ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА, 1974, ТОМ 5, ВЫП. 3

УДК 539.12.01

ПЕРЕНОРМИРОВКА КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЙ

А. А. Славнов

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

Рассматривается процедура перенормировки калибровочно-инвариантных теорий. Подробно разбираются теории со спонтанно нарушенной симметрией.

Renormalization procedure for gauge invariant theories is considered. The models with spontaneously broken symmetry are analyzed in detail.

ВВЕДЕНИЕ

За последние два года теория калибровочных полей превратилась из довольно экзотической науки, интересовавшей лишь немногих специалистов, в один из наиболее популярных разделов квантовой теории поля. Бурный рост интереса к калибровочным полям начался после работы Хоофта [1], извлекшего из забвения статьи Хиггса [2], Киббла [3] и Вайнберга [4] и показавшего, что техника квантования калибровочно-инвариантных теорий, развитая в работах В. Н. Попова и Л. Д. Фаддеева [5] и Де Витта [6], применима и к моделям со спонтанно нарушенной симметрией, позволяющим описывать векторные поля с ненулевой массой.

С тех пор появилось большое число работ, посвященных квантованию и перенормировке моделей с нарушенной симметрией, в которых зачастую «переоткрываются» результаты, уже хорошо известные в теории калибровочных полей. Между тем вся техника квантования [5—8] и перенормировки [9—11], развитая для моделей без спонтанного нарушения симметрии, практически без изменений переносится и на этот случай. Поэтому в данном обзоре мы постараемся изложить с единой точки зрения общие методы квантования и перенормировки калибровочно-инвариантных теорий, используя в качестве иллюстрации модели со спонтанно нарушенной симметрией.

Во втором разделе обсуждается роль калибровочной инвариантности во взаимодействиях элементарных частиц, третий раздел посвящен изложению хиггсовского механизма спонтанного нарушения симметрии; в четвертом на примере модели Киббла описана общая процедура квантования калибровочно инвариантных теорий, в пятом строится процедура перенормировки, наконец, в шестом разделе рассмотрены возможные применения калибровочных полей к слабым и электромагнитным взаимодействиям и проблема аномальных тождеств Уорда.

1. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Основные ограничения на вид лагранжиана взаимодействия накладываются требованиями инвариантности относительно той или иной группы. Однако требования релятивистской инвариантности, изотопической симметрии и прочих строго установленных симметрий оставляют большой произвол в выборе лагранжиана, для ликвидации которого обычно прибегают к феноменологии. В связи с этим уже давно делались попытки постулировать инвариантность относительно некоторой более широкой группы преобразований, что позволило бы фиксировать вид взаимодействия и с единой точки зрения описывать все взаимодействия элементарных частиц. По-видимому, роль такой группы может играть бесконечномерная группа локальных калибровочных преобразований.

Как известно, уравнения электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженными полями ψ, инвариантны относительно калибровочных преобразований:

$$\begin{gathered}\psi(x)\rightarrow\exp[ie\alpha(x)]\,\varphi(x);\\ \bar\psi(x)\rightarrow\exp[-ie\alpha(x)]\,\bar\psi(x);\\ A_\mu\rightarrow A_\mu+\partial\alpha/\partial x^\mu.\end{gathered}\qquad(1)$$

Янг и Миллс [12] обобщили понятие о калибровочной инвариантности на случай группы SU_2 (случай произвольной компактной группы был рассмотрен в работах Утиямы [13], Глешоу и Гелл-Манна [14] и Швингера [15]). Их аргументация вкратце сводилась к следующему. Закон сохранения изоспина обусловлен инвариантностью лагранжиана относительно изотопических вращений с независящими от координат параметрами, т. е. относительно одновременных преобразований полей во всех пространственно-временных точках. Однако в локальной теории кажется естественным потребовать инвариантности относительно независимых преобразований полей в различных пространственно-временных точках. Подтверждением справедливости этой гипотезы является электромагнитное взаимодействие, лагранжиан которого инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований (1).

Требование инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований

$$\delta\psi(x) = \lambda T^a \alpha^a(x) \psi(x) \tag{2}$$

(здесь $\alpha^a(x)$ — бесконечно малые функции, а матрицы T реализуют представление некоторой компактной группы G), приводит к необходимости введения векторного «компенсирующего» поля $A^a_\mu(x)$, которое является аналогом фотона в случае абелевой калибровочной группы и преобразуется по закону

$$\delta A^a_\mu(x) = \lambda t^{abc} A^b_\mu \alpha^c + \partial\alpha^a/\partial x^\mu, \tag{3}$$

где t_{abc} — структурные константы алгебры Ли группы G

$$[T^a, T^b] = t^{abc} T^c. \tag{4}$$

Иногда будем также пользоваться матрицами $A_\mu(x)$, значения которых при каждом x принадлежат алгебре Ли:

$$A_\mu(x) = t^a A^a_\mu(x), \tag{5}$$

где t^a — генераторы, нормированные условиями

$$(t^a)^{bc} = t^{abc}; \; [t^a, t^b] = t^{abc} t^c;$$
$$Tr(t^a, t^b) = -2\delta^{ab}. \tag{6}$$

Конечное преобразование, соответствующее инфинитезимальному преобразованию (3), выглядит в терминах этих матриц следующим образом:

$$A_\mu \to \Omega A_\mu \Omega^{-1} - (1/\lambda)\, \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}. \tag{7}$$

$\Omega(x)$ при каждом x — элемент группы G. В частности, в экспоненциальной параметризации

$$\Omega(x) = \exp[\lambda t^a \alpha^a(x)]. \tag{8}$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие векторного поля A_μ с прочими полями ψ, строится путем замены обычной производной ковариантной

$$D_\mu = (\partial_\mu - \lambda T^a A^a_\mu). \tag{9}$$

Инвариантный лагранжиан свободного (точнее говоря, самодействующего) поля Янга — Миллса, так же как в электродинамике, выражается через тензор напряженности

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \lambda [A_\mu, A_\nu], \tag{10}$$

преобразующийся по закону

$$F_{\mu\nu} \to \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}, \tag{11}$$

и имеет вид:

$$L = (1/8)\, Tr F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Описанная выше конструкция допускает красивую геометрическую интерпретацию, в которой калибровочные поля A_μ играют роль коэффициентов связности расслоенного пространства, базой которого является четырехмерное пространство — время, а слоем — групповое пространство калибровочной группы. При этом тензор $F_{\mu\nu}$ играет роль тензора кривизны этого пространства, а ковариантные производные D_μ имеют смысл обычных ковариантных производных в кривом пространстве.

Сакураи [16] предложил рассматривать требование локальной калибровочной инвариантности в качестве фундаментального физического принципа, согласно которому каждому закону сохранения должно соответствовать калибровочное или «компенсирующее» поле, взаимодействие с которым описывается лагранжианом, инвариантным относительно преобразований типа (2), (3). Этот принцип устанавливает естественную и изящную связь между свойствами симметрии и динамикой и приводит к ряду важных физических следствий, в частности, к универсальности взаимодействия.

Существенным недостатком гипотезы Сакураи являлось то обстоятельство, что лагранжиан (12) описывает безмассовое поле, в то время как все известные (а также постулируемые) векторные частицы, кроме фотона, имеют ненулевую массу.

Введение массового члена в виде $(m^2/2)\, A_\mu A_\mu$ нарушает калибровочную инвариантность. Эту трудность можно обойти с помощью обобщенного формализма Штюкельберга [17]. Штюкельберг предложил калибровочно-инвариантную формулировку теории нейтрального массивного векторного поля, в которой инвариантность обеспечивается введением вспомогательного скалярного поля, преобразующегося по закону

$$B \to B + m\alpha(x). \tag{13}$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан можно записать в виде:

$$L = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(A_\mu - \frac{1}{m}\cdot\frac{\partial B}{\partial x^\mu}\right)^2 + \\ + \bar{\psi}\,[\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + M]\,\psi. \tag{14}$$

Векторное поле описывается пятикомпонентной величиной (A_μ, B). Однако, так же как в электродинамике, калибровочная инвариантность приводит к уменьшению числа степеней свободы на две, и в итоге остается три степени свободы в соответствии с тремя возможными состояниями поляризации массивного векторного поля.

Обобщение формализма Штюкельберга на случай неабелевой калибровочной группы можно построить, если ввести существенно нелинейное поле $\Pi(x)$, являющееся при каждом x элементом группы G. Если потребовать, чтобы при калибровочных преобразованиях (7) поле П преобразовывалось по закону

$$\Pi(x) \to \Omega(x)\,\Pi(x), \tag{15}$$

то не нарушая калибровочной инвариантности, можно ввести массовый член вида:

$$(m^2/4)\,Tr\,(A_\mu - L_\mu)^2, \tag{16}$$

где векторное поле

$$\mathbf{L}_\mu(x) = (1/\lambda)\,\Pi\,(\partial\Pi^{-1}/\partial x^\mu), \tag{17}$$

и, как следует из (15), при калибровочных преобразованиях преобразуется так же, как A_μ:

$$\mathbf{L}_\mu \to \Omega L_\mu \Omega^{-1} - \frac{1}{\lambda}\,\Omega\partial_\mu\Omega^{-1}. \tag{18}$$

Упомянутая выше калибровочно-инвариантная формулировка теории массивного векторного поля подробно описана в обзоре [18]. Отсылая читателя, интересующегося деталями, к этому обзору, укажем лишь, что достоинством этой формулировки является отсутствие физических дополнительных частиц (скалярные поля П могут быть устранены калибровочным преобразованием и отсутствуют в асимптотических состояниях), но из-за существенной нелинейности поля П (x) соответствующая теория в обычном смысле неперенормируема.

Недавно Фаддеев [19] предложил модель слабых и электромагнитных взаимодействий, основанную на некоторой модификации описанного выше формализма (в этой модели две компоненты векторного поля имеют массу, а третья, отождествляемая с фотоном, остается безмассовой). Эта модель выгодно отличается своей экономичностью (не приходится вводить никаких ненаблюдавшихся пока частиц, кроме заряженных векторных мезонов), однако возможности ее практического использования пока ограничены из-за отсутствия достаточно надежных методов вычислений в неперенормируемых теориях.

Другая возможность калибровочно-инвариантного описания массивных векторных полей была указана Хиггсом [2]. В модели Хиггса масса векторного поля возникает в результате эффекта спонтанного нарушения симметрии. В отличие от описанной выше модель Хиггса — Киббла перенормируема. В качестве платы за это приходится постулировать существование дополнительных скалярных частиц, которые в принципе должны наблюдаться в эксперименте. В следующем разделе подробно описан механизм Хиггса — Киббла и приведены нестрогие, но физически наглядные аргументы в пользу того, что в этих моделях можно построить перенормируемую унитарную S-матрицу.

