi$ . После этой точки  $\Psi(k_n, r)$  проходит еще через один свой максимум (или минимум), в результате чего фаза  $\Psi(k_n, r)$  в яме возрастает еще по крайней мере на  $\pi/2$ . Ясно, что фаза решения при  $E = 0$  должна опережать фазу самого верхнего  $m$ -го уровня, поскольку частота колебаний решения с  $E = 0$  должна быть больше, чем для связанного состояния с  $E < 0$ . Ясно также, что  $\varphi_1(0, a)$  не может превышать величину  $(m + 1/2)\pi$ ; в противном случае имелось бы больше чем  $m$  уровней в яме:

$$(m - 1/2)\pi \leq \varphi_1(0, a) \leq (m + 1/2)\pi. \quad (13)$$

А согласно (12) и (13), следует:

$$(m - 1/2)\pi \leq \varphi_2(0, a) = \delta(0) \leq (m + 1/2)\pi, \quad (14)$$

что вместе с (10) и  $\delta(\infty) = 0$  дает (1). Это и требовалось доказать. В специальном случае, когда появляется  $(m + 1)$ -й уровень с нулевой энергией связи, производная от  $\Psi(k, r)$  обращается в нуль при  $r = a$  и  $\varphi_1(0, a) = (m + 1/2)\pi$ , так как на краю ямы решение  $\Psi(0, r)$  должно сшиваться с константой, в которую в пределе  $E_{m+1} \rightarrow 0$  переходит его экспоненциально затухающий хвост:  $\Psi(k, r \geq a) \sim \exp(-\kappa_{m+1}r) \xrightarrow{\kappa_{m+1} \rightarrow 0} \text{const}$  (рис. 2).

Согласно (12б) и равенству  $\varphi_2(0, a) = \delta(0)$ , имеем:

$$\delta(0) = (m + 1/2)\pi. \quad (15)$$

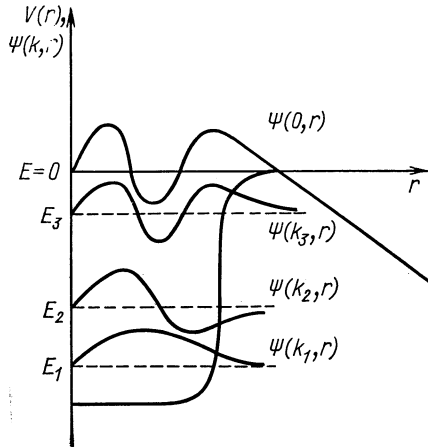


Рис. 1. Волновые функции связанных состояний  $\Psi(k_i, r)$  с энергиями  $E_i$  ( $E_1 < E_2 < E_3 < 0$ ) и состояния непрерывного спектра  $\Psi(E, r)$  в предельном случае  $E \rightarrow 0$  для частицы в потенциальной яме.

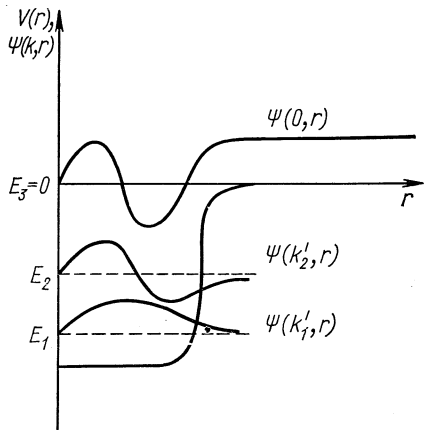


Рис. 2. Случай ямы, имеющей два связанных состояния и один «уровень» с энергией  $E = 0$ .

Это соответствует тому, что «колеблющаяся» (с нулевой частотой) функция (8) достигла своего экстремума и ее фазовый сдвиг относительно (9) оказывается вместо (10) кратным нечетному числу  $\pi/2$ .

Таким образом, можно сказать, что уровень, лежащий при  $E = 0$ , дает в соотношении Левинсона лишь половину вклада

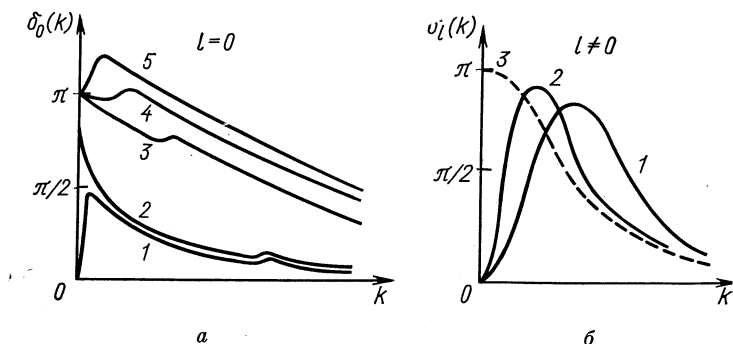


Рис. 3. Зависимость фазы от энергии для потенциалов различной глубины.

нормального уровня; точка  $E = 0$  как бы только наполовину соответствует связанному состоянию, а наполовину — состоянию рассеяния\*.

Сказанное выше полезно дополнить двумя интересными иллюстрациями.

1. До сих пор речь шла о величине фазового сдвига при фиксированных значениях энергии. Было показано, что с углублением потенциала  $\delta(0)$  меняется скачком на  $\pi$  в момент возникновения нового уровня. Посмотрим, как это проявляется на энергетической зависимости  $\delta(k)$  [3, 4], отвечающих потенциалам  $V(r)$  разной глубины. Кривые занумерованы в порядке, соответствующем усилению притяжения  $V(r)$ . Следует обратить внимание на то, что при  $l \neq 0$  появлению нового уровня предшествует возникновение резонанса (квазистационарного состояния при  $E > 0$ ). Этот резонанс постепенно приближается к  $E = 0$ . Рис. 3, б демонстрирует скачок  $\delta(0)$  при превращении квазистационарного уровня в стационарный. Картина, подобная изображенной на рис. 3, будет иметь место и в случае расширения ямы вместо углубления ее.

\* Для парциальной волны с неравным нулю орбитальным моментом ( $l \neq 0$ ) уровень, лежащий при  $E = 0$ , дает вклад в соотношение Левинсона, как и всякое другое состояние. Это связано с наличием центробежного барьера, который делает функцию такого состояния  $\Psi_l(0, r)$  в области вне ямы убывающей с ростом  $r$ , так что  $\Psi_{l \neq 0}(0, r)$  оказывается нормируемой (в отличие от  $\Psi_{l=0}(0, r)$  см. рис. 1 и 2).

2. Посмотрим теперь на поведение *фазовой функции* [5, 6]  $\delta(k, r)$  для некоторой потенциальной ямы  $V(r)$ . Поясним сначала смысл функции  $\delta(k, r)$  (см. уравнение для нее в разд. 5). При каждом фиксированном значении  $r = r_0$  она соответствует обычному фазовому сдвигу рассеяния при энергии  $k^2$  в «обрезанном» потенциале  $V_{r_0}(r)$ , равном исходному  $V(r)$  при  $r < r_0$  и нулю при  $r \geq r_0$ :

$$V_{r_0}(r) = \begin{cases} V(r) & \text{при } r < r_0, \\ 0 & \text{при } r \geq r_0. \end{cases}$$

Таким образом, вся функция  $\delta(k, r)$  при определенном  $k$  описывает зависимость фазового сдвига рассеяния на обрезанном при  $r = r_0$  потенциале с оборванным «хвостом» от положения точки его обрыва.

Поведение фазовой функции имеет очень характерный вид (рис. 4), демонстрирующий изменение фазовых сдвигов при непрерывном изменении потенциала рассеяния — постепенном наращивании его хвоста [5]. При больших энергиях вся функция  $\delta(k, r)$  близка к нулю. С уменьшением  $k = \sqrt{E}$  (в этом порядке пронумерованы кривые  $\delta(k, r)$  на рис. 4) зависимость фазовой функции

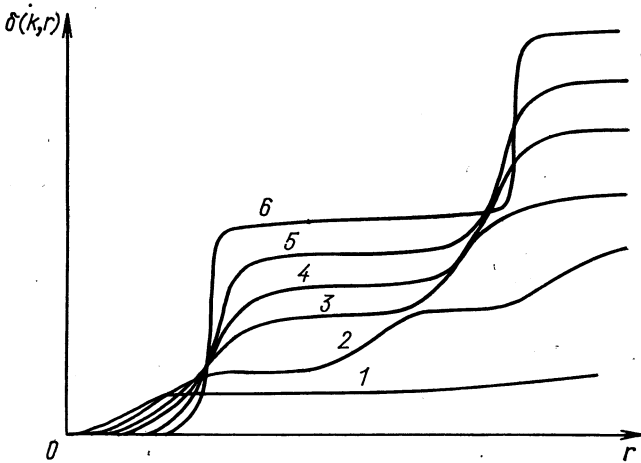


Рис. 4. Фазовые функции  $\delta(k, r)$  для потенциального рассеяния при различных энергиях ( $E_1 > E_2 > \dots > E_6 \approx 0$ ).

от  $r$  принимает все более явно заметный ступенчатый характер. При  $k = 0$  это строго ступенчатая функция. Каждая ступенька высотой  $\pi$ : скачок происходит как раз при тех значениях  $r$ , при которых в обрезанном потенциале появляется новый уровень.



При любом  $r = r_0$  имеет место равенство  $\delta_{r_0}(0) - \delta_{r_0}(\infty) = n_{r_0}\pi$ , где  $n_{r_0}$  — число связанных состояний в оборванном при  $r_0$  потенциале.

