«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1974, ТОМ 5, ВЫП. 1

УДК 539.182+530.145.1

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Э. Б. Аронсон

Университет Колорадо, Болдер, штат Колорадо, США

И. А. Малкин,
В. И. Манько

Физический институт им. П. Н. Лебедева, г. Москва

Дан обзор состояния теории динамических симметрий. С точки зрения динамических групп обсуждены такие нерелятивистские и релятивистские квантовые системы, как гармонический осциллятор, атом водорода, электрон в магнитном поле. Анализируется понятие симметрии уравнений, а также вопрос об инвариантах квантовых систем и связь интегралов движения с динамическими группами. В частности, общие положения рассмотрены на примерах нестационарных систем. Обсуждены динамические группы в классической механике. Даны приложения метода динамических симметрий к различным задачам теоретической физики.

A review of the status of the theory of dynamical symmetries is presented. We discuss from the point of view of dynamical groups such nonrelativistic and relativistic quantum systems as the harmonic oscillator, the hydrogen atom, and an electron in a magnetic field. The concept of symmetry of equations is analyzed as well as the question of invariants of quantum systems and the connection of integrals of the motion with dynamical groups. In particular, general statements are illustrated in examples of nonstationary systems. Dynamical groups in classical mechanics are discussed, and applications of the method of dynamical symmetries to various problems of theoretical physics are given.

ВВЕДЕНИЕ

Алгебраический подход к описанию квантовых систем состоит в изучении соотношений и представлений различных операторов, физических величин, относящихся к этим системам. Преимущество подобного подхода состоит в том, что с его помощью можно сразу получить такие физические величины, как энергетические уровни, вырождение их, амплитуды переходов, без нахождения сначала волновых функций. Волновые функции также можно определить с помощью явных представлений имеющихся алгебраических соотношений, но это отдельный вопрос. Предметом настоящего обзора служит алгебраический подход в квантовой теории, известный сейчас как теория динамических симметрий.

Из многих операторов, относящихся к изучаемой физической системе, можно построить различные алгебраические структуры. Например, алгебра Ли операторов симметрии гамильтониана давно и широко использовалась, кроме всего прочего, для понимания вырождения уровней энергии до решения уравнения Шредингера. В последнее время для расчета величин, которые зависят скорее от динамики системы, чем от свойств симметрии энергетического уровня рассматриваемой системы, применялись другие алгебры Ли, которые обычно включают в себя гамильтониан, операторы симметрии и некоторые другие операторы, не коммутирующие с гамильтонианом. Эти дополнительные операторы или, по крайней мере, подходящие линейные комбинации часто в результате явного вида их матричных элементов между состояниями с разными энергиями можно интерпретировать как операторы переходов, вызываемых некоторым взаимодействием, или просто как повышающие и понижающие операторы. Действительно, независимые собственные функции гамильтониана служат в качестве базиса представления, часто неприводимого, алгебры Ли, содержащей такие повышающие и понижающие операторы. Любую такую алгебру можно назвать динамической алгеброй, поскольку в процессе нахождения ее представления будем определять также матричные элементы таких динамических величин, как гамильтониан и операторы переходов.

Скажем более точно. Под динамической группой системы будем понимать конечномерную группу Ли, неприводимое представление которой действует в гильбертовом пространстве состояний системы.

При этом подразумевается, что операторы симметрии, гамильтониан и все операторы переходов соответствуют элементам или группы, или алгебры Ли, или ее обертывающей алгебры. Это последнее условие необходимо для того, чтобы динамическая алгебра отличалась от так называемой генерирующей спектр алгебры, из которой можно найти спектр энергий, но не всю информацию о динамике переходов.

Остановимся на истории вопроса. Исследования динамических групп стимулировались желанием понять природу классификации элементарных частиц по мультиплетам унитарной $SU(3)$-группы [1, 2]. Это вновь вызвало интерес к подходу, развитому Фоком [3], по объяснению классификации уровней атома водорода по мультиплетам $O(4)$-группы (см. также [4]). Параллельно с исследованиями возможности перехода от унитарных мультиплетов $SU(3)$-группы ко все более широким семействам типа мультиплетов $SU(6)$-группы [5—7] проводились исследования квантовой теории, которая связана с рассмотрением физических состояний квантовых систем как членов мультиплетов, описываемых неприводимыми представлениями тех или иных групп.

Почти одновременно появились работы Барута [8], Дотана, Гелл-Манна и Неемана [9], а также Мукунды, О'Рэферти и Сударшана [10], в которых были введены близкие понятия такой группы (или алгебры Ли), позволяющие объединить все уровни энергии стационарной квантовой системы в один мультиплет некомпактной группы (или алгебры). В работе [8] эта группа (или алгебра) названа динамической, в работе [9] — алгеброй, генерирующей спектр, а в работе [10] — группой неинвариантности. Эти понятия очень близки, хотя разные авторы до сих пор вкладывают несколько разный смысл в слова динамическая группа или группа неинвариантности. Не будем рассматривать подобные понятия как тождественные, хотя отдадим предпочтение понятию динамическая группа или динамическая симметрия квантовой системы.

Здесь следует отметить, что понятие динамической симметрии, введенное в работах [8—10], является частным случаем определения понятия симметрии любого уравнения, описывающего его физическую систему, например, квантовую систему, и введенного в работе [11], в которой проводился также анализ динамической симметрии атома водорода и было показано, что все уровни его дискретного спектра образуют мультиплет конформной $O(4,2)$-группы. Этот результат для атома водорода затем был получен Нееманом [12], Намбу [13], Фронсдалом [14], Барутом и Клейнертом [15] и Тодоровым [16]. Интерес к этой системе был вызван тем, что она реальна и уравнение Шредингера для нее можно решить точно, а следовательно, до конца проанализировать связь состояний как с решениями уравнения, так и с неприводимым представлением $O(4,2)$-группы, которое в принципе можно ввести и не прибегая к помощи уравнения Шредингера.

Вслед за этими работами стали появляться работы по исследованию динамических симметрий других точно решаемых моделей квантовых систем. Так, квантовая система — n-мерный осциллятор рассматривалась с точки зрения динамической группы Хва и Нутсом [17], а также Мошинсики и Квезне [18]. Здесь следует отметить, что первая работа, по-существу описывающая осциллятор (одномерный) на языке динамической $O(2,1)$-группы, была сделана Гошеном и Липкиным [19] еще в 1959 г., и затем этот результат был несколько раз повторен. Исследование динамических групп простых квантовых систем привело к их использованию для объяснения спектров масс элементарных частиц, различных форм-факторов и ширины распадов [49, 74—81, 85, 141], а также к новому подходу к бесконечно компонентным уравнениям типа Майорана [13, 20, 21]. Кроме конформной $O(4,2)$-группы в некоторых работах в качестве динамической группы атома водорода рассматривалась также $O(4,1)$-группа де Ситтера [22—28]. Динамическая группа еще одной простой квантовой системы, ротатора, рассматривалась в работах [29—31].

Подход, основанный на динамических симметриях, тесно связан с изучением групп инвариантности [10] или симметрии квантовых систем, т. е. групп, генераторы которых коммутируют с гамильтонианом стационарной системы. Кроме работы Фока [4], объяснившего «случайное» вырождение уровней атома водорода существованием $O(4)$-группы инвариантности у этой системы, были проведены исследования групп инвариантности других простых квантовых систем и их связи с вырождением уровней. Так, в работах Яуха и Хилла [32, 33] впервые было объяснено вырождение уровней энергии изотропного осциллятора существованием у этой группы инвариантности $U(3)$ (и $U(n)$ в n-мерном случае). Этот результат был далее развит в работах [34, 35]. Неизотропный осциллятор рассматривался с точки зрения группы инвариантности в работах [36—41]. Сформулируем здесь основное отличие группы инвариантности и динамической группы.

Если известна вся информация об одном состоянии системы с относящимся к фиксированному уровню энергии, то с помощью преобразований из группы инвариантности (или группы симметрии) можно получить все остальные состояния с той же энергией, т. е. небольшое число состояний в случае конечного вырождения. Преобразования же из динамической группы из одного состояния генерируют все другие состояния квантовой системы. Здесь будет расширено обычное понимание динамической группы, подразумевая под словом «состояние» не только состояние с заданной энергией, как это делается обычно, а включая и случай произвольных нестационарных квантовых систем [42—44].

Развитие теории динамических симметрий привело также к значительному продвижению в чисто математическом плане. Так, при вычислении матричных элементов различных операторов между состояниями с заданными энергией и полным моментом оказалось удобным использовать динамическую группу радиального уравнения Шредингера, в частности $O(2,1)$-группу [45—47]. Вычисление радиальных матричных элементов операторов физических величин этим методом состоит в изучении их трансформационных свойств под действием операций из динамической группы. Затем применяется переход к удобному базису с помощью оператора «буста». В частности, с помощью рассуждений, аналогичных теореме Вигнера — Эккерта (для некомпактной динамической группы), легко получить правила отбора для вычисляемых радиальных матричных элементов в полной аналогии с обычным компактным случаем.

Таким образом, динамические группы или алгебры позволяют не только продвинуться в понимании природы спектра состояний, но полезны и в прикладном плане. Разумеется, в тех случаях, когда имеются точно решаемые уравнения, описывающие систему, можно полностью обойтись без знания свойств симметрии, в частно сти динамической, для вычисления физических величин. Однако в случаях, когда уравнения не найдены, например для элементарных частиц, подход с динамическими симметриями дает самостоятельную альтернативу для описания всей динамики. В этой связи необходимо научиться формулировать всю динамику системы на языке динамической группы в случаях, когда можно проверить все выводы с помощью точно решаемых уравнений, т. е. для простейших систем.

Существование динамической алгебры Ли для квантовой системы, содержащей повышающие и понижающие операторы, не удивительно. Интересным является тот факт, что эта алгебра — часто конечномерная алгебра Ли. Рассмотрим, например, одномерную задачу о частице массы m, движущейся под действием потенциала $V(x)$ (эта функция считается бесконечно дифференцируемой). Предположим, что наша алгебра содержит наряду с гамильтонианом $\mathscr{H}$ оператор x, пропорциональный оператору дипольного момента (понятное предположение, если мы считаем, что эта алгебра должна содержать операторы, отвечающие за переходы в системе).

Тогда алгебра содержит коммутатор

$$[\mathscr{H},\ x] = [p^2/2m,\ x] = -i\hbar p/m,$$

где p — оператор импульса, а также коммутаторы

$$[\mathscr{H},\ p] = [V(x),\ p] = i\hbar\, dV/dx;$$

$$[dV/dx,\ p] = i\hbar\, d^2V/dx^2 \text{ и т. д.}$$

Ясно, что, за исключением лишь некоторых потенциалов специального вида, в результате получаем бесконечномерную алгебру. В этих моделях, чтобы построить конечномерную алгебру, необходимо иногда рассматривать оператор дипольного перехода как лежащий не в алгебре Ли, а в ее обертывающей алгебре. До известной степени проблема существования динамических групп физических систем в настоящее время полностью не решена в теории динамических симметрий. Если такая группа найдена, она может быть не единственной. До какой степени динамические группы определяются единственным образом, еще один не до конца ясный вопрос. К настоящему моменту наиболее интенсивная деятельность в теории динамических симметрий была направлена на выяснение их роли в конкретных моделях, хотя имеется ряд попыток исследовать природу динамических групп в общем плане.

В настоящем обзоре сначала будут приведены главные результаты, которые получены для различных моделей, исследовавшихся с точки зрения динамических групп; будут разобраны более общие аспекты теории; подробно рассмотрены некоторые нерелятивистские квантовые системы, в частности простейшая из них — квантовый гармонический осциллятор, для того чтобы можно увидеть, как теория динамических симметрий работает для простой модели. Затем будут рассмотрены динамические симметрии релятивистских квантовых систем, описана общая связь интегралов движения с динамическими группами, разобраны результаты работ, в которых были развиты методы нахождения инвариантов, причем будут рассмотрены некоторые примеры нестационарных систем. Далее коснемся также проблем динамических симметрий в классической механике. В заключение, наряду с общим обсуждением, дадим краткий обзор приложения метода динамических симметрий к конкретным задачам.

I. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ

1. Симметрия уравнений. Обсудим здесь вопрос, что будем понимать под симметрией уравнения.

Пусть имеется $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта функция может быть конечно или бесконечномерным столбцом. Рассмотрим соотношение

$$\hat{A}\varphi = 0, \tag{1}$$

где $\hat{A}$ для простоты будем считать линейным дифференциальным оператором, хотя для дальнейших рассуждений это несущественно (он может быть любым: интегральным, нелинейным и т. д.). Обычно под симметрией соотношений (1) понимают совокупность таких преобразований координат и функций, которые образуют группу и не меняют его вид. Однако такая симметрия не объясняет вырождения уровней трехмерного осциллятора, волновые функции которого, как показали Яух и Хилл [33], реализуют представления $SU(3)$-группы. В этом случае под симметрией понимают совокупность операторов $\hat{B}_\alpha$, образующих алгебру Ли и удовлетворяющих соотношению

$$[A, B_\alpha] = 0. \tag{2}$$

(Индекс α принимает конечное или бесконечное число значений.) Это понятие о симметрии является более широким, так как оно включает в себя предыдущее, потому что если имеются конечные преобразования координат и функции, сохраняющие вид уравнения, то всегда, переходя к бесконечно малым преобразованиям, найдем алгебру Ли операторов, удовлетворяющих (2). Будем понимать симметрию в еще более широком смысле, исходя из следующего соображения. Всегда, когда говорят о симметрии уравнения (1), имеют в виду, что если найдено какое-то решение, то с помощью преобразований симметрии можно получить и другие решения, иными словами, пространство решений является базисом представления той группы или алгебры Ли, которую считают симметрией задачи. Эту симметрию можно найти, если определить операторы $\hat{B}_\alpha$ (дифференциальные, интегральные, нелинейные и т. д.), образующие алгебру Ли (конечномерную или бесконечномерную) и удовлетворяющие соотношению

$$[\hat{A}, \hat{B}_\alpha]\,\varphi = 0, \tag{3}$$

т. е. коммутирующие с оператором $\hat{A}$ не тождественно, а на решениях уравнения (1). Очевидно, что операторы B_α переводят одно решение в другое. Подобное определение охватывает предыдущие, так как операторы, удовлетворяющие соотношению (2), образуют подалгебру алгебры операторов, удовлетворяющих (3). Удобнее говорить не о группе, а об алгебре Ли, так как с группы всегда можно перейти к алгебре Ли, а классификация решений с помощью квантовых чисел — классификация с помощью представлений алгебры Ли. Интересным является такой вопрос: какие неприводимые представления группы симметрии уравнения (1) реализуются в качестве решений. Из примеров ясно, что не все представления, которые есть у группы, реализуются на решениях. Так, решения трехмерного осциллятора реализуют лишь $(n, 0, 0)$ представления $U(3)$-группы. Более того, может случиться, что реализуется лишь одно представление группы (часто это и есть динамическая группа системы). Такое определение симметрии уравнений дано в работах [11, 31], подобное же определение дано и Андерсоном, Кумеем и Вульфманом [48]. Заметим, что оператор $\hat{A}$ может быть любым оператором, описывающим физическую проблему, в частности:

а) $\hat{A} = i\dfrac{\partial}{\partial t} - \mathscr{H}$ — уравнение Шредингера;

б) $\hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathscr{H}_{\text{кл}}(pq)$ — уравнение Гамильтона — Якоби;

в) $\hat{A} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial}{\partial q}$ — уравнение Эйлера — Лагранжа;

г) $A = \Gamma_\mu \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + \Gamma_0$ — конечно и бесконечно компонентные уравнения теории поля.

Если найдена динамическая группа уравнения столь широкая, что все решения рассматриваемого уравнения связываются операторами преобразований из этой группы, то в определенном смысле динамическая группа и ее представление, реализуемое на пространстве решений, заменяет само уравнение. Это позволяет сформулировать физические проблемы не на языке уравнений, а на чисто групповом. Разумеется, верно и обратное. Чисто алгебраический подход к задаче можно эквивалентным образом заменить уравнением. Однако в силу простоты и развитости групповых методов проще и удобнее работать в рамках чисто группового подхода. Цель этого подхода сформулировать все физические величины, относящиеся к рассматриваемой системе, такие, как спектр энергий, масс, квантовые числа, функцию Грина или оператор эволюции, амплитуду рассеяния, амплитуды переходов, на языке теории представлений групп (Ли или других групп).