2. МЕХАНИЗМ ХИГГСА

Попытки получить массу частиц в результате эффекта спонтанного нарушения симметрии предпринимались уже давно [20, 21], однако они сталкивались с серьезными трудностями, отчасти связанными с проблемой ультрафиолетовых расходимостей, а отчасти с тем, что, согласно теореме Голдстоуна [22], спонтанное нарушение симметрии сопровождается появлением безмассовых скалярных частиц, существование которых не подтверждается экспериментально.

Механизм, предложенный Хиггсом, успешно обходит эти трудности. Рассмотрим его на примере модели, инвариантной относительно группы SU_2. (В оригинальной работе Хиггса [2] рассмотрен случай абелевой калибровочной группы. Обобщение на неабелевый случай было дано Кибблом [3].)

Пусть имеется скалярный изотриплет φ, взаимодействующий с полем Янга — Миллса A_μ. Калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид:

$$L = Tr\left\{\frac{1}{8}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}[\partial_\mu\varphi - \lambda(A_\mu, \varphi)]^2 - V(\varphi)\right\}, \tag{19}$$

где $V(\varphi)$ — инвариантный полином по φ. Если ограничиться перенормируемыми взаимодействиями, то

$$V(\varphi) = Tr\left[\pm\frac{m^2}{4}\varphi^2 + \frac{h^2}{2}(\varphi^2)^2\right] \tag{20}$$

с точки зрения инвариантности выбор знака массового члена безразличен, однако физическое содержание теории существенно зависит от этого знака.

В классической теории основное состояние (вакуум) определяется условиями

$$\delta V/\delta\varphi = 0; \quad \delta^2 V/\delta\varphi^2 \geqslant 0. \tag{21}$$

При положительном знаке массового члена эти уравнения имеют только тривиальное решение и, следовательно, основное состояние (вакуум) изотопически инвариантно. При отрицательном знаке ситуация меняется, и устойчивое состояние равновесия соответствует

$$|\varphi|^2 = m^2/4h^2. \tag{22}$$

Это значит, что вакуум не обладает симметрией исходного лагранжиана, и в изотопическом пространстве имеется некоторое выделенное направление. Симметричный экстремум, соответствующий $\varphi = 0$, неустойчив.

В квантовой теории неустойчивость симметричного основного состояния проявляется в отличии квазисредних от обычных средних [23]. Квазисреднее определяется как среднее по вакууму, вычисленное в присутствии бесконечно малого члена, нарушающего симметрию. Если предел такого среднего при стремлении нарушающего симметрию члена к нулю отличается от значения, вычисленного непосредственно в симметричной теории, то имеет место эффект спонтанного нарушения симметрии.

Поскольку лагранжиан (19) четен по φ, обычное вакуумное среднее $\langle\varphi\rangle = 0$. Покажем, что квазисреднее $\langle\widetilde{\varphi}\rangle \neq 0$.

Введем нарушающий симметрию член $Tr\, c\varphi$, где $c = c^a t^a$, а c^a — постоянный изовектор, который без ограничения общности можно считать направленным по третьей оси. Введение такого члена приведет уже в приближении деревьев к возникновению переходов между вакуумом и одночастичным состоянием, и, следовательно, к появлению ненулевого вакуумного среднего

$$\langle\varphi_i\rangle = \xi\delta_{i3}. \tag{23}$$

Перейдем с помощью канонического преобразования от полей φ к полям φ', обладающим нулевым вакуумным средним:

$$\varphi_i' = \varphi_i - \xi_i;\quad \xi_i = \xi\delta_{i3}. \tag{24}$$

При такой замене функция $V(\varphi)$ преобразуется следующим образом:

$$V(\varphi') = Tr\,[(-m^2/4)(\varphi'^2 + 2\varphi_3'\xi + \xi^2) + \\ + (h^2/2)(\varphi'^4 + 4\varphi'^2\xi^2 + 4\varphi_3'^2\xi^2 + 4\varphi'^2\varphi_3'\xi + 4\varphi_3'\xi^3 + \xi^4)]. \tag{25}$$

Линейные по φ' члены уже в древесном приближении приводят к переходам между вакуумом и одночастичным состоянием. Поскольку по построению $\langle\varphi'\rangle = 0$, условие самосогласованности требует, чтобы сумма всех линейных по φ' членов обращалась в нуль:

$$(-m^2/2)\,\xi + 2h^2\xi^3 + c = 0. \tag{26}$$

(Здесь выписано условие самосогласованности в древесном приближении. В точном условии самосогласованности нужно еще учесть вклад диаграмм типа головастиков.)

Как видно, в пределе $c \to 0$ помимо тривиального решения $\xi = 0$ это уравнение имеет еще решение

$$\xi^2 = m^2/4h^2. \tag{27}$$

Это решение соответствует устойчивому основному состоянию и, как будет видно далее, приводит к теории, свободной от парадоксов типа мнимой массы и пр.

Воспользовавшись условием (27), легко показать, что квадратичные по φ' члены группируются в комбинацию

$$(m^2/4)\,\varphi_3'^2, \tag{28}$$

т. е. массовые члены для первой и второй компонент обращаются в нуль, а третья компонента приобретает вещественную массу.

Наконец, в результате канонического преобразования из члена, содержащего квадрат ковариантной производной, возникает массовый член для поля A_μ

$$(\lambda^2\xi^2/2)\,(A_{\mu 1}^2 + A_{\mu 2}^2). \tag{29}$$

Окончательно в результате канонического преобразования приходим к лагранжиану (штрихи в дальнейшем опускаем)

$$\begin{aligned} L = &-\frac{1}{4}\,\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} - \lambda\,[\mathbf{A}_\mu\times\boldsymbol{\varphi}]) + \\ &+\frac{M^2}{2}\,(A_{\mu 1}^2 + A_{\mu 2}^2) + M\,(\partial_\mu\varphi_1 A_{\mu 1} + \partial_\mu\varphi_2 A_{\mu 2}) + \\ &+\lambda M\,[\mathbf{A}_\mu^2\varphi_3 - A_{\mu 3}(\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\varphi})] + \frac{m^2}{2}\,\varphi_3^2 - h^2\,(\boldsymbol{\varphi}^2)^2 - 2mh\,(\boldsymbol{\varphi}^2)^2\,\varphi_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Этот лагранжиан описывает триплет векторных полей, две компоненты которого имеют отличную от нуля массу, взаимодействующих со скалярным триплетом φ, одна из компонент которого имеет ненулевую массу. Компоненты $\varphi_{1,2}$, обладающие нулевой массой, представляют собой не что иное, как голдстоуновские бозоны.

Хотя лагранжиан (30) уже не обладает изотопической симметрией, он по-прежнему инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований. Исходный лагранжиан (19) был инвариантен относительно преобразований

$$\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu + \lambda\,[\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\alpha}] + \partial\boldsymbol{\alpha}/\partial x^\mu;\quad \boldsymbol{\varphi}\to\boldsymbol{\varphi} + \lambda\,[\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\alpha}]. \tag{31}$$

Поскольку лагранжиан (30) получен из (19) формальной заменой $\boldsymbol{\varphi}\to\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\xi}$, он очевидно инвариантен относительно преобразований, получающихся при замене $\boldsymbol{\varphi}$ в (31) на $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu + \lambda\,[\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\alpha}] + \partial\boldsymbol{\alpha}/\partial x^\mu; \\ &\boldsymbol{\varphi}\to\boldsymbol{\varphi} + \lambda\,[\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\alpha}] + \lambda\,[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}]. \end{aligned} \tag{32}$$

В случае спонтанно нарушенной симметрии калибровочное преобразование поля φ неоднородно — компоненты $\varphi_{1,2}$ испытывают сдвиг. Поскольку наблюдаемые величины не должны зависеть от выбора калибровки, можно воспользоваться этим произволом, чтобы обратить компоненты φ_1 и φ_2 в нуль. (Компоненту φ_3 обратить в нуль нельзя, так как она преобразуется однородно.) В этой калибровке голдстоуновские бозоны отсутствуют, и пространство асимптотических состояний состоит лишь из физических векторов. Поэтому обычным образом построенная S-матрица явно унитарна. Недостаток этой калибровки — неочевидная перенормируемость. Поскольку функция Грина векторного поля

$$D^c_{\mu\nu} \sim (g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu m^{-2})/(k^2 - m^2) \tag{33}$$

при больших k стремится к константе, по формальному подсчету степеней расходимости теория, описываемая лагранжианом (30) неперенормируема. Однако, как известно, калибровочная инвариантность обычно приводит к понижению степени расходимости. Действительно, можно вместо калибровки $\varphi_{1,2} = 0$ выбрать, например, калибровку $\partial_\mu A_\mu = 0$. В этой калибровке функция Грина векторного поля имеет вид:

$$D^c_{\mu\nu} \sim (g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu k^{-2})/(k^2 - m^2), \tag{34}$$

и подсчет степеней расходимости приводит к выводу о конечности числа примитивно расходящихся диаграмм и, следовательно, о перенормируемости теории. Калибровка $\partial_\mu A_\mu = 0$ не является явно унитарной, поскольку в этом случае в теории присутствуют голдстоуновские бозоны $\varphi_{1,2}$, а также кванты векторного поля с отрицательной энергией. Однако, поскольку S-матрица не должна зависеть от калибровки, суммарная вероятность перехода во все нефизические состояния должна равняться нулю. Другими словами, в силу калибровочной инвариантности S-матрица одновременно и перенормируема и унитарна. Разумеется, все сказанное выше — лишь наводящие соображения. Строгое доказательство унитарности и перенормируемости дано в следующих разделах.

В модели Хиггса — Киббла голдстоуновские бозоны ненаблюдаемы и подходящим выбором калибровки могут быть вообще устранены из спектра. Причина неприменимости теоремы Голдстоуна в данном случае состоит в том, что при ее доказательстве существенно используется релятивистская инвариантность. Но для безмассовых калибровочных полей не существует явно релятивистской инвариантной формулировки в гильбертовом пространстве. Если же формулировать теорию в пространстве с индефинитной метрикой (калибровка $\partial_\mu A_\mu = 0$), то голдстоуновские бозоны возникают, однако, так же как продольные и временные фотоны, они дают вклад лишь в виртуальные состояния и отсутствуют в асимптотических состояниях.

Прежде чем перейти к строгим результатам, опишем еще одну модель, в которой в результате спонтанного нарушения симметрии все три компоненты векторного поля приобретают массу.