Докажем это. Выше упоминалось, что до сих пор предложено уже несколько способов доказательства теоремы Левинсона. И пользу от этого можно усмотреть не только в том, что они оказываются удобными в разных случаях, но и в том, что каждый из этих вариантов позволяет вскрыть какие-то новые стороны закономерностей, определяющих поведение квантовых систем.

В 1964 г. Велнером [7] было предложено одно сравнительно простое доказательство теоремы. Сам факт, что для публикации своей статьи он выбрал журнал американской ассоциации учителей физики, говорит о том, что автор стремился сделать ее доступной возможно более широкому кругу читателей, интересующихся физикой.

Воспроизведем здесь основные положения этой работы. Проинтегрируем уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2}{dr^2} \Psi + V(r) \Psi - k^2 \Psi = 0$$

по  $k$  (будем обозначать операцию такого дифференцирования точкой над функцией):

$$-\frac{d^2}{dr^2} \dot{\Psi} + V(r) \dot{\Psi} - k^2 \dot{\Psi} - 2k\Psi = 0. \quad (16)$$

Умножим теперь (3) на  $\dot{\Psi}$ , а (16) на  $\Psi$  и вычтем одно из другого:

$$-\frac{d}{dr} \left( \dot{\Psi} \frac{d}{dr} \Psi - \Psi \frac{d}{dr} \dot{\Psi} \right) + 2k\Psi^2 = 0. \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по  $r$  от 0 до  $r$  и, используя граничное условие  $\Psi(0) = 0$ , получим:

$$\dot{\Psi} \frac{d}{dr} \Psi - \Psi \frac{d}{dr} \dot{\Psi} = 2k \int_0^r \Psi^2(r') dr'. \quad (18)$$

В области больших значений  $r$ , где для волновой функции  $\Psi$  можно пользоваться асимптотической формой  $\Psi = \sin(kr + \delta)$ , получаем (предполагается, что в потенциале  $V(r)$  нет уровня при нулевой энергии):

$$\dot{\delta} = -r + \sin 2(kr + \delta)/2k + 2 \int_0^r \Psi^2(r') dr'. \quad (19)$$

Соотношение (19) может быть преобразовано (см. Приложение 1) к виду:

$$\dot{\delta} = \int_0^\infty (2\Psi^2 - 1) dr. \quad (20)$$

Вместе с условием полноты решений уравнения Шредингера формула (20) позволяет получить (1).

Факту, что состояния  $\Psi(k_n, r)$ ,  $\Psi(k, r)$  дискретного и непрерывного спектра уравнения (3) образуют полный набор, соответствует равенство (см. [4], с. 345):

$$\sum_{n=1}^m \Psi(k_n, r) \Psi(k_n, r') + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Psi(k, r) \Psi(k, r') dk = \delta(r - r'). \quad (21)$$

Полный набор составляют также решения уравнения свободного движения:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kr \sin kr' dk = \delta(r - r'). \quad (22)$$

Вычтем (22) из (21) и положим  $r = r'$ , после чего проинтегрируем полученное равенство по  $r$  (используя тот факт, что функции связанных состояний  $\Psi(k_n, r)$  нормированы):

$$m + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dr [\Psi^2(k, r) - \sin^2 kr] = 0. \quad (23)$$

Перепишем (23) в виде:

$$m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \left\{ \int_0^{\infty} [\Psi^2(k, r) - 1/2] dr - \int_0^{\infty} [\sin^2 kr - 1/2] dr \right\} = 0. \quad (23')$$

Второй интеграл в фигурных скобках в (23') равен нулю, а первый можно, согласно (20), заменить на  $\delta/2$ . В результате получаем (1)\*.

## 2. ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ И ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ СИНГУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Особенность кулоновского взаимодействия заключается, например, в том, что фазовый сдвиг для рассеяния заряженных частиц является неограниченной величиной\*\*. К тому же в случае кулоновского притяжения имеется бесконечное число связанных состояний. Поэтому теорема Левинсона в своем обычном виде

\* Велнер [7] отмечает, что полную строгость доказательства можно достигнуть при оправдании порядка перехода к пределам, использовании множителей  $\exp(-\varepsilon r)$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ), взятия интегралов и т. д.

\*\* Фазовый сдвиг  $\delta_l$  для чистого кулоновского рассеяния по сравнению со случаем свободного движения равен:  $\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta}{2k} \ln 2kr + \sigma_l \right) \rightarrow \infty$  [см. формулу (25)].

теряет смысл для таких дальнедействующих сил. Тем не менее некоторый ее аналог может быть сформулирован [8, 9], но не для фазовых сдвигов чисто кулоновского рассеяния по сравнению со случаем свободного движения.

Пусть наряду с кулоновским имеется еще и короткодействующий потенциал  $V(r)$ . Уравнение Шредингера для  $l$ -й парциальной волны тогда примет вид ( $\hbar = 1$ ;  $2M = 1$ ):

$$[d^2/dr^2 + k^2 - l(l+1)/r^2 - V(r) - \beta/r] \Psi_l(k, r) = 0, \quad (24)$$

где  $\beta = Z_1 Z_2 e^2$ ;  $Z_1$  и  $Z_2$  — заряды сталкивающихся частиц в единицах элементарного заряда  $e$ .

Оказывается, соотношение типа (1) имеет место для фазовых сдвигов  $\eta_l(k)$ , характеризующих отличие рассеяния комбинированным полем  $V + \beta/r$  от чисто кулоновского.

Парциальная волна  $\Psi_l(k, r)$  имеет следующий асимптотический вид:

$$\begin{aligned} \Psi_l(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp[-i(kr - l\pi/2 - \beta(\ln 2kr)/2k + \sigma_l)] - \\ - \exp[i(kr - l\pi/2 - \beta(\ln 2kr)/2k + \sigma_l)] S_l(k). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\sigma_l = \arg \Gamma(i\beta/2k + l + 1)$ ;

$$S_l(k) = \exp[2i\eta_l(k)] = f_l(k)/f_l(-k). \quad (26)$$

Для чисто кулоновского поля  $S_l = 1$  и по определению  $\eta_l = 0$ .

Рассмотрим отдельно случаи отталкивающего ( $\beta > 0$ ) и притягивающего ( $\beta < 0$ ) кулоновских полей.

1. Пусть  $\beta > 0$ . Тогда связанные состояния могут существовать только благодаря дополнительному короткодействующему потенциалу  $V(r)$ . Обозначим с помощью  $n_l$  число уровней в потенциале  $V(r) + \beta/r$  с данным  $l$ .

Модифицированная теорема Левинсона имеет при  $\beta > 0$  форму:

$$\left. \begin{aligned} \eta_l(0) - \eta_l(\infty) &= n_l \pi, \text{ если } l \geq 1 \text{ или } f_l(0) \neq 0 \text{ при } l = 0, \\ \eta_0(0) - \eta_0(\infty) &= (n_0 + 1/2) \pi, \text{ если } f_0(0) = 0 \text{ (} l = 0 \text{)}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Последнее соотношение отвечает уровню при  $E = 0$ . Предполагая, что  $V(r)$  удовлетворяет условиям [ср. (2)]

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 V(r) = 0, \quad (28)$$

можно доказать [8], что  $\eta_l(\infty) = 0$ .

Использованный здесь прием перехода от обычного фазового сдвига  $\delta$  к  $\eta$  оказывается полезным для обобщения теоремы Левинсона и на случай других потенциалов (помимо кулоновского), не удовлетворяющих условиям (2).

2. Пусть  $\beta < 0$ . В потенциале  $V(r) + \beta/r$  имеется бесконечное число связанных состояний. Все они оказываются сдвинутыми

по энергии относительно уровней чисто кулоновского случая, для которых справедлива простая формула:

$$E_{nl} = -\beta^2/4n^2, \quad (29)$$

где  $n$  — главное квантовое число.

Для положения смещенных уровней (для  $V + \beta/r$ ) можно также написать соотношение типа (29), только при этом необходимо заменить целые числа  $n$  в правой части (29) на некоторые величины  $n'_i$ , специально подобранные так, чтобы описать дискретный спектр комбинированного поля:

$$E'_{nl} = -\beta^2/4n_i'^2. \quad (30)$$

Для характеристики отличия кулоновских уровней и уровней в потенциале  $V + \beta/r$  вводится понятие квантового дефекта  $n_l$ -го связанного состояния

$$\mu_l(n) = n - n'_i. \quad (31)$$

Очевидно, что  $\mu_l(n) = 0$  для чистого кулоновского взаимодействия.

Обозначим предельное значение  $\mu_l(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  с помощью  $\mu_l$ :

$$\mu_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_l(n). \quad (32)$$

Аналог теоремы Левинсона для  $\beta < 0$  формулируется следующим образом:

$$\eta_l(0) - \eta_l(\infty) = \mu_l \pi, \quad (33)$$

где  $\eta_l(\infty) = 0$ , если удовлетворяются условия (28).

Предельный квантовый дефект  $\mu_l$  можно приближенно определить из спектроскопических измерений для больших  $n$  или же численным решением уравнения Шредингера для  $k = 0$  (см. [8]).

Рассмотрим потенциалы, имеющие сингулярное поведение при  $r \rightarrow 0$ .

Кроме кулоновского взаимодействия изучались сингулярные потенциалы  $V(r) = \beta/r^2$  [10]. Ясно, что их можно рассматривать просто как «добавку» к центробежному барьеру  $l(l+1)/r^2$ :

$$l(l+1)/r^2 + \beta/r^2 = \nu(\nu+1)/r^2, \quad (34)$$

где

$$\nu = [-1 + (1 + 4l + 4l^2 + 4\beta)^{1/2}]/2. \quad (35)$$

Как и в случае обычного центробежного барьера получается независящий от энергии фазовый сдвиг:

$$\delta_l(k) = \pi(l - \nu)/2. \quad (36)$$

Потенциалы типа  $\beta\phi(r)/r^2$ , где  $\phi(0) = 1$ , а  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$  дают при бесконечной энергии такой же фазовый сдвиг:  $\delta_l(\infty) = \pi(l - \nu)/2$ .

