ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА, 1974, ТОМ 5, ВЫП. 3

УДК 530.145; 523.2

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Д. И. Блохинцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В статье рассматриваются стохастические пространства, т. е. пространства, метрика которых зависит от случайных величин — параметров, функций или квантовых операторов. В отличие от математических работ, посвященных таким пространствам с положительно дефинитной метрикой, в этой статье изложение сосредоточено на пространствах с недефинитной метрикой. В статье приведены физические основания для изучения подобных пространств и изложены основные понятия. В дальнейшем статья посвящена различным приложениям теории стохастических пространств к проблемам теории физических полей. В последней части статьи рассмотрены пространства, метрика которых определяется операторами («квантованные» пространства — пространства Снайдера — и Г-пространство).

Stochastic spaces, i.e. spaces the metric of which depends on random quantities (parameters, functions or quantum operators) are considered. Contrary to mathematical investigations devoted to such spaces with positive definite metric, in the present paper attention is focussed on the stochastic spaces with indefinite metric. Some physical grounds for studying these spaces and the basic notions are given. Various applications of the theory of stochastic spaces to the problems of the theory of physical fields are discussed. The last section is devoted to spaces the metric of which is defined by the operators («quantized» spaces, i.e. the Snyder space, and the Г-space).

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена теории стохастических пространств. Построение ее таково: первые три раздела посвящены геометрии и физике микромира и поясняют причину изучения стохастических пространств. Далее излагаются основные понятия, относящиеся к стохастическим пространствам.

Последующие разделы иллюстрируют возникновение стохастических пространств на ряде примеров, заимствованных из физики. Наконец, последние два раздела посвящены квантовым стохастическим пространствам.

1. УПОРЯДОЧЕНИЕ СОБЫТИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $R_4\,(x)$

Теоретическая физика начинается с упорядочения событий. Это основа всех основ. Для упорядочения событий каждому точечному событию $\mathcal{P}$ приписывается четверка чисел $(x) = x_0x_1x_2x_3$ координат этого события; если одной четверки недостаточно, то событие неточечное. В дальнейшем эта операция называется арифметизацией событий, которая предполагает определенный физический способ ее осуществления. Этот способ содержит существенный элемент соглашения *.

Современное соглашение базируется: а) на принципе универсального постоянства скорости света и б) на допущении о существовании «стандартных» часов **.

Основанная на этих соглашениях арифметизация ведет к пространству Минковского с недефинитной метрикой, которую выписываем в обычных обозначениях

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - d\mathbf{x}^2. \tag{1.1}$$

Движущиеся относительно друг друга наблюдатели $\bar{\Sigma}$ и Σ, производя арифметизацию одним и тем же способом, припишут тем не менее разные координаты $(\bar{x})$ и (x) одному и тому же событию $\mathcal{P}$.

Предполагается, что существует взаимно-однозначное соответствие между координатами $(\bar{x})$ и (x) и что метрика (1.1) универсальна. Тогда преобразование, связывающее координаты $(\bar{x})$ и (x) в декартовой системе координат, есть преобразование Пуанкаре — Лоренца:

$$\bar{x} = \Lambda\,(u)\,x + a, \tag{1.2}$$

где параметры преобразования u и a имеют смысл относительной скорости системы отсчета $\bar{\Sigma}$ и Σ и относительного сдвига начала координат; $\Lambda\,(u)$ — матрица преобразования.

Такова в самых важнейших чертах геометрия, лучше сказать хроногеометрия [6—8], соответствующая содержанию специальной теории относительности.

---

* Заметим, что речь идет именно о соглашениях, подчеркиваемых уже в первых работах А. Пуанкаре [1] и А. Эйнштейна [2]. См. также [3] и особенно блестящую книгу А. А. Фридмана [4]. В последнее время этому вопросу была посвящена дискуссия в УФН [5]. Эти вопросы рассмотрены также в монографии [6].

** В принципе в качестве таких часов могут служить «световые» часы, представляющие собой световой импульс, периодически отражающийся между двумя близко расположенными зеркалами. Тогда допущение б) эквивалентно допущению существования неизменного стандарта длины — расстояния между зеркалами. В настоящее время в качестве такого стандарта принята длина волны одной из линий криптона. Подробности о выборе часов см. в диссертации Р. Марцке и Д. Уилера [7]. См. также [8].

Разумеется, можно избрать и другую физическую основу для арифметизации событий, подобно тому как можно избирать различные единицы мер. При этом пришли бы к другой геометрии и к другому способу описания физических явлений [4].

Фундаментальное преимущество метода, лежащего в основе теории относительности Эйнштейна, заключается в том, что именно при использовании этого метода арифметизации событий выявляется инвариантность основных законов физики. Закон, выражаемый соотношением

$$F(A,\ B,\ x,\ \ldots)=0, \tag{1.3}$$

в системе отсчета Σ выражается в системе $\overline{\Sigma}$ соотношением

$$F(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{x},\ \ldots)=0, \tag{1.3'}$$

где $\overline{A}$, $\overline{B}$, . . . — скаляры, спиноры, векторы или тензоры.

Поэтому не всякий способ арифметизации событий приемлем. Способ арифметизации должен быть, во-первых, физически осуществимым (хотя бы в идеальном эксперименте) и, во-вторых, максимально универсальным; последнее означает, что он должен опираться на определенный круг явлений, который является наиболее объемлющим *.

В классической физике понятию точечного события $\mathcal{P}(x)$ соответствует понятие материальной точки — объекта конечной массы $m_0 \neq 0$ и неограниченно малых размеров $a \to 0$.

В силу предполагаемой непрерывности пространства в каждой его точке можно построить пространство касательных векторов — бесконечно малых смещений и ковариантное пространство импульсов $R_4(p)$. Метрика этого пространства также недефинитна и имеет вид **:

$$dp^2 = dp_4^2 - d\mathbf{p}^2 \tag{1.4}$$

(где $d\mathbf{p}^2 = dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2$). Этот вид определяется метрикой, принятой в пространстве $R_4(x)$. Таким образом, структуры пространства $R_4(x)$ и $R_4(p)$ не независимы. Движение свободной

---

* Так, например, соглашение, в основу которого была бы положена скорость звука u вместо скорости света c, внесло бы в рассмотрение всех физических явлений весьма превратные особенности звуковых явлений. Подобным же образом измерение длин с помощью пружинного динамометра внесло бы в рассмотрение всех явлений крайне специальные свойства пружины [4, 6]. По этой же причине выбор системы координат, в принципе произвольный, на самом деле должен наилучшим способом соответствовать характеру изучаемой проблемы, чтобы не запутать существо явлений.

** Здесь, и в дальнейшем p_1, p_2, p_3 и p_4 действительны, также считаются действительными x^1, x^2, x^3, x^4.

материальной точки в пространстве $R_4(x)$ происходит по прямой и изображается точкой в пространстве $R_4(p)$.

Противоречий между эйнштейновским способом арифметизации и механикой материальных точек в рамках специальной теории относительности не существует. Поэтому материальные точки в специальной теории относительности могут рассматриваться как объекты, физически реализующие точечное событие $\mathcal{P}(x)$.

Возможные ограничения приходят, по-видимому, со стороны гравитации. Действительно, будем рассматривать материальную точку как материальную частицу конечных размеров a. Пусть m_0 — ее масса покоя. Тогда, если гравитационный радиус этой частицы

$$a_g = 2km_0/c^2 \tag{1.5}$$

(здесь $k = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/(*г*$\cdot$*сек*^{2}) — гравитационная постоянная Ньютона) больше ее размера a, то метрические соотношения «внутри» частицы существенно меняются. Метрика становится нестационарной и наступает явление коллапса [9, 10]. При этом ни один сигнал из области $r < a_g$ не может достигнуть внешнего наблюдателя, и, следовательно, невозможна никакая информация об упорядочении событий внутри коллапсирующей частицы. Из (1.5) видно, что целесообразно иметь в качестве объектов, маркирующих точки пространства-времени, материальные частицы с наименьшей массой ($m_0 \to 0$). Однако при $a \to a_g$ возникает критическая плотность

$$\rho_g = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{c^2}{2k}\right)^3 \frac{1}{m_0^2}\,. \tag{1.6}$$

Эта плотность при $m_0 \to 0$ может перешагнуть пределы, известные из физики элементарных частиц.

В этой связи возникает любопытный вопрос: не может ли метод арифметизации событий, принятый в теории относительности, потерять свою силу ранее, чем достигается условие $\rho = \rho_g$. В самом деле, если при некоторой плотности материи $\rho_k < \rho_g$ ни один световой сигнал и даже нейтринный сигнал не может распространяться в среде в силу исключительно сильной экстинкции, упорядочение событий в такой среде с помощью световых или нейтринных волн становится невозможным. В этих условиях звуковой сигнал может оказаться более подходящим средством для упорядочения событий. Скорость такого сигнала v может быть и больше скорости света в пустоте c, тем не менее никакого противоречия с принципом причинности не возникает, так как v-сигнал, а не c-сигнал применяется для упорядочения событий.

Другого рода ограничения для применимости стандартного метода упорядочения событий — результат действия стохастических гравитационных полей; они рассмотрены далее.

2. ТОЧЕЧНОЕ СОБЫТИЕ В МИКРОМИРЕ

В основе современной квантовой теории поля, с помощью которой описывается поведение элементарных частиц, лежит условие локальности:

$$[\hat{\varphi}(x),\ \hat{\varphi}(y)] = D(x-y); \tag{2.1}$$

$$D(x-y) = 0 \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{2.1'}$$

Здесь $\hat{\varphi}(x)$ — оператор поля, взятый в точке x; $\hat{\varphi}(y)$ — оператор того же поля, взятый в точке y; $[AB]$ означает коммутатор операторов A и B *. Условие (2.1) есть выражение принципа причинности и означает независимость полей, если точки x и y разделены пространственно-подобным интервалом $(x-y)^2 < 0$. Иными словами, произвольная вариация поля в точке x не может влиять на поле в точке y, поскольку сигнал, идущий со скоростью $v \leqslant c$, не может в этом случае достигнуть точки y (и обратно).

В условии локальности (2.1) координаты точек x, y предполагаются определенными неограниченно точно. Такое предположение равнозначно допущению о существовании точечных событий $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}(y)$, и нам предстоит исследовать, насколько непротиворечиво это предположение в рамках той же локальной теории.

Естественными кандидатами на роль представителей точечных событий являются сами элементарные частицы — аналоги материальных точек классической физики. Однако эта аналогия оказывается не очень далеко идущей из-за ряда особенностей, продиктованных законами квантовой физики.

Во-первых, все частицы с массой покоя $m_0 = 0$ должны быть исключены из аналогии, так как они нелокализуемы в пространстве $R_4(x)$. Они могут быть локализованы лишь в касательном пространстве $R_4(\mathcal{P})$. Но и частицы с массой покоя $m_0 \neq 0$ доставляют затруднения. Бозоны с массой покоя $m_0 \neq 0$ не могут быть локализованы в пространстве $R_4(x)$ точнее, чем в пределах $\Delta x \approx \approx h/m_0 c$.

Действительно, подчиняющаяся закону сохранения плотность $\rho(t, \mathbf{x})$ мезонного поля $\varphi(t, \mathbf{x})$ при $t = 0$:

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \varphi^*(0, \mathbf{x})\,\hat{\Omega}\varphi(0, \mathbf{x}), \tag{2.2}$$

где $\hat{\Omega} = \sqrt{m_0^2 - \nabla^2}$ — оператор частоты; ∇ — оператор градиента. Она положительно-дефинитна лишь в области $|\boldsymbol{\nabla}| \ll m_0$, т. е. в нерелятивистской области. В этом случае

$$\rho(0, \mathbf{x}) \approx |\varphi(0, \mathbf{x})|^2 \geqslant 0 \tag{2.3}$$

---

* Или антикоммутатор, если поле спинорное. Мы выписали явно условие для скалярного поля $\varphi(x)$.

и может быть истолкована как плотность вероятности нахождения бозона в точке $\mathbf{x}$ в момент времени $t = 0$. Однако при $|\nabla| \ll m$ плотность $\rho(0, \mathbf{x})$ распределена в пространстве в области $|\Delta\mathbf{x}| \gg h/m_0c$.

Для спинорных частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, существует положительно-дефинитная плотность вероятности:

$$\rho(0, x) = \overline{\psi}(0, \mathbf{x})\, \psi(0, \mathbf{x}) \geqslant 0, \tag{2.4}$$

где $\psi(0, \mathbf{x})$ — волновая функция для одночастичного состояния. Существует мнение, что для одночастичного состояния $\overline{\Delta x^2} > [\hbar/(m_0c)]^2$. На самом деле для одночастичного состояния имеет место обычное соотношение неопределенностей $\overline{\Delta x^2} > \hbar^2/4\overline{\Delta p^2}$ [6, 11]. Однако необходимо учесть обмен состояниями между рассматриваемой частицей и частицами вакуума. Такой обмен в силу принципа Паули приводит к поляризации вакуума в области порядка $\hbar/(m_0c)$ [12]. По этой причине позиция исходной частицы становится неопределенной в той же области.