Исходный лагранжиан

$$L = -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - \mathrm{i}g\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\tau}\varphi)^* \times$$
$$\times (\partial_\mu\varphi - \mathrm{i}g\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\tau}\varphi) + \frac{m^2}{2}\varphi^*\varphi - h^2(\varphi^*\varphi)^2, \tag{35}$$

где φ — неэрмитов дублет:

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+ \\ \varphi^0\end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что устойчивое основное состояние соответствует $\langle\widetilde{\varphi}\rangle \neq 0$. В результате канонического преобразования $\varphi \to \varphi + \xi$, где ξ — постоянный изоспинор, приходим к теории, описывающей массивный триплет векторных полей, взаимодействующий со скалярным полем. Полученный таким образом лагранжиан удобно записать в терминах полей B и σ:

$$\varphi^+ = (1/\sqrt{2})(\mathrm{i}B_1 - B_2); \quad \varphi^0 = \xi + (1/\sqrt{2})(\sigma + \mathrm{i}B_3); \tag{36}$$

$$L = -\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}\mathbf{A}_\mu^2 + M\mathbf{A}_\mu\partial_\mu\mathbf{B} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathbf{B}\partial_\mu\mathbf{B} +$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{m}{2}\sigma^2 + \frac{g}{2}A_\mu^k(\sigma\partial_\mu\mathbf{B}^k - \mathbf{B}^k\partial_\mu\sigma - [\mathbf{B}\times\partial_\mu\mathbf{B}]^k) +$$
$$+ \frac{Mg}{2}\sigma\mathbf{A}_\mu^2 + \frac{g^2}{8}(\sigma^2 + \mathbf{B}^2)\mathbf{A}_\mu^2 - \frac{gm^2}{4M}\sigma(\sigma^2 + \mathbf{B}^2) - \frac{g^2m^2}{32M^2}(\sigma^2 + \mathbf{B}^2)^2. \tag{37}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &\to \mathbf{A}_\mu + g[\mathbf{A}_\mu\boldsymbol{\alpha}] + \partial_\mu\boldsymbol{\alpha}; \\ \sigma &\to \sigma + \frac{g}{2}\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}; \\ \mathbf{B} &\to \mathbf{B} + M\boldsymbol{\alpha} + \frac{g}{2}[\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}] + \frac{g}{2}\sigma\boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

В этой модели возникает триплет голдстоуновских бозонов ($\mathbf{B}$), которые могут быть устранены из спектра подходящим выбором калибровки.

В заключение этого раздела сформулируем теорему, позволяющую сказать, какие именно векторные мезоны приобретают массу в результате спонтанного нарушения симметрии [3].

Пусть G есть группа инвариантности исходного лагранжиана. Вакуумное среднее поле φ отлично от нуля. Совокупность генераторов l_i группы G, переводящих $\langle\varphi\rangle$ в нуль $l_i\langle\varphi\rangle = 0$, образует подгруппу S, называемую малой группой вакуума. Каждому генератору группы G можно сопоставить калибровочное поле. Все поля, соответствующие генераторам малой группы вакуума, остаются безмассовыми. Остальные векторные поля приобретают массу. В первой из рассмотренных моделей роль малой группы играет абелева группа зарядовых калибровочных преобразований, и соответствующее безмассовое векторное поле естественно отождествить с электромагнитным полем. Во второй модели малая группа тривиальна и безмассовые векторные поля отсутствуют.

3. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

В этом разделе мы займемся строгим рассмотрением теорий, описываемых лагранжианами типа (30), (37). Предыдущие эвристические рассуждения были нам нужны лишь для того, чтобы построить калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий массивные векторные поля. Поэтому читатель, неудовлетворенный строгостью рассуждений, связанных с механизмом Хиггса, может опустить их, и принять формулы (30), (37) за исходные. Во всех дальнейших построениях используется лишь калибровочная инвариантность лагранжианов (30), (37).

Лагранжиан, описывающий калибровочно-инвариантную систему, вырожден. Не все переменные, входящие в лагранжиан, являются каноническими. Часть переменных играет роль множителей Лагранжа, а соответствующие уравнения представляют собой уравнения связи. Чтобы проквантовать такую систему, необходимо явно решить связи, и воспользовавшись калибровочным произволом, наложить на поля условие, фиксирующее калибровку (это условие должно быть совместно со связями). После этого нужно выразить действие в терминах оставшихся независимых канонических переменных и к ним применить стандартную процедуру квантования. Эта процедура в равной мере применима как к теориям со спонтанным нарушением симметрии, так и без него. Отсылая читателя, интересующегося деталями квантования вырожденных систем к работе Л. Д. Фаддеева [24], проиллюстрируем этот метод на примере лагранжиана (37).

Из-за вырожденности лагранжиана (37) канонический импульс $\mathbf{p}_0$ тождественно обращается в нуль. Остальные канонические импульсы имеют вид:

$$\mathbf{p}_0 = 0;\ \mathbf{p}_i = \partial L/\partial A_i = \mathbf{F}_{i0};$$
$$\boldsymbol{\pi} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{B}} = M\mathbf{A}_0 + \partial_0 \mathbf{B} + (g/2)\,\mathbf{A}_0\sigma - (g/2)\,[\mathbf{A}_0\mathbf{B}]; \tag{39}$$
$$\pi_\sigma = \partial L/\partial\sigma = \partial_0\sigma - (g/2)\,(\mathbf{A}_0\mathbf{B}).$$

С помощью этих формул нетрудно получить выражение для действия $A = p_i q_i - H(p, q)$. Чтобы упростить последующие формулы, фиксируем калибровку, положив

$$\mathbf{B}=0. \tag{40}$$

Тогда действие можно переписать в виде

$$A=\int\left\{\mathbf{p}_i\mathbf{A}_i-\frac{1}{2}\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i-\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2+\mathbf{A}_0\left(\partial_i\mathbf{p}_i+g\left[\mathbf{p}_i\mathbf{A}_i\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+M\boldsymbol{\pi}+\frac{g}{2}\sigma\boldsymbol{\pi}\right)+F'\left(\sigma,\,\pi_\sigma\mathbf{A}_i\right)\right\}dx. \tag{41}$$

Здесь не выписана явно функция F', содержащая каноническую форму для полей σ, поскольку эта форма имеет стандартный вид и не приводит ни к каким осложнениям. Для нас существенно лишь, что F' не зависит от $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{p}_i$ и π.

Как видно, переменная $\mathbf{A}_0$ играет роль множителя Лагранжа. Варьируя действие (41) по $\mathbf{A}_0$, получаем уравнение

$$\partial_i\mathbf{p}_i+g\left[\mathbf{p}_i\mathbf{A}_i\right]+M\boldsymbol{\pi}+\frac{g}{2}\sigma\boldsymbol{\pi}=0, \tag{42}$$

не содержащее производных по времени и, следовательно, представляющее собой уравнение связи. Это уравнение позволяет исключить переменные $\boldsymbol{\pi}$, после чего действие выражается лишь через независимые канонические переменные $\mathbf{A}_i$, p_i, σ, π_σ. На этом заканчивается построение канонического формализма, и дальнейшая процедура канонического квантования может быть проведена стандартным образом, путем замены скобок Пуассона коммутатором.

На этом этапе удобно обратиться к формализму континуального интеграла. Как известно, производящий функционал для функции Грина можно записать в виде континуального интеграла

$$Z\left(\boldsymbol{\eta}_i,\,\eta\right)=\int\exp\left[\mathrm{i}A+\mathrm{i}\int\left(\boldsymbol{\eta}_i\mathbf{A}_i+\eta\sigma\right)dx\right]d\mathbf{A}_i\,d\mathbf{p}_i\,d\sigma\,d\pi_\sigma. \tag{43}$$

В нашем случае A определяется формулой (41), причем в качестве $\boldsymbol{\pi}$ нужно подставить решение уравнения (42):

$$\pi=-\left[\partial_i\mathbf{p}_i+g\left[\mathbf{p}\mathbf{A}_i\right]\right)\Big/\left(M+\frac{g}{2}\sigma/2\right). \tag{44}$$

В дальнейшем неоднократно будем пользоваться представлением функций Грина в виде континуального интеграла. Поэтому сделаем здесь относительно него несколько замечаний.

Континуальный интеграл

$$\int F(\varphi)\prod_x d\varphi(x)$$

определяется как формальный предел конечномерной аппроксимации, основанной на выборе решетчатой системы точек в x-пространстве

$$\int F(\varphi)\prod_x d\varphi(x)=\lim\int F(\varphi_i)\prod_j d\varphi_j.$$

Вопрос об ограничениях, которые надо наложить на класс функционалов и на пространство функций для сходимости этого предельного перехода, пока не решен.

Однако при вычислении функций Грина по теории возмущений встречаются лишь интегралы специального вида, а именно, гауссовы интегралы

$$\int \exp\left\{\frac{i}{2}\int[\varphi(x)(\Box-m^2)\varphi(x)]\,dx\right\}\varphi(y)\ldots\varphi(z)\prod_x d\varphi,$$

которые вычисляются точно. Они выражаются с помощью вариационных производных интегралов

$$\int \exp\left\{i\left[\frac{1}{2}\varphi(x)(\Box-m^2)\varphi(x)+\eta(x)\varphi(x)\right]\right\}dx=$$
$$=\exp\left[\frac{i}{2}\int\eta(x)D^c(x-y)\eta(y)\,dx\,dy\right],$$

где $D^c(x)$ — фейнмановская функция Грина. Чтобы получить правила обхода полюса, необходимо учесть граничные условия, которые сводятся к тому, что интеграция производится по траекториям, асимптотически (при $t\to\pm\infty$) распределенным в конфигурационном пространстве с вероятностью, определяемой волновой функцией вакуума [25]. В таком подходе функциональный интеграл представляет собой просто компактную форму записи ряда диаграмм теории возмущений, удобную для различных комбинаторных доказательств.

Более последовательный и общий подход может быть основан на евклидовой формулировке квантовой теории поля, впервые предложенной в работах [26, 27]. В этом подходе функции Грина определяются вначале в евклидовых переменных, а переход в псевдоевклидову область осуществляется лишь в окончательных выражениях. Аналитическое продолжение функций Грина осуществляется простой заменой $p_4\to ip_0(1+i\varepsilon)$. Эта процедура позволяет вообще обойти вопрос о правилах обхода. Поэтому в дальнейшем не будем каждый раз специально останавливаться на этом.

Интеграл (43) можно переписать в более симметричном виде, если ввести интеграцию по $\mathbf{A}_0$ и π:

$$Z(\boldsymbol{\eta}_i,\eta)=\int\exp\left\{i\int\left[\mathbf{p}_i\dot{\mathbf{A}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i-\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2+\mathbf{A}_0\left(\partial_i\mathbf{p}_i+g[\mathbf{p}_i\mathbf{A}_i]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+M\boldsymbol{\pi}+\frac{g}{2}\sigma\boldsymbol{\pi}\right)+F'(\sigma,\pi_\sigma,\mathbf{A}_i)+\boldsymbol{\eta}_i\mathbf{A}_i+\eta\sigma\right]dx\right\}\det\left(M+\frac{g\sigma}{2}\right)\times$$
$$\times\,d\mathbf{A}_i d\mathbf{p}_i\,d\sigma\,d\pi_\sigma\,d\mathbf{A}_0\,d\boldsymbol{\pi}.\qquad(45)$$

Действительно, интеграцию по $\mathbf{A}_0$ можно выполнить явно, в результате чего возникает $\delta\left(\partial_i \mathbf{p}_i + g\,[\mathbf{p}_i \mathbf{A}_i] + M\pi + \frac{g}{2}\sigma\pi\right)$. Интеграция по π снимается δ-функцией, что эквивалентно замене π правой частью (44). Возникающий при интегрировании по π якобиан сокращается с $\det(M + g\sigma/2)$, и в итоге возвращаемся к (43).