Теорема Левинсона формулируется для  $V = \beta/r^2$  и  $V = \beta\varphi(r)/r^2$  обычным образом. Отметим, однако, что при  $\beta < -l(l+1)$  волновая функция становится неограниченной при  $r \rightarrow 0$ , а при  $\beta < -1/4 - l(l+1)$  происходит «падение» частицы на центр и нельзя ввести понятие фазового сдвига.

Потенциалы, растущие быстрее  $1/r^2$  при  $r \rightarrow 0$ , дают неограниченный фазовый сдвиг при  $k \rightarrow \infty$ . Так, для потенциалов, ведущих себя при  $r \rightarrow 0$  как  $1/r^{2+\varepsilon}$ , где  $0 < \varepsilon < \infty$ ,

$$\delta(k \rightarrow \infty) = -k^{\varepsilon/(2+\varepsilon)}. \quad (37)$$

Этот результат получен в работе [10], но строго не доказан, а потенциалы с твердой сердцевиной ( $V(r) = \infty$  при  $r < a$ ) дают

$$\delta(k \rightarrow \infty) = -ka. \quad (38)$$

Хотя в двух последних случаях теряет смысл соотношение типа (1), но остается связь фазового сдвига при  $k \rightarrow 0$  и числа уровней  $m$  [5]:

$$\delta(0) = (m + \tau/2) \pi, \quad (39)$$

где  $\tau$  — кратность уровня при  $k = 0$ .

### 3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Потенциалы  $V(\mathbf{r})$ , которые зависят от вектора  $\mathbf{r}$  — относительного расстояния между частицами, называют *локальными*. Они представляют собой частный случай взаимодействия более общего типа, которое задается в уравнении Шредингера с помощью ядра  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  интегрального оператора:

$$[-\Delta_{\mathbf{r}} - k^2] \Psi(\mathbf{r}) + \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0. \quad (40)$$

*Нелокальный* потенциал  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  делает уравнение (40) интегро-дифференциальным. Оно переходит в обычное дифференциальное уравнение Шредингера с локальным  $V(\mathbf{r})$  при специальном выборе  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ :

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (41)$$

Есть определенные указания на то, что нелокальный характер имеют фундаментальные нуклон-нуклонные силы. К нелокальному потенциалу можно свести взаимодействие сложных систем (например, в единой теории ядерных реакций [11]). В последнее время нелокальные потенциалы стали интенсивно использовать в ядерной физике при решении различных трехчастичных задач.

Этот тип сил давно привлекал к себе интерес, но до сих пор они остаются еще недостаточно хорошо изученными. И можно думать, что теорема Левинсона окажется полезным вспомога-

ным средством их более полного освоения. Но при использовании соотношения (1) для нелокальных потенциалов нужна известная осторожность.

Первая работа, в которой было обнаружено, что теорема Левинсона в виде (1) не обязательно выполняется в случае нелокальных потенциалов, была опубликована в 1957 г. [12]. В ней рассматривались так называемые *сепарабельные* потенциалы. Остновимся кратко на их определении.

Для этого уравнение (40) удобно переписать в импульсном представлении. Тогда оператор кинетической энергии  $-\Delta_{\mathbf{r}}$  становится просто числом  $p^2$  и (40) принимает интегральную форму (вместо интегродифференциальной):

$$(p^2 - k^2) \Psi(\mathbf{k}) + \int \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle \Psi(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' = 0. \quad (42)$$

Предполагая, что двухчастичное взаимодействие является центральным, нелокальный потенциал в импульсном представлении можно записать в виде:

$$\langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle = 4\pi \sum_{lm} V_l(k, k') Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{k}'}), \quad (43)$$

где каждое слагаемое описывает взаимодействие между частицами в состоянии с определенным орбитальным моментом  $l$ , а  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  — импульсы относительного движения частиц до и после взаимодействия.

Использование нелокальных сепарабельных потенциалов позволяет получать решение уравнений Шредингера и Липпмана — Швингера в аналитическом виде [13]. Для таких потенциалов парциальные слагаемые  $V_l(k, k')$  можно записать в форме (далее в этом разделе индекс  $l$  будем опускать):

$$V(k, k') = \sum_{i=1}^n C_i g_i(k) g_i(k') \quad (44)$$

и тогда  $T$ -матрица, являющаяся решением уравнения Липпмана — Швингера, может быть представлена с помощью функций  $g_i$  в виде:

$$T(k, k', z) = \sum_{i,j=1}^n C_i g_i(k) g_j(k') M_{ij}^{-1}(z), \quad (45)$$

где

$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} - C_j \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{g_i(p) g_j(p) p^2 dp}{z - p^2}, \quad (46)$$

а  $z = E + i\epsilon$ .

Широкое использование потенциалов типа (44) объясняется тем, что для них существенно упрощается не только решение

двухчастичных задач, но также и уравнений Фаддеева, описывающих движение системы трех тел. С помощью (44) можно свести многомерные интегральные уравнения Фаддеева к эквивалентной системе одномерных интегральных уравнений, которые сравнительно просто могут быть решены на ЭВМ.

Однако одна только простота не была бы достаточным основанием для применения потенциалов (44). Оказывается, что с их помощью можно воспроизводить большинство характеристик трехчастичных систем. Этот вопрос очень подробно рассмотрен в работе [13], в которой имеется большое количество ссылок на оригинальные статьи.

При изучении обратной задачи для рассеяния на нелокальном сепарабельном потенциале Гурдэн и Мартэн [12] обратили внимание на то, что вопреки (1) имеются случаи, когда

$$\delta(0) - \delta(\infty) > m\pi,$$

где  $m$  — число связанных состояний двухчастичной системы. Они брали потенциал

$$V(k, k') = \varepsilon g(k) g(k'); \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (47)$$

для которого фазовый сдвиг дается выражением:

$$k \operatorname{tg} \delta(k) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(k)}{R(k)}, \quad (48)$$

где

$$f(k) = (\varepsilon/2\pi^2) k^2 g^2(k); \quad (49)$$

$$R(k) = 1 - P \int_0^{\infty} f(p) dp / (k^2 - p^2). \quad (50)$$

Для нарушения обычной теоремы Левинсона необходимо и достаточно, чтобы одновременно обратились в нуль  $f(k)$  и  $R(k)$ .

Одна из особенностей нелокальных взаимодействий заключается в том, что для них возможно существование «связанных» состояний с положительной энергией (в непрерывном спектре). Упомянутое выше условие нарушения теоремы Левинсона соответствует как раз такому случаю, когда имеет место связанное состояние при положительной энергии. Для локальных потенциалов (в одноканальном случае) это невозможно.

Мартэн [14] показал, что для действительного нелокального взаимодействия  $V(r, r') = V(r', r)$ , обладающего свойством  $V(r, r') = 0$  при  $r > r_0$  или  $r' > r_0$ , можно сформулировать эквивалент теоремы Левинсона:

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \pi(m + m'), \quad (51)$$

где  $m$  — число связанных;  $m'$  — число «ложных» связанных состояний с  $E > 0$ , имеющих волновые функции и убывающих

при больших  $r$ . Такие состояния возникают потому, что при некоторых условиях могут одновременно иметь решение неоднородное интегральное уравнение, полученное из уравнения Шредингера, и соответствующее однородное уравнение. В этом случае решение уравнения Шредингера становится неоднозначным и помимо обычного решения, имеющего асимптотику

$$\Psi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin(kr + \delta(k)),$$

будет существовать также решение, для которого

$$\Psi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

В работах [14, 15] приведено несколько таких примеров, когда требуется модификация первоначальной формы теоремы Левинсона.

В работе [16] был рассмотрен более общий, чем в [14], класс взаимодействий. Правда, и здесь брались потенциалы только с  $l = 0$ , но при этом предполагалось лишь, что  $V(r, r')$  действителен и симметричен:

$$V(r, r') = V^*(r, r') = V(r', r) \quad (52)$$

и что существует такое действительное число  $\alpha > 0$ , для которого

$$\int \exp(\alpha r) dr \int r' \exp(\alpha r') |V(r, r')| dr' < \infty. \quad (53)$$

В этом случае:

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \pi(m + m' + q/2), \quad (54)$$

где  $m$  — число связанных состояний;  $m'$  — число ложных связанных состояний;  $q$  — число связанных состояний с нулевой энергией.

Результат, аналогичный (54), получен в работах [17, 18], где изучалась обратная задача рассеяния в случае сепарабельных потенциалов, а о форм-факторах  $g(k)$ , входящих в  $V(k, k')$ , предполагалось, что они удовлетворяют условию [17]:

$$k^\nu |g(k)| \underset{k \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad (55)$$

где  $\nu > 3/2$  и  $g(k)$  непрерывны и дифференцируемы всюду.