2. Динамическая симметрия квантового осциллятора. Впервые некомпактная $U(1,1)$-группа была использована при рассмотрении задачи о квантовом осцилляторе Гошеном и Липкиным [19]. Связь осциллятора с этой некомпактной динамической группой более детально изучена Барутом [49]. Следуя этой статье и используя принятые в ней обозначения, проведем рассмотрение динамической симметрии данной системы. Алгебра Ли $U(1,1)$-группы изоморфна алгебре Ли $O(2,1)$-группы Лоренца. Три генератора этой группы, L_{12}, L_{13} и L_{23}, обладают коммутационными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &[L_{\mu\nu}, L_{\mu\lambda}] = -\mathrm{i} g_{\mu\mu} L_{\nu\lambda}; \\ &g_{11} = g_{22} = 1; \; g_{33} = -1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эта группа обладает унитарным представлением, задаваемым числом s, связанным с собственным значением оператора Казимира C:

$$\begin{gathered} C = L_{12}(L_{12} + 1) + 2M_- M_+; \\ M_\pm = (\mathrm{i}L_{13} \pm L_{23})/\sqrt{2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Собственные значения оператора Казимира C выражаются числом s обычным образом: $s(s+1) = C$. $D^+(s)$-представление характерно тем, что собственное значение m оператора L_{12} ограничено снизу, причем для случая $C = -1/4$ или $s = -1/2$ это число равно $m = 1/2$. Операторы $O(2,1)$-группы действуют в пространстве, базисом в котором являются функции

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \tag{6}$$

построенные с помощью операторов рождения $a^+ = (x - \partial/\partial x)/\sqrt{2}$ из основного состояния $|0\rangle = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$. Операторы $M_\pm$ связаны с операторами рождения и уничтожения a, a^+ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &M_+ = -(a^+/\sqrt{2})\,(L_{12} + 1/2)^{1/2}; \\ &M_- = a/\sqrt{2}\,(L_{12} - 1/2)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Коммутационные соотношения операторов a, a^+ и L_{12} имеют вид:

$$[L_{12}, a] = -a\, [L_{12}, a^+] = a^+. \tag{8}$$

Гамильтониан осциллятора выражается через оператор-генератор некомпактной $O(2,1)$-группы:

$$\mathscr{H} = \hbar\omega L_{12}. \tag{9}$$

Оператор Казимира $C = L_{12}^2 - L_{13}^2 - L_{23}^2$ при выборе представления в виде (7) тождественно равен числу, а именно $C = -1/4$. Матричные элементы операторов $M_\pm$, L_{12} в базисе $|\, n\rangle$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \langle m\,|\, M_+\,|\, n\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(n+1)\,\delta_{m,\,n+1}; \\ \langle m\,|\, M_-\,|\, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,n\delta_{m,\,n-1}; \\ \langle m\,|\, L_{12}\,|\, n\rangle &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\delta_{m,\,n}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Можно построить также представление алгебры Ли $O(2,1)$-группы с оператором Казимира $C = -1/4$, воспользовавшись следующей реализацией генераторов:

$$\left.\begin{aligned} &M_+ = \sqrt{a^+a}\,a^+; \quad M_- = a\sqrt{a^+a}; \\ &L_{12} = a^+a + 1/2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Таким образом, существует динамическая группа (набор генераторов, не коммутирующих с гамильтонианом), связывающая все уровни гармонического осциллятора в одно неприводимое представление.

3. Динамическая симметрия ротатора. В качестве примера рассмотрим в этом параграфе динамическую симметрию другой простейшей квантовой системы — волчка. Эта система рассматривалась в работе Сударшана, Мукунды, О'Рэферти [10] и в работе Дотана, Гелл-Манна и Неемана [9] (см. также подробную работу Бома [29]). Система представляет собой точку с закрепленным расстоянием от начала координат. Ее положение задается угловыми координатами точки на сфере. Гамильтониан системы в случае движения по сфере задается формулой

$$\mathscr{H} = \hat{\mathbf{L}}^2/2J, \tag{12}$$

где $\hat{\mathbf{L}}$ — оператор момента количества движения; J — момент инерции. Поскольку спектр оператора квадрата момента количества движения хорошо известен, спектр энергий системы имеет вид $E_l = l\,(l+1)\,\hbar^2/2J$, причем состояние с заданной энергией E_l вырождено по проекции момента L_z на ось z. Кратность вырождения уровней энергии ротатора $2l+1$ обусловлена симметрией гамильтониана (12) относительно группы трехмерных вращений. В рамках подхода, основанного на динамических симметриях, можно, как и в случае осциллятора, объединить все уровни энергии в бесконечный мультиплет более широкой, некомпактной, группы. Это можно сделать, построив дополнительные генераторы **F**, причем эти дополнительные генераторы являются вектором по отношению к группе вращений

$$[L_i,\ F_k]=i\varepsilon_{ikl}F_l. \tag{13}$$

Вектор F обладает дополнительным свойством, что при коммутации его компонент друг с другом получаем вектор углового момента **L**. Базис в пространстве состояний ротатора задается сферическими функциями $Y_{l,\,m}(\theta,\ \varphi)=\psi_m^l$. Здесь m — проекция углового момента. Действие оператора на этом базисе можно задать с помощью формул [31, 50]:

$$\left.\begin{aligned}
&L_\pm=L_1\pm \mathrm{i}L_2;\quad F_\pm=F_1\pm \mathrm{i}F_2;\\
&L_+\psi_m^l=\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\psi_{m+1}^l;\ L_3\psi_m^l=m\psi_m^l;\\
&L_-\psi_m^l=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\psi_{m-1}^l;\\
&F_+\psi_m^l=\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,C_l\psi_{m+1}^{l-1}-\\
&\qquad-\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,A_l\psi_{m+1}^l+\\
&\qquad+\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,C_{l+1}\psi_{m+1}^{l+1};\\
&F_3\psi_m^l=\sqrt{(l-m)(l+m)}\,C_l\psi_m^{l-1}-mA_l\psi_m^l-\\
&\qquad-\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\,C_{l+1}\psi_m^{l+1};\\
&F_-\psi_m^l=-\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,C_l\psi_{m-1}^{l-1}-\\
&\qquad-\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,A_l\psi_{m-1}^l-\\
&\qquad-\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,C_{l+1}\psi_{m-1}^{l+1}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Оператор F задается, таким образом, своими матричными элементами. Числа A_l и C_l задаются формулой:

$$\left.\begin{aligned}
&A_l=\mathrm{i}k_0c/l(l+1);\\
&C_l=\frac{\mathrm{i}\sqrt{(l^2-k_0^2)(l^2-c^2)}}{l(4l^2-1)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Вместо чисел k_0 и c можно выбрать другую пару констант m и ρ, связанных с k_0 и c формулами

$$k_0=|m/2|;\quad c=-\mathrm{i}\,(\operatorname{sign} m)\,\rho/2. \tag{16}$$

Величины m и ρ задают неприводимое представление $SL(2,\,C)$-группы Лоренца. Таким образом, видим, что уровни энергии ротатора можно объединить в одно неприводимое представление группы Лоренца. Причем можно реализовать различные возможности. Так, можно подсовокупности уровней E_l с $l\leqslant l_0$ рассматривать как одно неприводимое представление компактной $O(4)$-группы [10], а остальную часть спектра рассматривать как представление группы Лоренца. Можно также связать с различными подсовокупностями уровней ротатора представление $SU(3)$-группы. Объединение конечного числа уровней с разными энергиями в один мультиплет компактной группы полностью аналогично объединению уровней многомерного осциллятора с разными частотами в мультиплет $SU(n)$-группы [51]. Объединение уровней ротатора с $l \leqslant l_0$ в мультиплет $O(4)$-группы легко выполняется с помощью переноса соответствующих формул (см. ниже), справедливых для атома водорода, где состояния с заданной энергией вырождены по моменту и момент пробегает ряд значений от нуля до $n - 1$, здесь n — главное квантовое число. Выбором параметра ρ в (16) можно менять представление группы Лоренца, описывающее весь спектр энергий ротатора.

4. Симметрия атома водорода. Перейдем к рассмотрению группы симметрии атома водорода. Как показано в работе [3], уравнение Шредингера в импульсном представлении

$$\frac{p^2}{2}\psi(p)-\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{\psi(p^2)}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}\,d^3p'=E\psi(p) \tag{17}$$

имеет такие интегрируемые с квадратом решения, которые в новых переменных ξ_i; $\xi_i^2=1$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$:

$$\xi=\frac{2p_0}{p_0^2+p^2}\,\mathbf{p};\quad \xi_4=\frac{p_0^2-p^2}{p_0^2+p^2};\quad p_0=\sqrt{-2E}, \tag{18}$$

являются гармоническими полиномами вектора ξ_i на 4-мерной сфере, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\Delta_4\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_3^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_4^2}=0. \tag{19}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что 15 операторов, вид которых подсказан аналогией уравнения (19) с уравнением Клейна-Гордона с массой нуль, допускающим конформную группу симметрии, изоморфную $O(4,2)$:

$$\left.\begin{aligned}
I_i&=\xi_k^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)-2\xi_i\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}-2\xi_i;\\
P_i&=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\xi_i};\\
M_{ik}&=-\mathrm{i}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_k}-\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right);\\
I&=\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}+1,
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

коммутируют на решениях уравнения (19) с 4-мерным лапласианом, т. е. удовлетворяют (19). Составим из операторов (20) линейные комбинации:

$$\left.\begin{aligned} L_{ik} &= -L_{ki};\ i, k=(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,5); \\ L_{ik} &= M_{ik};\ \ i,\ k=(1,\ 2,\ 3,\ 4); \\ L_{i5} &= \frac{1}{2}(I_i+\mathrm{i}P_i); \\ L_{i0} &= \frac{1}{2}(P_i+\mathrm{i}I_i); \\ L_{50} &= -I, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям алгебры Ли $O(4{,}2)$:

$$[L_{ik},\ L_{lm}]=\mathrm{i}\,(\delta_{il}L_{km}+\delta_{km}L_{il}-\delta_{im}L_{kl}-\delta_{kl}L_{im}). \tag{22}$$

Эта совокупность операторов и определяет симметрию задачи в смысле, обсужденном в разд. 1.

Собственные функции атома водорода, отвечающие главному квантовому числу N, образуют базис конечномерного неприводимого представления компактной $O(4)$-группы (с генераторами M_{ik}).

Как хорошо известно, каждый вектор этого базиса полностью определяется заданием двух аддитивных квантовых чисел ν_1 и ν_2, которые являются собственными числами операторов $(M_{14}+M_{23})/2$, $(M_{23}-M_{14})/2$ и пробегают все или целые, или полуцелые значения в области

$$\left.\begin{aligned} -(N-1)/2\leqslant\nu_1\leqslant(N-1)/2; \\ -(N-1)/2\leqslant\nu_2\leqslant(N-1)/2. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Собственные функции атома водорода, отвечающие главному квантовому числу $N = n + 1$, можно реализовать как неприводимые тензорные степени $\Pi_{i_1i_2}\ \ldots\ _{i_n}$ вектора ξ_i, причем этот тензор полностью симметричен по любой перестановке индексов и его свертка по любой паре индексов равна нулю. Так, при $N = 1$, $\Pi^0 = 1$; $N = 2$ имеем четыре функции: $\Pi_1^{(1)} = -2\xi_1$, $\Pi_2^{(1)} = -2\xi_2$, $\Pi_3^{(1)} = -2\xi_3$, $\Pi_4^{(1)} = -2\xi_4$; при $N = 3$ тензор $\Pi_{ik}^{(2)}$ имеет вид, пропорциональный $\xi_i\xi_k - \xi_k^2\delta_{ik}/4$. Операторы (20) содержат дифференцирование по всем четырем переменным ξ_i. Волновые функции состояний атома водорода получаются из тензоров $\Pi_{i_1i_2\ldots i_n}^{(n)}$ при условии $\xi_i^2 = 1$. Однако, чтобы получить $O(4{,}2)$-представление алгебры, используем такой прием: будем пока считать эти переменные независимыми. Тогда матричные элементы операторов (20) в базисе $\Pi_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}^{(n)}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} I_i\Pi^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n} &= \delta_{i, i_{n+1}}\Pi^{(n+1)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}};\\ P_i\Pi^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n} &= \mathrm{i}\,\Big[2n\sum_{k=1}^{n}\delta_{i, i_k}\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_n} -\\ &\quad -2\sum_{j, k}\delta_{i_j, i_k}\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_n}\Big];\\ I\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n} &= (n+1)\,\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n};\\ M_{ij}\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n} &= \mathrm{i}\,\Big[\sum_{k=1}^{n}\delta_{i, i_k}\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_n, j} -\\ &\quad -\delta_{j, i_k}\Pi^{(n)}_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_n, i}\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

В формулах (24) символ (j, k) означает суммирование по всем сочетаниям из n индексов по два. Теперь будем рассматривать эти формулы для определения того, как действуют операторы I_i, P_i, M_{ik}, I на волновые функции атома водорода, иными словами, будем считать, что в правой и левой частях равенства (24) в $\Pi^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ приняли $\xi_i^2 = 1$. Новые, таким образом определенные операторы удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям, что и дифференциальные операторы (20). В этом можно легко убедиться непосредственной проверкой.

Следовательно, формулы (24) при $\xi_i^2 = 1$ задают представление алгебры операторов (20). Операторы I_i переводят уровень N в $N+1$, а операторы P_i в $N-1$. Это означает, что из любого состояния последовательно можно получить всю совокупность состояний атома водорода. $O(4)$-симметрия позволяет по одной волновой функции узнать все волновые функции, принадлежащие одному уровню. Более широкая $O(4{,}2)$-симметрия позволяет восстановить и все функции, принадлежащие любым другим уровням. Таким образом, в пространстве $H = \Sigma \oplus \Pi^{(n)}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, где H прямая сумма пространств функций, отвечающих данному N, построено бесконечномерное представление алгебры операторов (20) или их линейных комбинаций (21). В силу формул (24) базис пространства H можно получить, последовательно действуя на 1 оператором I_i. Докажем, что представление неприводимо. Действительно, если бы существовало нулевое инвариантное подпространство $\hat{H}$ относительно всех операторов (26), то оно было бы инвариантно и относительно компактной подалгебры операторов M_{ik}. Как хорошо известно, представление компактной алгебры распадается в прямую сумму неприводимых представлений. Следовательно, в $\hat{H}$ содержится хотя бы одна тензорная степень $\Pi^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. Действуя последовательно на $\Pi^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ оператором P_i, в конечном итоге получим единицу, а как отмечалось выше, пространство H натянуто на единицу.

Таким образом, пространство $\hat{H}$ совпадает с H. Этим полностью доказана неприводимость представления алгебры $O(4,2)$ в пространстве H.

Нетрудно проверить, что операторы Казимира для написанного представления принимают следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= L_{ik}L_{ki} = 6; \\ C_3 &= \varepsilon_{ikl\,mnp}L_{ik}L_{lm}L_{np} = 0; \\ C_4 &= L_{ik}L_{km}L_{mn}L_{ni} = -12. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Алгебра $O(4,2)$ содержит подалгебру де Ситтера $S \approx O(4,1)$, состоящую из операторов L_i, где $i, j = 1, \ldots, 5$. Замечательно, что построенное выше представление остается неприводимым и относительно подалгебры $O(4,1)$. Вычислим операторы Казимира этой алгебры:

$$\left.\begin{aligned} Q &= L_{ij}L_{ji} = 4 - \frac{1}{2}(\xi_i^2+1)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}; \\ W &= W_\alpha W^\alpha = 0; \\ W_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\mu}L_{\beta\gamma}L_{\delta\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Таким образом, $Q\Pi^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n} = 4\Pi^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}$. Это указывает на неприводимость представления алгебры $O(4,1)$. Полное доказательство неприводимости этого представления аналогично вышеизложенному доказательству неприводимости представления алгебры $O(4,2)$.

5. **Динамическая симметрия для нерелятивистской частицы в магнитном поле.** Рассмотрим сначала нерелятивистскую частицу со спином 1/2 в однородном магнитном поле, следуя обычному изложению [52, 53]. Гамильтониан, описывающий поведение частицы в этом случае, имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \mu\sigma\mathbf{H}, \quad c = \hbar = 1, \tag{27}$$

где $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\times\mathbf{r}]$; μ — магнитный момент частицы.