Интегралы по импульсам $\mathbf{p}_i$, π, π_σ — гауссовы и могут быть вычислены явно. Выполняя интегрирование, получаем

$$Z(\boldsymbol{\eta}_i, \eta) = \int \exp\left\{i \int [L(x)|_{\mathbf{B}=0} + \boldsymbol{\eta}_i \mathbf{A} + \eta\sigma]\, dx\right\} \times \\ \times \det\{M + g\sigma/2\}\, d\mathbf{A}_i\, d\sigma, \tag{46}$$

где $L(x)$ определяется формулой (37) при $\mathbf{B} = 0$.

Разложение интеграла (46) в ряд теории возмущений порождает стандартную диаграммную технику, причем пропагатор векторного поля имеет вид:

$$D^c_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu m^{-2}}{k^2 - m^2}. \tag{47}$$

Вариационные производные функционала (46) определяют функции Грина полей A_i, σ:

$$\left.\frac{\delta Z}{\delta\eta^1_{i_1}(x_1) \ldots \delta\eta^n_{in}(x_n) \ldots \delta\eta(y)}\right|_{\eta_i \eta = 0} = \langle T\mathbf{A}^1_{i_1}(x_1) \ldots \mathbf{A}^n_{in}(x_n) \ldots \sigma(y)\rangle, \tag{48}$$

S — матрица находится по этим функциям Грина с помощью стандартной редукционной формулы. В рассматриваемой калибровке отсутствуют какие-либо нефизические поля. Асимптотические состояния включают лишь три состояния поляризации массивного векторного поля и одно массивное скалярное поле. Поэтому S-матрица очевидным образом унитарна (разумеется после надлежащей перенормировки).

Обычно удобнее пользоваться полностью ковариантными функциями Грина, определяемыми функционалом (46) с источником вида $\boldsymbol{\eta}_\mu \mathbf{A}_\mu$ (суммирование от 0 до 3). Поскольку асимптотические состояния удовлетворяют условию Лоренца, можно считать, что $\partial_\mu \eta_\mu = 0$.

Единственным, не вполне обычным элементом в формуле (46) является множитель $\det(M + g\sigma/2)$. Множители подобного рода возникают во всех теориях, в которых лагранжиан взаимодействия содержит по крайней мере две производные (или два векторных поля). С точки зрения диаграммной техники этот множитель интерпретируется следующим образом: $\det(M + g\sigma/2)$ можно представить как определитель диагональной матрицы G в x-пространстве

$$\langle x \,|\, G \,|\, x' \rangle = \delta(x-x')\,[M + g\sigma(x)/2]. \tag{49}$$

Соответственно

$$\langle x \,|\, \ln G \,|\, x' \rangle = \delta(x-x')\,\ln[M + g\sigma(x)/2]. \tag{50}$$

Воспользовавшись формулой

$$\det G = \exp Tr \ln G, \tag{51}$$

можно переписать $\det(M + g\sigma/2)$ в виде

$$\det(M + g\sigma/2) = \exp\left[\delta(0)\int dx\, Tr \ln(M + g\sigma/2)\right].$$

Как видно, с точки зрения диаграммной техники этот множитель приводит к появлению дополнительных диаграмм, входящих с весом $\delta(0)$ (конечно это выражение нужно понимать в смысле некоторой регуляризации). Роль этих диаграмм состоит в том, чтобы скомпенсировать наиболее сингулярные члены в разложении интеграла (43), возникающие при спариваниях $\overline{A_\mu(x)\, A_\mu}(x) \sim \delta(0)$. Такие спаривания возникают, поскольку в формуле (43) отсутствует операция нормального упорядочения. Другими словами, учет множителя $\det(M + g\sigma/2)$ означает частичное нормальное упорядочение лагранжиана, входящего в формулу (43).

Как уже отмечалось, из-за медленного убывания пропагатора (47) теория по формальному подсчету степеней расходимости неперенормируема. Однако этот вывод ошибочен. Мы покажем сейчас, что калибровочная инвариантность приводит к компенсации наиболее сильных сингулярностей в каждом порядке теории возмущений, и вследствие этого — к перенормируемости.

Формула (43) имеет лишь формальный смысл из-за того, что интегралы, определяющие отдельные члены ряда теории возмущений, расходятся при больших импульсах. Чтобы придать всем последующим рассуждениям строгий смысл, будем считать, что все интегралы регуляризованы, причем регуляризация инвариантна, т. е. регуляризованный функционал удовлетворяет тем же соотношениям симметрии, которые формально выполнены для нерегуляризованного функционала (43). Конкретный способ инвариантной регуляризации рассмотрен в следующем разделе.

Перепишем прежде всего интеграл (43) в более инвариантном виде. Для этого заметим, что

$$\delta(B)\det(M + g\sigma/2) = \delta(B)\,\widetilde{\Delta}(B), \tag{52}$$

где функционал $\widetilde{\Delta}(B)$ определен равенством

$$\widetilde{\Delta}(\mathbf{B})\int \delta(\mathbf{B}^{\Omega})\, d\Omega = 1, \tag{53}$$

$\mathbf{B}^{\Omega}$ обозначает результат применения калибровочного преобразования к полю $\mathbf{B}$. Интегрирование ведется по инвариантной мере на группе.

Функционал $\tilde{\Delta}(\mathbf{B})$ калибровочно-инвариантен в том смысле, что $\tilde{\Delta}(\mathbf{B}^{\Omega}) = \tilde{\Delta}(\mathbf{B})$. Этот факт непосредственно следует из инвариантности меры интегрирования в (52). На поверхности $\mathbf{B} = 0$ вклад в интеграл (52) дает лишь окрестность единичного элемента. Действительно

$$\mathbf{B}^{\Omega} = \mathbf{B} + M\boldsymbol{\alpha} + (g/2)[\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}] + (g/2)\,\sigma\boldsymbol{\alpha} + 0(\alpha^2). \tag{54}$$

При условии $\mathbf{B} = 0$ уравнение $\mathbf{B}^{\Omega} = 0$ становится однородным и при естественных граничных условиях $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому интеграл (53) на поверхности $\mathbf{B} = 0$ явно вычисляется. Он равен

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{B})\,|_{\mathbf{B}=0} = \det\,[M + g\sigma(x)/2], \tag{55}$$

что и доказывает наше утверждение.

Интеграл (43) можно записать в виде:

$$Z(\boldsymbol{\eta}_{\mu}, \eta) = z^{-1}(0) \int \exp\left\{i \int [L(x) + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{\eta}_{\mu}\mathbf{A}_{\mu} + \eta\sigma]\,dx\right\} \tilde{\Delta}(\mathbf{B})\,\delta(\mathbf{B})\,d\mathbf{B}\,d\mathbf{A}\,d\sigma. \tag{56}$$

Здесь $L(x)$ — калибровочно-инвариантный лагранжиан (37). Чтобы перейти к явно перенормируемой калибровке, воспользуемся формальным приемом, предложенным в работах [5, 28]. Введем функционал $\Delta(\mathbf{A})$, определяемый равенством

$$\Delta(\mathbf{A}) \int \delta(\partial_{\mu}\mathbf{A}_{\mu}^{\Omega} - \mathbf{c}(x))\,d\Omega = 1. \tag{57}$$

Этот функционал очевидно калибровочно-инвариантен. Поскольку произведение $\Delta(\mathbf{A}) \int \delta(\partial_{\mu}\mathbf{A}_{\mu}^{\Omega} - \mathbf{c}(x))\,d\Omega$ равно единице, можно умножить на него правую часть равенства (56), не меняя значения функционала $Z(\boldsymbol{\eta}_{\mu}, \eta)$. В преобразованном интеграле сделаем замену переменных:

$$\mathbf{A}_{\mu}^{\Omega} = \mathbf{A}_{\mu}'; \;\; \mathbf{B}^{\Omega} = \mathbf{B}'; \;\; \sigma^{\Omega} = \sigma'. \tag{58}$$

(штрихи в дальнейшем опускаем). Легко убедиться, что якобиан этого преобразования единичный. В силу калибровочной инвариантности лагранжиана и функционалов $\Delta(\mathbf{A})$ и $\tilde{\Delta}(\mathbf{B})$ преобразование (58) оставляет их неизменными, и в результате получаем

$$Z(\eta_\mu, \eta) = z^{-1}(0) \int \exp\left\{i \int [L(x) + \eta_\mu A_\mu^{\Omega^{-1}} + \eta\sigma^{\Omega^{-1}}]\, dx\right\} \times \\ \times \delta(\partial_\mu A_\mu - c(x))\, \delta(B^{\Omega^{-1}})\, \Delta(B)\, \Delta(A)\, dA\, dB\, d\sigma\, d\Omega. \qquad (59)$$

Интегрирование по Ω можно выполнить явно. Возникающий при этом якобиан сократится с $\widetilde{\Delta}(B)$, а Ω^{-1} выразится через B по уравнению $B^{\Omega^{-1}} = 0$.

На массовой поверхности члены с источниками $\eta_\mu A_\mu^{\Omega^{-1}}$, $\eta\sigma^{\Omega^{-1}}$ можно заменить $\eta_\mu A_\mu$, $\eta\sigma$, точнее

$$\prod_{i=1}^{n} (k_i^2 - m_i^2) \int\limits_{k_i^2 = m_i^2} \exp(ik_i x_i) \langle T A_{\mu_1}^{\Omega^{-1}}(x_1) \ldots A_{\mu_i}^{\Omega^{-1}}(x_i) \ldots \sigma^{\Omega^{-1}}(x_n)\rangle \times \\ \times dx_1 \ldots dx_n = \prod_i z_i^{1/2} (k_i^2 - m_i^2) \int\limits_{k_i^2 = m_i^2} \exp(ik_i x_i) \langle T A_{\mu_1}(x_1) \ldots \times \\ \times A_{\mu_n}(x_n) \ldots \sigma(x_n)\rangle\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (60)$$

Это утверждение, являющееся аналогом теоремы Борхерса [29], проще всего пояснить на языке диаграмм. Из (38) следует, что

$$A_\mu^{\Omega^{-1}} = A_\mu - \partial_\mu \alpha - g[A_\mu \alpha] + \\ + 0(\alpha^2); \quad \sigma^{\Omega^{-1}} = \sigma - \frac{g}{2}(B\alpha) + \\ + 0(\alpha^2). \qquad (61)$$

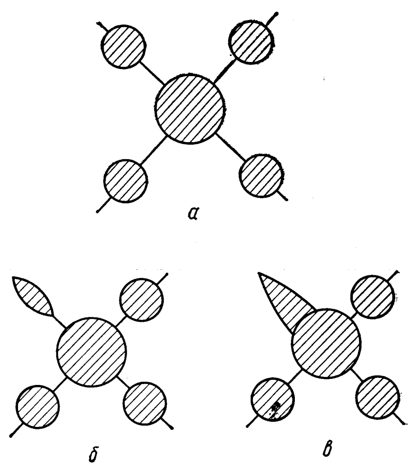

Рис. 1.