Связанные состояния с положительной энергией являются неустойчивыми относительно малых изменений в нелокальном потенциале, они исчезают при небольших вариациях параметров взаимодействия. При наличии таких состояний возможны две разных формулировки теоремы Левинсона [19]. Если определять фазовый сдвиг как непрерывную функцию от энергии, то нужно в числе связанных состояний учитывать и ложные, как это делается в (51) и (54) (рис. 5). Кривая  $I$  соответствует уровню при  $E > 0$ ;



кривая 2 отвечает слегка измененному потенциалу, у которого этот уровень исчезает [20]; кривая 3 соответствует такому выбору фазы, при котором она претерпевает скачок на  $\pi$  при энергии связанного состояния в непрерывном спектре. Можно, однако, пользоваться и обычной формой теоремы Левинсона (без  $m'$  в правой части), только при этом фазовый сдвиг определяется так, что

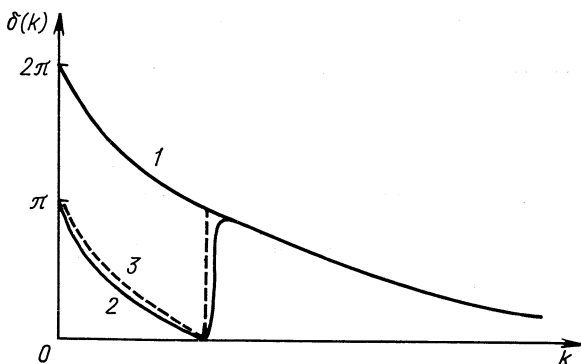


Рис. 5. Зависимость фазового сдвига для нелокального потенциала от энергии:

1 и 3 соответствуют различным способам определения фазового сдвига при наличии «связанного состояния» в непрерывном спектре; 2 — фазовый сдвиг для случая, когда это «связанное состояние» превращается в узкий резонанс. Как видно, 3 является предельным случаем для 2 при исчезающей ширине резонанса.

он претерпевает скачки на  $\pi$  при каждом связанном состоянии в непрерывном спектре (см. кривая 3 на рис. 5). В свое время такая неоднозначность определения фаз приводила к заблуждению, что здесь имеет место нарушение теоремы [20].

#### 4. ПОТЕНЦИАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ИМПУЛЬСА

Для феноменологического описания низкоэнергетического нуклон-нуклонного взаимодействия вводятся потенциалы типа:

$$V(r, p) = V_0(r) + [p^2 V_1(r) + V_1(r) p^2]/2; \quad r = |\mathbf{r}|; \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (56)$$

где  $p$  — дифференциальный оператор импульса. Такие потенциалы называются зависящими от импульса (скорости). Уравнение Шредингера для них имеет вид:

$$-\Delta \Psi(\mathbf{r}) + V_0(r) \Psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} [\Delta V_1(r) + V_1(r) \Delta] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}). \quad (57)$$

При  $V_1(r) > 0$  зависящая от импульса часть потенциала может заменить необходимое отталкивание нуклонов на малых расстоя-

ниях (см. ссылки в работе [21]). Использование таких  $V(r, p)$  вместо обычных потенциалов  $V(r)$ , имеющих бесконечно отталкивающие сердцевины, позволяет обойти трудности, возникающие при решении многочастичных задач из-за неограниченного роста  $V(r)$ .

В работе [21] устанавливается теорема Левинсона для зависящих от скорости потенциалов (56). Опуская вывод, приведем здесь только окончательный результат. В работе [21] рассматривались суперпозиции юкавовских потенциалов:

$$V_i(r) = \frac{1}{r} \int_m^{\infty} \sigma_i(\mu) \exp(-\mu r) d\mu; \quad i=0, 1, \quad (58)$$

где

$$\int_m^{\infty} \sigma_0(\mu) d\mu < \infty; \quad \int_m^{\infty} \mu^j \sigma_1(\mu) d\mu < \infty; \quad j=0, 1, 2.$$

Теорема Левинсона записывается в форме:

$$\delta_l(0) = \pi(n_l + \tau/2), \quad (59)$$

где  $\tau$ , как обычно, отлично от нуля лишь при  $l=0$  и равно числу «связанных» состояний при  $E=0$  \*.

## 5. ПОТЕНЦИАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ЭНЕРГИИ

Исследование потенциалов, зависящих от энергии, послужит нам хорошим поводом, чтобы привести здесь еще один способ доказательства теоремы Левинсона.

Рассматривались потенциалы  $V(E, r)$ , для которых фазовый сдвиг при бесконечной энергии  $\delta(\infty)$  равен нулю [22]. Для этого достаточно подчинить  $V(E, r)$  условию

$$|V(E, r)| < M(E) r^{a-2}, \quad a > 0, \quad (60)$$

где  $\lim_{E \rightarrow \infty} [M(E) E^{-b}] = 0$  для  $a \neq 1$ ;  $b=1/2$  при  $a > 1$ ;  $b=a/2$  при  $a=1$ ;  $\lim_{E \rightarrow \infty} [M(E) E^{1/2} \ln E] = 0$  для  $a=1$ .

Чтобы определить фазовый сдвиг  $\delta(k=0)$ , можно воспользоваться методом фазовых функций [5, 6]. (Понятие фазовой функции  $\delta(k, r)$  уже использовалось в разд. 1.)

Уравнение для  $\delta(k, r)$  в случае  $l=0$  имеет вид:

$$\frac{d}{dr} \delta(k, r) = -\frac{V(E, r)}{k} \sin^2[kr + \delta(k, r)] \quad (61)$$

\* В работе [21] в левой части формулы (59) стоит еще величина  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\delta_l(k) - k\alpha]$ , которая, однако, равна нулю.

с граничным условием

$$\delta(k, 0) = 0. \quad (62)$$

При больших  $r$ , где  $V(r)$  исчезает,  $\delta(k, r)$  переходит в фазовый сдвиг  $\delta(k)$ . Уравнение (61) и условие (62) однозначно задают ограниченную и непрерывную функцию  $\delta(k, r)$ .

Ввиду того что в правой части (61) в знаменателе стоит  $k$ , это уравнение не годится для определения  $\delta(k, r)$  в пределе  $k \rightarrow 0$ . Но можно перейти к другой функции  $f(k, r)$ , связанной с  $\delta(k, r)$  следующим образом ( $R$  — любое положительное значение  $r$ ):

$$\operatorname{tg} \delta(k, r) = kR \operatorname{tg} f(k, r); \quad f(k, 0) = 0. \quad (63)$$

Для  $f(k, r)$  имеем уравнение:

$$\frac{d}{dr} f(k, r) = -\frac{V(E, r)}{R} \left[ \frac{\sin kr}{k} \cos f(k, r) + R \cos kr \sin f(k, r) \right]^2. \quad (64)$$

Учитывая непрерывность функций  $f(k, r)$  и  $\delta(k, r)$  при  $k \neq 0$  и то, что они совпадают при  $r = 0$ , можно сделать следующее утверждение:

$$(2n - 1) \pi/2 < \delta(k, r) < (2n + 1) \pi/2, \quad (65)$$

если

$$(2n - 1) \pi/2 < f(k, r) < (2n + 1) \pi/2, \quad (66)$$

где  $n$  — целое число.

Согласно (63),  $\operatorname{tg} \delta(0, r) = 0$ , если  $f$  удовлетворяет (66), и, следовательно,

$$\delta(0, r) = n\pi, \quad \text{если} \quad (2n - 1) \pi/2 < f(0, r) < (2n + 1) \pi/2. \quad (67)$$

При больших  $r$  фазовая функция  $\delta(0, r)$  переходит в  $\delta(0)$  и (67) дает:

$$\delta(0) = n\pi, \quad \text{если} \quad (2n - 1) \pi/2 < f(0, r \rightarrow \infty) < (2n + 1) \pi/2. \quad (68)$$

Для доказательства теоремы Левинсона теперь остается только показать, что  $n$  в (68) равно числу связанных состояний  $m$  в потенциале  $V(E, r)$ . Это можно сделать, если потребовать, чтобы скорость изменения  $V(E, r)$  с энергией при отрицательных значениях  $E$  была ограничена так, чтобы число  $m$  в  $V(E, r)$  не отличалось от числа связанных состояний для потенциала  $V(r) = V(0, r)$ , не зависящего от энергии:

$$\partial V(E, r)/\partial E \leq 1 \quad \text{для} \quad E \leq 0. \quad (69)$$

Число нулей (узлов) радиальной части волновой функции, не считая точки  $r = 0$ , при  $E = 0$  равно числу связанных состояний  $m$ ; это — наибольшее целое число, для которого  $(2m - 1) \pi/2 < f(0, r \rightarrow \infty)$  [22], т. е.

$$(2m - 1) \pi/2 < f(0, r \rightarrow \infty) < (2m + 1) \pi/2. \quad (70)$$

В результате получаем обычное соотношение Левинсона:

$$\delta(0) - \{\delta(\infty) = 0\} = \pi l. \quad (71)$$

**6. СВЯЗЬ ПОЛЮСОВ РЕДЖЕ С ФАЗАМИ РАССЕЯНИЯ**

Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера для  $l$ -й парциальной волны

$$-\frac{d^2}{dr^2} \Psi_l(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_l(r) + V(r) \Psi_l(r) = E \Psi_l(r). \quad (72)$$

Обозначим  $N_l(E=0)$  число полюсов Редже \*, расположенных при  $E=0$  на действительной оси  $\text{Re } l$  справа от данного

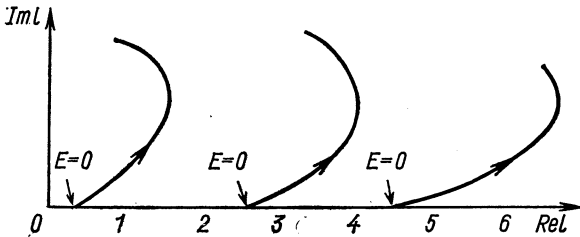


Рис. 6. Траектории Редже для потенциального рассеяния.