Удобно в дальнейшем ввести новые переменные:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{x+\mathrm{i}y}{2}\sqrt{m\omega}; \quad \xi^* = \frac{x-\mathrm{i}y}{2}\sqrt{m\omega}; \\ &x = \frac{\xi+\xi^*}{\sqrt{m\omega}}; \quad y = -\mathrm{i}\frac{\xi-\xi^*}{\sqrt{m\omega}}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

здесь частота ω задается формулой

$$\omega = eH/m, \tag{29}$$

а магнитное поле направлено по оси z. Легко видеть, что операторы проекции импульса p_z, проекции момента $M_z = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}]_z$, а также проекции спина σ_z и координаты «центра окружности»

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x + (p_y - eA_y)/m\omega; \\ y_0 &= y - (p_x - eA_x)/m\omega \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

коммутируют с гамильтонианом (27) и являются интегралами движения. Следуя работе [52], где применялся метод факторизации Шредингера [54, 55], введем два вида операторов рождения и уничтожения

$$a = [p_x - e\,A_x - \mathrm{i}\ (p_y - e\ A_y)]\ \frac{1}{\sqrt{2m\,\omega}};$$

$$a^+ = [p_x - e\,A_x + \mathrm{i}\ (p_y - e\ A_y)]\ \frac{1}{\sqrt{2m\,\omega}} \tag{31}$$

и коммутирующие с гамильтонианом (27) операторы

$$b = (x_0 - \mathrm{i}y_0)\sqrt{m\omega/2};$$

$$b^+ = (x_0 + \mathrm{i}y_0)\sqrt{m\omega/2}. \tag{32}$$

В переменных ξ эти операторы имеют простой вид:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi^*}\right); & a^+ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\xi^* - \frac{\partial}{\partial\xi}\right); \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^* + \frac{\partial}{\partial\xi}\right); & b^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi^*}\right). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Легко проверить, что операторы a, a^+, b, b^+ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &[a, a^+] = [b, b^+] = 1; \\ &[a, b] = [a, b^+] = [a^+, b] = [a^+, b^+] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Используя эти операторы, легко переписать гамильтониан в виде:

$$\mathscr{H} = \omega\,(a^+a + 1/2) - \mu\sigma_z H + p_z^2/2m. \tag{35}$$

Так как операторы $\mathscr{H}$, p_z, σ_z коммутативны, собственные функции гамильтониана (35) можно представить в виде:

$$\psi_{Ep_zs_z} = \Phi_{n_1}(\xi, \xi^*) \exp(\mathrm{i}p_z z)\,\chi_{s_z}^{1/2}, \tag{36}$$

где $\chi_{s_z}^{1/2}$ — двухкомпонентный спинор, являющийся собственным вектором оператора σ_z: $\sigma_z\chi_z^{1/2}/2 = s_z\chi_{s_z}^{1/2}$, а функция $\Phi_{n_1}(\xi, \xi^*)$ определяется уравнением

$$\omega\,(a^+a + 1/2)\,\Phi_{n_1}(\xi, \xi^*) = E_t\Phi_{n_1}(\xi, \xi^*). \tag{37}$$

Очевидно, что спектр энергий дается формулой

$$E = E_t - 2\mu H s_z + p_z^2/2m. \tag{38}$$

Собственные функции $\Phi_{n_1}(\xi, \xi^*)$, удовлетворяющие уравнению (37), находятся следующим образом. Рассмотрим состояние $\Phi_{00}(\xi, \xi^*) = |00\rangle$, такое, что

$$\left.\begin{aligned} &a\Phi_{00} = b\Phi_{00} = 0; \\ &\int |\Phi_{00}|^2\, dx\, dy = 1. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Используя вид операторов a и b (33), легко находим

$$\Phi_{00} = \sqrt{m\omega/2\pi}\exp(-|\xi|^2). \tag{40}$$

Определим состояния

$$\Phi_{n_1 n_2} = |n_1 n_2\rangle = \frac{(a^+)^{n_1}(b^+)^{n_2}}{\sqrt{n_1!}\sqrt{n_2!}}|00\rangle, \tag{41}$$

тогда

$$\int \Phi^*_{n_1 n_2}\Phi_{m_1 m_2}\, dx\, dy = \delta_{n_1 m_1}\delta_{n_2 m_2}. \tag{42}$$

В переменных ξ

$$|n_1 n_2\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi}}\cdot\frac{i^{n_1} 2^{(n_1-n_2)/2}}{\sqrt{n_1!\, n_2!}}\left(\xi^* - \frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{n_1}\xi^{n_2}\exp(-|\xi|^2). \tag{43}$$

Легко проверить, что

$$\omega(a^+a + 1/2)|n_1 n_2\rangle = (n + 1/2)\,\omega\,|n_1 n_2\rangle. \tag{44}$$

Таким образом,

$$E_t = \omega(n_1 + 1/2) \tag{45}$$

и каждое значение E_t бесконечно кратно вырождено по числу n_2. Отметим, что $|n_1 n_2\rangle$ есть собственные функции операторов M_z и $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$:

$$\left.\begin{aligned} &M_z|n_1 n_2\rangle = (n_2 - n_1)|n_1 n_2\rangle; \\ &r_0^2|n_1 n_2\rangle = r_0^2|n_1 n_2\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

В случае электрона $\mu = e/2m$ появляется дополнительное специфическое вырождение уровней энергии Ландау. Два состояния

$$\left.\begin{aligned} &|n_1 + 1,\ n_2,\ s_z = -1/2,\ p_z\rangle \\ &|n_1,\ n_2,\ s_z = 1/2,\ p_z\rangle \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

обладают одинаковой энергией. За это вырождение отвечает дополнительная спиральная симметрия гамильтониана (27). Рассмотрим операторы

$$\left.\begin{aligned} &\breve{X}_1 = (a\sigma_+ + a^+\sigma_-)/2; \quad \breve{X}_3 = \sigma_3; \\ &\breve{X} = (a\sigma_+ - a^+\sigma_-)/2i; \quad \sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

которые коммутируют с гамильтонианом и операторами b, b^+. На пространстве состояний с $n_1>0$ можно ввести нормированные операторы X_i, образующие алгебру $SU(2)$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= [a\sigma_+(a^+a)^{-1/2}+(a^+a)^{-1/2}a^+\sigma_-]/2; \\ X_2 &= [a\sigma_+(a^+a)^{-1/2}-(a^+a)^{-1/2}a^+\sigma_-]/2i; \\ X_3 &= \sigma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям:

$$[X_i, X_k]=2i\varepsilon_{ikl}X_l;$$
$$\{X_i, X_k\}=2\delta_{ik}. \qquad (50)$$

На состояниях (47) реализуется спинорное представление спиральной $SU(2)$-группы. На состоянии с $n_1=0$, $s_z=-1/2$ операторы X_1, X_2 аннулируются, и остается один оператор. Построенная алгебра операторов аналогична спиральной алгебре, найденной в работах для моделей релятивистского атома водорода и свободного уравнения Дирака [56].

Рассмотрим теперь пространство состояний D с фиксированным импульсом p_z и проекцией спина s_z. Базис в этом пространстве образуют функции

$$\psi^{n_1n_2}_{Ep_zs_z}=\Phi_{n_1n_2}(\xi,\xi^*)\exp(ip_zz)\,\chi^{1/2}_{s_z}. \qquad (51)$$

Рассмотрим алгебру операторов:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}=a^+a;\quad A_{12}=a^+b;\quad A_{13}=ia^+(a^+a+b^+b+1)^{1/2};\\ &A_{21}=b^+a;\quad A_{22}=b^+b;\quad A_{23}=ib^+(a^+a+b^+b+1)^{1/2};\\ &A_{31}=i(a^+a+b^+b+1)^{1/2}a;\quad A_{32}=i(a^+a+b^+b+1)^{1/2}b;\\ &A_{33}=-a^+a-b^+b-1, \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[A_{ik}, A_{lm}]=\delta_{kl}A_{im}-\delta_{im}A_{lk}. \qquad (53)$$

Операторы (52) образуют алгебру $U(2,1)$. В пространстве D реализуется одно бесконечномерное унитарное неприводимое представление алгебры $U(2,1)$. Для этого представления операторы Казимира имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_{ii}=-1;\\ C_2 &= A_{ik}A_{ki}=-1; \qquad (54)\\ C_3 &= A_{ik}A_{kl}A_{li}=-3. \end{aligned}$$

Подалгебра операторов A_{ik} ($k=2, 3$), коммутирующих с гамильтонианом (27), образует алгебру $U(1,1)$. В силу этого пространство состояний D_{n_1}, базисом в котором служат состояния (51) с фиксированными числами p_z, s_z, n_1, является инвариантным подпространством относительно алгебры $U\,(1,1)$. Таким образом, все пространство D разбивается в прямую сумму подпространств D_{n_1}, базисом в них являются состояния (51) с фиксированным n_1

$$D=\sum_{n_1=0}^{\infty} D_{n_1}. \tag{55}$$

В каждом подпространстве D_{n_1} реализуется одно неприводимое бесконечномерное унитарное представление алгебры $U\,(1,1)$ (дискретная серия, см. работы [57, 58]). Это легко следует из того, что операторы Казимира

$$C_0=\sum_{i=2}^{3} A_{ii}; \quad C_1=\sum_{i,\,k=2}^{3} A_{ik}A_{ki}$$

на подпространстве D_{n_1} имеют следующий вид:

$$C_0=-n_1-1; \quad C_1=n_1^2+n_1+1. \tag{56}$$

Таким образом, в представление динамической алгебры $U\,(2,1)$, описывающее дискретную часть энергетического спектра задачи о заряженной частице в магнитном поле и задаваемое операторами Казимира (54), однократно входят все представления алгебры симметрии $U\,(1,1)$, задаваемые операторами Казимира (56). Следует отметить, что поскольку в $U\,(1,1)$-группе существуют две картановских подгруппы — компактная и некомпактная, то возможна классификация состояний с заданной энергией при помощи компактной и некомпактной подгрупп. Собственные функции инфинитезимального оператора из компактной подгруппы дают состояния (51), а классификация по некомпактной приводит к непрерывному спектру состояний. Представляет интерес произвести классификацию состояний и по компактной $U\,(2)$-подгруппе, образованной операторами $A_{ik}=(i,\ k=1,\ 2)$, т. е. сузить представление $U\,(2,1)$-группы (54) на компактную подгруппу. Представления $U\,(2)$-группы задаются старшим весом $(f_1,\ f_2)$, где целые числа f_1 и f_2 удовлетворяют неравенству $f_1 \geqslant f_2$. Пространство состояний D разлагается в прямую сумму подпространств

$$D=\sum_{f_1 f_2} D_{f_1 f_2}. \tag{57}$$

В подпространстве $D_{f_1 f_2}$ реализуется конечномерное унитарное неприводимое представление $U\,(2)$-группы (причем, как легко видеть, со старшим весом $f_1=f,\ f_2=0$). Базисом для этого представления служат функции (51) с фиксированными p_z, s_z, индексы которых удовлетворяют условию $f=n_1+n_2$.

Задачу о нахождении динамики поведения обсуждаемой модели можно, как и задачу о спектре, сформулировать в рамках U (2,1)-группы. Для этого заметим, что операторы координат x и y можно выразить через операторы рождения и уничтожения по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x &= (2m\omega)^{-1/2}\,[b+b^{+}+\mathrm{i}\,(a-a^{+})]; \\ y &= (2m\omega)^{-1/2}\,[\mathrm{i}\,(b-b^{+})+a+a^{+}], \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

а операторы дипольного момента выражаются через генераторы U (2,1)-группы

$$\left.\begin{aligned} & d^{+} = -e\xi/\sqrt{2} = \\ &= \left(-e/\sqrt{m\omega}\right)\left[-(A_{33})^{-1/2}A_{31} - \mathrm{i}A_{23}\,(-A_{33})^{-1/2}\right]; \\ & d^{-} = -e\xi/\sqrt{2} = \\ &= \left(e/\sqrt{m\omega}\right)\left[-\mathrm{i}\,(-A_{33})^{-1/2}A_{32} - A_{13}\,(-A_{33})^{-1/2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Эта связь аналогична связи оператора дипольного перехода с генераторами O (4,2)-группы в атоме водорода [15]. Переход к случаю нерелятивистской частицы со спином 0 прост [$\mu = 0$ в (27)]. Поэтому представление, описывающее состояние частицы с фиксированным p_z, является тем же представлением U (2,1)-группы [см. (52) и (54)].

6. Симметрия кулоновского потенциала в n-мерном пространстве. Рассмотрим уравнение

$$\left.\begin{aligned} & \Delta_n\varphi = 0; \\ & \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Координаты x_i могут быть действительными и мнимыми, т. е. в операторе A_n произвольное число знаков плюс и минус. Непосредственной проверкой убеждаемся, что операторы

$$\left.\begin{aligned} P_i &= -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,; \\ I_i &= x_k^2\,\frac{\partial}{\partial x_i} - 2x_i\,x_k\,\frac{\partial}{\partial x_k} + (2-n)x_i; \\ M_{ik} &= -\mathrm{i}\left(x_i\,\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right); \\ I &= x_k\,\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

коммутируют на решениях (61) с лапласианом Δ_n. Коммутационные соотношения следующих линейных комбинаций

$$\left.\begin{aligned} &L_{ik}=-L_{ki}, \quad i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2;\\ &L_{ik}=M_{ik}, \quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n;\\ &L_{i,\ n+1}=(I_i+\mathrm{i}P_i)/2;\\ &L_{n+1,\ n+2}=-I;\\ &L_{i,\ n+2}=(P_i+\mathrm{i}I_i)/2 \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

совпадают с некоммутационными соотношениями операторов $O(n,\ 2)$-группы. Интересно, что одномерное уравнение Лапласа, имеющее группы симметрии $O(3)$, реализует в качестве решений лишь представления этой группы, задаваемые полным моментом 1/2. Оператор Казимира $M^2 = 3/4$ тождествен. Представление конечномерно ($l_1 = 1,\ l_2 = x$). Операторы Казимира тождественно равны числам и в случае двумерного лапласиана. Многомерная кулоновская задача описывается гамильтонианом

$$\mathscr{H}=-\frac{1}{2}\Sigma\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{1}{(x_i^2)^{1/2}}. \tag{63}$$

Дискретный спектр этой задачи и волновые функции были найдены в [59]. В работе [36] было показано, что задача обладает $O(n+1)$-группой инвариантности. Точно так же как и для трехмерного случая, многомерная кеплеровская задача сводится (см. работу [36]) с помощью перехода к импульсному пространству и стереографического проектирования к уравнению (60) в пространстве $n+1$-измерения. Однородные полиномы степени принадлежат вырожденным уровням энергии $E_k=-\{2[k+(n-1)/2]^2\}^{-1}$. В пространстве этих полиномов реализуется конечномерное представление $O(n+1)$-группы. Спектр этой задачи можно объединить с помощью (62) в одно неприводимое представление $O(n+1,\ 2)$-группы. Это представление неприводимо при сужении на $O(n+1,\ 1)$-подгруппу. Динамическая $O(n+1,\ 2)$-группа для многомерного атома водорода была найдена в работах [11, 28, 31, 60].

II. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАДАЧ

7. Симметрия свободного релятивистского движения. Гамильтониан для свободной релятивистской частицы со спином 1/2 имеет вид:

$$\mathscr{H}=\alpha\mathbf{p}+\beta m, \tag{64}$$

где α и β — стандартные четырехрядные матрицы Дирака [61]. С оператором $\mathscr{H}$ коммутируют оператор полного момента $\mathbf{j}$ и оператор Дирака:

$$K=\beta(\sigma\mathbf{L}+1). \tag{65}$$

В силу этого состояния с определенной энергией E можно выбрать так, чтобы они обладали определенным полным моментом j^2, его проекцией j_z и K:

$$\begin{gathered}\mathscr{H}\psi_{Ekm}=E\psi_{Ekm};\quad K\psi_{Ekm}=k\psi_{Ekm};\\ j_z\psi_{Ekm}=m\psi_{Ekm};\quad j^2\psi_{Ekm}=(k^2-1/4)\,\psi_{Ekm}.\end{gathered} \tag{66}$$

Бесконечный набор волновых функций с $j=1/2,\ 3/2,\ 5/2,$ и $K=\pm\mid j+1/2\mid$, где k — собственное значение оператора Дирака, образует базис в пространстве $\mathscr{H}$.

Легко проверить, что операторы

$$\left.\begin{aligned}&X_1=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}/|p|;\quad X_2=\beta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}/|K|;\quad X_3=K/|K|;\\ &\mathbf{A}=\frac{[\mathbf{L}\times\mathbf{p}]-[\mathbf{p}\times\mathbf{L}]}{2|p|};\quad p=(E^2-m^2)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

коммутируют с полным моментом $\mathbf{j}$ и свободным гамильтонианом $\mathscr{H}$.