Поскольку источник η_μ удовлетворяет условию $\partial_\mu \eta_\mu = 0$, член $\partial_\mu \alpha$ можно опустить. Остающиеся в левой части (60) члены соответствуют диаграммам Фейнмана, изображенным на рис. 1. Диаграммы типа (*а*) соответствуют функциям Грина, стоящим в правой части (60). Диаграммы типа (*б*) и (*в*) возникают из следующих членов разложения $A_\mu^{\Omega^{-1}}$ и $\sigma^{\Omega^{-1}}$. Диаграммы типа (*в*), будучи умножены на $\prod_i (k_i^2 - m_i^2)$, обращаются при $k_i^2 = m_i^2$ в нуль, поскольку они не содержат полюсов по крайней мере по одной из переменных k_i. Диаграммы типа (*б*) отличаются при $k_i^2 = m_i^2$ от диаграмм (*а*) лишь дополнительной перенормировкой внешних линий, которая и учитывается множителями $z_i^{1/2}$ в (60).

Следовательно, если нас интересуют лишь матричные элементы на массовой поверхности, можно записать $Z(\eta_\mu, \eta)$ в виде:

$$Z(\eta_\mu, \eta) = z^{-1}(0) \int \exp\left\{i \int [L(x) + \eta_\mu \mathbf{A}_\mu + \eta\sigma]\, dx\right\} \delta(\partial_\mu \mathbf{A}_\mu - \mathbf{c}(x)) \times \times \Delta(\mathbf{A})\, d\mathbf{A}\, d\mathbf{B}\, d\sigma. \tag{62}$$

Поскольку функция $\mathbf{c}(x)$ произвольна, можно интегрировать выражение (61) по $\mathbf{c}(x)$ с весом $\exp\{i \int (2\alpha)^{-1}\mathbf{c}^2(x)\, dx\}$. Выполнив интегрирование, получаем окончательное выражение производящего функционала для функций Грина в произвольной релятивистски инвариантной калибровке:

$$Z(\eta_\mu, \eta) = z^{-1}(0) \int \exp\left\{i \int \left[L(x) + \eta_\mu \mathbf{A} + \eta\sigma + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu \mathbf{A}_\mu)^2\right] dx\right\} \Delta(\mathbf{A})\, d\mathbf{A}\, d\mathbf{B}\, d\sigma. \tag{63}$$

Осталось лишь вычислить явный вид функционала $\Delta(\mathbf{A})$. Достаточно знать его значение на поверхности $\partial_\mu \mathbf{A}_\mu = \mathbf{c}(x)$. Рассуждая так же, как в случае функционала $\Delta(\mathbf{B})$, легко показать, что на этой поверхности в интеграл (57), определяющий $\Delta(\mathbf{A})$, дает вклад лишь окрестность единичного элемента. Следовательно,

$$[\Delta(\mathbf{A})]^{-1} = \int \delta(\square \boldsymbol{\alpha} + g\partial_\mu [\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}_\mu])\, d\alpha = [\det \widetilde{M}]^{-1},$$

где

$$\widetilde{M}\boldsymbol{\alpha} = \square \boldsymbol{\alpha} + g\partial_\mu [\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}_\mu]. \tag{64}$$

$\det \widetilde{M}$ можно представить в виде добавки к эффективному действию, выделив предварительно тривиальный постоянный множитель $\det \square$. При этом удобно воспользоваться равенством $\det \widetilde{M} = \det M$, где оператор M сопряжен с $\widetilde{M}$:

$$M\boldsymbol{\alpha} = \square\boldsymbol{\alpha} - g[\mathbf{A}_\mu \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}]. \tag{65}$$

С точки зрения диаграммной техники $\det M$ можно представить в виде суммы замкнутых петель, по которым распространяется скалярная частица нулевой массы:

$$\det M = \exp(Tr \ln \square^{-1} M) = \exp\left[-\sum_n \frac{g^n}{n} Tr \int A_{\mu_1}(x_1) \ldots \times \times \ldots A_{\mu_n}(x_n)\, \partial_{\mu_1} D^0(x_1 - x_2) \ldots \times \times \ldots \partial_{\mu_n} D^0(x_n - x_1)\, dx_1 \ldots dx_n\right]. \tag{66}$$

Здесь D^0 — фейнмановская функция Грина оператора Даламбера. При этом каждая петля дополнительно умножается на —1. Выражение (66) можно записать в компактной форме, если ввести вспомогательное ферми-поле c [5]:

$$\det M \int \exp\left\{Tr\frac{1}{2}\int [\bar{c}\,\Box\, c+g[\bar{c},\,\partial_\mu c]\,A_\mu]\,dx\right\} dc\,d\bar{c}. \qquad (67)$$

Поле c нужно считать фермионом, чтобы обеспечить знак минус перед каждым циклом.

Свободная функция Грина, соответствующая (56), есть

$$D^c_{\mu\nu}=\frac{1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu(1-\alpha)(k^2-m^2\alpha)^{-1}}{k^2-m^2}. \qquad (68)$$

При $k\to\infty$ $D^c\sim k^{-2}$. Поскольку лагранжиан взаимодействия (37) содержит лишь тройные вершины с одной производной и четверные вершины без производных, теория перенормируема. Лагранжиан (37) в калибровке общего вида приводит к смешиванию полей A_μ и B. Прежде чем строить теорию возмущений удобно его диагонализовать, перейдя к переменным:

$$B'=B-M\,\Box^{-1}\partial_\mu A_\mu. \qquad (69)$$

Параметр α, фиксирующий продольную часть функции Грина, можно выбирать любым. В частности, $\alpha=0$ соответствует калибровке Ландау $\partial_\mu A_\mu=0$. Неперенормированные матричные элементы, вообще говоря, зависят от параметра α, поскольку, как мы видели, переход от одной калибровки к другой сопровождается дополнительной перенормировкой внешних линий. Однако из перенормированных матричных элементов зависимость от α полностью выпадает. (Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в работе [30].)

Доказательство эквивалентности S-матрицы в унитарной и перенормируемой калибровках было пока дано в предположении, что осуществлена инвариантная регуляризация. Теперь мы должны показать, что такую регуляризацию действительно можно осуществить, и что можно определить несобственную предельную процедуру, позволяющую снять промежуточную регуляризацию, не нарушая калибровочной инвариантности. Нарушение калибровочной инвариантности привело бы к потере эквивалентности унитарной и перенормируемой калибровок и, следовательно, к потере одного из этих свойств.

4. ИНВАРИАНТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ТОЖДЕСТВА УОРДА

Метод инвариантной регуляризации применим к произвольной калибровочно-инвариантной теории как симметричной, так и со спонтанно нарушенной симметрией [11]. Он применим также к весьма широкому классу теорий с нетривиальной группой внутренней симметрии, в частности к нелинейным киральным моделям [31].

В качестве первого примера рассмотрим лагранжиан Янга — Миллса. Введем в этот лагранжиан инвариантную структуру, содержащую высшие производные

$$L=\frac{1}{2}Tr\left\{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2\Lambda^2}D_\alpha F_{\mu\nu}D_\alpha F_{\mu\nu}-\right.$$
$$\left.-D_\alpha\varphi D_\alpha\varphi-\frac{1}{\Lambda^2}D^2\varphi D^2\varphi+V(\varphi)\right\}, \tag{70}$$

где $D_\alpha F_{\mu\nu}$ — ковариантная производная тензора $F_{\mu\nu}$:

$$D_\alpha F_{\mu\nu}=\partial_\alpha F_{\mu\nu}+g\,[F_{\mu\nu},\,A_\alpha]. \tag{71}$$

Нетрудно проверить, что при калибровочных преобразованиях

$$D_\alpha F_{\mu\nu}\to\Omega^{-1}D_\alpha F_{\mu\nu}\Omega, \tag{72}$$

и, следовательно, лагранжиан (70) инвариантен относительно преобразований (31).

Свободные пропагаторы, определяемые лагранжианом (70), имеют вид:

$$\begin{aligned}D^{ab}&=\frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^4}(k^2+k^4\Lambda^{-2}-m^2)^{-1};\\ D^{ab}_{\mu\nu}&=\frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^4}(g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu k^{-2})(k^2-\Lambda^{-2}k^4)^{-1}.\end{aligned} \tag{73}$$

(Здесь для определенности выписана функция Грина векторного поля в поперечной калибровке). Регуляризованные пропагаторы убывают при $k\to\infty$ как k^{-4}. Однако, чтобы сохранить инвариантность регуляризованной теории, пришлось ввести в лагранжиан новые вершины. Из явного вида лагранжиана (70) следует, что по сравнению с исходным лагранжианом он содержит дополнительные тройные вершины с максимальным числом производных, равным трем, четверные вершины с двумя производными, пятерные с одной производной и шестерные без производных. Вычислим индекс расходимости произвольной диаграммы. Каждой внутренней линии соответствует множитель d^4k в числителе и из-за функции распространения — фактор k^{-4}. Поэтому индекс расходимости не зависит от числа внутренних линий. Каждая тройная вершина вносит максимальный вклад k^3, четверная вершина k^2, пятерная — k. Каждой вершине соответствует множитель $\delta^4(k)$, что эквивалентно k^{-4}. Одна из δ-функций выражает закон сохранения полного 4-импульса. Суммируя все эти факторы, находим, что максимальный индекс диаграммы с n-тройными, m-четверными, l-пятерными и s-шестерными вершинами равен:

$$3n+2m+l-4(n+m+l+s)+4=4-n-2m-3l-4s. \quad (74)$$

Из (74) следует, что в регуляризованной модели расходится лишь конечное число диаграмм, а именно, однопетлевые диаграммы второго, третьего и четвертого порядка. Этот вывод автоматически переносится на любую калибровочно-инвариантную теорию. (В некоторых моделях для регуляризации могут понадобиться ковариантные производные в более высокой степени, например $D^2F_{\mu\nu}D^2F_{\mu\nu}$.)

Для однопетлевых диаграмм не существует общего метода инвариантной регуляризации. Для каждой конкретной модели требуется специальный способ. В некоторых случаях, например для γ_5-калибровочной группы, вообще не существует инвариантной регуляризации однопетлевых диаграмм, что приводит к невозможности удовлетворить в таких теориях нормальным тождествам Уорда.

Отсюда следует важная теорема [11]: аномальные тождества Уорда могут порождаться только однопетлевыми диаграммами.

Описанный метод переносится на случай модели со спонтанно нарушенной симметрией. Соответствующий лагранжиан можно получить из (70) формальной заменой

$$m^2 \to -m^2; \quad \varphi \to \varphi+\xi. \quad (75)$$

В полученной таким образом теории свободные пропагаторы будут иметь вид, аналогичный (73):

$$D^{ab}_{\mu\nu}=\delta^{ab}\,(g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu k^{-2})\,(k^2+k^4\Lambda^{-2}-M^2)^{-1}; \quad (76)$$

$$D^{ab}_i=\delta^{ab}\,(k^2+k^4\Lambda^{-2}-m_i^2)^{-1}.$$

Максимальное число производных в дополнительных вершинах остается таким же, как и в симметричной модели. Следовательно, сделанные выше выводы автоматически переносятся и на этот случай.