фиксированного значения орбитального момента  $l$ . Было показано [23], что  $N_l(E=0)$  равно числу связанных состояний  $m_l$  и теорему Левинсона можно переписать в виде:

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi N_l(E=0). \quad (73)$$

Более того, соотношение (73) оказывается справедливым и при любых действительных значениях  $l > -1/2$ , а не только для целых  $l$ . Так что (73) является еще одной разновидностью обобщения теоремы Левинсона.

Поясним тот факт, что число уровней  $m_l$  в состоянии с определенным орбитальным моментом  $l$  равно  $N_l(E=0)$ . Для этого проследим за поведением любого собственного значения  $E_{nl}$  при непрерывном и монотонном увеличении  $l$  в уравнении (72). Ясно, что с возрастанием центрального барьера  $l(l+1)/r^2$  глубина эффективной потенциальной ямы  $l(l+1)/r^2 + V(r)$  будет становиться все меньше и вместе с тем будет подниматься уровень  $E_{nl}$ , пока при некотором значении  $l = l_n^{(0)}$

\* Полюсами Редже называются полюса  $S$ -матрицы в комплексной плоскости  $l$ .

его энергия связи не станет равна нулю. Связанному состоянию  $E_{nl}$  отвечает полюс Редже на  $\text{Re } l$ , который будет двигаться вправо вдоль  $\text{Re } l$  при увеличении  $E_{nl}$ , т. е. часть соответствующей траектории Редже \* при  $E \leq 0$  расположена на действительной оси  $l$ . При дальнейшем увеличении энергии траектория сходится с  $\text{Re } l$  (рис. 6; стрелки на траекториях направлены в сторону увеличения энергии). Приведенные рассуждения делают очевидным, что для каждого уровня из  $m_l$  имеется «своя» траектория Редже, которая при  $E = 0$  дает полюс из числа  $N_l(E = 0)$ . И наоборот, каждому полюсу из  $N_l(E = 0)$  соответствует траектория Редже, которая с уменьшением энергии обязательно проходит через все значения  $l$ , лежащие слева на  $\text{Re } l$  ( $\text{Re } l > -1/2$ ), где полюса связаны с уровнями  $E_{nl}$ .

Другое соотношение типа теоремы Левинсона для полюсов Редже было получено в работе [24]. Оказывается число  $n(k)$  полюсов Редже, лежащих в правой части  $\lambda = l + 1/2$  плоскости, при данной энергии  $E = k^2$  пропорционально величине фазы  $\omega(\lambda, k)$  при  $r = 0$  нерегулярного решения Иоста  $f(\lambda, k, r)$  уравнения (72):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(\lambda, k, r) \exp(ikr) = 1$$

при  $\lambda = 0$ . В работе [24] доказано, что

$$\omega(0, k) = -\pi n(k). \quad (74)$$

Аналогичная теорема для случая кулоновского взаимодействия была рассмотрена в работе [25].

## 7. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор мы ограничивались рассмотрением примеров одноканальных задач. Но в громадном большинстве случаев для описания квантовых явлений требуется решать многоканальные системы уравнений. В том виде, в каком теорема Левинсона формулировалась в предыдущих разделах, она не может быть применена к системам с несколькими каналами, хотя бы уже потому, что теперь, вместо единственной фазы  $\delta(k)$ , результат процесса столкновения определяется целой матрицей рассеяния  $S(k)$ . К тому же при изменении энергии размерность матрицы  $S(k)$  может меняться. При переходе энергии  $E$  через порог  $E_\alpha$ , при котором открываются  $n$  новых каналов, ранг  $S$  меняется на  $n$ . В связи со сказанным, потребовалось существенно модифицировать теорему Левинсона для таких задач [26—29].

\* Траектории Редже — это кривые, описываемые полюсами Редже в комплексной плоскости  $l$  при изменении энергии.

Запишем сначала типичную систему многоканальных уравнений. Затем на ее основе введем понятие о собственных фазовых сдвигах, для которых и формулируется теорема Левинсона в данном случае.

В ряде задач уравнение Шредингера

$$(H - E) \Psi = 0 \quad (75)$$

для частиц  $A$  и  $B$  сводится к связанным (!) уравнениям для функций  $\psi_\alpha$  отдельных парциальных каналов [26]. Эти функции  $\psi_\alpha(r)$  являются радиальными волновыми функциями относительного движения  $A$  и  $B$  при заданном наборе  $\alpha$  квантовых чисел, определяющих состояние (канал) системы  $A + B$  для всех остальных ее степеней свободы. Можно рассматривать  $\psi_\alpha(r)$  как коэффициенты разложения  $\Psi$  по функциям  $\Phi_\alpha$ , характеризующим  $A$  и  $B$  (например, их спины, изотопспины, состояния внутреннего движения, если  $A$  и  $B$  имеют внутреннюю структуру), а также включающим угловую зависимость ( $Y_{lm}(\Omega_r)$ ) относительного движения  $A$  и  $B$  с определенным орбитальным моментом  $l$  и его проекцией  $m$  и др.:

$$\Psi = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(r) \Phi_{\alpha}. \quad (76)$$

Если  $\Phi_{\alpha}$  — ортонормированный набор, то, подставляя (76) в (75), умножая полученное уравнение слева на  $\Phi_{\alpha}^*$  и интегрируя по переменным  $\tau$ , от которых зависят  $\Phi_{\alpha}$ , получим систему многоканальных уравнений:

$$-\frac{d^2}{dr^2} \psi_{\alpha}(r) + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}(r) \psi_{\beta}(r) - (E - \varepsilon_{\alpha}) \psi_{\alpha}(r) = 0. \quad (77)$$

Здесь

$$V_{\alpha\beta}(r) = \int \Phi_{\alpha}^* V_{AB} \Phi_{\beta} dr$$

матрица взаимодействия, осуществляющая зацепление отдельных уравнений (связь каналов) в (77). Эта связь возникает из-за смешивания состояний системы, соответствующих разным каналам за счет взаимодействия  $V_{AB}$  частиц  $A$  и  $B$ . Константы  $\varepsilon_{\alpha}$  — энергии внутреннего состояния частиц  $A$  и  $B$ . Они определяют пороговые значения энергии, при которых открываются каналы  $\alpha$ . При  $E > \varepsilon_{\alpha}$  канал открыт, а при  $E < \varepsilon_{\alpha}$  — закрыт. В случае короткодействующих сил матрица взаимодействия исчезает при больших  $r$  и система (77) расщепляется на отдельные уравнения Шредингера для свободного движения частиц  $A$  и  $B$  в каналах:

$$-\frac{d^2}{dr^2} \psi_{\alpha}(r) - (E - \varepsilon_{\alpha}) \psi_{\alpha} = 0. \quad (78)$$

Решение этих уравнений хорошо известно и определяет асимптотическое поведение волновой функции системы. Для открытых

каналов  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_\alpha$  — комбинация падающей и уходящей волн

$$\psi_\alpha(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A_\alpha \exp(-ik_\alpha r) + B_\alpha \exp(ik_\alpha r); \quad k_\alpha = \sqrt{E - \varepsilon_\alpha}, \quad (79)$$

а для закрытых — экспоненциально затухающая функция. В соответствии с условиями конкретной физической задачи фиксируются значения амплитуд  $A_\alpha$  падающих волн в открытых каналах, тогда амплитуды уходящих волн определяются матрицей рассеяния  $S_{\alpha\beta}$ :

$$B_\alpha = S_{\alpha\beta} A_\beta. \quad (80)$$

В свою очередь,  $S$ -матрица определяется из решения системы (77).

Обычно рассматриваются случаи, когда падающие волны имеются только в отдельных (входных) каналах, а в остальных  $A_\alpha = 0$ . При этом рассеянные волны оказываются и в тех открытых каналах, где не было падающих. Можно, однако, представить себе ситуацию, когда во всех каналах имеются падающие и уходящие волны. Среди таких решений системы (77) можно выделить так называемые *собственноканальные (eigenchannel) состояния*. Им соответствует такой специальный ( $s$ ) выбор амплитуд  $A_\alpha^s$ , при котором  $B_\alpha^s$  оказываются отличными от  $A_\alpha^s$  лишь общих для всех каналов фазовым множителем  $\delta^s$  — *собственным фазовым сдвигом*:

$$B_\alpha^s = \exp(2i\delta^s) A_\alpha^s \quad (81)$$

или

$$S_{\alpha\beta} A_\beta^s = \exp(2i\delta^s) A_\alpha^s. \quad (82)$$

Таким образом, собственноканальные — это такие состояния, когда, несмотря на переходы между каналами в области взаимодействия, поток рассеянных волн распределяется по каналам в той же точно пропорции, как и падающих. Существует столько линейно независимых собственноканальных состояний, сколько имеется открытых каналов при данной энергии. Соответствующие наборы амплитуд  $A_\alpha^s$  можно получить из (82), если рассматривать это выражение как систему однородных алгебраических уравнений.

Теорема Левинсона для многоканальных задач формулируется следующим образом:

$$\sum_i \sum_s [\delta^s(\varepsilon_i) - \delta^s(\varepsilon_{i+1})] = m\pi. \quad (83)$$

Здесь  $m$  — число связанных состояний системы, а суммирование ведется по всем порогам ( $\varepsilon_i$ ) и по всем собственным фазовым сдвигам между двумя данными порогами. (Если последний, самый высокий, порог  $\varepsilon_N$ , то  $\varepsilon_{N+1} = \infty$ .)

Соотношению (83) можно придать другую форму [28, 29], если наложить на сумму собственных фазовых сдвигов

$$\Delta(k) = \sum_s \delta^s(k) \quad (84)$$

следующие условия.