Операторы X_i подчиняются коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered}[X_\alpha,X_\beta]=2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}X_\gamma;\\ \{X_\alpha,X_\beta\}=2\delta_{\alpha\beta}\end{gathered} \tag{68}$$

и, следовательно, являются генераторами спиральной $SU(2)$-группы. Название спиральная группа связано с тем, что оператор X_1 является оператором спиральности.

В двумерном пространстве состояний с заданным энергией квадратом момента j^2 и проекцией j_z, базис в котором образуют функции ψ_{Ekm} с разными $k=\pm\mid j+1/2\mid$, матрицы операторов X_α совпадают с $\boldsymbol{\sigma}$-матрицами Паули. Двукратное вырождение по знаку k объясняется наличием спиральной $SU(2)$-группы симметрии.

Определим операторы:

$$\left.\begin{aligned}&\breve{\mathbf{L}}=\frac{1}{2}\left\{2\mathbf{L}+\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{|p|^2}+\beta\left(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{|p|^2}\right)\right\};\\ &\breve{\boldsymbol{\Sigma}}=-\beta\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{|p|^2}+\beta\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{|p|^2};\\ &\mathbf{A}=\frac{1}{2|p|}\{[\mathbf{p}\times\mathbf{L}]-[\breve{\mathbf{L}}\times\mathbf{p}]\}.\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Легко проверить, что эти операторы коммутируют с гамильтонианом (64) и удовлетворяют коммутационным соотношениям прямого произведения группы Лоренца и унитарной $SU(2)$-группы:

$$\left.\begin{aligned}&[\breve{L}_i,\breve{L}_k]=i\varepsilon_{ikl}\breve{L}_l;\quad[\breve{L}_i,\breve{A}_k]=i\varepsilon_{ikl}\breve{A}_l;\\ &[\breve{A}_i,\breve{A}_k]=-i\varepsilon_{ikl}\breve{L}_l;\quad[\breve{L}_i,\breve{\Sigma}_k]=[\breve{A}_i,\breve{\Sigma}_k]=0;\\ &[\breve{\Sigma}_i,\breve{\Sigma}_k]=2i\varepsilon_{ikl}\breve{\Sigma}_l.\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Таким образом, в бесконечномерном пространстве состояний ψ_{Ekm} с заданной энергией реализуется унитарное представление $SL(2, c) \otimes SU(2)$-группы, являющееся тензорным произведением представления группы Лоренца с $\rho = 0$ и $m = 0$ на спинорное представление $SU(2)$-группы. Легко сосчитать операторы Казимира для алгебры (69). Имеем $C_1 = (\tilde{\mathbf{L}} + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{A}})^2 = -1$, $\tilde{\Sigma}^2 = 3$, $C_2 = (\tilde{\mathbf{L}} - \mathrm{i}\tilde{\mathbf{A}})^2 = 1$. Отсюда и вытекает сформулированный вывод.

Покажем теперь, что в данной задаче возможно появление не вполне приводимого представления группы Лоренца. Для этого рассмотрим два векторных оператора:

$$\mathbf{j} = \tilde{\mathbf{L}} + \Sigma/2, \quad \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{A}} + \mathrm{i}\tilde{\Sigma}/2. \tag{71}$$

Эти операторы обладают коммутационными соотношениями алгебры Ли $SL(2, c)$-группы:

$$\begin{gathered}[j_i, j_m] = \mathrm{i}\varepsilon_{iml} j_l; \\ [j_k, k_m] = \varepsilon_{iml} k_l; \quad [k_i, k_m] = -\mathrm{i}\varepsilon_{iml} k_l.\end{gathered} \tag{72}$$

Оператор $\mathbf{j}$ есть оператор полного момента количества движения. Вычислим теперь операторы Казимира этой группы. Имеем

$$\begin{gathered}C_1 = (\mathbf{j} + \mathrm{i}\mathbf{k})^2 = -1; \\ C_2 = (\mathbf{j} - \mathrm{i}\mathbf{k})^2 = -2(1 + X_1) K, \quad C_2^2 = 0.\end{gathered} \tag{73}$$

Это означает, что данное представление не вполне приводимо. В двумерном пространстве $\psi_{E,km}$, $\psi_{E,-km}$ оператор C_2 может быть приведен только к треугольному виду. Представление группы Лоренца такого типа впервые рассмотрено Желобенко [63]. Существование таких представлений в свободном уравнении Дирака связано с его релятивистской инвариантностью. В данном случае очевиден общий факт, что одно и то же пространство состояний $\psi_{E,km}$ можно рассматривать как базис неприводимого представления $SL(2, c) \times SU(2)$-группы. При этом генераторы обеих групп строятся из физических операторов.

8. Динамическая симметрия релятивистской частицы в магнитном поле. Рассмотрим теперь релятивистскую частицу со спином нуль в однородном магнитном поле. Уравнение, описывающее ее поведение, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 + p_z^2 + (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2\right] \psi = 0. \tag{74}$$

Ясно, что определенные выше операторы A_{ik} ($i, k = 2, 3$) [см. (52)] коммутируют с уравнением (74) и определяют его $U(1, 1)$-группу инвариантности. Используя определение (31), (32), легко получить спектр энергий

$$E = \pm [m\omega (2n_1 + 1) + m^2 + p_z^2]^{1/2}. \tag{75}$$

Основное состояние $p_z = 0$, $n_1 = 0$ задается формулой

$$E^0_{\pm} = (m\omega + m^2)^{1/2}. \tag{76}$$

Следует отметить, что подобный спектр частицы в магнитном поле, описываемой в рамках теории бесконечномерных релятивистских инвариантных уравнений, обсуждался в работе [62]. Все рассуждения предыдущего раздела полностью переносятся на рассматриваемый случай; функции, являющиеся решениями уравнения (74) при фиксированном знаке энергии, даются формулами (36), (39), (43) (решения с различными знаками энергии отличаются экспоненциальным множителем exp $(\pm \mathrm{i}\, Et)$. Поэтому состояние релятивистской заряженной частицы со спином нуль при фиксированном p_z и знаке энергии реализуют одно бесконечномерное представление $U\,(2{,}1)$-группы, задаваемое операторами (52). Состояния при фиксированном p_z и энергии реализуют одно неприводимое представление $U\,(1{,}1)$-группы инвариантности, задаваемое операторами Казимира (56).

Гамильтониан, описывающий дираковскую частицу в магнитном поле, имеет вид:

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\,(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m. \tag{77}$$

Следуя работе [52], используем для рассмотрения собственных функций гамильтониана (77) метод квадрирования. Запишем уравнение для волновой функции в виде

$$O_+\psi_E \equiv (\mathcal{H} - E)\,\psi_E = 0. \tag{78}$$

Рассмотрим квадрированное уравнение

$$O_-O_+\Phi_E = (\mathcal{H} + E)\,(\mathcal{H} - E)\,\Phi_E = 0, \tag{79}$$

которое уже не содержит четырехрядных матриц и приводится к виду

$$[\mathcal{H}_t + (p_z^2 + m^2)/2m - \omega\sigma_z/2 - E^2/2m]\,\Phi_E = 0. \tag{80}$$

Связь между функциями ψ_E и Φ_E обычная:

$$\psi_E = O_-\Phi_E, \tag{81}$$

если четырехкомпонентная функция Φ_E выбрана в виде

$$\Phi_E = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_E \end{pmatrix}, \tag{82}$$

где φ_E — двухкомпонентная функция.

Метод квадрирования уравнения Дирака позволяет по интегралам движения квадрированного уравнения находить интеграл движения исходного линейного уравнения. Этот способ легко позволяет находить группы инвариантности для релятивистских моделей атома водорода и свободного движения [56]. В матричной форме оператор O_- имеет вид

$$O_- = \begin{pmatrix} E+m & \sigma(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) \\ \sigma(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) & E-m \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Операторы

$$R = \sigma(\mathbf{p}-e\mathbf{A}); \quad C = \mathscr{H} - m \tag{84}$$

удовлетворяют соотношениям

$$R^2 = \mathscr{H}^2 - m^2;$$
$$C^2 = \mathscr{H}^2 + m^2 - 2\mathscr{H}m. \tag{85}$$

Пусть $L_i = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{pmatrix}$ — интегралы движения квадрированного уравнения. Тогда интеграл движения линейного уравнения строится с помощью операторов R и C:

$$\widetilde{L}_i = \begin{pmatrix} RL_iR^{-1} & 0 \\ 0 & CL_iC^{-1} \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Такую конструкцию можно построить, если существуют обратные операторы R^{-1}, C^{-1}. Ясно из (86), что коммутационные соотношения операторов $\widetilde{L}_i$ совпадают с коммутационными соотношениями операторов L_i. Легко видеть, что с уравнением (80) коммутируют те же операторы, что и с уравнением (27). Операторы b и b^+ коммутируют с линейным уравнением, с которым коммутирует также оператор σ ($\mathbf{p}$ — $e\mathbf{A}$). С помощью описанного способа переноса интегралов квадрированного уравнения на линейный случай легко построить следующие, коммутирующие с гамильтонианом (77) операторы:

$$\breve{\sigma}_z = \begin{pmatrix} R\sigma_zR^{-1} & 0 \\ 0 & C\sigma_zC^{-1} \end{pmatrix}; \quad \breve{M}_z = \begin{pmatrix} RM_zR^{-1} & 0 \\ 0 & CM_zC^{-1} \end{pmatrix}. \tag{87}$$

Легко убедиться, что выполняется соотношение

$$\breve{M}_z + \breve{\sigma}_z/2 = j_z, \tag{88}$$

где j_z — проекция углового момента на направление поля. Операторы спиральной группы инвариантности (49) переносятся на релятивистский случай для частицы без аномального магнитного момента. Следует отметить, что интегралы движения, объясняющие двукратное вырождение, строились ранее в работе [52]:

$$\breve{X}_i = \begin{pmatrix} RX_iR^{-1} & 0 \\ 0 & CX_iC^{-1} \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Между операторами M_z, a^+a и b^+b имеется связь

$$\breve{M}_z = \breve{a}^+\breve{a} - b^+b. \tag{90}$$

Спектр энергий, как видно из уравнения (80), имеет вид:

$$E = \pm [m\omega (2n_1 + 1 - 2s_z) + p_z^2 + m^2]^{1/2}. \tag{91}$$

Операторы R и C обращаются в нуль на одном состоянии с $p_z = 0$, $n_1 = 0$, $s_z = 1/2$. При любом фиксированном ненулевом импульсе операторы R, C имеют обратные. Для состояний с $n_1 > 0$ существуют обратные операторы R^{-1}, C^{-1} и операторы спиральной группы (89) являются генераторами SU (2)-группы, коммутирующими с операторами b^+, b, поскольку их можно нормировать, как и в случае нерелятивистской частицы. Случай пространства состояний с нулевым импульсом $p_z = 0$ требует особого рассмотрения, поскольку на состояниях с $n_1 = 0$ операторы R, C обращаются в нуль. Однако можно сконструировать и в этом случае алгебру U (2,1), представление которой реализуется на таком пространстве состояний. Дело в том, что легко построить штрихованные операторы с помощью предельного перехода. Хотя R, $C \to 0$, будем иметь при построении решений произведения RR^{-1} и CC^{-1}, которые равны единице. Поэтому легко доопределить штрихованные операторы там, где не существует обратных операторов R и C. Рассмотрим пространство D состояний с фиксированным p_z. Построим операторы $\breve{a}$, $\breve{a}^+$, $\breve{b}$, $\breve{b}^+$ по правилу (86). Из этих операторов построим U (2,1)-группу по формулам (52), где вместо операторов a, b, a^+, b^+ поставим операторы $\breve{a}$, $\breve{b}$, $\breve{a}^+$, $\breve{b}^+$. Ввиду того что правило сопоставления операторов (86) не нарушает коммутационных соотношений, можно сделать следующий вывод.

В пространстве состояний релятивистской заряженной частицы со спином 1/2 в однородном магнитном поле с фиксированными p_z, s_z и фиксированным знаком энергии реализуется одно бесконечномерное унитарное неприводимое представление динамической группы, задаваемое операторами Казимира (54). На подпространстве состояний с заданной энергией D_{n_1} с фиксированным импульсом p_z в случае $n_1 > 0$ реализуется неприводимое представление U (1,1) $\times$ SU (2)-группы симметрии гамильтониана с операторами Казимира (56). На аналогах состояний (47) реализуется спинорное представление спиральной SU (2)-группы.

Сформулированные в случае магнитного поля результаты являются справедливыми и при наличии перпендикулярного к нему однородного электрического поля E, такого, что $E^2 - H^2 < 0$, так как всегда можно перейти в другую систему отсчета, где электрическое поле исчезает.

III. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

9. Инварианты. На основе моделей, рассмотренных выше, можно выяснить глубокую связь динамических групп с интегралами движения, которыми обладает система (квантовая или классическая). Эта связь для систем общего вида (стационарных и нестационарных) была установлена в работах [42—44] на основе анализа понятия симметрии уравнения, приведенного в первом разделе. К аналогичной связи пришел и Дотан [64], рассматривая стационарную квантовую систему с известным спектром энергий. Здесь будем следовать рассуждениям работ [42, 43]. Если под оператором A [см. формулу (1)] понимать оператор $\left(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}-\mathscr{H}\right)$, то операторы I_i, задающие группу симметрии уравнения Шредингера согласно этой формуле, удовлетворяют условию:

$$\left[\left[\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}-\mathscr{H}\right],\, I_i\right]\psi=0. \tag{92}$$

Здесь ψ — решение временного уравнения Шредингера. По формуле (92) операторы I_i переводят решение уравнения Шредингера $\psi(x, t)$ опять в решение $\psi_i' = I_i\psi$.

Поскольку гамильтониан системы эрмитов, оператор эволюции унитарен, т. е. сохраняет скалярное произведение. Поэтому если взять любые два решения уравнения Шредингера $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$, в начальный момент имеющие вид $\psi_1(x, 0)$, $\psi_2(x, 0)$, то скалярное произведение $(\psi_1(x, t), \psi_2(x, t)) = (\psi_1(x, 0), \psi_2(x, 0))$.

Отсюда следует, что матричные элементы операторов I_i [скалярное произведение $(\psi_1(x, t), I_i\psi_2(x, t))$] не меняются со временем, поскольку в предыдущем рассуждении просто положили $\psi_2(x, t) = I_i\psi(x, t)$. В частности, среднее значение физической величины I_i со временем не меняется, т. е. не зависит от времени скалярное произведение $(\psi(x, t), I_i\psi(x, t))$. Таким образом, операторы, определяющие симметрию уравнения Шредингера в смысле обсужденного в первом разделе определения, являются интегралами движения. Независимость скалярного произведения $(\psi_1, I_i\psi_2)$ от времени можно проверить непосредственным дифференцированием величины

$$(\psi_1, I_i\psi_2)=\int dx\psi_1^*(x, t)\, I_i\psi_2(x, t) \tag{93}$$

по времени и применениям уравнения Шредингера к $\partial\psi_1^*/\partial t$ и $\partial\psi_2/\partial t$, что дает

$$\frac{d}{dt}(\psi_1, I_i\psi_2)=0. \tag{94}$$

Обсудим более подробно случай стационарной квантовой системы, т. е. обладающей не зависящим от времени гамильтонианом. Тогда волновую функцию, описывающую состояние системы, можно представить в следующем виде:

$$\psi(x, t)=\sum_n c_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n(x),$$

где E_n и $\psi_n(x)$ — собственные значения и собственные функции оператора $\mathscr{H}$; постоянные c_n должны удовлетворять подходящим условиям сходимости. Оператор $\left[\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathscr{H}\right), I_i\right]$ равен нулю на этих функциях, но может быть отличным от него на более широком пространстве функций. Для независящих от времени гамильтонианов операторы динамических групп обычно считают действующими на гильбертовом пространстве H, натянутом на базис из независящих от времени собственных функций $\{\psi_n(x)\}$. Среди этих операторов находятся как коммутирующие с гамильтонианом операторы группы инвариантности, так и операторы, меняющие энергию. Заметим, что волновая функция из пространства H может рассматриваться как волновая, зависящая от времени при $t=0$:

$$\sum_n c_n\psi_n(x)=\psi(x, 0).$$

Интегралы движения включат операторы, меняющие энергию и операторы симметрии. Их матричные элементы не зависят от времени, что удобно, поскольку для динамической группы матричные элементы ее операторов должны быть интерпретируемы как энергии системы, так и амплитуды переходов. Интегралы движения не действуют непосредственно в пространстве H. Однако с каждым интегралом движения I_i может быть связан оператор $\widetilde{I}_i$, действующий на H с помощью унитарного оператора эволюции U, который дает выражение волновой функции, взятой в момент времени t через ее значение при $t=0$: $\psi(x, t)=U\psi(x, 0)$, тогда $\widetilde{I}_i=U^{-1}I_iU$. Матричные элементы операторов $\widetilde{I}_i$ между независящими от времени собственными функциями гамильтониана равны матричным элементам оператора I_i между соответствующими, зависящими от времени функциями:

$$(\widetilde{I}_i)_{mn}\equiv(\exp(-\mathrm{i}E_m t)\,\psi_m,\ I_i\exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n) \tag{95}$$

или

$$(\psi_m(t),\ I_i\psi_n(t))=(U\psi_m(x),\ I_iU\psi_n(x))=(\psi_m(x),\ \widetilde{I}_i\psi_n(x)). \tag{96}$$

Соотношение (96) сохраняется и в случае зависимости гамильтониана от времени. В соответствии с определением оператора эволюции (или функции Грина) действие оператора $\widetilde{I}_i$ на собственные функции гамильтониана можно рассматривать как предел:

$$\tilde{I}_i \psi_n (x) = \lim_{t \to 0} I_i (\exp(-\mathrm{i} E_n t) \psi_n (x)). \tag{97}$$

Можно выразить $\tilde{I}_i$ прямо, как функцию от x, $\partial/\partial x$, находя предел самого оператора I_i при стремлении t к нулю. Поскольку I_i зависит от времени и производных по времени, то при переходе к пределу необходимо сперва избавиться от производных, а затем устремить t к нулю. Вспомним, что действие оператора $\partial/\partial t$ на зависящую от времени волновую функцию сводится к действию оператора $-\mathrm{i}\mathscr{H}$. Кроме того, если ψ — зависящая от времени волновая функция, то она также удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(-\mathrm{i}\mathscr{H}\psi) = -\mathrm{i}\mathscr{H}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

Такая коммутация не имеет места для нестационарных систем.