Что касается однопетлевых диаграмм, то в данной модели отсутствие в них аномалий достаточно просто проверить прямым вычислением. Можно также воспользоваться методом инвариантной регуляризации однопетлевых диаграмм, предложенным в работе [28]. Идея этого метода состоит в следующем. Рассмотрим пятимерное обобщение лагранжиана Янга — Миллса. Импульс k_μ будет теперь иметь пять, а поля A_μ — 15 компонент. Поскольку такая теория по-прежнему калибровочно-инвариантна, однопетлевые диаграммы будут формально удовлетворять обычным тождествам Уорда. Положим пятые компоненты всех внешних импульсов равными нулю. Тогда в силу закона сохранения пятая компонента импульса во всех внутренних линиях будет иметь одно и то же значение.

Мы можем, в частности, фиксировать пятую компоненту импульса во внутренних линиях цикла, положив $k_5^2 = \mu^2$. Таким образом, получим совокупность диаграмм, совпадающих с обычными диаграммами в теории Янга — Миллса, но в которых все внутренние линии приобретают дополнительную массу μ. Например, $k^{-2} \to (k^2 - \mu^2)^{-1}$. Кроме того, возникнут диаграммы, в которых участвуют пятые компоненты полей A_μ. Соответствующие дополнительные вершины изображены на рис. 2. Диаграммы, порожденные вершинами (*в*) и (*г*), удовлетворяют тождествам Уорда сами

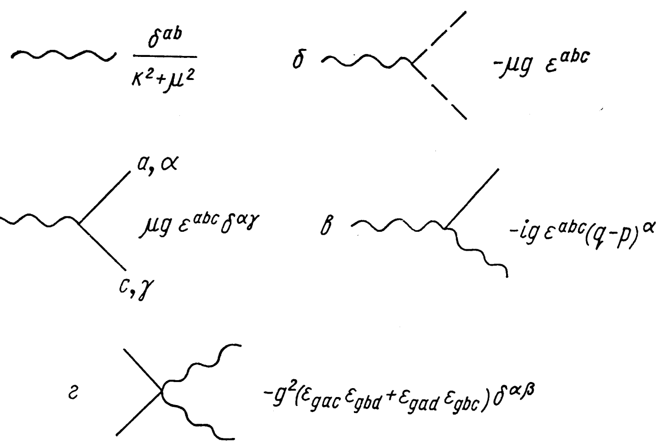

Рис. 2.

Сплошной линией обозначена функция распространения поля Янга — Миллса, пунктирной — функция распространения фиктивных *С*-частиц.

по себе, так как они описывают калибровочно-инвариантное взаимодействие скалярной частицы. Поэтому их можно опустить. Остающаяся совокупность диаграмм при $\mu = 0$ совпадает с диаграммами нерегуляризованной теории. Если возьмем сумму диаграмм с $\mu = 0$ и μ_i, отличными от нуля, и подберем коэффициенты c_i и μ_i так, чтобы

$$\sum c_i = 0; \quad c_0 = 1;$$
$$\sum c_i \mu_i^2 = 0; \quad \mu_0 = 0, \tag{77}$$

мы получим конечный результат, удовлетворяющий нормальным тождествам Уорда *.

* В работе [32] предложен общий метод регуляризации произвольных диаграмм путем аналитического продолжения по числу измерений пространства. По утверждению авторов эта регуляризация калибровочно инвариантна. Однако доказательство этого факта для диаграмм, содержащих более одной петли, в работе отсутствует.

Описанный метод инвариантной регуляризации позволяет корректно перейти от унитарной (кулоновской) калибровки к явно релятивистски инвариантной калибровке в случае обычной теории Янга — Миллса и от унитарной калибровки к перенормируемой в моделях со спонтанно нарушенной симметрией. Однако, чтобы определить несобственный предельный переход $\Lambda \to \infty$, необходимо ввести зависящие от Λ контрчлены. Если эти контрчлены удастся выбрать калибровочно-инвариантным образом, то все рассуждения предыдущего раздела можно будет применить к перенормированной теории, и тем самым будет доказана унитарность перенормированной S-матрицы.

Соотношения между контрчленами вытекают из равенств типа тождеств Уорда. Ниже описан общий метод получения соотношений типа тождеств Уорда в калибровочно-инвариантных теориях. Эти соотношения полезны также с чисто практической точки зрения, так как позволяют пользоваться при вычислениях любой удобной регуляризацией (не обязательно инвариантной), следя лишь за тем, чтобы конечные части диаграмм удовлетворяли тождествам Уорда.

Поясним идею метода на примере электродинамики. Производящий функционал для функций Грина определяется формулой

$$Z(\eta_\mu,\ \xi,\ \bar{\xi}) = z^{-1}(0) \int \exp i \left\{ \int \left[L(x) + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \eta_\mu A_\mu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \bar{\xi}\psi + \bar{\psi}\xi \right] dx \right\} dA\, d\bar{\psi}\, d\psi, \tag{78}$$

где $L(x)$ — калибровочно-инвариантный лагранжиан электромагнитного и электрон-позитронного полей. Тождества Уорда — прямое следствие инвариантности $L(x)$. Чтобы их получить, сделаем в интеграле (78) калибровочную замену переменных:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varphi;$$
$$\psi \to \exp(ie\varphi)\,\psi;$$
$$\bar{\psi} \to \exp(-ie\varphi)\,\bar{\psi}. \tag{79}$$

В силу инвариантности $L(x)$ при этом изменяются лишь члены с источниками и член, фиксирующий калибровку. Поскольку замена переменных не меняет интеграла, можно положить

$$dz/d\varphi\,|_{\varphi=0} = 0. \tag{80}$$

Это соотношение представляет собой компактную форму записи бесконечной системы тождеств Уорда. Его явный вид:

$$\int \exp i \left\{ \int \left[L(x) + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \eta_\mu A_\mu + \bar{\xi}\psi + \xi\bar{\psi} \right] dx \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\alpha} \Box\, \partial_\mu A_\mu - \partial_\mu \eta_\mu + ie\bar{\xi}(x)\,\psi(x) - \right.$$
$$\left. - ie\bar{\psi}(x)\,\xi(x) \right\} dA\, d\bar{\psi}\, d\psi = 0. \tag{81}$$

Дифференцируя (81) по η_ν и полагая $\eta = \xi = \bar{\xi} = 0$, получим равенство:

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta_\mu(x)\,\delta\eta_\nu(y)}\bigg|_{\eta,\ \xi=0} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}D_{\mu\nu}(x-y) =$$

$$= \partial_\nu D_0^c(x-y), \tag{82}$$

означающее отсутствие перенормировки продольной части функции Грина. Дифференцируя (81) по ξ и $\bar{\xi}$, получаем соотношение

$$\frac{1}{\alpha}\Box_x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle TA_\mu(x)\,\bar{\psi}(y)\,\psi(z)\rangle =$$

$$= e\{\delta(x-y) - \delta(x-z)\}\langle T\bar{\psi}(y)\,\psi(z)\rangle, \tag{83}$$

представляющее собой хорошо известное тождество Уорда для вершинной части.

В принципе та же процедура может быть применена и к теории Янга — Миллса. В этом случае производящий функционал для функций Грина имеет вид:

$$Z(\boldsymbol{\eta}_\mu, \boldsymbol{\eta}) = z^{-1}(0)\int \exp i\left\{\int\left[L(x) + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu\mathbf{A}_\mu)^2 + \eta_\mu\mathbf{A}_\mu + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \boldsymbol{\eta}\mathbf{B}\right]dx\right\}\Delta(\mathbf{A})\,d\mathbf{A}\,d\mathbf{B}. \tag{84}$$

Делая в этом интеграле калибровочную замену переменных (31) и полагая $(dZ/d\varphi)|_{\varphi=0} = 0$, получаем систему тождеств Уорда. Однако полученные таким образом соотношения бессодержательны. При преобразованиях (81) члены $(\partial_\mu\mathbf{A}_\mu)^2$ и $\Delta(\mathbf{A})$ меняются сложным образом, и соотношения $dz/d\varphi = 0$ в этом случае включают матричные элементы типа

$$\langle T\partial_\nu\partial_\mu\mathbf{A}_\mu(x)\,\mathbf{A}_\nu(x)\,\mathbf{A}_\rho(y)\rangle,$$

не встречающиеся в разложении S-матрицы. Эти члены зависят от произведения операторов при совпадающих аргументах и нуждаются в специальном доопределении.

Чтобы получить тождества Уорда, связывающие только физические матричные элементы, сделаем калибровочную замену переменных специального вида с фунцией φ, удовлетворяющей уравнению

$$M^{ab}\varphi^b = \chi^a, \tag{85}$$

где χ — произвольная функция, а оператор M — определен равенством (65). Это преобразование оставляет инвариантной меру интеграции $\Delta(\mathbf{A})\,d\mathbf{A}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить якобиан преобразования и вариацию $\Delta(A)$:

$$\delta\Delta(A) = \delta Tr\ln M = \int \delta M^{ab} M_{xy}^{-1\,ba}|_{y=x}\,dx, \tag{86}$$

где обратный оператор M_{xy}^{-1} удовлетворяет уравнению

$$\square M_{xy}^{-1ab} + g\varepsilon^{acd}\,\partial_\mu\{A_\mu^c(x)\,M_{xy}^{-1db}\} = \delta^{ab}\,\delta(x-y). \tag{87}$$

Оператор M_{xy}^{-1ab} представляет собой функцию Грина фиктивных c-частиц во внешнем поле $\mathbf{A}_\mu$.

Приравнивая коэффициент при $\chi(x)$ нулю, получаем соотношение:

$$\int \exp i\left\{\int\left[L(x)+\eta_\mu A_\mu+\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2+\eta B\right]dx\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\alpha}\,\partial_\mu A_\mu^d(y)+\int[\eta_\mu^a(z)\,\partial_\mu^z M_{zy}^{-1ad}+\right.$$
$$\left.+g\varepsilon^{abc}\eta_\mu^a(z)\,A_\mu^b(z)\,M_{zy}^{-1cd}+g\varepsilon^{abc}\eta^a(z)\,\varphi^b(z)\,M_{xy}^{-1cd}]\,dz\right\}\times$$
$$\times\Delta(A)\,dA\,dB=0, \tag{88}$$

представляющее собой систему обобщенных тождеств Уорда. Дифференцируя это равенство по $\eta_\nu^b(x)$ и полагая η_ν, $\eta=0$, получим

$$-\frac{1}{\alpha}\left\langle T\frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\mu}A_\nu^b(y)\right\rangle=\langle T\partial_\nu^y M_{yx}^{-1ba}\rangle+$$
$$+g\varepsilon^{bcd}\langle TA_\nu^c(y)\,M_{yx}^{-1da}\rangle. \tag{89}$$

Дифференцируя (89) по y и используя уравнение (87), получаем

$$(1/\alpha)\,\langle T\,(\partial A_\mu^a/\partial x^\mu)\,(\partial A_\nu^b/\partial y^\nu)\rangle=\delta^{ab}\delta(x-y). \tag{90}$$

Отсюда следует равенство

$$(1/\alpha)\,\partial_\mu^x D_{\mu\nu}^{ab}(x,\,y)=\delta^{ab}\partial_\nu D_0^c(x-y), \tag{91}$$

являющееся точным аналогом условия (82) в электродинамике, означающего отсутствие перенормировки продольной части функции Грина. Из условия (91) следует равенство нулю контрчлена перенормировки массы.