Следует также иметь в виду, что и создание волнового пакета размером $\Delta x \leqslant \hbar/(m_0c)$ с помощью внешнего поля даже при адиабатическом его включении приведет к рождению пар частиц, так что реализовать одночастичное состояние со столь узким распределением невозможно *. Поэтому точная локализация спинорных частиц оказывается также иллюзорной. Мы видим, что в микромире нет объектов, которые могли бы быть моделью точечного события $\mathcal{P}(x)$, так как элементарные частицы не могут быть локализованы с точностью большей **

$$\Delta x > \hbar/(mc). \tag{2.5}$$

В классической физике материальные точки можно рассматривать не только как реализацию точечного события, но их можно выбрать и в качестве тела отсчета (Bezugskörper), которым фиксируется система отсчета. В мире элементарных частиц это оказывается невозможным.

Если в качестве тела отсчета взять элементарную частицу с массой покоя m_0, то в преобразовании Лоренца (1.2) u — 4-скорость частицы ($u = p/(m_0c)$, p — импульс частицы), а пространственные компоненты сдвига $a_1a_2a_3$ — ее координаты в момент времени $t = 0$.

---

* Например, в компаунд-ядре, образующемся при сближении двух ядер с зарядами Z_1, Z_2 при условии $Z_1 + Z_2 > 137$, возникает электронная орбита с радиусом $a_0 \approx \hbar/(mc)$. Однако при этом будут адиабатически рождаться пары e^+, e^- (явление неодночастичное) [13].

** На возможное принципиальное значение такой неточности обращалось внимание еще на первых порах развития квантовой теории поля [14—16].

Из соотношения неопределенностей

$$[\hat{p}_i \hat{a}_k] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ik} \tag{2.6}$$

следует, что параметры преобразования (1.2) становятся операторами. Поэтому становятся операторами и координаты $(\bar{x})$, отсчитываемые относительно такого тела отсчета. В частности, из (1.2) и (2.6) нетрудно вычислить коммутатор $\bar{x}$ и $\bar{t}$:

$$[\bar{x},\ t] = \mathrm{i}\hbar/(m_0 c)\,(x - vt), \tag{2.7}$$

где v — оператор трехмерной скорости частицы.

Таким образом, элементарные частицы конечной массы не могут быть использованы ни в качестве объектов, с помощью которых отмечаются точки в пространстве $R_4\,(x)$, ни в качестве тел отсчета.

С другой стороны, экспериментальные факты указывают на то, что предсказания локальной теории поля, основанной на условии микропричинности (2.1), соблюдаются до масштабов порядка 10^{-15} *см* [17]. Поэтому следует предполагать, что существуют элементарные частицы, с массой существенно более тяжелой, чем масса нуклона m_p, для которого

$$\Delta x \approx \hbar/(m_0 c) = 2\cdot 10^{-14}\ \textit{см}.$$

Из предыдущего следует, что локальная теория неявно пред полагает существование сколь угодно тяжелых элементарных частиц ($m_0 \to \infty$). В этом предположении противоречие между использованием понятия угодно точных координат точки в пространстве $R_4\,(x)$ и отсутствием объектов, пригодных для роли точечных событий, было бы снято. Ограничение масс частиц сверху некоторым пределом, «максимоном» * $m_0 = M$, означало бы принципиальное ограничение применимости локальной теории для масштабов порядка $\Delta x \sim \hbar\ (Mc)$.

Требования идеального эксперимента по маркировке точки пространства-времени в классической и квантовой физике оказываются прямо противоположными. В последующем будут рассмотрены возможные причины для существования верхнего предела массы элементарной частицы.

3. МАКСИМОНЫ

Рассмотрим теперь элементарную частицу, имеющую массу m. Эффективный размер такой частицы $a \sim \hbar/(mc)$, а ее гравитационный радиус $a_g = 2km/c^2$.

Критическая ситуация возникает, когда радиус частицы сравнивается с ее гравитационным радиусом — это условие наступле-

* Термин «максимон» введен М. А. Марковым. Его соображения изложены в работах [18, 19].

ния коллапса. Из этого условия получаем

$$m = M_g \approx \sqrt{\hbar c/(8\pi k)} = 0{,}52 \cdot 10^{-5}*. \tag{3.1}$$

Соответствующая комптоновская длина волны

$$\Lambda_g = h/(M_g c) = 0{,}82 \cdot 10^{-32} \text{ см}. \tag{3.2}$$

Такая частица действительно является частицей предельно большой массы, так как при сближении с ней другой частицы массы m дефект масс Δm, вызванный гравитационным взаимодействием, по порядку величины равен добавляемой массе m. Действительно,

$$\Delta m = -(1/c^2)\, k\, (M_g/\Lambda_g)\, m \approx -m, \tag{3.3}$$

так что эта масса частицы M_g не может быть увеличена добавлением любой другой массы. Частицу с массой $m = M_g$ будем называть гравитационным максимоном. Если эти качественные соображения подтвердятся, то масса M_g будет служить верхней границей для массы элементарных частиц и нижней границей для массы классических материальных точек.

Другое ограничение на массу элементарных частиц может возникнуть из-за слабых взаимодействий. В работе [20] ** показано, что слабое взаимодействие может стать сильным с ростом энергии взаимодействующих частиц. При этом понятие «сильное» взаимодействие понималось в смысле критерия, приведенного в работе [20]. Согласно этому критерию, взаимодействие сильное, если в процессе столкновения плотность энергии взаимодействия w много больше плотности кинетической энергии ε:

$$|w| \gg \varepsilon***. \tag{3.4}$$

Из подобного критерия следует, что слабое взаимодействие может стать сильным вблизи энергии так называемого унитарного предела, т. е. при

$$W = \hbar c/\Lambda_F \approx 300 \text{ Гэв},$$

где характерная для слабых взаимодействий длина

$$\Lambda_F = \sqrt{g_F/(\hbar c)} = 0{,}66 \cdot 10^{-16} \text{ см}. \tag{3.5}$$

Здесь g_F — константа слабого взаимодействия, введенная Ферми.

---

* Множитель $1/4\pi$ введен из соображений удобства вычисления.

** Более точное изложение см. в работе [21]

*** Применение этого критерия к взаимодействию адронов приводит к заключению, что их взаимодействие при всех энергиях оказывается сильным в соответствии с обычной терминологией. Электромагнитное взаимодействие оказывается по этому критерию всегда слабым. Слабое же взаимодействие (контактное четырехфермионное взаимодействие) согласно критерию (4) становится сильным при энергии частицы порядка 300 *Гэв* в системе центра масс.

Рассмотрим теперь распад тяжелого адрона массы M, обусловленный слабым взаимодействием:

$$M \to m + l + \tilde{\nu}.$$

Здесь m — масса нуклона; l — лептон; ν — антинейтрино. Константа распада Γ для процесса указанного типа при $M \gg m$ равна [22]:

$$\Gamma/M = (1/4\pi^3)\, G_F^2 M^4 N, \tag{3.6}$$

где $G_F = g_F/(\hbar c) = 10^{-5}$ $(1/m^2)$, N — число каналов различных распадов, которое может быть немалым. Из этой формулы видно, что при массе адрона

$$M > m_F = \hbar/(\Lambda_F c) \tag{3.7}$$

константа распада Γ становится сравнимой с массой адрона и адрон перестает существовать как элементарная частица, поскольку ему нельзя приписать никакой определенной массы. Условную частицу с массой M_F целесообразно назвать слабым максимоном. Это ограничение на массу частиц, как видно из (3.7) и (3.2), наступает раньше ограничения, диктуемого гравитацией, так как $M_F \ll M_g$. Вместе с тем предполагаемое ограничение локальной теории в этом случае должно наступать существенно раньше, чем это вытекает из предположения о существовании гравитационного максимона M_g. Как было указано выше, любое ограничение на массу элементарных частиц нарушает логическую структуру локальной теории поля.

Если не допускать существования микрочастиц с массой большей некоторой массы M, то возникает ограничение на точность Δx определения координат точечного события $\mathcal{P}(x)$ $(\Delta x \approx \hbar/(Mc))$.

Кажется обязательным, что такое ограничение должно быть заложено в самих основах теории, в том смысле, что подобная нелокальная теория не должна оперировать с точно определенными координатами x точечных событий $\mathcal{P}(x)$.

Возможной реализацией такого рода идей может служить стохастическое пространство — пространство, в котором точечным событиям $\mathcal{P}$ не предписывается определенных координат x.

4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

В этом разделе обратимся к теории стохастических пространств. Рассмотрим множество элементов $\mathfrak{M}$, арифметизированное с помощью признака элемента ξ и координат этого элемента x.

Допустим, что отображение признаков ξ на координаты x содержит параметр ζ, принимающий случайные значения [23, 24]

$$x = X(\xi \mid \hat{\zeta}). \tag{4.1}$$

Предполагаем, что распределение возможных значений параметра ζ дается нормированной вероятностью

$$dW(\zeta) \geqslant 0; \quad \int dW(\zeta) = 1. \tag{4.2}$$

Поэтому среднее по области случайных параметров ζ, которые будем обозначать знаком $\langle \cdots \rangle$, можно определить по формуле:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \langle X(\xi \mid \hat{\zeta}) \rangle = \int X(\xi \mid \hat{\zeta})\, dW(\zeta). \tag{4.3}$$

Пространство $R_4(x)$ переменных x, определенное формулами (4.1) — (4.3), будем называть стохастическим пространством *. Для дальнейшего заметим, что, если в некоторой области $g(\xi)$ переменных ξ преобразование (4.1) не зависит от случайных параметров ζ, то эту область будем называть реперной областью $g(\xi)$. Пространство признаков $R_n(\xi)$ может быть многомерным (n — число измерений). Соответствующее число измерений имеет и пространство координат $R_n(x)$. Под параметром $\hat{\zeta}$ можно подразумевать несколько случайных величин $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \ldots, \hat{\zeta}_N$ или даже бесконечную их последовательность ($N \to \infty$), или функцию $\{\zeta\}$.

Ясно, что (4.1) есть отображение пространства признаков $R_n(\xi)$ на другое координатное пространство, содержащее случайные параметры. Дальнейшие ограничения на это отображение связаны с его непрерывностью и взаимной однозначностью.

Будем предполагать дифференцируемость соотношения (4.1) и выполнение условия

$$\operatorname{Det}(\partial X_\alpha / \partial \xi_\beta) \neq 0, \tag{4.4}$$

т. е. разрешимость (4.1), относительно переменных ξ:

$$\xi = \xi(x, \hat{\zeta}). \tag{4.5}$$

Важный случай стохастического пространства реализуется тогда, когда отклонения координат x от их среднего значения $\bar{x}$ (4.3) невелики.

В этом случае удобно записать (4.1) в виде:

$$x = \bar{x} + \Delta x(\xi, \hat{\zeta}). \tag{4.6}$$

Используя (4.6) и (4.5), получим

$$x = \bar{x} + \Delta x(\bar{x}, \hat{\zeta}).$$

Это соотношение представляет собою отображение истинной координаты x на пространство ее средних значений $R_4(\bar{x})$. Ясно,

---

* Значок $\wedge$ указывает на стохастический характер величины, например, $\hat{\zeta}$; он ставится также для обозначения квантовых операторов.

что сами признаки ξ можно рассматривать как координаты элементов исходного множества $\mathfrak{M}$, взятых в пространстве признаков $R_n(\xi)$, а соотношение (4.1) — как преобразование от одной координатной системы (ξ) к другой (x).

Вводя термин «пространство признаков», мы имеем в виду интересы физики. С точки зрения физики, важно подчеркнуть ту систему признаков реальных объектов, которая избирается для сопоставления точек материального физического пространства точкам пространства геометрического [4—6].

Для пояснения этой мысли приведем два примера арифметизации. Пусть имеем двухмерное многообразие, представляющее собой непрерывное распределение материи синего и желтого цвета. Пусть концентрация первого цвета есть ξ_1, а концентрация второго — ξ_2; измеряя в некоторой точке эти концентрации, допускаем неточности ξ_1 и ξ_2. Далее каждой точке в соответствии с ее цветом приписываем координаты x_1 и x_2 согласно формуле:

$$x_s = X_s(\xi_1 + \hat{\zeta}_1, \quad \xi_2 + \hat{\zeta}_2). \tag{4.6'}$$

Пространство $R_2(x)$ будет стохастическим пространством, так как координаты точек в нем зависят от случайных параметров $\hat{\zeta}_1$ и $\hat{\zeta}_2$.

В описанном в разд. 1 методе арифметизации событий физическими объектами являются материальные точки, способные отражать свет. По самому своему смыслу эти точки образуют счетное множество, а их траектории — счетное множество одномерных непрерывных множеств (кривых линий). Их признаки — это номера, возникающие при перечислении (например, номера звезд и туманностей в звездном каталоге). Координаты таких точек в пространстве $R_4(x)$ определяются с помощью часов и светового импульса (локация).