Если же волновую функцию $\psi(x, t)$ умножить на функцию времени $f(t)$, то новая функция $f(t)\psi(x, t)$ не удовлетворяет уравнению Шредингера. Поэтому, чтобы вычислить предел оператора I_i, сначала необходимо все производные перенести направо, и только затем действие их на функцию $\psi(x, t)$ заменить действием оператора $-\mathrm{i}\mathscr{H}$. Таким образом, если обозначить $OI_i\left(x, \partial/\partial x, t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ оператор I_i, в котором введено описанное упорядочение, можно написать

$$\tilde{I}_i = \lim_{t \to 0} OI_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, t, -\mathrm{i}\mathscr{H}\right). \tag{98}$$

Из операторов I_i можно выбирать и строить генераторы динамической группы.

Если оператор энергии $\mathscr{H}$ явно зависит от времени, то можно, например, аналогичным образом рассматривать пространства, натянутые на базисные состояния $\psi_n^{i, f}(x)$, отвечающие пределу $t \to \pm\infty$, в том случае, если в этом пределе существуют стационарные состояния

$$(\partial\mathscr{H}(t)/\partial t\,|_{t\to\pm\infty} = 0).$$

Тогда операторы можно определять формулами, аналогичными (98). Если коммутатор $\left[\mathscr{H}, \frac{\partial}{\partial t}\right]$ не стремится к нулю достаточно быстро при $t \to \pm\infty$, необходимо применять несколько иную процедуру упорядочения.

10. Примеры инвариантов. Рассмотрим теперь интегралы движения вида

$$I_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, t\right) = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) B(t). \tag{99}$$

Функция $I_i \exp(-\mathrm{i}\, E_n t)\, \psi_n(x)$ должна удовлетворять уравнению Шредингера для любых n:

$$\mathscr{H} AB \exp(-\mathrm{i}E_n t)\, \psi_n(x) = \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} (B \exp(-\mathrm{i}E_n t))\, A\psi_n(x).$$

Если предположить, что B не обращается в нуль при любых действительных t, то последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\mathscr{H} A\psi_n(x) = \mathrm{i} \frac{\partial \ln (B \exp(-\mathrm{i}E_n t))}{\partial t} A\psi_n(x).$$

Но это есть не что иное, как уравнение на собственные значения для оператора $\mathscr{H}$; следовательно, функция $A\psi_n(x)$ должна быть пропорциональна некоторой собственной функции $\psi_{m(n)}(x)$ с собственным значением

$$\mathrm{i} \frac{\partial \ln B \exp(-\mathrm{i}E_n t)}{\partial t} = E_{m(n)}.$$

Решая это уравнение, получаем $B(t) = \exp[-\mathrm{i}(E_{m(n)} - E_n)\, t]$. Но $B(t)$ не может зависеть от n, что имеет место только, если $E_{m(n)} - E_n$ есть константа, т. е.

$$E_{m(n)} = E_n + \omega. \tag{100}$$

Следовательно, оператор A, равный оператору $\hat{I}_i$, повышает или понижает значение энергии на постоянную величину ω. Это означает, что по крайней мере часть спектра оператора линейна, т. е. состоит из равноотстоящих друг от друга уровней (возможно, конечного числа, если оператор A нильпотентен). Таким образом, чтобы получить более сложный спектр, необходимо использовать интегралы движения сложной структуры.

Коммутационные соотношения, содержащие оператор A, таковы. Из соотношения (100) нетрудно видеть, что $[\mathscr{H}, A] = \omega A$ или, переходя к эрмитово сопряженным величинам, $[\mathscr{H}, A^+] = -\omega A^+$. Тождество Якоби дает, что $[A, A^+]$ коммутирует с $\mathscr{H}$. Таким образом, $[A, A^+] = f(\mathscr{H}\, \{L_i\})$. Здесь f — неизвестная функция $\{L_i\}$ — набор генераторов группы симметрии гамильтониана $\mathscr{H}$. Вопрос о том, можно ли сконструировать таким образом алгебру Ли, зависит от функции f.

Более сложные спектры и коммутационные соотношения можно получить, рассматривая такие инварианты I_i, которые можно представить в виде прямой суммы операторов, каждый из которых имеет вид $A_n(x, \partial/\partial x)\, B_n(t)$ и действует только на подпространстве $\mathscr{H}_n$, связанном с собственным значением E_n:

$$I_i = \bigoplus_n A_n\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) B_n(t). \tag{101}$$

Тогда, рассуждая как и выше, находим, что $B_n(t) = \exp(-\mathrm{i}\,\omega_n t)$, а оператор A_n отображает подпространство H_n на $H_{m(n)}$:

$$E_{m(n)} = E_n + \omega_n. \tag{102}$$

В этом случае оператор $I_i = \oplus A_n$. Из (102) следует, что $[\mathscr{H}, I_i] = I_i \Omega(\{c_k\})$, где $\{c_k\}$ — набор операторов Казимира группы симметрии гамильтониана $\mathscr{H}$, и оператор Ω постоянен на каждом подпространстве $\Omega\, H_n = \omega_n H_n$, а также $[\mathscr{H}, \tilde{I}_i^+] = -\Omega^+ \tilde{I}_i^+$. Коммутируя еще раз, имеем $[\mathscr{H}, I_i \Omega] = \tilde{I}_i \Omega^2$. Можно ли замкнуть алгебру и получить конечную алгебру Ли, зависит от оператора Ω или от его собственных значений ω_n, являющихся разностями энергий уровней. Такие же результаты, касающиеся интегралов движения вида (99) и (101) для стационарных систем, были получены Дотаном теоретико-групповым методом [64].

Систематический способ нахождения интегралов движения, содержащих производные по времени произвольного, но конечного порядка, был предложен в работе [48], в которой интеграл I_i разлагался в формальный ряд

$$I_i = d^{(0)}(x, t) + \sum_k d_k^{(1)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + d_t^{(1)}(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k \leq j} d_k^{(2)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \ldots,$$

где функции $d^{(0)} d_k^{(1)} d_t^{(1)} d_{k,j}^{(2)}$ нужно определить. Если подставить данный ряд в соотношение

$$\left(\mathscr{H} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) I_i \psi = 0, \tag{103}$$

то получим некоторое соотношение для функции ψ и ее производных, которое будет справедливо при любых ψ, удовлетворяющих уравнению Шредингера. Если бы уравнение (103) было справедливым вообще для любых функций ψ, то можно было бы рассматривать ψ и все ее производные как независимые функции и, полагая коэффициенты при них каждый равным нулю, получить систему уравнений для неизвестных функций в разложении инварианта I_i. Однако между ψ и ее производными имеются дополнительные связи вследствие уравнения Шредингера. Следовательно, не все производные можно считать независимыми. Тем не менее можно найти независимый набор производных в соотношении (103), а все остальные выразить через них. Приравнивая к нулю коэффициенты при независимых производных, получаем уравнения для неизвестных функций d. В работе [48] данный способ иллюстрируется несколькими примерами. К сожалению, трудности расчета в указанном способе резко возрастают с увеличением порядка производных в ряду для I_i, и этот способ совершенно не подходит, если переходить к производным произвольного порядка.

Чтобы найти некоторые из производных высших порядков и, возможно, не алгебраические интегралы движения, в работе [48] используют прием, который применяют, если спектр энергий известен как функция главного квантового числа n. Оператор $\mathscr{H}$ и оператор $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}$ при действии на пространстве собственных функций для временного уравнения Шредингера дают собственные значения E_n. В работе [48] уравнения Шредингера преобразовываются к такому виду, чтобы оператор $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_1}$ имел спектр, линейный по главному квантовому числу n. Можно затем найти интегралы движения и динамическую группу для нового уравнения, а делая обратное преобразование, получить сложного вида инварианты и динамическую группу первоначального уравнения. Оператор T данного преобразования можно найти следующим образом. Заметим, что функция

$$\psi(x, t)=\sum_n c_n \exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n(x)$$

есть решение уравнения Шредингера, тогда функция

$$T\psi(x, t)=\Sigma\, c_n \exp(-\mathrm{i}nt)\,\psi_n(x)$$

должна быть решением преобразованного уравнения. Таким образом, T, действуя на функцию $\exp(-i E_n t)\,\psi_n(x)$, дает

$$T\exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n(x)=\exp(-\mathrm{i}nt)\,\psi_n(x)=$$
$$=\exp\left[\ln\left(\frac{n}{E_n}\right)t\frac{\partial}{\partial t}\right]\exp(-\mathrm{i}E_n t)\,\psi_n(x),$$

где использовано тождество

$$\exp\left[(\ln a)\,t\frac{\partial}{\partial t}\right]\exp(bt)=\exp(abt).$$

Оператор изменения масштаба времени T как оператор, действующий на всем пространстве решений, можно записать в виде

$$T=\exp\left[\ln\,(n(\mathscr{H})/\mathscr{H})\,t\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

где оператор $n(\mathscr{H})$ определен формулой

$$n(\mathscr{H})\,\psi_n(x)=n\psi_n(x).$$

Именно для построения оператора $n(\mathscr{H})$ необходимо знать явную зависимость энергии E_n от главного квантового числа. В работе [48] были рассмотрены также операторы изменения пространственных масштабов как альтернативный метод линеаризации спектра. Этим путем были найдены интегралы движения и динамические группы двумерного гармонического осциллятора и двумерного, а также трехмерного атома водорода. Заметим, что использование для нахождения инвариантов и динамической группы соотношения (103) аналогично использованному в работе [11] определению симметрии произвольного уравнения.

11. Динамические симметрии нестационарных систем. Ранее были построены интегралы движения, чьи собственные значения определяют начальное положение системы в фазовом пространстве координат и импульсов. Интегралы движения могут использоваться также для того, чтобы построить динамическую группу рассматриваемой системы. Действительно, так как любая функция от инвариантов также является инвариантом, то любые формы от интегралов движения, в частности, такие, которые имеют соотношения коммутации, определяющие некоторую алгебру Ли, могут быть сконструированы из этих интегралов движения.

Сингулярный нестационарный осциллятор. Здесь обсудим интегралы и симметрию неквадратичной квантовой системы, сингулярного квантового осциллятора, описываемого волновым уравнением

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(\frac{m\omega^2H}{2}x^2+\frac{g}{x^2}\right)\psi. \tag{104}$$

Рассмотрим это уравнение на полуоси $0<x<\infty$ с краевым условием $\psi(0)=0$; удобно ввести параметр $a=(1+8mg/\hbar^2)^{1/2}/2$, поскольку во все формулы g входит именно в такой комбинации. Будем считать, что $g>-\hbar^2/8m$, т. е. что a — вещественное и положительное число. Случай, когда $g<-\hbar^2/8m$ (обычно его называют падение частицы на центр), рассматривается подробно в работе [44]. Решения уравнения (104) для произвольной функции $\omega(t)$ получены в работе [65]. Приведем здесь их явное выражение:

$$\psi_n(x,t)=\left(2\left(\frac{m}{\hbar\varepsilon^2}\right)^{a+1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+a+1)}\right)^{1/2}x^{a+1/2}\times$$
$$\times\exp\left[\sin\gamma+\frac{im}{2\hbar}\cdot\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}x^2\right]L_n^a\left(\frac{m\dot\gamma}{\hbar^2}x^2\right), \tag{105}$$

где $L_n^a(x)$ — полином Лагерра; $\gamma(t)$ — аргумент комплексного числа ε: $\varepsilon(t)=\rho(t)\exp[i\gamma(t)]$; ρ и γ — вещественные функции, причем $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot\varepsilon(t)+\omega^2(t)\varepsilon=0$, а $\dot\gamma=$ $=\rho^{-2}$. Функции (105) ортонормированы: $\int\limits_0^\infty\psi_m^*(x,t)\psi_n(x,t)\,dx=$ $=\delta_{mn}$ и образуют полную систему на интервале $0<x<\infty$ в классе функций, интегрируемых с квадратом модуля [66]. Если $0<a<1$, то существует вторая система квадратично интегрируемых решений, получающихся из (105) заменой a на $-a$. Однако, как показано в работе [67], эти решения следует отбросить по физическим соображениям.

Этот вопрос обсуждается подробно в работе [44], а здесь эту вторую систему решений рассматривать не будем. Отметим, что если a — целое или полуцелое число, то, как показано в работе [44], решения (105) тесно связаны с радиальными волновыми функциями для n-мерного нестационарного изотропного осциллятора.

Рассмотрим интегралы движения, т. е. операторы, коммутирующие на решениях уравнения Шредингера с оператором $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\mathscr{H}$. Как показано в работе [65], одним из интегралов является оператор

$$M=a^2+\varepsilon^2 g/(\hbar x^2), \tag{106}$$

где $a=(\varepsilon p_x-\dot{\varepsilon}mx)/\sqrt{2\omega\hbar}$ — линейный интеграл движения для нестационарного несингулярного осциллятора. Оператор M неэрмитов. Очевидно, что эрмитов оператор $M_0=[M,\ M^+]/8$ также является интегралом движения:

$$M_0=\frac{1}{2\hbar}\left[\rho^2\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{g}{x^2}\right)+(\dot{\rho}^2+\dot{\gamma})\frac{mx^2}{2}-\frac{\rho\dot{\rho}}{2}(xp+px)\right]. \tag{107}$$

Операторы M, M^+ и M_0 удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям алгебры $O\,(2,1)$ изоморфной $SU\,(1,1)$-группы:

$$[M,\ M^+]=2M_0;\ [M_0,\ M^+]=M^+;\ [M_0,\ M]=-M. \tag{108}$$

В частном случае, когда $\omega\,(t)\equiv\omega_0$:

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{\exp(2i\omega_0 t)}{2m\hbar\omega_0}\left[(p-im\omega_0 x)^2+\frac{2ma}{x^2}\right];\\ M_0&=\frac{1}{2\hbar\omega}\mathscr{H}.\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Таким образом, M_0 — интеграл движения, совпадающий (с точностью до множителя) в стационарном случае с гамильтонианом. Отсюда сразу можно сделать вывод, что решения (105), далее будем обозначать их символом $|\,n\rangle$,— это собственные функции операторов M_0 с собственными значениями $n+(a+1)/2$.