1. Пусть  $\Delta(k)$  является непрерывной функцией от  $k$  при пороговых значениях энергии  $E_{\text{порог}}$ , если в изолированных (расцепленных) каналах нет связанных состояний при  $E_{\text{порог}}$ .

2. Пусть в точках  $k > 0$ , где изолированные каналы имеют связанные состояния кратности  $\sigma$ , функция  $\Delta(k)$  претерпевает скачки:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\Delta(k + \varepsilon) - \Delta(k - \varepsilon)\} = \pi\sigma. \quad (85)$$

Для таких функций  $\Delta(k)$  теорема Левинсона имеет вид:

$$\Delta(0) - \Delta(\infty) = (m + \tau/2) \pi, \quad (86)$$

где  $\tau$  — кратность уровней системы при  $k = 0$ ;  $m$  — число обычных связанных состояний.

Представляло бы также интерес написать теорему Левинсона для реальных частей экспериментально определяемых фазовых сдвигов, как это делается в теории поля (см. разд. 10).

## 8. УЧЕТ ПРИНЦИПА ПАУЛИ ПРИ ОПИСАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЭФФЕКТИВНОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Если участвующие в столкновении частицы  $A$  и  $B$  являются составными, то для последовательного описания их рассеяния нужно решать уравнение Шредингера, которое отвечает взаимодействию и движению всех элементарных частиц, входящих в систему. Однако на практике, для объяснения экспериментальных данных при энергиях ниже порога неупругого рассеяния  $E_{\text{порог}}$ , часто сводят приближенное взаимодействие  $A$  и  $B$  к эффективному двухчастичному потенциалу  $v_{AB}$ . Конечно, при такой постановке задачи соотношение между числом связанных состояний  $A + B$  и разностью фазовых сдвигов  $\delta(0) - \delta(\infty)$ , получаемое по теореме Левинсона для потенциального ( $v_{AB}$ ) рассеяния  $A$  на  $B$ , не может рассматриваться как строгий результат. При больших энергиях, например, открываются каналы неупругого рассеяния и теряет первоначальный смысл само понятие о фазовом сдвиге упругого рассеяния. Если же оказывается возможным развал системы на три (и более) фрагмента, то картина еще более усложняется. Тем не менее обсудим здесь как теорему Левинсона можно согласовать с выбором феноменологического потенциала



$v_{AB}$  [30]. Точная же формулировка теоремы Левинсона для трех (и более) частиц будет рассмотрена в разд. 9.

Из экспериментальных данных (например, для рассеяния нуклонов на легких ядрах или электронов на атомах) следует, что иногда получить правильную энергетическую зависимость фазового сдвига  $\delta(E)$  при энергиях ниже  $E_{\text{порог}}$  можно только, выбирая  $v_{AB}$  настолько глубоким, что число уровней в нем оказывается большим, чем в действительности имеется связанных состояний у системы  $A + B$ . В этих случаях как бы происходит нарушение теоремы Левинсона. Так, при рассеянии электрона ( $e^-$ ) атомом водорода Н как для триплетной, так и для синглетной  $s$ -фазы\* имеет место равенство  $\delta(0) = \pi^{**}$ , хотя связанное состояние  $e^-$  и Н — отрицательный ион водорода  $H^-$  — может существовать только в синглетном состоянии. По теореме же Левинсона следовало бы выбирать  $v_{eH}$  так, чтобы связанное состояние  $H^-$  имелось в обоих случаях. К тому же оказывается, что если рассчитать энергию связи  $e^-$  и Н по длине рассеяния и эффективному радиусу, определенным из низкоэнергетического поведения фазового сдвига (по теории эффективного радиуса), то получается отрицательная величина и в триплетном состоянии  $H^-$ . В табл. 1, взятой из работы [30], перечислены некоторые другие примеры подобных аномалий.

Сваном [30] было предложено объяснение такого, на первый взгляд, непонятного поведения фазового сдвига при  $E < E_{\text{порог}}$ . Он показал, что во всех случаях, когда

$$\delta(0) - \delta(\infty) = (m + n)\pi, \quad (87)$$

где  $m$  — число экспериментально установленных связанных состояний;  $n$  соответствует количеству запрещенных принципом Паули состояний. Поэтому (87) можно рассматривать как новое соотношение теоремы Левинсона, которое учитывает тождественность частиц, образующих систему.

Определенным обоснованием сказанному выше могут служить следующие рассуждения [31, 32]. Покажем, что радиальная часть  $u_0(r)$  волновой функции электрона  $\psi$  с  $l = 0$ , двигающегося в поле атома водорода (в триплетном случае), должна иметь, по крайней мере, один узел, хотя при этом притяжения между  $e^-$  и Н недостаточно для образования связанного состояния.

Обозначим с помощью  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  орбитальную часть волновой функции системы  $e^- + H$ , где  $\mathbf{r}_i$  — координаты электронов (движением тяжелого ядра в этой задаче с хорошей точностью можно

\* Здесь подразумевается симметричное и антисимметричное спиновые состояния электронов.

\*\* Фазовый сдвиг  $\delta(\infty)$  для потенциала  $v_{eH}$ , выбранного так, чтобы описать рассеяние  $e^-$  на Н ниже  $E_{\text{порог}}$ , естественно считать равным нулю.

пренебречь). В качестве функции рассеивающегося электрона в двухчастичном приближении естественно определить

$$\psi(k, \mathbf{r}_1) = \int \varphi_0^*(\mathbf{r}_2) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2, \quad (88)$$

где  $\varphi_0(\mathbf{r}_2)$  — волновая функция основного состояния атома водорода.

Таблица 1

Система	Спиновое состояние	Число запрещенных состояний	$\delta(0)$	Связанное состояние
$e^- - \text{H}$	{ Триpletное Синглетное	1 0	$\pi$ $\pi$	— $\text{H}^-$
$e^- - \text{He}$	Дублетное	1	$\pi$	—
$e^- - \text{Ne}$	Дублетное	2	$2\pi$	—
$e^- - \text{A}$	Дублетное	3	$3\pi$	—
$n-d$ }	Квартетное	1	$\pi$	—
$p-d$ }	Дублетное	0	$\pi$	${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$
$n-t$	{ Триpletное Синглетное	1 1	$\pi$ $\pi$	— —
$p-{}^3\text{He}$	{ Триpletное Синглетное	1 1	$\pi$ $\pi$	— —
$p-t$	{ Триpletное Синглетное	1 0	$\pi$ $\pi$	— ${}^4\text{He}$
$n-{}^3\text{He}$	{ Триpletное Синглетное	1 0	$\pi$ $\pi$	— ${}^4\text{He}$
$n-\alpha$ }	Дублетное	1	$\pi$	—
$p-\alpha$ }				

При параллельных спинах электронов (триpletное состояние  $\Psi^3$ ) орбитальная функция системы должна быть антисимметрична относительно перестановки координат  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$\Psi^3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\Psi^3(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (89)$$

Представим  $\Psi^3$  в виде разложения по полному набору состояний  $\varphi_n$  одного электрона в поле протона:

$$\Psi^3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n \psi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2). \quad (90)$$

(Здесь знак суммирования включает и интеграл по непрерывному спектру.) Умножим теперь (88) на  $\varphi_0^*(\mathbf{r}_1)$  и проинтегрируем обе стороны полученного равенства по  $d\mathbf{r}_1$ ; используя при этом (89) и (90), получим

$$\int \varphi_0^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = - \int \varphi_0^*(\mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2. \quad (91)$$

Можно произвести замену переменных  $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$  под знаком интеграла в правой части (91). В результате получаем, что величина интеграла в (91) не меняется при изменении его знака, т. е.

$$\int \varphi_0^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = 0, \quad (92a)$$

откуда

$$\int_0^\infty u_{1s}(r_1) u_0(r_1) dr_1 = 0. \quad (92b)$$

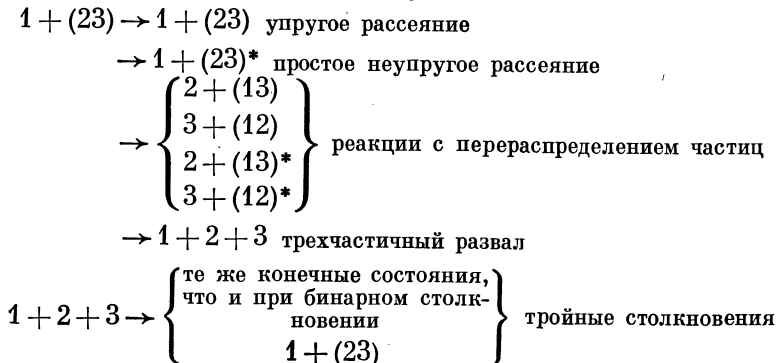
Поскольку радиальная часть  $u_{1s} = 2r \exp(-r)$  функции основного состояния  $\varphi_0$  не изменяет своего знака, должна менять знак  $u_0(r)$  и, следовательно,  $\psi_0(\mathbf{r}) = (u_0(r)/r) Y_{00}$ , чтобы выполнялось (92). Это нам и нужно было доказать.

### 9. СИСТЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Наиболее простой из существенно многочастичных систем является трехчастичная. В то же время для задачи трех тел свойственны основные качественные особенности и более сложных систем. Поэтому можно полагать, что теорема Левинсона, которая здесь будет рассматриваться на примере трех частиц [33], не потребует значительной модификации при переходе к общему случаю  $N$  тел.

По сравнению с рассмотренными ранее упругим и простым неупругим рассеянием для  $N \geq 3$  тел оказываются возможными новые типы процессов. Это *реакции с перераспределением частиц* и *реакции с числом свободно разлетающихся фрагментов системы* в конечном состоянии большим двух (развал). Кроме того, возможны столкновения более чем двух частиц (например, когда три частицы слетаются с разных сторон).