Особенность этого важного случая заключается в том, что сопоставление физического пространства геометрическому (предписывание определенных координат материальной точке) предполагает выбор не только системы координат, но и выбор матриц (по крайней мере в некоторый начальный момент времени *). Естественно, что координаты частиц x определяются лишь с некоторой точностью $\Delta\bar{x}$, среднее же значение координат определенно **. Тогда возникает стохастическое пространство $R_4(x)$, причем координаты x связаны с $\bar{x}$ формулой вида (4.6).

---

* Действительно, для предсказания движения частиц, необходимо знать их начальные координаты q_0 (и импульсы p_0). Координаты q_0 не имеют никакого смысла, пока не указан физический способ их измерения. Измерение предполагает известную метрику.

** Т. е. подразумевается некоторый ансамбль ситуаций, в котором производятся измерения переменной x.

Обратимся теперь к метрике стохастического пространства. В соответствии с отображением (4.1) целесообразно предположить метрику в пространстве R_4 (ξ):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \tag{4.7}$$

где ds — интервал между бесконечно близкими событиями, а $g_{\alpha\beta}(\xi)$ — метрический тензор. Пользуясь (4.5), получаем метрику в пространстве R_4 (x):

$$ds^2 = G_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})\, dx^\mu\, dx^\nu, \tag{4.8}$$

где тензор

$$G_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) = g_{\alpha\beta}(\xi)\,(\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu)\,(\partial\xi^\beta/\partial x^\nu) \tag{4.9}$$

и ξ выражено через x и $\hat{\zeta}$ с помощью (4.5).

Таким образом, в пространстве R_4 (x) возникает стохастическая метрика, так как тензор $G_{\mu\nu}$ $(x, \hat{\zeta})$ зависит от случайных параметров $\hat{\zeta}$.

Метрические пространства со случайной стохастической метрикой с чисто математической точки зрения первоначально изучались в работах [25, 26] *. Однако эти исследования относятся к случаю евклидовой метрики, имеющей положительно-дефинитную метрическую форму. Для целей физики более важно псевдоевклидово пространство Минковского. Недефинитность метрики этого пространства приводит к ряду специфических проблем, которые не встречаются в случае евклидова пространства.

Эти специфические для физического пространства трудности связаны с требованиями, предъявляемыми к инвариантности и к нормировке вероятности того или иного значения интервала в недефинитном пространстве [6]. Они не замедлили обнаружиться в работах физиков, которые в неявной форме использовали понятия, относящиеся к стохастической геометрии **. Поэтому в отличие от пути, избранного в работах [25—28], здесь мы исходили не из метрического пространства, а рассматривали стохастичность пространства как некоторое соотношение двух пространств. Метрика вводится позднее. Этот путь имеет еще и то обоснование, что в физике стохастичность появляется более естественно на стадии арифметизации, чем на стадии метрической.

Упомянутые выше трудности относительно нормировок в четырехмерном пространстве мы избегаем таким путем, что стохастические свойства пространства вводятся явно посредством случайных параметров ξ, физический смысл которых может быть весьма

---

* Подробные ссылки на литературу приведены в [27].

** Стохастическое пространство применительно к физике элементарных частиц впервые рассматривалось в работе [29]. См. также работы [30, 31] и особенно [32].

различен. По отношению к этим параметрам требования инвариантности и нормировки $dW(\zeta)$ являются уже частным делом.

Из условий, наложенных на преобразование (4.1), следует, что, если метрика (4.7) имеет правильную сигнатуру, т. е. при приведении к диагональному виду имеет сигнатуру $+---$, то и метрика (4.8) такова, что метрический тензор $G_{\mu\nu}$, согласуется с физическими требованиями теории относительности.

Заметим, что если исходить из специального случая стохастического пространства, определенного отношением (4.6), то «правильная» метрика в пространстве $R_4(x)$ ведет к «правильной» же метрике в пространстве $R_4(x)$.

Однако если величина $\Delta x(\mathbf{x}, \hat{\zeta})$ во всей области переменных $\hat{x}$ и $\hat{\zeta}$ в некотором смысле мала, например $|\Delta x| < \varepsilon$, то требование «правильности» метрики в $R_4(x)$ можно опустить. Однако это означало бы уже выход за рамки современных представлений о пространстве и времени.

5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛЕЙ

При приближенном решении уравнений для взаимодействующих полей в некоторых случаях возникают стохастические пространства. В качестве примера рассмотрим скалярное поле $\Phi(x)$, в пространстве $R_4(x)$ подчиняющееся уравнению:

$$\square_\alpha^2\Phi - M^2\Phi = g\hat{\varphi}_\alpha(\partial\Phi/\partial x^\alpha), \tag{5.1}$$

где $\hat{\varphi}_\alpha(x)$ — некоторое случайное векторное поле; g — константа взаимодействия; M — параметр массы частиц. Будем искать решения этого уравнения, близкие к плоской волне:

$$\Phi = A\exp(\mathrm{i}S/\hbar) \tag{5.2}$$

при $\hbar \to 0$. Здесь $A \approx \mathrm{const}$; S — фаза волны, которую представим в виде

$$S = px + \hat{\sigma}(x), \tag{5.3}$$

где p — импульс волны; $\hat{\sigma}$ — поправка к фазе. Подставляя (5.2) и (5.3) в (5.1), при $\hbar \to 0$ и малой g получим уравнение для фазы $\hat{\sigma}(x)$ [33, 34]:

$$d\hat{\sigma}/d\tau + g/Mp^\alpha\hat{\varphi}_\alpha = 0, \tag{5.4}$$

где $\tau = nx$ — собственное время волны; n — единичный вектор, параллельный импульсу p. Из уравнения (5.4) следует

$$\hat{\sigma}(x) = -p^\alpha\frac{g}{M}\int^{\tau}\hat{\varphi}(\tau', x_\perp)\,d\tau', \tag{5.5}$$

где $x_\perp = x - n\,(xn)$. Используя формулу и (5.3), фазу S можно представить в виде:

$$S = p\xi \equiv p_\alpha \xi^\alpha, \tag{5.6}$$

причем

$$\xi^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha\,(x, \{\hat{\varphi}\}) \tag{5.7}$$

и

$$\xi^\alpha\,(x\,\{\hat{\varphi}\}) = -\frac{g}{M}\int^{\tau} \hat{\varphi}\,(\tau', x_\perp)\,d\tau'. \tag{5.8}$$

Преобразование (5.7) есть преобразование к стохастическому пространству $R_4\,(\xi)$, в котором волна (5.2) подчиняется простому уравнению Даламбера:

$$\Box_\xi^2 \Phi - M^2\Phi = 0. \tag{5.9}$$

Очевидно, что реперной областью для этого пространства будет область $g\,(x)$, где поле $\hat{\varphi}\,(x) = 0$.

Подобный пример можно распространить на спинорное поле $\psi\,(x)$, взаимодействующее со случайным векторным полем $\hat{\varphi}_\alpha$. Пусть поле $\psi\,(x)$ подчиняется уравнению

$$(D - \mathrm{i}g\varphi - M)\,\psi = 0, \tag{5.10}$$

где $D = \gamma^\mu\,(\partial/\partial x^\mu)$; $\varphi = \gamma^\mu \hat{\varphi}_\mu$; g — заряд; M — масса. Будем искать решение в виде

$$\psi = (D - \mathrm{i}g\varphi + M)\,\Phi \tag{5.11}$$

так что

$$\Phi = u_p \exp\,(\mathrm{i}S/\hbar), \tag{5.12}$$

где u_p — постоянный спинор, а фазу S опять возьмем в виде (5.3). Нетрудно убедиться, что при $\hbar \to 0$ случайная фаза $\hat{\sigma}$ удовлетворяет уравнению (5.4), а функция Φ, взятая в пространстве $R_4\,(\xi)$,— уравнению (5.9) [17]. При этом любопытно, что в специальном случае электромагнитного поля $\varphi_\alpha = A_\alpha$, $g = e$ среднее квадратическое отклонение

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \overline{(\xi^\alpha - x^\alpha)^2} = \overline{\Delta\xi^2} \tag{5.13}$$

совпадает с величиной, определяющей лэмбовский сдвиг ΔE_n электронных уровней в атоме:

$$\Delta E_n \simeq \frac{1}{6}\int \psi_n^*\,(x)\,\nabla^2 U\,\overline{\Delta\xi^2}\,\psi_n\,(x)\,d^3x, \tag{5.14}$$

где $\psi_n\,(x)$ — волновая функция электрона в атоме; U — его потенциальная энергия.

6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

Существенно нелинейным полем называют поле, скорость распространения которого зависит от величины самого поля и его производных. Примером таких полей в пространстве $R_4(x)$ являются поля типа Борна — Инфельда, уравнения для которых выводятся из вариационного принципа:

$$\delta S=0,\quad S=\int L\sqrt{-G}\,d\Omega, \tag{6.1}$$

где G — детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$; $\sqrt{-G}\,d\Omega$ — инвариантный элемент объема в $R_4(x)$; L — плотность лагранжиана, которая предполагается функцией инвариантов $\mathcal{K}$ и I. Для скалярного поля φ

$$L=L(\mathcal{K},\,I);\quad \mathcal{K}=(1/2)\,g^{\mu\nu}\varphi_\mu\varphi_\nu;\quad I=(1/2)\,\varphi^2. \tag{6.2}$$

Здесь $\varphi_\mu=\partial\varphi/\partial x^\mu$. В случае спинорного поля $\psi(x)$

$$\mathcal{K}=(1/2)\,(\bar{\psi}\gamma^\mu\varphi_\mu-\psi_\mu\gamma^\mu\bar{\psi}), \tag{6.3}$$

$$I=(1/2)\,\bar{\psi}\psi, \tag{6.3$'$}$$

где $\psi_\mu=\partial\psi/\partial x^\mu$; γ^μ — матрицы Дирака (заметим, что в (6.3) и (6.3′) эти инварианты выписаны явно для случая плоского пространства). Из вариационного принципа (6.1) следует уравнение поля:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu}\right]+\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi}=0, \tag{6.4}$$

$$-\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu\,\partial\varphi_\nu}\,\varphi_{\mu\nu}+\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\varphi_\mu\,\partial\varphi}\,\varphi_\mu=0, \tag{6.4$'$}$$

где $\varphi_{\mu\nu}=\partial^2\varphi/(\partial x^\mu\,\partial x^\nu)$.

Подобным же образом для спинорного поля получим:

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu}\right]+\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}}=0, \tag{6.5}$$

или

$$\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\,\partial\bar{\psi}_\nu}\,\bar{\psi}_{\mu\nu}+\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\,\partial\psi_\nu}\,\psi_{\mu\nu}-$$

$$-\frac{\partial(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}}+\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\,\partial\bar{\psi}}\,\bar{\psi}_\mu+\frac{\partial^2(L\sqrt{-G})}{\partial\bar{\psi}_\mu\,\partial\psi}\,\psi_\mu=0, \tag{6.5$'$}$$

и аналогичное сопряженное уравнение.

В отличие от уравнения Дирака (6.5′) для спинорного поля является уравнением второго порядка. Нетрудно показать, что сохраняющийся ток

$$I^{\mu} = (\partial L/\partial \mathcal{K})\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \qquad (6.6)$$

Уравнения типа (6.5) и (6.5′) имеют переменные коэффициенты при высших производных, зависящие от поля и его первых производных. Поэтому характеристический конус, определяющий направления распространения сигналов (слабых разрывов), оказывается искривленным [6, 7]. При этом в некоторых случаях скорость сигнала может оказаться больше скорости света в пустоте. В работах [37—39] внимание обращено на целесообразность переопределения метрики пространства-времени в случае нелинейных полей. Это переопределение, в частности, позволяет избежать противоречия, возникающего в случае «сверхсветовых» сигналов. Внутренне согласованное переопределение метрики было предложено в работе [40]. Пусть метрика задана квадратической формой

$$d\sigma^2 = G_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}, \qquad (6.7)$$

причем метрический тензор $G_{\mu\nu}$ зависит теперь от поля φ и его производных φ_{μ}. Соответствующее пространство обозначим $R_4\ (\xi)$. В этом пространстве волновое уравнение Даламбера записывается следующим образом:

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\sqrt{-G}\, G^{\mu\nu}\varphi_{\nu}\right] + \frac{\partial (L\sqrt{-G})}{\partial \varphi} = 0. \qquad (6.8)$$

С другой стороны, из вариационного принципа (1) следует уравнение поля:

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\frac{\partial (L\sqrt{-G})}{\partial \varphi_{\mu}}\right] + \frac{\partial (L\sqrt{-G})}{\partial \varphi} = 0, \qquad (6.9)$$

в котором в отличие от (6.5) предполагается, что теперь тензор— функция φ и φ_{μ}. Метрика будет согласована с характером распространения поля, если положить

$$\partial (L\sqrt{-G})/\partial \varphi_{\mu} = \sqrt{-G}\, G^{\mu\nu}\varphi_{\nu} \qquad (6.10)$$

[40]. Таким образом нелинейное поле индуцирует в пространстве свою метрику. Если начальные данные для полей заданы стохастически, то индуцируемая нелинейным полем метрика стохастическая и само пространство $R_4\ (x)$ также стохастическое (это показано на простом примере в следующем разделе).