Используя коммутационные соотношения (108) и ортогональность функций (105), можно показать [44], что имеются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} M\,|\,n\rangle&=\mu\,(n)\,|\,n-1\rangle;\ M^+\,|\,n\rangle=\mu\,(n+1)\,|\,n+1\rangle;\\ \mu\,(n)&=2\,[n\,(n+a)]^{1/2};\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

$$|\,n\rangle=\lambda_n\,(M^+)^n\,|\,0\rangle;\ \lambda_n=\left[\frac{\Gamma\,(a+1)}{2^{2n}\Gamma\,(n+1)\,\Gamma\,(n+a+1)}\right]^{1/2}. \tag{111}$$

Рассмотрим теоретико-групповой аспект обсуждаемой задачи. Вернемся сперва к задаче об осцилляторе. Интегралы движения

$(a^+)^2$, a и a^+a, определяемые обычными формулами, можно рассматривать как генераторы $SU\,(1,1)$-группы (или $O\,(2,1)$), что было сделано в работах [20, 68]. Действительно, выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &M_+ = a^{+2}/2;\ M_- = -a^2/2;\quad M_0 = (aa^+ + a^+a)/4;\\ &[M_+,\ M_-] = 2M_0;\ [M_0,\ M_+] = M_+;\ [M_0,\ M_-]. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Эти соотношения определяют алгебру Ли $SU\,(1,1)$-группы с оператором Казимира $C = (M_+M_- + M_-M_+)/2 + M_0^2$, равным $C = -3/16$. Таким образом, все четные уровни реализуют одно неприводимое представление алгебры Ли $SU\,(1,1)$-группы, а нечетные — другое. Это — результат работ [20, 68]. Поскольку интегралы движения M, M^+ и M_0, определенные (106) и (107), являются обобщением операторов a^2, a^{+2} и a^+a, легко перенести и результаты работ [20, 68] на рассматриваемый случай. Вычислим в нашей задаче оператор Казимира $C = M_0^2 + (M^+M + MM^+)/2$. Проще всего это сделать, вычислив значения оператора C с помощью формул (110) и (111) на состояниях $|\,n\rangle$ и убедившись, что

$$C = (a^2 - 1)/4. \tag{113}$$

Таким образом, все решения обсуждаемого сингулярного осциллятора можно рассматривать как базисные функции одного бесконечномерного неприводимого представления алгебры Ли $SU\,(1,1)$-группы, задаваемого оператором Казимира (113).

Заряженная частица в переменном электромагнитном поле. Рассмотрим еще один пример квантовой системы, чье поведение определяется комплексной функцией $\varepsilon\,(t)$, подчиняющейся классическому уравнению колебаний с переменной частотой.

Рассмотрим частицу со спином нуль, с массой m и зарядом e, движущуюся в классическом электромагнитном поле с потенциалами

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}\,(t) = [\mathbf{H}\,(t) \times \mathbf{r}]/2;\\ &\varphi = (e/2m)\,\chi\,(t)\,(x^2 + y^2), \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, задающий координаты частицы; $H\,(t)$ — направленное по оси z однородное переменное поле; $\chi\,(t)$ — произвольная функция времени. Такой потенциал рассматривался в работе [69]. Движение вдоль оси z является свободным, и зависимость волновой функции от p_z $\psi\,(x,\ y,\ z,\ t) = \exp\,(\mathrm{i}p_z z)\,\Phi\,(x,\ y,\ t)$ в дальнейшем опускается. Волновое уравнение для функции имеет вид:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}\,[(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2] + e\varphi\right\}\Phi,\quad \hbar = c = 1. \tag{115}$$

Два комплексных интеграла движения A и B для этой системы:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{e}}[\varepsilon(p_x + \mathrm{i}p_y) - \mathrm{i}M\dot{\varepsilon}(y - \mathrm{i}x)] \exp\left\{\mathrm{i}\frac{e}{2m}\int_0^t H(\tau)\,d\tau\right\}; \quad (116)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{e}}[\varepsilon(p_y + \mathrm{i}p_x) - \mathrm{i}M\dot{\varepsilon}(x - \mathrm{i}y)] \exp\left[\mathrm{i}\frac{e}{2m}\int_0^t H(\tau)\,d\tau\right].$$

Комплексная функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\varepsilon} + \Omega^2(t)\,\varepsilon = 0; \quad \Omega^2(t) = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{m^2}H^2(t) + \frac{e^2}{m^2}\varphi(t). \quad (117)$$

Чтобы получить независяшие от времени коммутационные соотношения операторов A, A^+, B, B^+, выберем специальное решение уравнения

$$\varepsilon(t) = |\varepsilon| \exp\left\{\mathrm{i}\frac{e}{m}\int |\varepsilon(t)|^2 dt\right\}.$$

Тогда коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$[A, A^+] = [B, B^+] = e/|e|; \quad [A, B] = [A, B^+] = 0. \quad (118)$$

Решения волнового уравнения можно классифицировать с помощью собственных значений операторов A^+A и B^+B. Вследствие аксиальной симметрии проекция момента $l_z = B^+B - A^+A$ сохраняется. Функции $\Phi_{n_1n_2}(x, y, t) = |n_1n_2\rangle$, являющиеся собственными функциями операторов A^+A, B^+B, $A^+A\,|n_1n_2\rangle = n_1\,|n_1n_2\rangle$, $B^+B\,|n_1n_2\rangle = n_2\,|n_1n_2\rangle$, строятся с помощью повышающих операторов A^+ и B^+:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{n_1n_2} &= \frac{(A^+)^{n_1}(B^+)^{n_2}}{\sqrt{n_1!}\sqrt{n_2!}}|00\rangle; \\ |00\rangle &= (e/n)^{1/2}\varepsilon^{-1}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}(x^2 + y^2)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Явное выражение функций $\Phi_{n_1n_2}(x, y, t)$ через присоединенные полиномы Лагерра приведено в работе [43]. Система функций ортонормирована и полна в пространстве функций, интегрируемых с квадратом $\langle m_1m_2 \mid n_1n_2\rangle = \delta_{m_1n_1}\delta_{m_2n_2}$. Из выше изложенного видно, что состояния $|n_1n_2\rangle$, $n_1 - n_2 = \mathrm{const}$ реализуют базис в пространстве одного представления $U(1,1)$-группы, эрмитовы генераторы которого имеют вид:

$$n_i = \breve{\alpha}X_i\alpha, \quad (120)$$

где X — генераторы двумерного представления U (1,1)-группы и

$$\alpha = \begin{pmatrix} A \\ B^+ \end{pmatrix}; \quad \tilde{\alpha} = (A^+, \ -B).$$

Через операторы A и B эти генераторы выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_1 &= -\mathrm{i}\,(A^+B^+ - AB)/2; \quad & n_3 &= (A^+A + BB^+)/2; \\ n_2 &= (A^+B^+ + AB)/2; & n_0 &= (A^+A - BB^+). \end{aligned} \tag{121}$$

Теперь можно построить дополнительные генераторы, которые свяжут все решения, в том числе и с различными проекциями момента количества движения l_z в одно неприводимое представление U (2,1)-группы. Эти генераторы A_{ij} строятся из интегралов движения A и B по формулам (52). Коммутационные соотношения этих генераторов даются формулой (53). Операторы Казимира U (2,1)-группы в пространстве состояний $|n_1 n_2\rangle$ принимают значения, даваемые формулой (54). Это то же самое представление U (2,1)-группы, которое описывает динамическую симметрию стационарной задачи.

Предположим теперь, что электромагнитное поле постоянно в далеком прошлом и становится постоянным в далеком будущем, т. е. $H(t) = H_i$, $\varphi(t) = 0$, $t < 0$; $H(t) = H_f$, $\varphi(t) = 0$, $t \to \infty$. При этих условиях существуют начальные и конечные энергетические уровни — уровни Ландау. Можно поставить задачу о нахождении вероятностей переходов между этими состояниями или, что то же самое, о параметрическом возбуждении рассматриваемой системы с помощью переменного поля.

Амплитуда перехода, связывающая начальное $|i\rangle$ и конечное $|f\rangle$ состояния, дается матричным элементом $T_i^f = \langle f \mid t \to \infty\rangle$, где $|t \to \infty\rangle$ — предел при $t \to \infty$ состояния $|t\rangle$, которое имеет в качестве своего предельного состояния при отрицательных временах $t \to -\infty$ начальное состояние $|i\rangle$.

В пределе $t = -\infty$ выбираем в качестве решения $\varepsilon(t)$-уравнения (117) следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(-\infty) &= \left(\frac{2}{H_i}\right)^{1/2} \exp\left[\mathrm{i}\,\frac{eH_i}{2m}\,t\right]; \\ \dot{\varepsilon}_i(-\infty) &= +\mathrm{i}\,\frac{eH_i}{2m}\,\varepsilon_i(-\infty). \end{aligned} \tag{122}$$

Тогда решение $\varepsilon(t)$ уравнения (117) можно записать при больших временах $t \to \infty$ следующим образом:

$$\varepsilon_f(\infty) = \left(\frac{2}{H_f}\right)^{1/2} \xi \exp\left[\frac{\mathrm{i}eH_f}{2m}\,t\right] - \mathrm{i}\left(\frac{2}{H_f}\right)^{1/2} \eta \exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{eH_f}{2m}\,t\right], \tag{123}$$

где ξ и η — комплексные числа, связанные соотношением $|\xi|^2 - |\eta|^2 = 1$. Тогда начальные состояния $|i\rangle$, определенные в (119), где в операторы A^+ и B^+ подставлено в качестве $\varepsilon(t) = \varepsilon_i(-\infty)$ (122), совпадают с состояниями заряженной частицы в магнитном поле H_i, полученными ранее [см. (43)]. Состояния $|t \to \infty\rangle$, являющиеся эволюцией начальных состояний $|i\rangle$, определяются (119), где в качестве $\varepsilon(t) = \varepsilon(\infty)$ подставлено (123). Конечные состояния $|f\rangle$ получены аналогично начальным $|i\rangle$ с очевидной заменой H_i на H_f и отвечают состояниям заряженной частицы в поле H_f.

Используя определение $D^j_{mm'}$-функций:

$$D^j_{mm'}(\cos\theta) = \left[\frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j+m')!\,(j-m')!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times (\cos\theta/2)^{m+m'}(-\sin\theta/2)^{m-m'} P^{(m-m',\, m+m')}_{j-m}(\cos\theta), \qquad (124)$$

можно получить для амплитуд перехода между состояниями с фиксированными энергией и проекцией углового момента L_z для заряженной частицы, движущейся в переменном магнитном поле, следующее выражение:

а) $L_z \leqslant 0, \quad m_i \leqslant n_i, \quad i = 1, 2$

$$T^{m_1m_2}_{n_1n_2} = (-1)^{m-m'}(\cos\theta/2) \times$$
$$\times \{\exp[\mathrm{i}(m'-m)\varphi_\eta - \mathrm{i}(2j+1)\varphi_\xi]\} D^j_{mm}(\cos\theta), \qquad (125)$$

где $j = (m_1 + n_2)/2$, $m = (n_1 - m_2)/2$, $m' = (m_1 - m_2)/2$; углы φ_ξ и φ_η являются фазами комплексных параметров ξ и η; угол θ определяется соотношением $\cos\theta = 1 - 2|\eta/\xi|^2$;

б) $L_z + 0$, $m_i > n_i$, $i = 1, 2$

$$T^{m_1m_2}_{n_1n_2} = (\cos\theta/2)\exp\mathrm{i}\,[(m-m')\varphi_\eta - (2j+1)\varphi_\xi]\, D^j_{mm'}(\cos\theta), \qquad (126)$$

где $j = \frac{1}{2}(m_1 + n_1)/2$, $m = (m_1 - n_2)/2$, $m' = (n_1 - m_2)/2$. Случай положительного L_z можно получить из формул (124), (126) подстановками $n_1 \rightleftarrows n_2$, $m_1 \rightleftarrows m_2$. Эти выражения соответствуют результатам Швингера [70] для производящей функции матричных элементов группы вращений, т. е. для D-функций. Эту функцию можно связать с амплитудой перехода для когерентных состояний заряженной частицы в переменном магнитном поле [43]. Из приведенного выше анализа видна связь рассматриваемых амплитуд перехода с матричными элементами неприводимых представлений компактной группы вращений трехмерного пространства, изоморфной $SU(2)$-группе динамической симметрии заряженной частицы в магнитном поле, изученной в параграфе 5.

Квадратичная нестационарная система. В случае общей квадратичной нестационарной системы, описываемой гамильтонианом вида [43, 71—73]:

$$\mathcal{H} = A_{ik}(t)\, Q_i Q_k + B_i(t)\, Q_i \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ 2n),$$

где $Q_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; $Q_{n+i} = q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, эрмитова матрица A (t) и действительный вектор B (t) являются заданными функциями времени, нахождение динамической симметрии квантовой системы удается свести к стационарному случаю [43]. Генераторы динамической группы можно построить из явно найденных интегралов движения I_i

$$I_j = \Lambda_{jk} Q_k + \delta_k,$$

где

$$\Lambda = \widetilde{T} \exp\left\{ \mathrm{i} \int \sigma_2 (A + A^+)\, d\tau \right\};\ \delta_j = \mathrm{i} \int (\Lambda \sigma_2)_{jk} B_k\, \mathrm{d}\tau;$$

σ_2 — блочная матрица Паули.

Операторы уничтожения $A_j = (\mathrm{i} I_j + I_{j+n})/\sqrt{2}$ с обычными коммутационными соотношениями $[A_k A_j^\dagger] = \delta_{kj}$. Поскольку они обладают обычными свойствами стационарных осцилляторных операторов, динамическая группа нестационарной системы такая же, как и у стационарной. Представление динамической группы объединяет в этом случае не состояния с заданной энергией в один мультиплет, а состояния с заданными квантовыми числами n_i, собственными для квадратичных инвариантов $A_i^\dagger A_i$.

Это же утверждение справедливо и для общей квантовой системы с n степенями свободы, поскольку и для нее построены интегралы движения, задающие начальную точку в фазовом пространстве.

Для квадратичных систем генераторы U $(n,\ 1)$-группы, которая может рассматриваться как группа динамической симметрии квантовой системы, строятся из интегралов движения A_i по формулам [17]:

$$T_{jk} = A_j^+ A_k, \quad j,\ k = 1,\ \ldots,\ n;$$

$$T_{j,\,n+1} = \mathrm{i} A_j^+ \sqrt{A_k^+ A_k + 1};$$

$$T_{n+1,\,j} = \mathrm{i} \sqrt{A_k^+ A_k + 1}\, A_j; \quad T_{n+1,\,n+1} = -1 - A_k^+ A_k.$$

Коммутационные соотношения этих генераторов имеют также вид: $[T_{ik},\ T_{lm}] = \delta_{kl} A_{im} - \delta_{im} A_{kl}$. Таким образом, любую квадратичную систему можно описать на языке неприводимых лестничных представлений U $(n,\ 1)$-группы. Одно неприводимое лестничное представление этой группы объединяет все состояния квадратичной системы в один бесконечный мультиплет. Это же утверждение справедливо и для любой системы, поскольку имеется известный изоморфизм между квантовой системой с n степенями свободы и n-мерным квантовым осциллятором.

Вопрос о нахождении динамической группы симметрии квантовых систем, генераторы которой строятся из зависящих от времени инвариантов, рассматривался Дотаном [64]. Фактически из линейных по координатам и импульсам интегралов движения A_i можно построить большое количество динамических групп. Эта неоднозначность в нахождении динамических групп симметрии отмечалась в работах Барута.

Интересен следующий аспект развитого подхода. Как уже отмечалось ранее [42], у любой системы имеется набор когерентных состояний $|\alpha\rangle$. Следовательно, когерентные состояния $|\alpha\rangle$ можно рассматривать как базис неприводимого представления $U(n, 1)$-группы. Это утверждение весьма прозрачно и означает только переход от фоковского базиса к базису когерентных состояний в пространстве лестничного представления $U(n, 1)$-группы. Однако поскольку комплексные числа α_i задают непрерывные начальные значения координат в фазовом пространстве, можно, пользуясь однозначным соответствием фазовых пространств квантовомеханических средних координат и импульсов и классических координат и импульсов, построить генераторы $U(n, 1)$-группы, связывающие в один мультиплет классические траектории системы. Точнее, можно утверждать, что группа динамической симметрии классической и квантовой систем всегда одинакова. Нахождению групп симметрии в классической механике посвящено много работ. Тем самым можно с помощью генераторов динамической симметрии $U(n, 1)$-группы связывать воедино классические траектории. Для этого необходимо считать начальные точки классической траектории как комплексные величины α, задающие когерентные состояния, затем воспользоваться квантовыми формулами для генераторов, а конечные ответы опять интерпретировать в рамках классической механики.

Рассмотрим некоторые применения.

1. *Периодическая система химических элементов Менделеева.*

Как было отмечено Барутом [82], основные состояния всех элементов периодической системы Менделеева образуют базис неприводимого представления $SO(4,2)$-группы. Эту идею легко понять, если учесть, что квантовые числа n, l, m, задающие состояния атома водорода, можно использовать и для описания состояний атомов всех остальных элементов периодической таблицы. Действительно, принцип Бора заполнения электронных состояний атомов химических элементов (см. ссылки на работы Бора в работе [82]) позволяет метить основное состояние атома с помощью водородных квантовых чисел последнего электрона (например, $1s$ — для водорода и гелия; $2p$ — для лития и т. д.).