Чтобы получить аналог тождества (83), продифференцируем равенство (88) дважды по η_ν и положим η_ν, $\eta=0$. Имеем

$$(1/\alpha)\,\langle TA_\mu^a(x)\,A_\nu^b(y)\,\partial_\rho A_\rho^c(z)\rangle=$$
$$=\langle T\partial_\mu M_{xz}^{-1ac}A_\nu^b(y)+\langle TA_\mu^a(x)\,\partial_\nu M_{yz}^{-1bc}\rangle+$$
$$+g\varepsilon^{ade}\langle TA_\mu^d(x)\,M_{xz}^{-1ec}A_\nu^b(y)\rangle+$$
$$+g\varepsilon^{bde}\langle TA_\mu^a(x)\,A_\nu^d(y)\,M_{yz}^{-1ec}\rangle. \tag{92}$$

В отличие от электродинамики дивергенция вершинной функции уже не выражается только через двухточечную функцию Грина. Чтобы получить из (92) соотношение между константами перенормировки, продифференцируем это равенство по y^ν и выделим в нем структуру, поперечную по импульсу p, сопряженному с координатой x. Переходя к фурье-образам, имеем:

$$D^{tr}_{\mu\nu}(p)\frac{k^\nu}{k^2}\cdot\frac{(p+k)^\rho}{(p+k)^2}\Gamma^{abc}_{\lambda\nu\rho}(p,k)=\frac{k^\nu}{k^2}G(p+k)\gamma^{abc}_{\mu\nu}(p,k). \tag{93}$$

Здесь $\Gamma^{abc}_{\lambda\nu\rho}$ обозначает собственную вершинную часть

$$\langle TA^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^c_\rho(z)\rangle=\int D^{aa'}_{\mu\mu'}(x-x')D^{bb'}_{\nu\nu'}(y-y')\times$$
$$\times D^{cc'}_{\rho\rho'}(z-z')\Gamma^{a'b'c'}_{\mu'\nu'\rho'}(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz', \tag{94}$$

и использованы равенства (87) и (91).

$G(q)$ — функция Грина c-частицы

$$\delta^{ab}(2\pi)^{-4}\int\exp[ik(x-y)]\,G(k)\,d^4k=\langle TM^{-1ab}_{xy}\rangle, \tag{95}$$

а функция $\gamma^{abc}_{\mu\nu}$ связана с собственной вершинной функцией γ^{abc}_ν, отвечающей переходу двух c-частиц в одну векторную, соотношением:

$$\gamma^{abc}_\nu=ip_\mu\gamma^{abc}_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Значок tr означает, что в этом равенстве выделена часть, поперечная по переменной p $\Gamma^{abc}_{\lambda\nu\rho}$, можно представить в виде:

$$\Gamma^{abc}_{\lambda\nu\rho}(p,k,q)=i\varepsilon^{abc}\{z_1^{-1}[g^{\nu\lambda}(p-k)^\rho+$$
$$+g^{\nu\rho}(p-q)^\lambda+g^{\lambda\rho}(q-\rho)^\nu]+0_{\lambda\nu\rho}, \tag{97}$$

где $0_{\lambda\nu\rho}$ — конечная часть, обращающаяся в нуль при $p^2=k^2=$ $=q^2$. Аналогично можно представить и другие функции, входящие в соотношение (93):

$$D^{tr}_{\mu\nu}(p)=(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu p^{-2})\,p^{-2}\{z_2+0(p^2)\}; \tag{98}$$

$$G(q)=\{\tilde z_2+0(q^2)\}\,q^{-2}; \tag{99}$$

$$\gamma^{abc}_{\mu\nu}(p,q)=\varepsilon^{abc}\{g_{\mu\nu}\tilde z_1^{-1}+0_{\mu\nu}(p,q)\}. \tag{100}$$

Константа z_1 в силу (96) является константой перенормировки вершинной функции γ^{abc}_ν. Подставляя эти выражения в (93) и полагая $p^2=k^2=q^2=0$, получаем

$$z_1z_2^{-1}=\tilde z_1\tilde z_2^{-1}. \tag{101}$$

Это соотношение заменяет равенство $z_1=z_2$ в электродинамике. Непосредственным вычислением в низших порядках можно показать, что $z_1\neq z_2$.

Аналогичным образом можно получить соотношения для констант перенормировки четверной векторной вершины z_4, а также для констант z_{1B}, z_{2B}, z_{4B}, перенормирующих функции Грина и вершинные функции поля материи:

$$z_4 = z_1^2 z_2^{-1}; \quad z_{2B}^{-1} z_{1B} = \tilde{z}_2^{-1} \tilde{z}_1; \quad z_{4B} = z_{1B}^2 z_2^{-1}. \tag{102}$$

Эти соотношения обеспечивают калибровочную инвариантность перенормированного лагранжиана

$$L = -\frac{z_2}{4} \mathbf{f}_{\mu\nu}^R \mathbf{f}_{\mu\nu}^R - \frac{z_1 g_R}{2} \mathbf{f}_{\mu\nu}^R [\mathbf{A}_\mu^R \mathbf{A}_\nu^R] - z_4 \frac{g_R^2}{4} [\mathbf{A}_\mu^R \mathbf{A}_\nu^R][\mathbf{A}_\mu^R \mathbf{A}_\nu^R] -$$

$$- \tilde{z}_2 \bar{\mathbf{c}}^R \square \mathbf{c}^R + \tilde{z}_1 g_R A_\mu^R [\bar{\mathbf{c}}^R \partial_\mu \mathbf{c}^R] + \frac{1}{2} z_{2B} \partial_\mu \mathbf{B}^R \partial_\mu \mathbf{B}^R - z_{1B} g_R \mathbf{A}_\mu^R [\mathbf{B}^R \partial_\mu \mathbf{B}^R] +$$

$$+ \frac{z_{4B}}{2} g_R^2 [\mathbf{A}_\mu^R \mathbf{B}^R][\mathbf{A}_\mu^R \mathbf{B}^R] + V(\mathbf{B}^R). \tag{103}$$

Переходя к неперенормированным полям

$$\begin{aligned} A_\mu^R &= z_2^{-1/2} A_\mu; \\ c_R &= \tilde{z}_2^{-1/2} c; \\ B^R &= z_{2B}^{-1/2} B \end{aligned} \tag{104}$$

и принимая во внимание (102), это выражение можно переписать в виде:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(g) F_{\mu\nu}(g) + \frac{1}{2} D_\mu B(g) D_\mu B(g) -$$

$$- \bar{c} \square c + g A_\mu [\bar{c} \partial_\mu c] + V_R(B), \tag{105}$$

где «голый» заряд g связан с физическим соотношением

$$g = z_1 z_2^{-3/2} g_R. \tag{106}$$

Как видно, перенормировка не нарушает калибровочной инвариантности. (Однако параметры калибровочного преобразования при этом меняются.) Таким образом, нам удалось построить лагранжиан, калибровочно-инвариантный при любом конечном Λ и допускающий несобственный предельный переход $\Lambda \to \infty$. Тем самым доказана калибровочная инвариантность и унитарность перенормированной S-матрицы.

Совершенно аналогичная процедура может быть применена к теории со спонтанно нарушенной симметрией. Тождества Уорда для этого случая по-прежнему даются формулой (88), в которой нужно лишь сделать замену $B \to B + \xi$. Таким же образом можно получить и соотношения между константами перенормировки. Однако ввиду того, что лагранжианы (30) и (37) содержат очень много вершин, соответствующие выкладки весьма громоздки. Часть из них приведена в работе [33].

Другой путь доказательства существования несобственного предельного перехода при $\Lambda \to \infty$ был предложен в работе [34].

Авторы воспользовались тем, что матричные элементы в модели со спонтанно нарушенной симметрией могут быть получены из матричных элементов симметричной теории аналитическим продолжением по массе. Как мы показали, в симметричной теории все расходимости устраняются конечным числом калибровочно-инвариантных контрчленов. Результат работы [34] состоит в том, что те же самые контрчлены устраняют расходимости и в модели с нарушенной симметрией.

Приведенное выше доказательство перенормируемости и унитарности S-матрицы распространяется на случай, когда включено калибровочно-инвариантное взаимодействие с другими полями. Серьезные осложнения возникают, однако, если калибровочная группа включает γ_5-преобразования, что соответствует аксиально векторному взаимодействию поля Янга — Миллса с фермионами. В то же время именно такого рода модели представляют наибольший интерес для описания слабых и электромагнитных взаимодействий.

5. ПЕРЕНОРМИРОВКА МОДЕЛЕЙ СЛАБЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Описанный выше механизм спонтанного нарушения симметрии позволяет строить калибровочно-инвариантные модели, объединяющие слабые и электромагнитные взаимодействия. Первая и наиболее популярная модель такого рода была предложена Вайнбергом [4].

Модель Вайнберга основана на калибровочной группе U (2). Исходный лагранжиан имеет вид:

$$L=\bar{R}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+ig_1B_{\mu})R+\bar{L}\left(\partial_{\mu}+ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}_{\mu}+\frac{ig_1}{2}B_{\mu}\right)L-$$
$$-G\{(\bar{L}\varphi)R+\bar{R}(\varphi^{+}L)\}-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\varphi+ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}_{\mu}+\frac{ig_1}{2}B_{\mu}\right)^2+\frac{m^2}{2}\varphi^2-h^2\varphi^4. \quad (107)$$

L и R обозначают соответственно дублет лептонов с левой спиральностью и синглет с правой спиральностью:

$$L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix};$$
$$R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,e. \quad (108)$$

Помимо уже рассматривавшегося изовекторного поля A_{μ} в модели Вайнберга участвует нейтральное поле B_{μ}, связанное с абелевой калибровочной группой U (1).

Лагранжиан (107) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &\to \mathbf{A}_\mu + g\,[\mathbf{A}_\mu \xi] + \partial_\mu \xi; \\ B_\mu &\to B_\mu + \partial_\mu \eta; \\ L &\to L + \mathrm{i} g \xi \boldsymbol{\tau} L + \frac{\mathrm{i} g_1}{2} \eta L; \\ R &\to R + \mathrm{i} g_1 \eta R; \\ \varphi &\to \varphi + \mathrm{i} g \xi \boldsymbol{\tau} \varphi + \frac{\mathrm{i} g_1}{2} \eta \varphi. \end{aligned} \tag{109}$$

Преобразования (109), будучи записаны в терминах канонических полей e, ν_e, включают как векторные, так и аксиально векторные калибровочные преобразования.