7. ПРИМЕР СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСНОВАННОГО НА НЕЛИНЕЙНОМ ПОЛЕ

Обратимся к уравнению типа (6.2), однако в двумерном пространстве $R_2(x)$, так что $x \equiv (t,\ x)$. Возьмем лагранжиан в форме

$$L = b^2 [1 + (2/b^2)\mathcal{K}]^{1/2} - b^2, \tag{7.1}$$

где

$$\mathcal{K} = (1/2)(\varphi_t^2 - \varphi_x^2), \tag{7.2}$$

b — масштаб нелинейности. Из этого лагранжиана вытекает уравнение

$$(1 + \varphi_x^2)\varphi_{tt} + 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} + (1 - \varphi_t^2)\varphi_{xx} = 0, \tag{7.3}$$

имеющее кривые характеристики. Решение задачи Коши для этого уравнения получено в работе [41]. При этом показано, что это решение имеет простой вид в пространстве $R_2(\xi;\ \tau)$, точки которого связаны с точками пространства $R_2(x)$ преобразованиями:

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2}\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [H_0(\lambda) - b^2]\, d\lambda; \tag{7.4}$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2}\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} g_0(\lambda)\, d\lambda. \tag{7.5}$$

Здесь H — гамильтониан рассматриваемого поля:

$$H = (\partial L/\partial\varphi_t)\varphi_t - L, \tag{7.6}$$

а g — его импульс:

$$g = (\partial L/\partial\varphi_t)\varphi_x. \tag{7.7}$$

$H_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ — значения этих величин на пространственной поверхности в $R_2(\xi,\ \tau)$. Эта поверхность совпадает с пространственной поверхностью в $R_2(x)$ при $t = 0$. В пространстве $R_2(\xi)$ поле $\varphi(\tau,\ \xi)$ удовлетворяет простому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = 0 \tag{7.8}$$

и равно:

$$\varphi(\xi,\ \tau) = [\varphi_0(\xi + \tau) + \varphi_0(\xi - \tau)]/2 + \int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \Pi_0(\lambda)\, d\lambda/b^2, \tag{7.9}$$

где $\Pi_0(\lambda)$ — значения импульса Π, канонически сопряженного полю φ, на поверхности $\tau = 0$:

$$\Pi = \partial L/\partial\varphi_t, \tag{7.10}$$

$\varphi_0(\lambda)$ — значения поля на этой же поверхности. Допустим теперь, что начальные значения φ_0 и Π_0 являются случайными величинами φ_0, Π_0, задаваемыми распределением

$$dw \equiv dw\{\hat{\varphi}_0,\ \hat{\Pi}_0\}. \tag{7.11}$$

Тогда преобразования (7.4) и (7.5) — стохастические преобразования:

$$t = \tau + \frac{1}{2b^2}\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}[\hat{H}_0(\lambda) - b^2]\,d\lambda \equiv t(\xi,\ \tau\{\hat{\varphi},\ \hat{\Pi}_0\}); \tag{7.12}$$

$$x = \xi + \frac{1}{2b^2}\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\hat{g}_0(\lambda)\,d\lambda \equiv x(\xi,\ \tau\{\hat{\varphi}_0,\ \hat{\Pi}_0\}). \tag{7.13}$$

Поверхность $\tau = 0$ в $R_2(\xi)$ совпадает с поверхностью $t = 0$ в $R_2(x)$, и поэтому эта поверхность есть реперная область. Поле $\hat{\varphi}(\xi,\ \tau)$ принимает определенные, хотя и случайные значения в пространстве $R_2(\xi)$. Это пространство можно назвать собственным пространством поля φ.

В пространстве $R_2(x)$ ситуация является существенно новой в том отношении, что мы уже не имеем ответа на вопрос о вероятности того или иного значения поля $\varphi(x,\ t)$. Вместо этого мы вынуждены спрашивать о вероятности того, что поле $\hat{\varphi} = \varphi$ и одновременно $\hat{x} = x$, $\hat{t} = t$. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} dw(\varphi,\ x,\ t) = \int dw\{\varphi_0,\ \Pi_0\}\,\delta[t - t(\xi,\ \tau\{\hat{\varphi}_0,\ \hat{\Pi}_0\})]\times \\ \times\delta[x - x(\xi,\ \tau\{\hat{\varphi}_0,\ \hat{\Pi}\})]\,\delta[\varphi - \Phi(\xi,\ \tau\{\hat{\varphi}_0\hat{\Pi}_0\})] \equiv \\ \equiv dw(\varphi,\ x,\ t;\ \xi,\ \tau), \end{aligned} \tag{7.14}$$

где функция Φ определена формулой (7.9) с заменой там φ_0 и Π_0 случайными величинами.

Рассмотренный пример интересен тем, что он содержит обобщение понятия поля $\varphi(x)$ в пространстве $R_2(x)$ в том смысле, что не существует функции $\varphi = \hat{\varphi}(x,\ t)$, а существует лишь вероятность найти три величины $\hat{\varphi} = \varphi$, $\hat{x} = x$, $\hat{t} = t$, соответствующие точке $(\xi,\ \tau)$ в пространстве $R_2(\xi)$.

8. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Турбулентное движение материи порождает турбулентную или стохастическую метрику [6, 42]. В этом случае тензор импульса энергии материи $T_{\mu\nu}$ является случайной функцией в пространстве $R_4(x)$. Это обстоятельство может быть выражено явно введением стохастических параметров $\hat{\zeta}$:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}). \tag{8.1}$$

В качестве таких случайных параметров могут быть, например, начальные значения лагранжевых координат частиц.

Из уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu} R = 8\pi k / c^4 T_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}) \tag{8.2}$$

следует, что метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ будет также стохастической величиной:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}). \tag{8.3}$$

Если флюктуации при турбулентном движении материи невелики по сравнению со средними значениями характерных величин, то тензор в (8.1) целесообразно разложить на две части:

$$T_{\mu\nu} = \overline{T}_{\mu\nu}(x) + \Phi_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}), \tag{8.4}$$

где $\overline{T}_{\mu\nu}(x)$ — значения тензора импульса энергии:

$$\overline{T}_{\mu\nu}(x) = \int T_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})\, dw(\hat{\zeta}). \tag{8.5}$$

Здесь $dw(\hat{\zeta})$ — нормированная вероятность того или иного распределения случайных параметров $\hat{\zeta}$. Тензор $\Phi_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})$ определяется целиком флюктуациями движущегося вещества. И будем считать его пропорциональным некоторому малому параметру ε, определяющему амплитуду флюктуаций. Подобным же образом разложим и метрический тензор (8.3):

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta}). \tag{8.6}$$

Здесь тензор $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$ определяется средним движением материи, а тензор $h_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})$ — флюктуациями материи и считается также пропорциональным параметру ε. Приравнивая в (8.2) нулю коэффициенты при степенях ε, получаем уравнения:

$$\overline{R}_{\mu\nu} - (1/2)\, \overline{g}_{\mu\nu} R = (8\pi k / c^4)\, \overline{T}_{\mu\nu}(x) \tag{8.7}$$

и

$$A^{\rho\sigma}_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} + B^{\rho\sigma\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + C^{\rho\sigma\alpha\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta}} = \frac{8\pi k}{c^4} \Phi_{\mu\nu}(x, \zeta), \tag{8.8}$$

где

$$A_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \partial \overline{L}_{\mu\nu} / \partial \overline{g}_{\rho\sigma}; \quad B_{\mu\nu}^{\rho\sigma\alpha} = \partial \overline{L}_{\mu\nu} / \left[\partial \left(\partial \overline{g}_{\rho\sigma} / \partial x^{\alpha} \right) \right]; \tag{8.9}$$

$$C_{\mu\nu}^{\rho\sigma\alpha\beta} = \partial \overline{L}_{\mu\nu} / \partial \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta}} \right),$$

а

$$\overline{L}_{\mu\nu} = \overline{R}_{\mu\nu} - (1/2)\, \overline{g}_{\mu\nu} R. \tag{8.10}$$

Теперь заметим, что коэффициенты A, B, C в (8.8) имеют тот же порядок величины, что и $\overline{L}_{\mu\nu}$, а именно

$$\overline{L}_{\mu\nu} \approx 1/l^2, \tag{8.11}$$

где l — масштаб длины, определяющий кривизну пространства, метрика которого диктуется средним движением в согласии с уравнением (8.7). С другой стороны, правая часть уравнения (8.7) имеет порядок величины:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \overline{T}_{\mu\nu} \approx (8\pi k / c^2)\, \overline{\rho}, \tag{8.12}$$

где $\overline{\rho}$ — средняя плотность материи; ее можно представить в форме $\overline{\rho} = \mathcal{M}/a^3$. Здесь $\mathcal{M}$ — характерная масса, а a — характерный размер рассматриваемой системы. Тогда

$$(8\pi k \mathcal{M}/c^2)\,(1/a^3) = 4\pi a_g / a^3, \tag{8.13}$$

где a_g — гравитационный радиус, соответствующий массе системы $\mathcal{M}$. Из (8.7), (8.11) и (8.13) следует

$$1/l^2 \approx a_g / a^3, \tag{8.14}$$

т. е. радиус кривизны равен:

$$1/l \approx (1/a)\,(a_g/a)^{1/2}. \tag{8.15}$$

Обратимся теперь к уравнению (8.8). Пусть масштаб длины, характеризующий градиент стохастического поля h есть l'. Масса, характерная для масштаба флюктуаций тензора, пусть будет Δm, а b — длина, определяющая размер этих флюктуаций. Тогда из уравнения (8.8) следует:

$$\frac{\alpha}{l^2} h + \frac{\beta}{l l'} h + \gamma / (l'^2 h) \simeq \frac{4\pi b_g}{b^3}. \tag{8.16}$$

Здесь α, β, γ — числа порядка единицы, а

$$b_g = 2\pi k\, \Delta m / c^2 \tag{8.17}$$

есть гравитационный радиус флюктуации. По смыслу величин l и l', $l > l'$. В силу линейности уравнения для тензора $h_{\mu\nu}$ длина

l' порядка b. Таким образом:

$$h \sim (l'^2/b^3)\, b_g = b_g/b. \tag{8.18}$$

Из (8.18) следует, что h будут малыми поправками, если мало отношение b_g/b (эту величину и можно принять в качестве упомянутого параметра ε, по которому идет разложение исходного уравнения и тензоров $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$).

Если $\varepsilon = b_g/b$ не мало, то разложение в ряд по степеням ε становится непригодным. Одновременно возникает трудность, имеющая, по всей видимости, принципиальный характер. Именно, координаты точек пространства $R_4(x)$ устанавливаются в общей теории относительности хроногеометрическими методами так, что четверки чисел (x_0, x_1, x_2, x_3), приписываемые той или иной точке, нечто иное, как расстояние и промежутки времени, измеренные световым сигналом. Между тем в случае, когда флюктуации тензора $T_{\mu\nu}$ велики, флюктуации интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x, \hat{\zeta})\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{8.19}$$

также не малы. Если этот интервал используется для натягивания координатной сетки в $R_4(x)$ (как это принято в хроногеометрии [6, 43]), то значения координат (x_0, x_1, x_2, x_3) каждой физической точки могут быть приписаны лишь в вероятностном смысле.

Возникающая ситуация весьма необычна. Если к тому же отсутствует реперная область, то привычное нам понятие возможности упорядочения событий в $R_4(x)$ теряет свой смысл.

Видимо, такая ситуация может иметь место в микромире, если роль гравитации там не исключается причинами, которые еще не изучены с полной ясностью. Суть дела в том, что возможно вообразить такое распределение материи в микромире, которое крайне ослабляет значение гравитации по сравнению с другими взаимодействиями. Для этого достаточно, чтобы масштаб b, характеризующий градиенты полей в микромире, был бы существенно больше гравитационного радиуса b_g микроскопических скоплений материи.

С подобной же ситуацией неупорядочиваемости событий можно встретиться и в астрофизике, в среде или вблизи нее, в тех случаях, когда флюктуации плотности материи велики.

9. КВАНТОВЫЕ ФЛЮКТУАЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Флюктуации гравитационного поля, обусловленные вакуумными колебаниями материи, вычислены в работе [42]. В вакууме среднее значение тензора импульса-энергии $\overline{T}_{\mu\nu}(x) = 0$.