Здесь еще необходимо учитывать спин. Однако по квантовым числам nlm происходит (с учетом спина) заполнение всех клеток периодической системы Менделеева. Поэтому можно с основными состояниями атомов химических элементов связать неприводимое представление $SO\,(4,2)$-группы, пользуясь аналогичным результатом для атома водорода. Эта динамическая группа $SO\,(4,2)$-группа (точнее, ее алгебра Ли) должна содержать оператор z, собственные значения которого дают атомный номер. Кроме того, она содержит повышающие и понижающие операторы, связывающие различные элементы друг с другом (полная аналогия со связью разных энергетических уровней атома водорода). Фактически Барут [82] дал в явном виде формулу для оператора атомного номера z, выразив его через квантовые числа $SO\,(4,2)$-группы, выбранные в соответствии с сужением на $SO\,(3,2)$-подгруппу. Эта редукция интерпретируется в работе [82] также в рамках оболочечной осцилляторной модели периодической системы элементов. Имеется другая схема, относящая основные состояния атомов периодической системы элементов Менделеева с представлением $SU\,(2) \otimes SU\,(2) \times SU\,(2)$-группы. Отметим, что рассмотрение периодической системы элементов Менделеева на основе динамической группы было дано также в работах [83].

2. *Сверхтекучесть*. Приведем еще один пример описания квантовой системы — сверхтекучей жидкости — в духе динамических групп, данный Соломоном [84]. Исходя из феноменологического гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} N^2 V_0 + \sum_{k>0} \left(\frac{k^2}{2m} + NV_k \right) a_k^+ a_k + \frac{1}{2} N \sum_{k>0} V_k \left(a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k} \right).$$

Введем [84] генераторы $SU\,(1,1)$-группы для каждого импульса к

$$J_1^{(k)} = -\left(a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k} \right)/2;$$

$$J_2^{(k)} = \mathrm{i}\left(a_k^+ a_{-k}^+ - a_k a_{-k} \right)/2;$$

$$J_3^{(k)} = \left(a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} + 1 \right)/2.$$

Тогда гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} N^2 V_0 + N \sum_{k>0} V_k \left[-J_1^{(k)} + \left(1 + \frac{k^2}{2mNV_k} \right) \left(J_2^k - 1/2 \right) \right].$$

Таким образом, гамильтониан оказывается связан с алгеброй динамической $SU\,(1,1)$-группы, что позволяет применять разработанный аппарат теории представлений этой относительно простой некомпактной группы. Диагонализация гамильтониана выполняется с помощью поворота из $\bigotimes\limits_{k}^{\infty} SU\,(1,1)$-группы, что эквивалентно преобразованию Боголюбова — Валатина. Тем самым выясняется групповой смысл этого преобразования и спектра энергий.

В работах Намбу [13] были рассмотрены уравнения для бесконечно компонентных полей типа Майорана [20] с водородоподобным спектром масс. В последующих работах [14, 15, 85] было получено уравнение, которое связано с бесконечномерным представлением O (4,2)-группы, рассмотренным в параграфе 4, и описывает атом водорода. Этот подход, использующий наличие динамической O (4,2)-группы у атома водорода, оказался плодотворным при вычислении целого ряда конкретных эффектов, где рассматривалось взаимодействие атома водорода с внешним электромагнитным полем. Это обстоятельство связано с возможностью связать часть генераторов O (4,2)-группы с оператором дипольного момента.

В работе Клейнерта [85] был вычислен атомный форм-фактор, как функция переданного импульса через матричный элемент бесконечномерного представления O (2,1)-группы. Не используя дипольное приближение, был вычислен в работе Фронсдала [86] комптон-эффект на связанном электроне, однако протону приписывалась бесконечная масса. Учет движения протона был произведен в работе [87], посвященной эффекту комптона на связанном состоянии двух заряженных частиц. Расчет тормозного излучения в кулоновском поле произведен в работе [88].

Применяя теорию возмущений к уравнению типа Майорана, в работе [89] произведен чисто алгебраический расчет эффекта Штарка в атоме Н с учетом членов первого и второго порядков по внешнему полю, а в работе [90] рассмотрен лэмбовский сдвиг.

IV. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Нет причин ожидать, что только квантовые системы можно описывать на алгебраическом языке. Такое описание можно дать также и для классических систем. Если вопрос об определении динамической группы в квантовой механике не имеет однозначного ответа, то и в классической механике ситуация не проще. Можно прежде всего рассматривать динамическую группу, как некоторую группу канонических преобразований в фазовом пространстве динамической классической системы. В этом смысле можно обобщить группу симметрии классического гамильтониана, которая также является группой канонических преобразований в фазовом пространстве. В таком случае динамическая алгебра реализуется как алгебра векторных полей на многообразии (в фазовом пространстве). С другой стороны, можно рассматривать динамическую алгебру как алгебру Ли функций в фазовом пространстве, для которых скобки Пуассона берутся в качестве задающих алгебру Ли коммутационных соотношений. Элементы группы будут в этом случае также функциями, заданными на фазовом пространстве. Поскольку наблюдаемые величины в классической механике являются функциями x и p, эта реализация соответствует идее, что элементы квантовомеханической динамической алгебры наблюдаемы. Наиболее вероятно, что обе концепции не противоречат друг другу. Вопрос состоит в том, какая функция более естественна и удобна. Интересна также проблема соответствия в классической механике таким квантовым величинам, как уровни энергии и матричные элементы переходов. Обсудим еще один момент. Классическое решение (траектория в фазовом пространстве) задается константами, значениями $2N$, интегралов движения. (Такое же количество независимых инвариантов имеется в квантовом случае.) Поэтому по определению, данному в параграфе 1, можно получить в качестве динамической группы классической системы любую группу, транзитивно действующую на $2N$-мерном многообразии начальных точек, задающих множество классических траекторий. Фактически эта группа действует во всем фазовом пространстве системы, поскольку множество начальных точек классических траекторий с ним совпадает. Таким образом, все классические траектории или все орбиты увязываются динамической группой воедино. Данная группа может действовать и как группа канонических преобразований, в частности линейных преобразований.

Проблемы динамических симметрий в классической механике рассматривались, например, Фрадкиным [91], Херманом [92], Машинским и Квезне [18, 93]. В последней работе изучалось для N-мерного гармонического осциллятора действие симплектической $Sp\,(2N,\,R)$-группы линейных преобразований в эвклидовом фазовом пространстве E^{2N} векторов $(x_1,\,\ldots,\,x_N,\,p_1,\,\ldots,\,p_N)$. По аналогии с квантовым случаем легко, следуя этой работе, построить явно генераторы этой группы и в классическом случае. Введем функции:

$$\eta_j(x,\,p) = (x_j - \mathrm{i}\,p_j)/\sqrt{2};$$

$$\xi_j(x,\,p) = (x_j + \mathrm{i}p_j)/\sqrt{2}, \quad j = 1,\,\ldots,\,N.$$

Образуем билинейные формы:

$$\left.\begin{aligned} A_{jk} &= \sqrt{\mathrm{i}}\,\xi_j\xi_k \\ B_{jk} &= \sqrt{\mathrm{i}}\,\eta_i\eta_k \end{aligned}\right\} \quad j \leqslant k = 1,\,\ldots,\,N.$$

$$C_{jk} = \sqrt{\mathrm{i}}\;\eta_i\xi_i$$

Скобки Пуассона $N\,(2N+1)$ величин A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} совпадают со стандартными коммутационными соотношениями алгебры $Sp\,(2N,\,R)$-группы. Гамильтониан осциллятора есть элемент этой алгебры

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\,(p_j^2 + x_j^2) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}} \sum_{j=1}^{N} c_{jj}$$

и не коммутирует (в смысле скобок Пуассона) с A_{jk}, B_{jk}. Следовательно, $Sp\,(2N, R)$-группа может рассматриваться в качестве динамической группы гармонического осциллятора. Можно построить и другую динамическую $U\,(N, 1)$-группу для классического осциллятора, аналогично построению Хва и Нутса для квантового осциллятора.

Не только динамическая группа, но и группа симметрии может быть, как обсуждалось в работе [91], выбрана разными способами Так можно построить генераторы $O\,(4)$- или $SU\,(3)$-группы симметрии для любого центрально-симметрического потенциала (см обсуждение этого вопроса в работе [94]). Обычно генераторы $O\,(4)$-группы симметрии строят для атома водорода из момента L и вектора Рунге — Ленца:

$$\mathbf{A}=\sqrt{-2mE}\,([\mathbf{p}\times\mathbf{L}]-\lambda m\mathbf{r}/r).$$

Генераторы $SU\,(3)$-группы строятся из момента $\mathbf{L}$ и пяти инвариантов $A_{ij}-\delta_{ij}\,(\Sigma A_{ii})/3$, где

$$A_{ij}=(p_ip_j+m^2\omega^2r_ir_j)/m\omega.$$

Фрадкин ввел [91] обобщение вектора $\mathbf{A}$ и тензора A_{ij} для любого центрального потенциала, причем как в релятивистском, так и нерелятивистском случае. Эти величины являются сложными функциями от координат $\mathbf{x}$ и импульсов $\mathbf{p}$. Их явный вид не переносится прямо на квантовый случай.

Кроме конкретных систем некоторые авторы рассматривали общие условия, которым должна удовлетворять алгебра Ли, претендующая на роль динамической алгебры классической системы. Симони, Захариа и Витале [95] изучали возможность реализации любой полупростой алгебры Ли ранга r как алгебры функций на $2N$-мерном фазовом пространстве. Возможности в этом случае ограничены, поскольку число функционально независимых функций на фазовом пространстве конечно. Методами функциональных групп (см. работу [96]) были получены, например, такие ограничения:

1) любая полупростая алгебра Ли ранга N с необходимостью шире, чем просто алгебра симметрии (и следовательно, возможная динамическая алгебра);

2) не существует такой алгебры a_m с $m>N$, которая может служить в качестве динамической алгебры (в трактовке авторов [95]) и т. д.

Некоторые общие рассмотрения (с примерами) были проведены Херманном [92], предположившим, что G — полупростая компактная группа Ли преобразований фазового пространства M, действующая транзитивно. Если подгруппа L является малой группой, то и M можно отождествить с G/L и исследовать таким образом структуру G. Пусть K является группой симметрии гамильтониана системы и подгруппой группы G. Тогда одним из важных результатов Херманна является утверждение, что $H/K \cap L$ должно быть симметрическим пространством ранга I, где H — подгруппа группы G, которая определяется с помощью инволюций, заданных на K и L. В работе [92] обсуждается кратко и случай некомпактной группы.

Рассмотрим для примера систему двух одинаковых частиц, гамильтониан которой имеет вид:

$$\mathscr{H} = p_1^2/2m + p_2^2/2m = (1/2m) \sum_{\alpha=1}^{6} p_\alpha^2,$$

где p_1 и p_2 — импульсы первой и второй частиц. Совокупность состояний двух частиц с определенной энергией E это многообразие

$$M = \{p_\alpha : p_\alpha^2 = 2mE\}.$$

Группой вращений этого многообразия является группа $G \simeq O(6)$, а стационарная группа L многообразия M изоморфна $O(5)$, $L \simeq O(5)$. Инволюция, выделяющая L из G, имеет вид: $\sigma_L(g) = I_L g I_L$, где $I_L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{(5)} \end{pmatrix}$.

Введение взаимодействия между частицами вида $V(p_1^2, p_2^2)$ приводит к изменению гамильтониана и понижению симметрии до группы $K \simeq O(3) \otimes O(3)$ с инволюцией σ_K вида $\sigma_K(g) = I_K g I_K$, где $I_K = \begin{pmatrix} -E_{(3)} & 0 \\ 0 & E_{(3)} \end{pmatrix}$.

Определим группу $H : h \in H$, если $\sigma_L(h) = \sigma_K(h)$. Подставляя явный вид инволюций σ_L, σ_K, находим, что σ_H выделяется инволюцией вида $I_H = \begin{pmatrix} -E_{(2)} & 0 \\ 0 & E_{(3)} \end{pmatrix}$, где $\sigma_H(g) = I_H g I_H$, т. е. $H \simeq O(2) \otimes O(4)$.

Очевидно, что $K \cap L \simeq O(2) \otimes O(3)$, и следовательно, однородное пространство $H/K \cap L$ является просто трехмерной сферой $S^{(3)}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обзора следует подчеркнуть такое обстоятельство. Как видно из рассмотренных примеров, динамическая группа, описывающая ту или иную квантовую систему, может быть выбрана многими различными способами. Это же относится и к классическим системам. Так, на роль динамической группы, чье неприводимое представление описывает все состояния n-мерного осциллятора, претендует $U(n, 1)$-группа. Два неприводимых представления $Sp\,(2n,\,R)$-группы также охватывают весь спектр состояний этой системы. Более того, как следует из анализа связи интегралов движения с генераторами динамических групп, проведенного, в частности, для нестационарных квантовых систем, например n-мерного нестационарного осциллятора, мы можем построить практически любую динамическую группу для заданной квантовой системы. Это можно сделать, строя различные алгебраические выражения (и необязательно алгебраические) из интегралов движения I_i, I_k^+, обсуждавшихся выше. В частности, мы всегда можем построить для любой квантовой системы как $U\,(n,\,1)$-группу, так и $Sp\,(2n,\,R)$-группу в качестве динамической группы. Это отражает хорошо известный факт, лежащий в основе вторичного квантования, что с помощью матриц $M_{ik}^{(\alpha)}$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям группы Ли G со структурными константами $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ $[M^{\alpha},\ M^{\beta}]=c_{\beta}^{\gamma}M^{\gamma}$ и бозевских операторов a_i, a_k^+, всегда можно построить представление той же группы G с генераторами $\widetilde{M}^{\alpha}=M_{ik}^{\alpha}a_i^+a_k$. В этой связи встает вопрос о ценности всего подхода с динамическими симметриями. Поскольку по воле авторов можно почти любую группу называть динамической группой данной квантовой (и классической) системы, утверждение о динамической группе становится, казалось бы, бессодержательным. Тем не менее, это не совсем так. Каждая динамическая группа соответствует в некотором смысле определенной системе координат, в которой решается волновое уравнение. Разные квантовые числа, возникающие в разных динамических группах, получаются как собственные числа при совместном решении следующей системы уравнений:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{H}\right)\psi=0;$$

$$I_i\psi=\lambda_i\psi,\quad i=1,\ \ldots,\ s.$$

Здесь I_i — интегралы движения, генераторы группы, взятой в качестве динамической. Поскольку число систем координат бесконечно велико, неудивительна та большая неоднозначность, которая имеется в выборе динамической группы. Еще одним аспектом, порождающим такую неоднозначность, является хорошо известный изоморфизм сепарабельных (имеющих счетный базис) гильбертовских пространств состояний. Благодаря этому изоморфизму мы все квантовые (и классические) системы можем рассматривать на модели, например, одномерного осциллятора, поскольку существует оператор, отображающий пространство состояний одномерного осциллятора на пространство состояний рассматриваемой системы. Поэтому генераторы динамической группы осциллятор $U\,(1{,}1)$ могут быть перенесены и в пространство состояний изучаемой системы. В этой трактовке все квантовые (а значит, и классические) системы обладают динамической U (1,1)-группой, где одно неприводимое представление с оператором Казимира $C = -3/16$ объединяет в один мультиплет все состояния квантовой (классической) системы. Этот пример еще раз иллюстрирует большой произвол в выборе динамической группы. Однако обсуждавшийся выше случай построения генераторов динамической группы из интегралов движения и имеющаяся при этом построении неоднозначность отличаются от описанных только что, поскольку мы строим генераторы в явном виде. Оператор же, задающий изоморфизм пространств состояний, нам в явном виде не известен. Это те пункты, которые, быть может, следовало бы рассматривать как слабые стороны подхода, основанного на динамических группах. Может быть, их необходимо при дальнейшем развитии теории динамических симметрий уточнить, но во всяком случае необходимо отдавать себе ясный отчет в том, что именно имеется в теории динамических симметрий в смысле неоднозначности их выбора.