Так, для трех тел схема всех таких процессов имеет вид (здесь скобками объединяются пары, находящиеся в связанном состоянии, а звездочкой помечаются возбужденные состояния таких пар):



Задачу трех тел можно рассматривать аналогично случаю двухчастичного многоканального рассеяния [34]. И чтобы применить здесь теорему Левинсона в том виде, как она была сформулирована в разд. 4, необходимо предварительно ввести понятие о *парциальных каналах развала* и собственных фазовых сдвигах (собственноканальных состояниях) при энергиях выше порога развала. Для того чтобы сделать дальнейшие рассуждения понятнее, следует подчеркнуть аналогию разложения по парциальным волнам для бинарных реакций ( $A + B \rightarrow C + D$ ) и реакций развала ( $A + B \rightarrow a + b + c$ ).

В бинарных столкновениях используется разложение по сферическим функциям  $Y_{lm}(\Omega_r)$ , где  $\Omega_r \equiv \theta, \varphi$  — угловые переменные вектора относительного расположения двух частиц. Асимптотика волновой функции разбивается при этом на парциальные каналы с различными значениями орбитального момента  $l$  и его проекции  $m$ . А набор констант — парциальных амплитуд сходящихся ( $A_{lm}$ ) и расходящихся ( $B_{lm}$ ) волн — полностью характеризует состояние системы при больших значениях  $r$ .

Для описания движения трех свободных частиц удобно пользоваться так называемой *гиперсферической* системой координат [35]. Вместо обычных координат Якоби  $\mathbf{r}$  (вектора относительного расстояния частиц 1 и 2) и  $\mathbf{R}$  (радиуса-вектора третьей частицы относительно центра масс пары 1, 2) вводится шестимерный вектор  $\rho_6$ . Модуль этого вектора

$$\rho_6 = \sqrt{R^2 + r^2} \tag{93}$$

характеризует размеры системы, а пять его угловых переменных  $\Omega_5$  — расположение треугольника 1, 2, 3 (рис. 7) в пространстве (для этого нужны три угла) и его форму (еще два угла). Как обобщение обычных сферических функций  $Y_{lm}(\Omega_r)$  на случай шестимерного пространства вводятся гиперсферические функции  $Y_{\mathbf{K}}(\Omega_5)$ , где  $\mathbf{K}$  — набор пяти квантовых чисел.

Разложение по  $Y_{\mathbf{K}}(\Omega_5)$  той асимптотической части волновой функции исследуемой системы  $\Psi$ , которая соответствует развалу и тройному столкновению, определяет парциальные каналы свободного движения трех частиц. Парциальные амплитуды сходящихся ( $A_{\mathbf{K}}$ ) и расходящихся ( $B_{\mathbf{K}}$ ) волн полностью определяют асимптотическое поведение  $\Psi$  в этих каналах:

$$\begin{aligned} \Psi \sim \sum_{\rho_6 \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{K}} \{ & A_{\mathbf{K}} \exp(-ik_6 \rho_6) / \rho_6^{5/2} + \\ & + B_{\mathbf{K}} \exp(ik_6 \rho_6) / \rho_6^{5/2} \} Y_{\mathbf{K}}(\Omega_5); \tag{94} \\ k_6 = & \sqrt{k_r^2 + k_R^2}, \end{aligned}$$

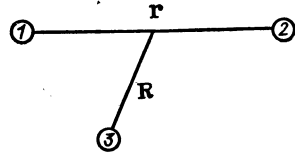


Рис. 7. Координаты Якоби для системы трех частиц.

причем дискретный набор констант  $A_K$  и  $B_K$  задает непрерывное угловое распределение трех частиц и непрерывное распределение полной энергии  $E$  между ними.

Теперь, когда понятие о парциальных каналах для движения трех свободных частиц введено, нетрудно определить *собственно-канальные состояния при энергии системы выше порога развала*. Подобно тому, как это делалось для реакций, в которых имелись лишь двухфрагментные асимптотики, выбирается специальный набор амплитуд  $A_\alpha^s$  при падающих волнах во всех парциальных каналах (как с двумя, так и с тремя свободными фрагментами). Связь каналов не должна приводить к перераспределению плотности потока в разных каналах в результате рассеяния: амплитуды  $B_\alpha^s$  расходящихся волн отличаются лишь общим собственным фазовым сдвигом  $2\delta^s$  от  $A_\alpha^s$ :

$$B_\alpha^s = \exp(2i\delta^s) A_\alpha^s.$$

С помощью введенных  $\delta^s$  теорема Левинсона для трех частиц формулируется совершенно так же, как для обычного многоканального рассеяния (см. разд. 7):

$$\sum_i \sum_s [\delta^s(\epsilon_i) - \delta^s(\epsilon_{i+1})] = \pi l, \quad (95)$$

где суммирование  $\sum_i$  теперь проводится еще и по порогам, при которых открываются каналы перераспределения частиц, и включает порог развала.

Доказательство соотношения (95) для трех тел было дано в работе Райта [3] \*\*, только ему, по-видимому, еще не был известен конкретный способ введения парциальных каналов развала с помощью гиперсферических функций  $Y_K$ . Для системы трех частиц теорема Левинсона рассматривалась также в работах [37—41].

## 10. ТЕОРЕМА ЛЕВИНСОНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Основная цель данного обзора заключается в рассмотрении теоремы Левинсона в нерелятивистской квантовой механике. Однако имеется целый ряд работ, в которых эта теорема была получена и в теории поля. Не будем здесь подробно на них останавливать-

\* Строго говоря, имеется бесконечное число парциальных каналов и должно быть бесконечное же число собственных фазовых состояний при каждом значении энергии  $E$ . Однако на практике при конечных энергиях системы вкладом в рассеяние высших значений орбитального момента  $l$  и «глобального» момента  $K$  можно пренебречь.

\*\* При этом Райт использовал методику доказательства теоремы Левинсона с помощью волновых операторов Меллера, разработанную Яухом [36] для случая одноканального рассеяния.

ся, а лишь приведем ссылки на известную нам литературу по этому вопросу.

Все рассмотренные выше варианты соотношения Левинсона требовали для своего обоснования использования уравнения Шредингера в той или иной форме. Известно, что подобных общих уравнений движения в квантовой теории поля еще не создано.

В работах [42—46] теорема рассматривалась в рамках различных модификаций точно решаемой полевой модели Ли [47]\*. В этой модели предполагается, что существует всего три вида частиц: тяжелые  $N$  и  $V$ , движением которых пренебрегается (фиксированные протяженные фермионные источники), и легкий скалярный бозон  $\theta$ . Последний может испытывать упругое рассеяние, поглощаться и порождаться в процессе взаимодействия с  $N$  и  $V$ :

$$V \rightleftharpoons N + \theta.$$

Гамильтониан  $H$  модели разбивается на две части

$$H = H_0 + H_1, \quad (96)$$

где  $H_0$  — гамильтониан невзаимодействующих частиц;  $H_1$  — оператор взаимодействия.

Теорема Левинсона формулируется следующим образом, если имеется одна  $\theta$ - и одна  $N$ -частицы (одноканальный случай) [42, 44]:

$$\delta(0) - \delta(\infty) = (m - m_0) \pi, \quad (97)$$

где  $\delta(k)$  — фаза  $N - \theta$ -рассеяния;  $m$  и  $m_0$  — число состояний в дискретном спектре гамильтонианов  $H$  и  $H_0$  соответственно. При этом  $m_0$  равно числу  $V$ -частиц.

В работах [43—45] соотношение (97) обобщается на случай многоканальной модели Ли, когда имеется несколько  $\theta$ -частиц. При этом, в отличие от нерелятивистского многоканального случая, теорема иногда записывается не для собственных фазовых сдвигов, а для реальных частей физически измеримых фазовых сдвигов  $\eta_{\alpha\beta}$ -рассеяния:

$$N + \theta_\alpha \rightarrow N + \theta_\beta,$$

где  $\eta_{\alpha\beta}$  входят в амплитуду рассеяния  $T_{\alpha\beta}$  в виде:

$$T_{\alpha\beta} = [\delta_{\alpha\beta} - \exp(2i\eta_{\alpha\beta})]/(2i\pi), \quad (98)$$

$\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронеккера.

---

\* Нерелятивистский вариант модели Ли подробно разбирается в книге [48].

В первых статьях [49, 50], в которых теорема Левинсона была сформулирована в теории поля, было указано на возможность выделения с ее помощью одного из многих решений уравнения Лоу. Эта теорема получалась также в предположении определенных аналитических свойств амплитуды рассеяния [51—55].

Близким к нерелятивистской формулировке является квазипотенциальный подход в теории поля [56]. Однако нам пока неизвестны работы, в которых теорема Левинсона была бы доказана с использованием квазипотенциальных уравнений.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее явно выступает возможность использования теоремы Левинсона для правильного выбора взаимодействия по экспериментальным данным. Но, пожалуй, еще важнее то, что в процессе знакомства с различными модификациями теоремы Левинсона приходится снова и с несколько иной стороны взглянуть на, казалось бы, известные уже вещи и при этом неожиданно углубить понимание существенных моментов теории. Каждая новая связь между физическими величинами позволяет в более сжатой, экономной форме представить то, что мы подразумеваем под комплексом наших понятий о квантовых законах.