Поэтому флюктуационная часть тензора $\Phi_{\mu\nu}$ в (8.4) совпадает с самим тензором $T_{\mu\nu}$. Далее средние значения компонент метрического тензора $\bar{g}_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu}$, где $g^0_{\mu\nu}$ — значения этого тензора для псевдоевклидова пространства ($g_{00} = +1$; $g_{kk} = -1$; $g_{0k} = 0$; $k = 1, 2, 3$). Уравнение (8.8) принимает простой вид:

$$(1/2)\,\square\,\psi^\mu_\nu = -(8\pi k/c^3)\,T^\mu_\nu, \tag{9.1}$$

где

$$\psi^\mu_\nu = h^\mu_\nu - (1/2)\,\delta^\mu_\nu h;\quad h = h^\sigma_\sigma \tag{9.2}$$

и

$$\partial\psi^\mu_\nu/\partial x^\mu = 0. \tag{9.3}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ описывает суммарные флюктуации всех полей с учетом их взаимодействия. Возможно, что этот тензор имеет более простой вид, чем частные тензоры для того или иного поля. Однако этот полный тензор нам неизвестен. Приводимые ниже вычисления для специальных случаев указывают на то, что основные выводы несущественно зависят от частного вида поля.

В случае скалярного поля φ лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} - m^2\varphi^2\right) \tag{9.4}$$

и соответствующий контрвариантный тензор импульса-энергии

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\nu\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} - g^{\mu\nu}L. \tag{9.5}$$

Само поле φ представляется рядом:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\,[\hat{a}_k \exp(\mathrm{i}kx) + \hat{a}^+_k \exp(-\mathrm{i}kx)], \tag{9.6}$$

где приняты обычные обозначения: V — нормировочный объем $V \to \infty^3$; вектор $\mathbf{k}$ имеет компоненты $k = \omega_k$, $\mathbf{k}$, $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, m — масса частиц поля; $\hat{a}_k$ и $\hat{a}^+_k$ — операторы уничтожения и рождения частиц, подчиняющиеся условию перестановки:

$$[\hat{a}_k\hat{a}^+_{k'}] = \delta_{kk'}. \tag{9.7}$$

Остальные скобки равны нулю. В случае спинорного поля ψ

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\nu\psi\right) \tag{9.8}$$

(мы выписываем в этом случае его ковариантные компоненты γ^ν — матрицы Дирака). Поле ψ и сопряженное ему поле $\bar{\psi}$ разлагается в ряды:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p;\, r=1,\,2} \{\hat{a}_r(p)\, u^r(p) \exp(\mathrm{i}px) + \hat{b}_r^+(p)\, v^r(-p) \exp(-\mathrm{i}px)\}; \tag{9.9}$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p;\, r=1,\,2} \{\hat{a}_r^+(p)\, \bar{u}^r(p) \exp(-\mathrm{i}px) + \hat{b}_r(p)\, \bar{v}^r(-p) \exp(\mathrm{i}px)\}, \tag{9.9'}$$

где $\hat{a}_r$, $\hat{a}_r^+$ и $\hat{b}_r$, $\hat{b}_r^+$ — операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов; $u^r(p)$ и $v^r(p)$ — нормированные к 1 спиноры. Условия квантования:

$$\{\hat{a}_r(p),\ \hat{a}_r^+(p)\} = \delta_{rr'}, \tag{9.10}$$

$$\{\hat{b}_r(p)\ \hat{b}_{r'}^+(p)\} = \delta_{rr'}; \tag{9.10'}$$

остальные антикоммутаторы равны нулю. Равенство нулю среднего значения тензора импульса-энергии $T_{\mu\nu}$ обеспечивается тем, что в (9.5) и (9.8) берем псевдоевклидовы значения тензора $g^0_{\mu\nu}$, а произведения операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^+$, $\hat{b}$, $\hat{b}^+$ — в нормальном виде. По определению нормального произведения среднее значение $T_{\mu\nu}$ по вакууму равно нулю. Из уравнения (9.1) получим:

$$\psi^\mu_\nu(x) = \frac{16\pi k}{c^3} \int G(x-x')\, \hat{T}^\mu_\nu(x')\, d^4x', \tag{9.11}$$

где $G(x - x')$ — функция Грина «свободного» уравнения (9.1) *.

Следуя работе [47], вычислим среднее по вакууму от произведения величин $\psi^\mu_\nu(x)$, $\psi^\alpha_\beta(y)$, т. е. корреляцию этих величин. Из (9.11) имеем:

$$\overline{\psi^\mu_\nu(x)\, \psi^\alpha_\beta(y)} = \left(\frac{16\pi k}{c^3}\right)^2 \int G(x-x')\, G(y-y') \times$$
$$\times Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x'-y')\, d^4x'\, d^4y', \tag{9.12}$$

где тензор $Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x' - y')$ — корреляция:

$$Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x-y) = \overline{T^\mu_\nu(x)\, T^\alpha_\beta(y)}. \tag{9.13}$$

В силу однородности вакуума эта корреляция зависит лишь от разности $x - y$. Представим эту корреляцию в виде спектрального разложения:

$$Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x-y) = \int \tilde{Q}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q) \exp[\mathrm{i}q(x-y)]\, d^4q. \tag{9.14}$$

---

* В (9.11) имеется в виду функция Грина $G(x - x')$, симметричная относительно прошедшего и будущего.

Тогда для спектрального разложения корреляций компонент метрического тензора получим:

$$\mathscr{M}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(x-y)=\overline{\psi^{\mu}_{\nu}(x)\,\psi^{\alpha}_{\beta}(y)}=\int\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q)\exp\left[iq(x-y)\right]d^4q. \qquad (9.15)$$

Из (9.11) и (9.13) следует

$$\widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q)=\left(\frac{16\pi k}{c^3}\right)^2\frac{1}{q^4}\widetilde{Q}^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(q), \qquad (9.16)$$

где множитель q^4 возник из соотношения

$$\widetilde{G}(q)\sim 1/q^2. \qquad (9.17)$$

В дальнейшем приводятся результаты довольно громоздких вычислений $Q^{\mu\alpha}_{\nu\beta}$ для скалярного и спинорного полей. По причинам, которые будут понятны из дальнейшего, мы вынуждены ограничиться качественными выводами. В этой же связи ограничиваемся приведением результатов вычислений для компоненты $Q^{00}_{00}(x)$.

Скалярное поле. Для симметризованной корреляции в этом случае

$$Q^{00}_{00}(x-y)=\frac{1}{2}\left\{\overline{T^0_0(x)\,T^0_0(y)}+\overline{T^0_0(y)\,T^0_0(x)}\right\}=$$
$$=\frac{\hbar^2}{(2\pi)^6c^2}\int\frac{d^3kd^3k'}{2\omega_k2\omega_{k'}}\mathscr{M}^2(k,\,k')\cos(k+k',\,x-y), \qquad (9.18)$$

где

$$\mathscr{M}(k,k')=-\omega_k\omega_{k'}\left[1-\frac{m^2}{\omega_k\omega_{k'}}+\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega_k\omega_{k'}}\right], \qquad (9.19)$$

так что вектор

$$\mathbf{q}=(\omega_k+\omega_{k'},\ \mathbf{k}+\mathbf{k}'). \qquad (9.20)$$

Интеграл в (9.18) расходится, поэтому определим в нем верхнюю границу интегрирования по векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, именно положим $|\mathbf{k}|<\mathscr{K}$, $|\mathbf{k}'|<\mathscr{K}$.

Оценка интеграла (9.18) при этом ограничении приводит к следующему результату:

$$Q^{00}_{00}(r)=\frac{1}{32(2\pi)^4}\frac{\hbar^2\mathscr{K}^2}{c^2}+\cdots \qquad (9.21)$$

при $r\to 0$, $t\to 0$ $(r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\ t=t_x-t_y)$.
Далее

$$Q^{00}_{00}(r)=\frac{2}{(2\pi)^4}\frac{\hbar^2\mathscr{K}^4}{c^2}\cdot\frac{1}{r^4}(1+\cos 2\mathscr{K}r) \qquad (9.22)$$

при $r\to\infty$, $t\to 0$ и

$$Q^{00}_{00}(t)=-\frac{1}{2(2\pi)^4}\frac{\hbar^2\mathscr{K}^6}{c^2}\frac{1}{t^2}\cos 2\mathscr{K}t \qquad (9.23)$$

при $t\to\infty$, $r=0$. Введем вместо $\mathscr{K}$ длину $\Lambda=2\pi/\mathscr{K}$. Тогда из (9.21) видно, что $Q^{00}_{00}(r)$ имеет порядок $\hbar^2/c^2\Lambda^8$ и, следовательно, амплитуда колебаний плотности скалярной материи

$$\Delta\rho \sim \hbar c/(c^2\Lambda^4). \tag{9.24}$$

Отношение гравитационного радиуса этой плотности

$$b_g = (8\pi k/c^2)(\Delta\rho\Lambda^3) \tag{9.25}$$

к размеру самой флюктуации Λ:

$$b_g/\Lambda = 8\pi k/c^2 \frac{\hbar c}{c^2\Lambda^4}\Lambda^2 = \frac{\Lambda_g^2}{\Lambda^2}. \tag{9.26}$$

Отсюда следует, что гравитационные эффекты, вызванные вакуумными флюктуациями скалярного поля, имеющими линейный масштаб Λ, не зависят от массы частиц, если $\Lambda \ll \hbar/mc$, и малы до тех пор, пока

$$\Lambda \gg \Lambda_g = (8\pi k\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-32}\ \text{см}. \tag{9.27}$$

Спинорное поле. Вычисления проводятся аналогично случаю скалярного поля и приводят к результату:

$$Q_{00}^{00}(x-y) = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{\hbar^2}{c^2}\int d^3k\, d^3k'\,(\omega_k-\omega_{k'})^2 \times$$
$$\times \mathcal{M}^2(k,\, k')\cos(k+k'x-y), \tag{9.28}$$

причем $\mathcal{M}^2(k,\, k') \approx 1$. При таком же, как и в (9.18), обрезании интеграла получаем

$$Q_{00}^{00}(r) + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{16}\frac{1}{15}\frac{\hbar^2}{c^2}\mathcal{K}^8 + \cdots \tag{9.29}$$

при $r = 0,\ t = 0$. Далее

$$Q_{00}^{00}(r) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\mathcal{K}^2 m^2}{c^2}\frac{1}{r^4}[1-\cos 2\mathcal{K}r] \tag{9.30}$$

при $r \to \infty$ и $t = 0$;

$$Q_{00}^{00}(t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\hbar^2\mathcal{K}^4 m^2}{t^2}\cos 2\mathcal{K}t \tag{9.31}$$

при $t \to \infty$; здесь m — масса спинорных частиц. Как видно из сравнения формул (9.21) — (9.23) и (9.29) — (9.31), амплитуда плотности $\Delta\rho$ в обоих случаях практически одна и та же и не зависит от массы частиц. Поведение же при больших r или t в случае бозе-статистики и ферми-статистики несколько различно.

10. ФЛЮКТУАЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Флюктуации гравитационного поля такого рода существенно отличаются от рассмотренных в предыдущем разделе только в том случае, если изменения метрики, вызванные присутствием заряда, велики. Классической моделью заряженной частицы может служить, например, «фридмон» [47] — частица с метрикой Фридмана во внутренней области и с метрикой типа шварцшильдовской во внешней области. Ограничимся здесь рассмотрением внешней области $r > r_0$, причем

$$r_0 = \sqrt{a_g a_0}, \tag{10.1}$$

где

$$a_g = 8\pi k m_0/c^3, \quad a = \varepsilon^2/(m_0 c^2), \tag{10.2}$$

т. е. длина r_0 — среднее геометрическое гравитационного радиуса a_g частицы и ее электромагнитного радиуса a_0. При определенном выборе координат [44] метрика для $r > r_0$ определяется интервалом

$$ds = g_{00}\, dt^2 - g_{rr}\, dr^2 - r^2\, d\Omega. \tag{10.3}$$

Здесь r — трехмерный радиус; Ω — угловые координаты так, что $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$; g_{00}, g_{rr} — компоненты метрического тензора, равные:

$$g_{00} = (1 - r_0/r)^2; \quad g_{rr} = 1/g_{00}. \tag{10.4}$$

Теперь заметим, что длина r_0 применительно к условиям микромира может быть записана в виде:

$$r_0 = \Lambda_g \sqrt{\varepsilon^2/\hbar c} < \Lambda_g. \tag{10.5}$$

Из (10.5) видно, что r_0 может быть меньше или сравнимым с длиной Λ_g. Однако результаты расчетов, приведенных в предыдущем разделе, показывают, что в этой области квантовые флюктуации гравитационного поля будут очень велики. Поэтому классические модели частицы, видимо, могут иметь лишь эвристическое значение. Качественное рассмотрение квантовых флюктуаций гравитационного поля и поведения квантовых полей в гравитационном поле может быть усовершенствовано на основании методики, предложенной в работе [45]. Эта методика основана на рассмотрении фейнмановских интегралов по траекториям при ограничении гауссовым приближением для фазы.