В настоящем обзоре мы не коснулись еще очень важного аспекта применения динамических симметрий в квантовой теории. Так, на основе известных динамических симметрий простых квантовых систем можно конструировать различные бесконечно компонентные уравнения типа Майорана. Особенно интенсивно исследовались такие уравнения на основе динамической конформной группы атома водорода (см. работу [13, 49, 74—81, 85, 141]). Обширные возможности в выборе динамических групп для любых (в частности, с простым спектром) систем позволяет расширить и возможности для построения различных новых бесконечно компонентных уравнений с «хорошими» спектрами на основе новых динамических групп.

Уже упомянутая связь динамических групп с интегралами движения A_i делает понятным возможную связь динамических групп с когерентными состояниями $|\alpha\rangle$ (собственными для неэрмитовых инвариантов A_i), поскольку на этих состояниях можно реализовать неприводимые представления динамических групп с помощью конструкции их генераторов из интегралов движения. Эта связь безусловно заслуживает дальнейшего исследования.

В заключение обсудим перспективы метода динамических симметрий и приведем некоторые ссылки на работы, на которых мы не смогли остановиться подробнее в основном тексте. Так, динамическая симметрия атома водорода обсуждается в ряде работ [97—106]. Можно указать также применение динамических групп к модели Венециано [107, 108], а также к чисто математическим проблемам [109, 110]. Интерес представляют исследования связи динамических симметрий и траекторий Редже [111, 112]. Методом динамических групп рассматриваются проблемы магнитного заряда [113, 114]. Укажем также важную связь динамических групп с теоремой Нетер [115—120], основывающуюся фактически на определении симметрии уравнения (1). Показанная в разделе III связь матричных элементов динамических групп с амплитудами переходов в магнитном поле имеет место во многих других задачах [121—124]. Большое количество работ было посвящено изучению симметрии для движения заряда в электромагнитном поле [125—133]. По некоторым разделам теории динамических симметрий имеются и обзорные работы [134—136]. Поэтому мы не коснулись их применения в теории ядерных спектров, ограничиваясь главным образом принципиальными вопросами. Дальнейшее развитие теории динамических симметрий требует решения и чисто математических вопросов, а также переформулировки уже имеющихся в неявном виде результатов на понятном для большинства физиков языке. В этой связи необходимо указать глубокие результаты, полученные в работах [137, 138].

Авторы благодарны А. М. Балдину и А. О. Баруту за обсуждение некоторых разделов, вошедших в обзор, а также за помощь и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ikeda M., Ogawa S., Ohnuki Y.** Progr. Theoret. Phys., 1959, 22, 715.
2. **Gell-Mann M.** Phys. Rev., 1962, **125**, 1067.
3. **Фок В. А.** Z. phys., 1935, **98**, 145; «Изв. АН СССР», 1935, 8, 169.
4. **Bargmann V.** Z. phys., 1936, **99**, 576.
5. **Sakita B.** Phys. Rev., 1964, **136**, 1317.
6. **Gursey F., Radicati L.** Phys. Rev. Lett., 1964, **13**, 173.
7. **Pais A.** Phys. Rev. Lett. 1964, **13**, 175.
8. **Barut A. O.** Phys. Rev., 1964, **135**, B839.
9. **Dothann Y., Gell-Mann M., Néeman Y.** Phys. Lett., 1965, **17**, 148.
10. **Mukunda N., O'Raifeertaigh L., Sudarshan E.** Phys. Rev. Lett., 1965, 15, 1041; Phys. Lett., 1965, **19**, 322.
11. **Малкин И. А., Манько В. И.** «Письма ЖЭТФ», 1965, **2**, 23; «Ядерная физика», 1966, **3**, 372.
12. **Néemann Y.**, Algebraic Theory of Elementary Particles, 1967.
13. **Nambu Y.** Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1966, **36—37**, 368; Phys. Rev., 1967, **160**, 1171.
14. **Fronsdal C.** Phys. Rev., 1967, **156**, 1653, 1665; 1968, **171**, 1811.
15. **Barut A. O., Kleinert H.** Phys. Rev., 1967, **156**, 1541; 1967, **157**, 1180; 1967, **160**, 1149; 1967, **161**, 1464.
16. **Тодоров И. Т.** Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, «Наукова думка», 1967, с. 237.
17. **Hwa R. C., Nuyts J.** Phys. Rev., 1966, **145**, 1148.
18. **Moshinsky M., Quesne C.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 1772, 1780.
19. **Goshen S., Lipkin H. J.** Ann. Phys., 1959, 6, 301, 310.
20. **Majorana E.** Nuovo cimento, 1932, **9**, 335.
21. **Barut A. O., Budini P., Fronsdal C.** Proc. Roy. Soc., 1966, **A291**, 106.
23. **Barcy H.** Nuovo cimento, 1966, **41A**, 222.
24. **Györgyi G.** Nuovo cimento, 1968, **43A**, 717.
25. **Hwa M. Y.** Nuovo cimento, 1966, **42B**, 367.
26. **Pratt R. H., Jordan T. F.** Phys. Rev., 1966, **148**, 1276; 1969, **188**, 2534.

27. **Musto R.** Phys. Rev., 1966, **148**, 1274.
28. **Bander M., Itzykson C.** Rev. Mod. Phys., 1966, **38**, 330, 336.
29. **Böhm A.** Nuovo cimento, 1966, **43A**, 665; Phys. Rev., 1966, **145**, 1212.
30. **Wolf K. B.** Nuovo cimento. Suppl., 1967, 5, 1041.
31. **Kyriakopoulos E.** Phys. Rev., 1968, **174**, 1846.
32. **Jauch J. M.** Phys. Rev., 1939, 55, 1132 (A).
33. **Jauch J. M., Hill E. L.** Phys. Rev., 1940, **57**, 641.
34. **Baker G. A.** Phys. Rev., 1956, **103**, 1119.
35. **Демков Ю. Н.** ЖЭТФ, 1954, **26**, 757; 1959, **33**, 88.
36. **Аллилуев С. П.** ЖЭТФ, 1957, **33**, 250.
37. **Демков Ю. Н.** ЖЭТФ, 1963, 17, 1349.
38. **Илькаева Л. А.** «Вест. ЛГУ», 1963, **22**, 56.
39. **Dulock V. A., McIntosh H. V.** Amer. J. Phys., 1965, **33**, 109.
40. **Vendramin I.** Nuovo cimento, 1968, **A54**, 190.
41. **Maiella G., Vilasi G.** Nuovo cimento, Lett., 1969, **1**, 57.
42. **Малкин И. А., Манько В. И.** ЖЭТФ, 1970, 59, 1946; 1970; **32A**, 243; препринт ФИАН, № 15, 1971.
43. **Малкин И. А., Манько В. И., Трифонов Д. А.** 1969, **30A**, 414; 1970, **2Д**, 1371; 1973, **13**, № 2; «Краткие сообщения по физике», 1971, № 5, с. 20, 27; ЖЭТФ, 1970, 58, 721.
44. **Додонов В. В., Малкин И. А., Манько В. И.** Physica, 1972, 59, 241; Препринт ФИАН, № 48, 1972.
45. **Swamy V. J., Kulkarny R. C., Biedenharn L. C.** J. Math. Phys., 1970, **11**, 1165.
46. **Kulkarny R. G.** Nuovo cimento, 1972, **12B**, 215.
47. **Dunlop B. I., Armstrong L.** Phys. Rev., 1972, **A6**, 1370.
48. **Anderson R. L., Kumei S., Wulfman C. E.** Phys. Rev. Lett., 1972, **28**, 988; Revs Mex. Phys., 1972, **21**, 1, 34.
49. **Barut A. O.** Phys. Rev., 1965, **139A**, 1433; 1967, **156**, 1538; Phys. Lett., 1968, **26B**, 308, Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 1969, **26**, 5.
50. **Наймарк М. А.** Линейные представления группы Лоренца. М., 1958.
51. **Гинзбург В. Л., Манько В. И.** «Ядерная физика», 1965, **2**, 1103; 1966, **74**, 577.
52. **Johnson M. H., Lippmann B. A.** Phys. Rev., 1949, **76**, 828; 1950, **77**, 702.
53. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
54. **Schrödinger.** Proc. Roy. Irish Acad., 1940, **A46**, 9.
55. **Infeld L., Hull T. E.** Revs Mod. Phys., 1951, **23**, 21.
56. **Малкин И. А., Манько В. И.** «Письма ЖЭТФ», 1968, **7**, 105; «Ядерная физика», 1969, **9**, 184.
57. **Bargmann V.** Ann. Math., 1947, **48**, 569.
58. **Barut A. O., Fronsdal C.** Proc. Roy. Soc., 1965, **A287**, 532.
59. **Levy M.** Proc. Roy. Soc., 1950, **204**, 145.
60. **Kyriakopoulos E.** Nuovo cimento, 1971, **1A**, 571; Nucl. Phys., 1971, **B28**, 61.
61. **Дирак П. А. М.** Принципы квантовой механики. Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1960.
62. **Гинзбург В. Л., Силин В. П.** ЖЭТФ, 1954, **27**, 116.
63. **Желобенко Д. П.** «Докл. АН СССР», 1959, **126**, 935.
64. **Dothan Y.** Phys. Rev., 1970, **2D**, 2944.
65. **Camiz P., Gerardi A., Marchioro C.** Math. Phys., 1971, **12**, 2040.
66. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения М., Изд-во АН СССР, 1963.
67. **Calogero F.** J. Math. Phys., 1969, **10**, 2191; 1971, **12**, 419.
68. **Санников С. С.** «Ядерная физика», 1965, **2**, 570.
69. **Lewis H. R., Riesenfeld W. B.** J. Math. Phys., 1969, **10**, 1458.
70. **Schwinger.** Quantum Theory of Angular Momentum in Quantum Mechanics, N.Y., 1957.
71. **Черников Н. А.** ЖЭТФ, 1967, 53, 1006.

72. **Holz A.** Lett. Nuovo cimento, 1970, 4, 1319.
73. **Bergmann E. E., Holz A.** Nuovo cimento, 1972, **B7**, 277, 625.
74. **Barut A. O., Kleinert H.** Phys. Rev. Lett., 1967, **18**, 754.
75. **Barut A. O., Tripathy K. C.** Phys. Rev. Lett., 1967, **19**, 1081; Phys. Rev., 1969, **178**, 2278.
76. **Barut A. O., Corrigan D.** Phys. Rev., 1968, **172**, 1593.
77. **Barut A. O., Corrigan D., Kleinert H.** Phys. Rev. Lett., 1968, **20**, 167.
78. **Barut A. O., Baiquini.** Phys. Rev., 1969, **184**, 1342.
79. **Barut A. O., Kleinert H., Malin S.** Nuovo cimento, 1968, 56A, 413.
80. **Barut A. O., Malin S.** Nucl. Phys., 1969, **B9**, 194; Revs Mod. Phys., 1968, **40**, 632.
81. **Barut A. O., Nagulaki** Lett. Nuovo cimento, 1970, 4, 157.
82. **Barut A. O.** Rutherford Centennial Lecture. New Zealand, 1972.
83. **Румер Ю. Б., Фет А. И.** ТМФ, 1971, 9, 203; **Navaro O., Berrondo M.** J. Math. Phys. 1972, **5B**, 1104.
84. **Solomon A. I.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 390.
85. **Kleinert H.** Phys. Rev., 1967, **163**, 1807; 1968, **168**, 1827; Phys. Rev. Lett., 1967, **18**, 1027; Fortschr. Phys., 1968, **16**, 1.
86. **Fronsdal C.** Preprint I.C.P.T., Trieste, IC/68/85 1968.
87. **Bisiacchi G., Calucci G.** Phys. Rev., 1969, **181**, 189.
88. **Fronsdal C., Lundberg L. E.** I.C.P.T., Trieste, IC/69/33.
89. **Lopes A. R., Ferreira P. L.** Nuovo cimento, 1971, **3B**, 23.
90. **Huff R. W.** Phys. Rev., 1969, **186**, 1367.
91. **Fradkin D. M.** Progr. Theor. Phys. 1967, **37**, 798.
92. **Hermann** J. Math. Phys., 1972, **13**, 833; 838.
93. **Moshinsky M., Quesne G.** J. Math. Phys., 1970, **11**, 163.
94. **Серебренников В. Б., Шабад А. Е.** ТМФ, 1971, 8, 23.
95. **Simoni A., Zaccaria F., Vitale B.** Nuovo cimento, 1967, **51A**, 448.
96. **Higihara Y.** Celastial Mechanics, V. I., M. I. T., USA, 1970.
97. **Jordan T. F., Pratt R. H.** Phys. Rev., 1969, **188**, 2534.
98. **Kiefer H. W., Fradkin D. M.** Phys. Rev., 1969, **180**, 1282.
99. **Lanik J.** Czech. J. Phys., 1969, **19B**, 1540.
100. **Mandula J. F.** Phys. Rev., 1969, **185**, 1774.
101. **Cordero P.** Lett. Nuovo cimento, 1970, 4, 164.
102. **Decoster A.** C. r. Acad. Sci., 1970, **A270**, 290.
103. **Дмитриев В. Ф., Румер Ю. Б.** ТМФ 1970, 5, 276.
104. **Румер Ю. Б.** ДАН СССР, 1970, **191**, 64.
105. **Hojman S.** Nuovo cimento, 1971, **A4**, 676.
106. **Mackava T., Senba K.** Lett. Nuovo cimento, 1971, **2**, 588.
107. **Wu Alfred.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 2035, 2036.
108. **Попов Х. Д., Стоянов Д. Ц., Тавхелидзе В. Н.** ТМФ 1972, **12**, 370.
109. **Mack G., Todorov I.** J. Math. Phys., 1969, **10**, 2078.
110. **Miller W.** J. Math. Phys., 1972, **13**, 648, 827.
111. **Morita K., Tsuzuki K.** Progr. Theor. Phys., 1969, **42**, 1418.
112. **Takabayasi T.** Progr. Theor. Phys., 1969, **42**, 1210.
113. **Berrondo M., MaIntosh H. V.** J. Math. Phys., 1970, **11**, 125.
114. **Андреев В. А., Малкин И. А., Манько В. И.** Препринт ФИАН I, 1971.
115. **Candotti E., Palmiery C., Vitale B.** Amer. J. Phys., 1972, **40**, 424.
116. **Rosen J.** Ann. Phys., 1972, 69, 349; Nuovo cimento, 1967, **A49**, 614.
117. **Candotti E., Palmiery C., Vitale B.** Nuovo cimento, 1972, A7, 271.
118. **Rosen J.** Internat. J. Theor. Phys., 1971, 4, 287.
119. **Dothan Y.** Nuovo cimento, 1972, **11A**, 499.
120. **Ибрагимов Н. Х.** ТМФ, 1969, **1**, 350.
121. **Cordero P., Hojman S., Furlan P., Chirardi G. C.** Nuovo cimento, 1971, A3, 807.
122. **Shastry R. A. K.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 2387.

123. **Haskell T. G., Wybonrne B. G.** Nuovo cimento, 1972, **12B**, 185.
124. **Barut A. O., Rasmussen W.** Phys. Rev., 1971, **3D**, 956.
125. **Katriel J., Adam G.** Phys. Rev. Lett., 1969, **23**, 1310.
126. **Janner A., Ascher E.** Lett. Nuovo cimento, 1969, **2**, 703.
127. **Bacry H., Combe P., Richard J. L.** Nuovo cimento, 1970, **67A**, 267.
128. **Tam W. G.** Physica, 1970, **46**, 469.
129. **Yanagawa S., Moriya T.** J. Math. Phys., 1970, **11**, 3244.
130. **Janner A., Janssen T.** Physica, 1971, **53**, 1; 1972, **60**, 292.
131. **Shabad A. E.** Lett. Nuovo cimento, 1972, **3**, 457.
132. **Beers B. L., Nickle H. H.** Bull. Amer. Phys. Soc., 1972, **17**, 565; J. Phys., 1972, 5A, 1658.
133. **Richard J. L.** Nuovo cimento, 1972, **8A**, 485.
134. **McIntosh H. V.** Symmetry and Degeneracy, Acad. Press Inc., 1971.
135. **Cordero P., Chirardi G. C.**, Fortschr. Phys., 1972, **20**, 105.
136. **Афанасьев Г. Н., Райчев П. П.** ЭЧАЯ, 1972, **3**, 436.
137. **Лезнов А. Н., Федосеев И. А.** ТМФ, 1971, **7**, 298; 1970, **5**, 181.
138. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** ТМФ, 1970, **2**, 311; 1970, **4**, 310; 1971, **8**, 161.
139. **Barut A. O., Bornzin G. L.** J. Math. Phys. 1971, **12**; 841.
140. **Peshkin M.** Ann. Phys., 1971, **66**; 542.
141. **Tripathy K. C.** Phys. Rev., 1968, **170**, 1626.