Соотношения Левинсона могут служить критерием для проверки правильности новых методов, разрабатываемых для решения квантовых задач, — ведь полученные с их помощью решения должны находиться в согласии со следствиями, диктуемыми теоремой. Многие применения теоремы Левинсона еще предстоит найти, и было бы хорошо, если этому хоть в малой степени способствовал данный обзор.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В справедливости соотношения (19) позволяют убедиться следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} = \sin 2(kr + \delta(k))/2k + 2 \int_0^r \Psi^2 dr - r = \sin 2(kr + \delta(k))/2k + \\ + 2 \int_0^{\infty} \Psi^2 dr - 2 \int_r^{\infty} \Psi^2 dr - \int_0^{\infty} dr + \int_r^{\infty} dr = \int_0^{\infty} (2\Psi^2 - 1) dr - \\ - \int_r^{\infty} (2\Psi^2 - 1) dr + \sin 2(kr + \delta(k))/2k. \end{aligned}$$

Остается показать, что два последних члена должны взаимно сокращаться. Заменяя при больших  $r$  волновую функцию на ее асимптотику,

получаем

$$\begin{aligned} & \int_r^\infty (2\Psi^2 - 1) dr = \int_r^\infty [2 \sin^2 (kr + \delta(k)) - 1] dr = \\ & = \int_0^\infty [2 \sin^2 (kr + \delta(k)) - 1] dr - \int_0^r [2 \sin^2 (kr + \delta(k)) - 1] dr = \\ & = \frac{1}{k} \int_{\delta(k)}^\infty [2 \sin^2 x - 1] dx + \int_0^r \cos 2(kr + \delta(k)) dr = \left\{ \frac{1}{k} \int_0^\infty (2 \sin^2 x - 1) dx = 0 \right\} + \\ & + \frac{1}{k} \int_0^{\delta(k)} [2 \sin^2 x - 1] dx + \int_0^r \cos 2(kr + \delta(k)) dr = \sin 2(kr + \delta)/2k. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Наметим здесь ход доказательства теоремы Левинсона с помощью функций Иоста, наиболее часто используемого в литературе (детали см. в [4]). Рассмотрим случай *s*-рассеяния (*l* = 0).

Понятие функции Иоста вводится с помощью двух вспомогательных линейно независимых решений  $f_{\pm}(k, r)$  уравнения Шредингера (3), имеющих при больших *r* вид уходящей и падающей волн  $\exp(\pm ikr)$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(\mp ikr) f_{\pm}(k, r) = 1. \quad (II.1)$$

Известно, что в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка можно построить любое его решение и, в частности, регулярное при *r* = 0 решение  $\varphi(k, r)$  (удовлетворяющее при *r* = 0 условиям:  $\varphi(k, 0) = 0$ ;  $\left[ \frac{d}{dr} \varphi(k, r) \right]_{r=0} = 1$ ):

$$\varphi(k, r) = [f_-(k) f_+(k, r) - f_+(k) f_-(k, r)] / 2ik. \quad (II.2)$$

Коэффициент  $f_+(k) \equiv f$  и есть функция Иоста; она связана с  $f_-(k)$  простым соотношением:

$$f_-(k) = f_*^* = |f| \exp[i\delta(k)]. \quad (II.3)$$

Обычное физическое решение отличается от  $\varphi(k, r)$  лишь коэффициентом при падающей волне, она нормируется на единичный поток, и тогда коэффициент при уходящей волне определяет матрицу рассеяния

$$S = f_- / f_+ = \exp[2i\delta(k)]. \quad (II.4)$$

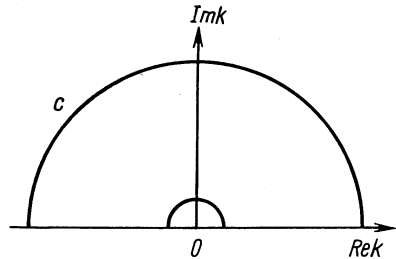


Рис. 8. Контур *c*, по которому берется интеграл в формуле (103).



Функция  $f$  является аналитической функцией от  $k$ , если  $U(r)$  удовлетворяет условиям (2). Все  $m$  нулей (полюса  $S$ ) в верхней полуплоскости  $k$  лежат на мнимой оси  $k$  и соответствуют связанным состояниям системы. Благодаря этому, интеграл от  $f'/f$  по контуру  $c$  (рис. 8) в верхней полуплоскости равен:

$$\int_c d \ln f = 2\pi i m. \quad (\text{П.5})$$

Интеграл по дуге большого радиуса исчезает в силу  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 1$ .

При  $|k| \rightarrow 0$   $f(k) \sim k^\tau$ , где  $\tau$  — кратность «связанного» состояния при  $E = 0$  и интеграл по малой дуге равен:

$$\int d \ln f = \tau \int d \ln k = i\pi\tau. \quad (\text{П.6})$$

Вычисляя оставшийся интеграл по действительной оси и используя (П.6) и соотношение  $\delta(-k) = -\delta(k)$ , получаем вместо (П.5) соотношение Левинсона:

$$\delta(0) - \delta(\infty) = (m + \tau/2)\pi. \quad (\text{П.7})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Levinson N. Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys., Medd., 1949, 25, No. 9.
2. Wu T. Y., Ohmura T. Quantum Theory of Scattering. Prentice-Hall International, Lond. 1962; см. перевод Ву Т., Омюра Т. Квантовая теория рассеяния. М., «Наука», 1969.
3. McVoy K. W. Fundamentals in Nuclear Theory, Ch. 8, eds A. de-Shalit and C. Villi. IAEA, Vienna, 1967.
4. Newton R. G. Scattering Theory of Waves and Particles. McGraw-Hill, N. Y., 1966; см. перевод Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., «Мир», 1969.
5. Calogero F. Variable Phase Approach to Potential Scattering. Academic Press, N. Y.—Lond., 1967; см. перевод Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., «Мир», 1972.
6. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., «Наука», 1968.
7. Wellner M. Amer. J. Phys., 1964, 32, 787.
8. Swan P. Nucl. Phys., 1968, A119, 40.
9. Rein D. Z. Phys., 1969, 220, 394.
10. Swan P. Nucl. Phys., 1963, 46, 669.
11. Feshbach H. Ann. Phys., 1958, 5, 357; 1962, 19, 287.
12. Gourdin M., Martin A. Nuovo cimento, 1957, 6, 757.
13. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Препринт ИТФ-68-11, 1968.
14. Martin A. Nuovo cimento, 1958, 7, 607.
15. Chaddan Kh. Nuovo cimento, 1958, 10, 892.
16. Bertero M., Talenti G., Viano G. A. Nucl. Phys., 1968, A113, 625.
17. Mills R. L., Reading J. F. J. Mat. Phys., 1969, 10, 321.
18. Tabakin F. Phys. Rev., 1969, 177, 1443.
19. Bolsterli M. Phys. Rev., 1969, 182, 1095.
20. Beam J. E. Phys. Lett., 1969, 30B, 67.
21. Butera P., Girardello L. Nuovo cimento, 1968, 54A, 141.
22. Calogero F., Jogannathan G. Nuovo cimento, 1967, 47, 178.
23. Ciafaloni M. Nuovo cimento, 1963, 29, 420.

24. Lopez C. A. Nuovo cimento, 1968, 58A, 160.
25. Lopez C. A., Massidda V. Nucl. Phys., 1970, A149, 33.
26. Newton R. G. J. Math. Phys., 1960, 1, 319.
27. Kazes E. Nuovo cimento, 1959, 13, 983.
28. Weidenmüller H. A. Ann. Phys. (N.Y.), 1964, 28, 60.
29. Glöckle W. Z. Phys., 1966, 190, 391.
30. Swan P. Proc. Roy. Soc., 1955, 228, 10.
31. Temkin A. J. Math. Phys., 1961, 2, 336.
32. Rosenberg L., Spruch L. Phys. Rev., 1961, 121, 1720.
33. Wright J. A. Phys. Rev., 1965, 139, 137.
34. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н. ЭЧАЯ, 1971, 2, 499.
35. Delves L. M. Nucl. Phys., 1962, 29, 268; 1962, 29, 326.
36. Jauch J. M. Helv. Phys. Acta, 1957, 30, 143.
37. Weinberg S. Phys. Rev., 1963, 131, 440.
38. Shanley P. E., Aaron R. Ann. Phys. (N.Y.), 1967, 44, 363.
39. Sloan I. H. Phys. Lett., 1971, 34B, 243.
40. Sloan I. H. Nucl. Phys., 1971, 168A, 211.
41. Newton R. G. Preprint. Indiana University, 1971.
42. Ida M. Progr. Theor. Phys., 1959, 21, 625.
43. Konisi G., Ogimoto T. Progr. Theor. Phys., 1959, 22, 807.
44. Vaughn M. T., Aaron R., Amado R. D. Phys. Rev., 1961, 124, 1258.
45. Ghirardi G. C., Pauri M., Rimini A. Ann. Phys. (N.Y.), 1963, 21, 401.
46. Nagy K. L. Acta Phys. Hung., 1968, 24, 433.
47. Schweber S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Row, Peterson and Co., N. Y., 1964; см. перевод Швевбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., Изд-во иностр. лит., 1963.
48. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
49. Haag R. Nuovo cimento, 1957, 5, 203.
50. Polkinghorne J. C. Proc. Camb. Phil. Soc., 1959, 54, 560.
51. Warnock R. L. Phys. Rev., 1963, 131, 1320.
52. Charap J. M. Nuovo cimento, 1965, 36, 419.
53. Kato M. Ann. Phys. (N. Y.), 1965, 31, 130.
54. Atkinson D., Dietz K., Morgan D. Ann. Phys. (N. Y.), 1966, 37, 77.
55. Hartle J. B., Jones C. E. Ann. Phys. (N. Y.), 1968, 38, 348.
56. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. Nuovo cimento, 1967, 55, 233.