Рассмотрим совместно гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ и скалярное поле φ. Представим метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде (8.6), причем под $g_{\mu\nu}$ теперь будем понимать классическое гравитационное поле, а под $h_{\mu\nu}$ — квантовое. Интеграл Фейнмана

$$G = \int d\{\varphi\}\, d\{h\}\, \delta(N) \exp(i\Phi), \tag{10.6}$$

где символы $d\{\varphi\}$ и $d\{h\}$ означают интегрирование в функциональных пространствах R_φ и R_h, а множитель $\delta(N)$ учитывает возможные дополнительные условия $N=0$. Фаза Φ равна:

$$\Phi=\int\left[\frac{1}{\Lambda_g^2}\frac{1}{2}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}+\frac{1}{\hbar c}L\right]\sqrt{-g}\,dV. \qquad (10.7)$$

Здесь $\sqrt{-g}\,dV$ — инвариантный объем; g — определитель: $g=\|g_{\mu\nu}\|$; $R_{\mu\nu}$ — тензор кривизны; L — функция Лагранжа скалярного поля (9.4). Гравитационное действие

$$W=(1/2)\,R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \qquad (10.8)$$

в соответствии с разложением

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \qquad (10.9)$$

может быть заменено в интеграле (10.6):

$$W^*=\overline{W}+\overline{W}^{\mu\nu\rho\sigma}h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}+\overline{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}h_{\mu\nu}\,(\partial h_{\rho\sigma}/\partial x_\alpha)+$$
$$+\overline{W}^{\mu\nu\beta\sigma\alpha\beta}\,(\partial h_{\mu\nu}/\partial x^\alpha)\,(\partial h_{\rho\sigma}/\partial x_\beta), \qquad (10.10)$$

так как члены с первыми степенями $h_{\mu\nu}$ в силу классических (неквантовых) уравнений гравитационного поля выпадут при интегрировании в (10.6).

Изучение коэффициентов $\overline{W}^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\overline{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha}$, $\overline{W}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$ позволяет сделать качественные заключения о поведении квантового гравитационного поля в той области, где имеется сильное классическое поле, например, вблизи заряда. Для иллюстрации этого соображения рассмотрим более простой случай квантования скалярного поля φ в классическом гравитационном поле. В этом случае полагаем $h_{\mu\nu}=0$ и тензор $g^{\mu\nu}$ в (10.10) равным $\bar{g}^{\mu\nu}$.

Фаза $\overline{\Phi}$ в (10.7) принимает вид:

$$\Phi=\frac{1}{\Lambda_g^2}\int\overline{W}\sqrt{-g}\,dV+\frac{1}{2}\frac{1}{\hbar c}\int\left(\bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}-m^2\varphi^2\right)\sqrt{-g}\,dV. \qquad (10.11)$$

Интересующая нас квантовая часть этой фазы

$$\Phi^*=\frac{1}{2}\frac{1}{\hbar c}\int\left(\bar{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}-m^2\varphi^2\right)\sqrt{-\bar{g}}\,dV. \qquad (10.12)$$

Подставляя сюда $\bar{g}^{\mu\nu}$ из (10.4), получаем квантовое скалярное поле в классическом гравитационном поле заряда ε.

Нетрудно проверить, что в этом случае

$$g^{00}=1/g_{00}=(1-r_0/r)^{-2},\quad g^{rr}=-g_{00},\quad g^{\theta\theta}r^2,\quad g^{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta, \qquad (10.13)$$

так что

$$\sqrt{-\bar{g}}\,dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi\,dt=dx\,dy\,dz\,dt \qquad (10.14)$$

и плотность лагранжиана

$$L=\frac{1}{\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2-$$
$$-\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2\right]. \qquad (10.15)$$

Отсюда видно, что квантовые флюктуации производной поля по времени $\partial\varphi/\partial t$ в области $r > r_0$ становятся меньше (успокаиваются) в сравнении со случаем плоского пространства. Действительно, первый член в (10.15) дает тот же вклад в фазу интеграла Фейнмана, что и в псевдоевклидовом случае, но при значениях производной $|\partial\varphi/\partial t|$, меньших в $(1 - r_0/r)$ раз. Этот эффект гравитационного поля может быть понят в терминах «эффективной постоянной Планка», понятие о которой введено в работе [45]. А именно, канонически сопряженный полю импульс

$$\Pi=\partial L/\partial\varphi_t=g^{00}\varphi_t, \qquad (10.16)$$

и, следовательно, условие квантования гласит:

$$[\varphi_t(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)]=\frac{i\hbar}{g^{00}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=ih^*\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \qquad (10.17)$$

где $\hbar^*$ — эффективная постоянная Планка:

$$\hbar^*=h(1-r/r_0)^2 \qquad (10.18)$$

так, что при $r_0 \to r$ $\hbar^* \to 0$. Из (10.18) теперь непосредственно видно, что квантовые флюктуации производной φ_t падают по мере приближения к заряду. Однако радиальные флюктуации возрастают; действительно, второй член в (10.15), содержащий производную φ_r, имеет коэффициент, убывающий при $r \to r_0$. Поэтому возрастает вклад квантовых флюктуаций поля по направлению радиус-вектора, проведенного из центра заряда.

Этот пример показывает возможность качественного анализа влияния гравитации на квантовое поле, на основе интеграла Фейнмана (10.6).

11. ПРОСТРАНСТВО СНАЙДЕРА

К стохастическим пространствам может быть отнесено и пространство, впервые введенное Снайдером [46]. В этом пространстве координаты x^μ точечного события $\mathcal{P}(x)$ являются операторами $\hat{x}^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), не коммутирующими между собой, так что

$$[\hat{x}^\mu\hat{x}^\nu]=i\hat{C}^{\mu\nu}, \qquad (11.1)$$

где $\hat{C}^{\mu\nu}$ — некоторый оператор, подлежащий дальнейшему определению.

Из (11.1) следует, что измерение координаты x^{μ} вдоль некоторого направления $0x^{\mu}$ несовместимо с измерением координаты x^{ν}, взятой вдоль другого направления $0x^{\nu}$. Если $x^{\mu} = x^{\mu\prime}$, то относительно x^{μ} могут быть сделаны лишь вероятностные предсказания. Таким образом, координатное пространство Снайдера $S_4(x)$ является пространством стохастическим.

Определенная реализация условий (11.1) достигается на основе предположения, что пространство импульса $R_4(p)$ остается числовым пространством, однако его метрика отличается от псевдоевклидовой метрики (1.4) и является метрикой пространства Римана с постоянной кривизной:

$$dp^2 = g_{\mu\nu}(p)\, dp_{\mu}\, dp_{\nu}, \tag{11.2}$$

где $g_{\mu\nu}(p)$ — соответствующий метричный тензор *. Предположение о постоянной кривизне пространства $R_4(p)$ весьма ограничивает произвол в выборе этого тензора и позволяет дать разумное определение операторам $\hat{x}^{\mu}$.

Наиболее естественный путь определения тензора $g_{\mu\nu}(p)$ — это рассматривать метрику в $R_4(p)$ как метрику некоторой поверхности второго порядка, погруженной в псевдоевклидово пространство $R_5(p)$. Такая поверхность должна иметь вид:

$$g_5 p_5^2 + p_4^2 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2 = g_0 (\hbar^2/a^2). \tag{11.3}$$

Здесь все импульсы $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ считаются действительными. Величина $\hbar/a$ имеет смысл радиуса кривизны пятимерной гиперповерхности; a —«элементарная» длина, являющаяся характерным параметром теории **. Так как сигнатура $+ - - -$ в пространстве $R_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ определена, то имеются лишь четыре возможности: $g_0 = \pm 1$ и $g_5 = \pm 1$.

Одна из наиболее интересных возможностей заключается в выборе $g_0 = +1$, $g_5 = +1$ ***.

При таком выборе

$$p_5^2 + p_4^2 - \mathbf{p}^2 = \hbar^2/a^2. \tag{11.4}$$

Так как p_5 действительно, а разность $p_4^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ имеет смысл квадрата массы, то из (11.4) следует, что $\hbar/a$ играет роль макси-

* В работе [47] рассмотрен более общий случай.

** В дальнейшем следуем работам В. Г. Кадышевского и его сотрудников, благодаря которым теория пространства Снайдера приняла математически законченную форму.

*** Этот вариант метрики положен в основу квантовой теории поля, в которой точки в пространстве Снайдера рассматриваются как относительные координаты частиц. См. работу [49].

мально возможной массы частицы (максимона):

$$M = \hbar/a. \tag{11.5}$$

На пространственно-подобный импульс $p^2 < 0$ ограничений не накладывается.

В таком варианте геометрии Снайдера условия коммутации (11.1) удовлетворяются операторами:

$$\hat{x}^{\mu} = \mathrm{i} p_5 (\partial/\partial p_{\mu}); \quad C^{\mu\nu} = a^2 \mathcal{M}^{\mu\nu}; \quad \mathcal{M}^{\mu\nu} = \mathrm{i}\,[p\,(\partial/\partial p_{\nu}) - p_{\nu}(\partial/\partial p_{\mu})], \tag{11.6}$$

где $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$.

Таким образом, коммутатор (11.1) принимает вид:

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = \mathrm{i} a^2 \mathcal{M}^{\mu\nu}. \tag{11.7}$$

Оператор $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ — оператор бесконечно малых вращений гиперсферы (11.4) и может рассматриваться как оператор 4-момента количества движения.

Операторы $\hat{x}^{\mu}$ (11.6) являются генераторами вращения в плоскости $(5, \mu)$. Такие вращения играют роль сдвигов на гиперсфере. Поэтому в излагаемой интерпретации оператор $\hat{x}^{\mu}$ можно рассматривать как оператор бесконечно малых сдвигов:

$$f\,(p_{\mu}\,(+)\,\varepsilon) = f\,(p) + \varepsilon \hat{x}^{\mu} f\,(p). \tag{11.8}$$

Важный шаг, сделанный в работе [49], заключается в переходе от координатных операторов $\hat{x}^{\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ к полному набору операторов, содержащему операторы Казимира группы симметрии $SO\,(2, 3)$ гиперсферы (4), т. е. квадрат пятимерного момента

$$\frac{1}{2} M^{ik} M_{ik} = \frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} + \xi^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \left(g^{\mu\nu} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} --- \right) \equiv \tilde{\Box}. \tag{11.9}$$

Здесь g — детерминант тензора $g_{\mu\nu}$. Помимо (11.9) в рассматриваемый полный набор операторов целесообразно включить величину M_{54} *, т. е. оператор $\hat{x}^4$ (11.6), который играет роль времени. Этот оператор имеет особенно простой вид в системе координат $(\omega, \mathbf{p})$:

$$p_5 = \cos\omega \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}; \quad p_4 = \sin\omega \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}; \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}; \quad |\omega| \leqslant \pi, \quad 0 < p < \infty, \tag{11.10}$$

а именно

$$\hat{x}^4 = -\mathrm{i}\,(\partial/\partial\omega). \tag{11.11}$$

Очевидно, что его собственная функция

$$\psi_n\,(\omega) = \exp\{\mathrm{i} n \omega\}, \tag{11.12}$$

* Ср. с теорией момента количества движения в квантовой механике.

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а собственное значение оператора времени (если восстановить размерность)

$$x^4 = an. \tag{11.13}$$

Таким образом, в рассматриваемой геометрии время квантуется согласно (11.13).

Оператор $\tilde{\square}$ (11.9) является аналогом лапласиана $\square = \partial^2/\partial p_4^2 - \partial/\partial p_1^2 - \partial/\partial p_2^2 - \partial/\partial p_3^2$, который в случае плоского пространства является оператором интервала $s^2 \equiv t - \mathbf{x}^2$. Это обстоятельство дает основание толковать оператор $\tilde{\square}$ так же, как оператор интервала $\tilde{s}^2$ в пространстве Снайдера $\tilde{\square} \equiv \tilde{s}^2$. Собственные функции ψ_λ и собственные значения λ этого оператора определяются из уравнения

$$\hat{s}^2 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda. \tag{11.14}$$

Отсылая читателя к оригинальной работе [49], ограничимся здесь приведением результатов исследования уравнения (11.14). Собственные функции, отвечающие полному набору переменных

$$\psi_{\lambda, \ldots} = \psi_{\lambda, n, l, m}(p_1 p_2 p_3 p_4), \tag{11.15}$$

где квантовое число n совпадает с n в (11.12), (11.13), числа l, m — имеют значение индексов сферических гармоник; наконец, число λ представляет две серии: дискретную

$$\lambda = L(L+3), \quad L = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{11.16}$$

и непрерывную

$$\lambda = -(3/2)^2 - \Lambda^2, \quad 0 \leqslant \Lambda < \infty. \tag{11.16$'$}$$

Первая серия представляет собой собственные значения времениподобного интервала $s^2 > 0$ (причем $|n| \geqslant L + 3$), вторая серия соответствует пространственно-подобным интервалам $s^2 < 0$.

Из (11.16) и (11.16′) следует, что в рассматриваемой геометрии не существует светового конуса, так как между $s^2 > 0$ и $s^2 < 0$ имеется разрыв.

С помощью функций (11.15) можно ответить на вопрос, какова вероятность того, что при заданном интервале s^2 длина проекции луча на некоторое новое направление (0,4′), отличное от (0,4), будет равна an'. Эта вероятность определяется квадратами модулей коэффициентов $Д^\lambda_{nlmn'l'm'}(\alpha)$ в разложении:

$$\psi_{\lambda, n, l, m}(p) = Д^\lambda_{nlmn'l'm'}(\alpha)\, \psi_{\lambda n'l'm'}(p'), \tag{11.17}$$

где под α подразумеваются параметры, определяющие поворот от направления (0,4) к направлению (0, 4′).

Таким образом,

$$w(nlm, n'l'm') = |Д^\lambda_{nlmn'l'm'}(\alpha)|^2. \tag{11.18}$$

С помощью этой формулы решается вопрос о вероятности того или иного значения координаты x'_4, если задан интервал s^2 и задано значение координаты x_4.

Аналогично можно рассуждать относительно пространственно-подобных лучей, лежащих внутри $s^2 < 0$, т. е. в непрерывной серии (11.16′).

12. ПРОСТРАНСТВО $\Gamma_4(\hat{x})$ И НЕЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Ранее была рассмотрена гипотеза о существовании максимона частицы с наибольшей массой и было указано на то, что гипотеза ведет к представлению о пространстве, в котором координаты точек $\mathcal{P}$ определены лишь с некоторой вероятностью, т. е. к стохастическому пространству $R_4(\hat{x})$.

Координаты точечного события $\mathcal{P}(x)$ в таком пространстве могут быть представлены в виде суммы:

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + \hat{\xi}^\mu(x), \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{12.1}$$

где x^μ — среднее значение координаты точечного события $\mathcal{P}(x)$, которая может интерпретироваться как координата точечного события $\mathcal{P}(x)$ в римановом пространстве $R_4(x)$; $\hat{\xi}_\mu$ — отклонение координаты от среднего (которое является стохастической величиной). По определению среднее от $\hat{x}^\mu$

$$\langle \hat{x}^\mu \rangle_R = x^\mu; \quad \langle \hat{\xi}^\mu \rangle_R = 0, \tag{12.2}$$

где $\langle \ldots \rangle_R$ обозначает усреднение по статистическому ансамблю, в котором определены вероятности тех или иных значений $\hat{\xi}_\mu$. Природа и характер этого ансамбля определяются физикой.

Заметим, что при заданной средней координате точечного события ξ^μ имеет смысл дифференциала x и определяет в стохастическом смысле окрестность точки $\mathcal{P}(x)$. Элемент длины в этой окрестности $\Delta\hat{s}$ определим, следуя принципам геометрии Финслера [50]. В этой геометрии элемент длины ds в окрестности каждой точки пространства задается в виде формы первого порядка по dx^μ:

$$ds = n_\mu \, dx^\mu, \tag{12.3}$$

причем в этой формуле вектор n может быть функцией координат точки $\mathcal{P}(x)$, а также зависеть от отношений дифференциалов dx^μ/dx^ν. В случае пространства Минковского вектор n постоянен и $n^2 = 1$. Для времениподобного направления вектора n элемент длины ds чисто мнимый. В нашем случае роль dx^μ играют конечные величины Δx^μ, так что элемент длины $\Delta\hat{s}$ является также конечной, стохастической величиной:

$$\Delta\hat{s} = n_\mu \Delta\hat{x}^\mu = n_\mu \xi^\mu. \tag{12.4}$$

Среднее от произведения величин $\xi^\mu(x)$ и $\xi^\nu(y)$

$$\langle \hat{\xi}^\mu(x), \xi^\nu(y) \rangle = C^{\mu\nu}(x, y) \tag{12.5}$$

определяет корреляцию окрестностей точек $\mathcal{P}(x)$ и $\mathcal{P}(y)$. Простейшим является случай, когда отсутствует корреляция:

$$\langle \xi^\mu(x), \xi^\nu(y) \rangle_R = 0, \quad x \neq y. \tag{12.6}$$

Если стохастическое пространство однородно, то $\hat{\xi}^\mu(x)$ не зависят от x. Однако условие (12.6) сохраняет свое значение и в этом вырожденном случае и означает, что каждой точке $\mathcal{P}(x)$ приписывается свой, только ей принадлежащий вектор $\hat{\xi}^\mu(x)$, одинаковый в статистическом понимании для всех точек в $R_4(x)$.

Рассмотрим теперь одну из реализаций стохастического пространства $R_4(\hat{x})$. Положим

$$\hat{x}^\mu = x^\mu + a\gamma^\mu; \quad \hat{\xi}^\mu = \alpha\gamma^\mu, \tag{12.7}$$

где γ^μ — матрицы Дирака и a — амплитуда флюктуации координаты. Допустим, что существует некоторое распределение длины a, например нормальное:

$$dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{da}{\Lambda} \exp\left\{-\frac{a^2}{\Lambda^2}\right\}, \tag{12.8}$$

где Λ —«элементарная длина». Таким образом, $\hat{\xi}_\mu$ является оператором с неопределенной амплитудой. Из (12.4) и (12.7) следует:

$$\Delta\hat{s} = a(n_\mu\gamma^\mu) = a(n\gamma). \tag{12.9}$$

Формулы (12.7) — (12.9) определяют особое пространство $\Gamma_4(x)$, являющееся частным случаем стохастического пространства $R_4(\hat{x})$ [51].

Операторы элемента длины $\Delta\hat{s}$, взятые в одной и той же точке, но для разных направлений n не коммутируют между собою, так как

$$[\xi^\mu \xi^\nu] = 2a^2\delta^{\mu\nu}, \tag{12.10}$$

где $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. В силу этого окрестность точки $\mathcal{P}(x)$ распадается на отдельные, несовместимые друг с другом лучи. В этом свойстве пространства $\Gamma_4(x)$ можно усмотреть аналогию с «квантованным» пространством Снайдера.

Эта аналогия становится еще более убедительной, если заметить, что коммутатор операторов

$$[\hat{\xi}^{\mu}, \hat{\xi}^{\nu}] = \mathrm{i}a\Sigma^{\mu\nu}, \tag{12.10'}$$

где $\Sigma^{\mu\nu}$ — известный оператор спина. Аналогия между (12.10′) и (11.7) совершенно очевидна.

Найдем собственные значения λ оператора Δs. Для этого следует решить уравнение

$$\Delta\hat{s}u_{\lambda} - \lambda u_{\lambda}, \tag{12.11}$$

где u_{λ} — собственный спинор. Уравнение (12.11) решается элементарно, при этом получаем

$$\lambda_{\pm} = \pm a\sqrt{n^2}, \quad u_{\lambda} = \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}/(n_4 + \lambda), \tag{12.12}$$

где σ — векторная матрица Паули.

Ввиду того что нет оснований предпочесть одно из собственных значений другому, будем считать, что состояние окрестности любой точки $\mathcal{P}(x)$ является смешанным и оба значения $\lambda_{\pm}$ равновероятны.

При этом предположении усреднение любой функции $f(\Delta\hat{s})$ в окрестности какой-либо точки в пространстве $\Gamma_4(\hat{x})$ определяется формулой:

$$\langle f(\Delta\hat{s})\rangle_{\Gamma} = \frac{1}{2}\int dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right)[f(\lambda_{+} + f(\lambda_{-})]. \tag{12.13}$$

Такое усреднение возможно в каждой точке $\mathcal{P}(x)$ и статистически независимо от усреднения в другой точке $\mathcal{P}(y)$, если только $x \neq y$.

Обратимся теперь к рассмотрению полей.

Под полем в пространстве $\Gamma_4(\hat{x})$ будем подразумевать представимую в виде интеграла Фурье функцию Ψ:

$$\psi(\hat{x}) = \int \tilde{\psi}(k)\exp(\mathrm{i}k\hat{x})\,d^4k. \tag{12.14}$$

Функции $\Psi(\hat{x})$ суть функции операторов $\hat{x}^{\mu}$ и поэтому не удовлетворяют какому-либо дифференциальному уравнению. Дифференциальное уравнение для $\Psi(\hat{x})$ можно заменить условием типа:

$$\tilde{\psi}(k) = \delta(k^2 + m^2)f(k), \tag{12.15}$$

накладываемым на ее фурье-образ $\tilde{\Psi}(k)$. Это условие выражает закон дисперсии волн $\Psi(\hat{x})$. При этом предполагается, что $f(k)$ уже не содержит δ-функций.

Найдем теперь среднее поле $\Psi(x)$. Для этого заметим, что на основании (12.7) и (12.12) собственные значения оператора $\exp(\mathrm{i}\, k\hat{x})$ равны:

$$f_{\pm}(k, x) = \exp\left[\mathrm{i}\left(kx \pm a\sqrt{k^2}\right)\right], \tag{12.16}$$

и, согласно (12.13), их среднее значение

$$\langle f_{\pm}(k, x)\rangle_{\Gamma} = \exp(\mathrm{i}kx) \int dw(a) \exp\left(\mathrm{i}a\sqrt{k^2}\right) \tag{12.17}$$

[если $dw(a) = dw(-a)$]. В силу этого среднее поле

$$\Psi(x) = \langle \Psi(\hat{x})\rangle_{\Gamma} = \int \tilde{\Psi}(k) \exp(\mathrm{i}kx)\, \tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}\right) d^4k, \tag{12.18}$$

где, согласно (17.17),

$$\tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}\right) = \int dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right) \exp\left(\mathrm{i}a\sqrt{k^2}\right). \tag{12.19}$$

Если $\tilde{\mathscr{K}}(z)$ — целая функция, то из (12.15) следует

$$\Box^2\Psi(x) + m^2\Psi(x) = 0, \tag{12.20}$$

т. е. среднее поле удовлетворяет уравнению Клейна. Для дальнейшего удобно несколько изменить обозначения. Положим

$$\tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}, m\right) = \tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}\right)/\tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{-m^2}\right); \tag{12.21}$$

$$\tilde{\Phi}(k) = \tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{-m^2}\right)\tilde{\Psi}(k). \tag{12.21$'$}$$

Тогда, вместо (12.18) получим

$$\Psi(x) - \int \tilde{\Phi}(k)\, \tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}, m\right) \exp(\mathrm{i}kx)\, d^4x. \tag{12.22}$$

Из $\tilde{\Phi}(k)$ можно построить локальное поле:

$$\Phi(x) = \int \tilde{\Phi}(k) \exp(\mathrm{i}kx)\, d^4k, \tag{12.23}$$

также удовлетворяющее уравнению (12.20), если $\tilde{\mathscr{K}}(z)$ — функция целая. Из (12.22) следует:

$$\Psi(x) = \int \mathscr{K}(x-y)\, \Phi(y)\, d^4y, \tag{12.24}$$

где $\mathscr{K}(x)$ — пространственный образ фурье-функции $\tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}, m\right)$:

$$\mathscr{K}(x) = \int \tilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2}, m\right) \exp(\mathrm{i}kx)\, d^4k. \tag{12.25}$$

Заметим, что $\mathscr{K}(x)$ может и не существовать, однако представление (12.24) все же будет иметь силу.

Обратимся теперь к среднему от произведения полей $\langle\Psi(\hat{x})\times\times\Psi(\hat{y})\rangle$, взятых в различных точках пространства. На основании предположения о статистической независимости окрестностей различных точек $\mathcal{P}(x)$ и $\mathcal{P}(y)$

$$\langle\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{y})\rangle_\Gamma=\langle\Psi(\hat{x})\rangle_\Gamma\langle\Psi(\hat{y})\rangle_\Gamma \tag{12.26}$$

и

$$\langle\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{x})\rangle_\Gamma=\lim_{\delta\to0}\langle\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{x}+\delta)\rangle_\Gamma=$$
$$=\langle\Psi(\hat{x})\rangle_\Gamma\langle\Psi(\hat{x})\rangle_\Gamma. \tag{12.27}$$

Таким образом, каждому полю $\Psi(\hat{x})$ в пространстве $\Gamma_4(x)$ сопоставляется нелокальное поле $\Psi(x)$ в пространстве $R_4(x)$ как результат усреднения поля в окрестности каждой точки $\mathcal{P}(x)$. Далее нелокальному полю $\Psi(x)$ согласно (12.23) и (12.24) сопоставляется локальное поле $\Phi(x)$.

Обратимся теперь к квантованию поля $\Psi(\hat{x})$. Наиболее прямой путь построения коммутационных условий для такого поля, взятого в различных точках x и y, основывается на использовании (12.22) или (12.24), которые связывают среднее нелокальное поле с локальным. Эти соотношения позволяют построить среднее от коммутатора полей $\Psi(\hat{x})$ и $\Psi(\hat{y})$ и выразить его через коммутатор $D(x-y)$ локальных полей $\hat{\Phi}(x)$ и $\hat{\Phi}(y)$:

$$\langle[\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{y})]\rangle_\Gamma=[\Psi(x)\,\Psi(y)]=$$
$$=\int\mathcal{K}(x-x')\,\mathcal{K}(y-y')\,d^4x'd^4y'\,[\hat{\Phi}(x')\,\hat{\Phi}(y')]=$$
$$=\int\mathcal{K}(x-x')\,\mathcal{K}(y-y')\,d^4x'd^4y'\cdot\mathrm{i}D(x'-y')=\mathrm{i}D_\Gamma(x-y), \tag{12.28}$$

где

$$D_\Gamma(x-y)=\int\tilde{V}\left(\Lambda\sqrt{q^2},\,m\right)\tilde{D}(q)\exp[\mathrm{i}q(x-y)]\,d^4q \tag{12.29}$$

и

$$\tilde{V}\left(\Lambda\sqrt{q^2},\,m\right)=\left[\tilde{\mathcal{K}}\left(\Lambda\sqrt{q^2},\,m\right)\right]^2. \tag{12.30}$$

Подобным же образом может быть построено T-произведение, упорядоченное по среднему времени:

$$\langle T\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{y})\rangle_\Gamma=T\,(\Psi(x)\,\Psi(y))=$$
$$=T\int\tilde{\mathcal{K}}\left(\Lambda\sqrt{k'^2},\,m\right)\tilde{\mathcal{K}}\left(\Lambda\sqrt{k''^2},\,m\right)d^4k'd^4k''\times$$
$$\times T\,[\Phi(k')\exp(\mathrm{i}k'x)\,\Phi(k'')\exp(\mathrm{i}k''x]. \tag{12.31}$$

Усредним теперь это выражение по вакууму локальных полей. Учитывая, что

$$\langle 0 \,|\, T\Phi(k')\,\Phi(k'')\exp\{\mathrm{i}(k'x+k''y)\}\,|\,0\rangle = \\ = \delta^4(k'+k'')\exp[\mathrm{i}k'(x-y)]\,\widetilde{D}_c(k'), \tag{12.32}$$

получим

$$\langle 0 \,|\, \langle T(\Psi(\hat{x})\,\Psi(\hat{y}))\rangle_\Gamma \,|\, 0\rangle \equiv \langle 0 \,|\, T\Psi(x)\,\Psi(y)\,|\,0\rangle = D_{c\Gamma}(x-y), \tag{12.33}$$

где

$$D_{c\Gamma}(x-y) = \int \widetilde{V}\left(\Lambda\sqrt{q^2},\, m\right)\widetilde{D}_c(q)\exp[\mathrm{i}q(x-y)] \tag{12.34}$$

нелокальная причинная функция, а $\widetilde{D}_c(q)$ есть фурье-образ локальной причинной функции:

$$\widetilde{D}_c(q) = 1/(k^2+m^2+\mathrm{i}\varepsilon). \tag{12.35}$$

Из формул (12.28) — (12.30), (12.33) и (12.35) следует, что нелокальное поле $\Psi(x)$, полученное в результате усреднения поля $\Psi(\hat{x})$ в стохастическом пространстве $\Gamma_4(x)$, обладает всеми чертами нелокального поля (подробно исследованного в работах [52, 53]) при условиях, что функция $\widetilde{V}(z, m)$, $z = \Lambda\sqrt{k^2}$ является целой, имеет рост в комплексной плоскости z, $V(z, m) \sim \sim \exp(|z|\rho)$; $\rho \geqslant 1/2$, равна 1 при $z = \Lambda\sqrt{-m^2}$ и убывает в пространственно-подобной области, т. е. при $k^2 \to \infty$. При этих условиях матрица рассеяния, построенная на основе нелокального поля, удовлетворяет требованиям унитарности и макроскопической причинности [53]. Указанные необходимые требования к функции $\widetilde{V}(z, m)$ на основании (12.19), (12.21) и (12.30) могут быть сформулированы на языке моментов амплитуды a. Действительно, из (12.19) следует:

$$\widetilde{\mathscr{K}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\int dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right)\left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \Sigma\,\frac{b_n}{n!}(\mathrm{i}z)^n, \tag{12.36}$$

где

$$b_n = \int dw\left(\frac{a}{\Lambda}\right)\left(\frac{a}{\Lambda}\right)^n \tag{12.37}$$

есть момент n-го порядка от a/Λ. Таким образом, функция $\widetilde{\mathscr{K}}(z)$ полностью определена моментами амплитуды.

Если $dw(a/\Lambda)$ — нормальное распределение (12.8), то из (12.19) и (12.21) следует:

$$\widetilde{\mathscr{K}}(z, m) \equiv \widetilde{\mathscr{K}}\left(\Lambda\sqrt{k^2},\, m\right) = \exp[(-\Lambda^2/4)(k^2+m^2)]; \tag{12.38}$$

$$\widetilde{V}(z, m) \equiv \widetilde{V}\left(\Lambda\sqrt{k^2},\, m\right) = \exp[(-\Lambda^2/2)(k^2+m^2)]. \tag{12.39}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям, необходимым для соблюдения унитарности матрицы рассеяния.

Для иллюстрации соблюдения в этой теории макроскопической причинности возьмем в (12.24) в качестве $\Phi(y)$ пробную функцию

$$\Phi(y) = \exp\left[-\frac{y_0^2+\mathbf{y}^2}{b^2}\right] = \int \exp\left[-\frac{b^2}{4}(q_0^2+\mathbf{q}^2) + iqy\right] d^4q \qquad (12.40)$$

и $\mathcal{K}(\Lambda\sqrt{k^2}, m)$.

Тогда

$$\mathcal{K}(x-y) = \int \exp\left[-\frac{\Lambda^2}{4}(k^2-m^2) + ik(x-y)\right] d^4k =$$
$$= \exp[-(\Lambda/4)m^2]\exp[-(x-y)^2/\Lambda^2]. \qquad (12.41)$$

Подставляя (12.41) и (12.42) в (12.24), находим

$$\Psi(x) \approx \exp[-(\Lambda/4)m^2]\exp[-(x_0^2/T - \mathbf{x}^2/L^2)], \qquad (12.42)$$

где

$$T = l^2 - \Lambda^2; \quad L^2 = l^2 + \Lambda^2. \qquad (12.43)$$

Отсюда видно, что при $l \gg \Lambda$, т. е. для волновых пакетов, размеры которых превосходят элементарную длину Λ, нелокальная волновая функция Ψ лишь несколько размыта в окрестности локальной функции $\Phi(x)$.

Из (12.44) можно было бы заключить, что причинность полностью нарушается при $l < \Lambda$ (так как тогда $T^2 < 0$).

Однако это обстоятельство связано с тем, что волновой пакет (12.41) имеет фурье-образ $\tilde{\Phi}(q)$ того же роста, что и $\tilde{\mathcal{K}}(a\sqrt{k^2}, m)$, и поэтому не удовлетворяет общим требованиям теории Ефимова. Согласно этим требованиям, все пробные функции должны иметь рост $\gamma < 1/(1-1/2\rho)$. Пробные функции $\Phi(y)$ такого роста «размазываются» оператором $\mathcal{K}(x-y)$ в ограниченной четырехмерной области, причем сдвиг аргумента y_0 чисто мнимый, а аргумент $\mathbf{y}$ действительный [52].

Это любопытное обстоятельство в теории стохастического пространства $\Gamma_4(x)$ связано с тем, что оператор $\xi^0 = \xi^4/i$ чисто мнимый.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Poincare H.** La mesure du temps. Rev. de Metaphysique et de Morale. 1898, V.VI.
2. **Эйнштейн А.** Сб. науч. трудов, 1965, с. 7; Сущность теории относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. **Мандельштам Л. И.** Сб. соч., т. 1, «Наука», 1965.
4. **Фридман А. А.** Мир как пространство и время. М., «Наука», 1965.
5. **Тяпкин А. А.** УФН, 1972, 106, 617; **Кадомцев Б. Б. и др.**, там же.
6. **Блохинцев Д. И.** Пространство и время в микромире. М., «Наука», 1970.
7. **Марцке Р., Уилер Д. А.** Гравитация и относительность. М., «Мир», 1965.

8. **Синг Дж.** Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. Изд. 4-е, М., «Наука», 1967.
10. **Уиллер Дж. и др.** Теория гравитации и гравитационный коллапс. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
11. **Blokhintsev D. I.** Acta phys. Acad., scient. hung., 1967, v. 22, p. 307.
12. **Weisskopf V.** Phys. Rev., 1939, v. 56, p. 72.
13. **Попов В. С.** «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 429.
14. **Ambarzumian V., Ivanenko D.** Z. Phys., 1930, Bd. 64, S. 563.
15. **Landau L., Peierls R.** Z. Phys., 1931, Bd. 69, S. 56.
16. **Schrodinger E.** Sitz. Berlin., Preuss. Akad. Wiss., 1931, Bd. 12, S. 238.
17. **Соловьев Л. Д.** В кн. «XV Международная конференция по физике высоких энергий. Киев, 1970». Киев, «Наукова думка», 1972.
18. **Марков М. А.** Препринт ОИЯИ Е-2014, Дубна, 1966.
19. **Марков М. А.** Препринт ОИЯИ Е2-5271, Дубна, 1970.
20. **Блохинцев Д. И.** УФН, 1957, т. XII, с. 381.
21. **Блохинцев Д. И.** УФН, 1973, т. 110, с. 481.
22. **Биленький С. М.** Введение в диаграммную технику. М., Атомиздат, 1971.
23. **Блохинцев Д. И.** Препринт ОИЯИ Р2-6094, Дубна, 1971.
24. **Blokhintsev D. I.** Preprint JINR E2-6566, 1972.
25. **Mengree K.** Proc. Nat. Acad. Soc., 1959, v. 37, p. 226.
26. **Schweizer B.** A. Sklar. Posific. J. Math., 1960, v. 10, p. 313.
27. **Schmeizer B.** Probalistic metric Space — the first 25 years University of Massachusetts, 1967.
28. **Шерстнев А. Н.** «Докл. АН СССР», 1963, т. 149, с. 280.
29. **March A.** Z. Phys., 1934, Bd. 104, S. 93, 161; 1937, Bd. 105, S. 620.
30. **Марков М. А.** Гипероны и К-мезоны. М., Физматгиз, 1958.
31. **Jukawa H.** Research Inst. Fund. Phys. Kyoto University, PIEP-55, 1966.
32. **Ingraham R. I.** Renormalisation Theory of Quantum Field with a Cut off. Gordon et Beach, N.Y. (11-67).
33. **Блохинцев Д. И.** «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, с. 573.
34. **Блохинцев Д. И.** ТМФ, 1972, Т. 11, с. 3.
35. **Блохинцев Д. И.** Препринт ОИЯИ, Е2-5922, Дубна, 1971.
36. **Welton T.** Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 1157. См. также: в сб.: «Вопросы причинности в квантовой механике». Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
37. **Блохинцев Д. И., Орлов В. И.** ЖЭТФ, 1953, т. 25, с. 513.
38. **Блохинцев Д. И.** «Докл. АН СССР», 1953, т. 82, с. 553. Nuovo cimento Suppl. Ser., 1956, v. 7, N 3, p. 629.
39. **Блохинцев Д. И.** «Докл. АН СССР», 1966, т. 168.
40. **Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу.** Препринт ОИЯИ Р2-4605, Дубна, 1969.
41. **Барбашов Б. М., Черников Н. А.** ЖЭТФ, 1965, т. 50, вып. 5.
42. **Blokhintsev D. I.** Nuovo cimento, 1960, v. 16, p. 382.
43. **Марцке Р., Уилер Д.** В сб.: «Гравитация и относительность». Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
44. **Марков М. А.** К теории фридмонов. Препринты ОИЯИ Е2-644, 1966; Е2-5271, 1970; Р2-5289, 1970.
45. **Блохинцев Д. И.** ТМФ, 1970, т. IV, р. 145.
46. **Snyder H.** Phys. Rev., 1947, v. 71, p. 38.
47. **Тамм И. Е.** XII Межд. конф. по физике высоких энергий. Дубна, 1964, т. II, 229.
48. **Кадышевский В. Г.** ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1885; «Докл. АН СССР», 1962, т. 147, с. 588.
49. **Dankov A. D.** e.a. Preprint JINR E2-6992, 1973.
50. **Rund H.** The differential geometry of Finsler Space.— J. Springer, 1959.
51. **Блохинцев Д. И.** ТМФ, 1973, т. 17, с. 153.
52. **Ефимов Г. В.** Com. Math. Phys., 1967, v. 5, p. 42; 1968, v. 7, p. 138.
53. **Алебастров В. А., Ефимов Г. В.** Сообщение ОИЯИ Р2-6586, Дубна, 1972.