Прежде чем строить для лагранжиана (107) теорию возмущений необходимо, как и раньше, сделать каноническое преобразование:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 + \xi \end{pmatrix}. \tag{110}$$

В результате этого преобразования три компоненты скалярного поля φ превратятся в безмассовые голдстоуновские бозоны, а одна компонента приобретает вещественную массу. Три из четырех векторных полей $(A_\mu B_\mu)$ приобретут конечную массу, а одна останется безмассовой, что соответствует инвариантности преобразованного лагранжиана относительно зарядовых калибровочных преобразований. В результате канонического преобразования возникает также массовый член для лептонов

$$-G\left\{\left[\bar{L}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}\right] R + \bar{R}\,[(0, \xi)\, L]\right\} = -G\xi\bar{e}e. \tag{111}$$

Лагранжиан (107) приводит к смешиванию полей A_μ и B_μ. После диагонализации возникают два нейтральных поля:

$$Z_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2}\,(g A_\mu^3 + g_1 B_\mu) \tag{112}$$

и

$$A_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2}\,(-g_1 A_\mu^3 + g B_\mu) \tag{113}$$

с массами $(\xi/2)\,(g^2 + g_1^2)^{1/2}$ и 0 соответственно. Компонента A_μ взаимодействует с сохраняющимся электрическим током и отождествляется с электромагнитным полем; поле Z_μ описывает нейтральный промежуточный бозон, который индуцирует взаимодействие нейтральных лептонных токов.

Часть лагранжиана (107), описывающая взаимодействие векторных мезонов с фермионами, после диагонализации имеет вид:

$$L_I = \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu W_\mu + \frac{gg_1}{(g^2+g_1^2)^{1/2}}\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu + \\ + \frac{(g^2+g_1^2)^{1/2}}{4}\left[\frac{(3g_1^2-g^2)}{g^2+g_1^2}\bar{e}\gamma^\mu e - \bar{e}\gamma^\mu\gamma^5 e + \bar{\nu}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu\right] Z_\mu, \quad (114)$$

где W_μ — заряженные компоненты векторного триплета (выписана только электронная часть лагранжиана; мюонная часть имеет аналогичный вид).

Лагранжиан Вайнберга помимо обычного $V - A$ и электромагнитного взаимодействий включает дополнительный член, описывающий слабое взаимодействие нейтральных лептонных токов. Наличие этого члена приводит уже в низшем порядке к отличию предсказаний модели Вайнберга для процессов $e\nu$- и $\mu\nu$-рассеяния от предсказаний $V - A$-теории. Мы не будем более подробно останавливаться на физических следствиях модели Вайнберга. Отметим только, что в этой модели возникают соотношения между массами промежуточных бозонов и слабой и электромагнитной константами:

$$e = \frac{gg_1}{(g^2+g_1^2)^{1/2}}; \quad \frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2\xi^2}; \\ M_W \geqslant 37{,}3 \ \textit{Гэв}; \quad M_z > 76{,}4 \ \textit{Гэв}. \quad (115)$$

Лагранжиан Вайнберга калибровочно-инвариантен. Поэтому на основании рассуждений предыдущих разделов можно было бы ожидать, что он отвечает перенормируемой теории. Однако этот вывод ошибочен. В данной модели не существует инвариантной регуляризации однопетлевых диаграмм, благодаря чему однопетлевые диаграммы низшего порядка удовлетворяют не нормальным, а так называемым аномальным тождествам Уорда [35, 36]. Другими словами, калибровочная инвариантность исходного классического лагранжиана не порождает калибровочной инвариантности соответствующей квантовой теории. В модели Вайнберга не удается построить калибровочно-инвариантную перенормированную S-матрицу. Это приводит к неэквивалентности унитарной и перенормируемой калибровок и, следовательно, к несовместности этих двух требований.

Поясним сказанное выше на примере простой модели, описываемой лагранжианом:

$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (1/4)\,f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} - ig\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi A_\mu. \quad (116)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\psi \to \exp(ig\gamma^5\varphi)\,\psi; \quad \bar{\psi} \to \exp(ig\gamma^5\varphi)\,\bar{\psi}; \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\varphi. \quad (117)$$

Можно было бы ожидать, что, так же как в электродинамике, продольная часть пропагатора векторного поля не дает вклада в физические матричные элементы, благодаря чему теория перенормируема. В действительности перенормировочная процедура в данном случае нарушает калибровочную инвариантность. Не удается определить вершинную функцию третьего порядка, соответствующую диаграмме, изображенной на рис. 3, как интегрируемую обобщенную функцию, удовлетворяющую нормальным тождествам Уорда.

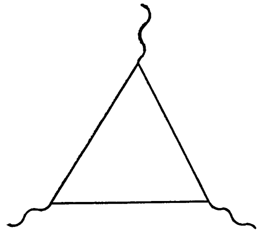

Рис. 3.

Если обозначить фурье-образ вершинной функции $T^{\mu\nu\alpha}(p, q)$, то калибровочная инвариантность требует, чтобы

$$p_\mu T_{\mu\nu\alpha}(p, q) = q_\nu T_{\mu\nu\alpha}(p, q) = (p+q)_\alpha T_{\mu\nu\alpha}(p, q) = 0. \qquad (118)$$

В то же время явное вычисление матричного элемента, изображенного на рис. 3, с учетом свойств симметрии дает

$$i(p+q)_\alpha T_{\mu\nu\alpha} = (g^3/16\pi^2)\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta.$$

Важно подчеркнуть, что никаким выбором контрчленов (при условии минимальности вычитательной процедуры [37]) невозможно удовлетворить условиям (118).

Из формулы (119) следует, что продольная часть пропагатора дает ненулевой вклад, например, в диаграмму, изображенную на рис. 4, это приводит в конечном счете к неперенормируемости теории. Очевидно тот же самый эффект будет наблюдаться в модели Вайнберга, поскольку часть лагранжиана, описывающая взаимодействие с полем B_μ, фактически совпадает с рассмотренной нами моделью. Как обойти эту трудность, изложено в работах [38, 39, 40]. Поясним на примере той же модели. Пусть помимо поля ψ имеется аналогичное поле ψ', отличающееся от ψ каким-либо внутренним квантовым числом:

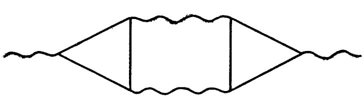

Рис. 4.

$$L = \bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar\psi'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - \frac{1}{4} f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} - g\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi A_\mu + g\bar\psi'\gamma^\mu\gamma^5\psi' A_\mu. \qquad (119)$$

Взаимодействие (119) можно записать в чисто векторном (не содержащем матриц γ_5) виде, введя новые канонические переменные

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\{(1-\gamma_5)\psi + (1+\gamma_5)\psi'\}; \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\{(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\psi'\}. \qquad (120)$$

Лагранжиан взаимодействия, выраженный с помощью ψ_1 и ψ_2, имеет вид:

$$L_I = (g\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_1 - g\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_2)\, A_\mu \tag{121}$$

и представляет собой аналог лагранжиана электромагнитного взаимодействия двух безмассовых спиноров. Этот лагранжиан инвариантен относительно чисто векторной калибровочной группы и не приводит к аномальным тождествам Уорда. В случае чисто векторной калибровочной группы всегда можно удовлетворить нормальным тождествам Уорда, поскольку в этом случае однопетлевые диаграммы, описывающие поле материи, могут быть инвариантно регуляризованы с помощью обычной регуляризации Паули-Вилларса. Факт отсутствия аномалий в многопетлевых диаграммах был нами доказан ранее.

В рассматриваемой простой модели нетрудно непосредственно убедиться в отсутствии аномалий. Поле ψ' порождает диаграмму, аналогичную изображенной на рис. 3. Поскольку ψ' входит в лагранжиан взаимодействия с константой $-g$ вклады этих двух диаграмм взаимно компенсируются. Аналогичный механизм подавления аномалий можно использовать и в моделях с нарушенной симметрией. При этом в результате спонтанного нарушения симметрии поля ψ и ψ' могут приобрести различные ненулевые массы.

Описанный механизм подавления аномалий обязательно требует введения дополнительных полей. Казалось бы, естественно использовать в качестве полей ψ и ψ' электрон и μ-мезон. Действительно, если заменить в модели Вайнберга левополяризованный дублет и правополяризованный синглет на четырехкомпонентные мультиплеты

$$D = \begin{pmatrix} \nu_{eL} + \nu_{\mu R} \\ e_L + \mu_R \end{pmatrix}; \quad S = (e_R + \mu_L) \tag{122}$$

и ввести массовые члены

$$G_1(\bar{D}_L\varphi)\, S + G_2(\bar{D}_R\varphi)\, S + \text{э. с.}, \tag{123}$$

то получим лагранжиан, инвариантный относительно чисто векторной калибровочной группы и, следовательно, перенормируемый. Однако при этом электрон и μ-мезон будут входить в лагранжиан взаимодействия с противоположной спиральностью, что противоречит эксперименту. Остается возможность заменить в формулах (122), (123) μ и ν_μ некоторыми гипотетическими частицами θ^+ и θ^0. Если выбрать массовые члены так, что $m_\theta \gg m_k$, то такая модель будет правильно описывать взаимодействие $e\nu_e$ и кроме того предсказывать ряд процессов с участием θ-частиц, которые пока могли не наблюдаться из-за их большой массы. (Для компенсации μ-мезонных аномалий нужно ввести дополнительные тяжелые лептоны θ_μ^+ и θ_μ^0.)

Существует довольно много свободных от аномалий моделей, в которых используется описанный выше механизм. Опишем в качестве примера две модели, в которых число гипотетических частиц минимально.

Модель Джорджи и Глешоу [41] основана на калибровочной группе SU_2. В ней отсутствует нейтральный промежуточный бозон и соответственно взаимодействие нейтральных лептонных токов. Вводятся триплет и синглет четырехкомпонентных лептонных полей:

$$\psi_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E^+ + e^- \\ \frac{1}{i}(e^- - E^+) \\ \nu_{eL}\sin\beta + \theta_L^0\cos\beta + \theta_R^0 \end{pmatrix}; \tag{124}$$

$$\psi_s = (\nu_{eR} + \nu_{eL}\cos\beta - \theta_L^0\sin\beta),$$

где e и ν_e обозначают электрон и электронное нейтрино, а θ^0 и E^+ — гипотетические тяжелые лептоны. Исходный лагранжиан

$$L = \overline{\psi}_t(\gamma^\mu\partial_\mu\psi_t + g\gamma^\mu[A_\mu\psi_t]) - m\overline{\psi}_t\psi_t +$$
$$+ \varphi\{g_1[\overline{\psi}_t\psi_t] + g_3\overline{\psi}_t(1-\gamma_5)\psi_5\} + \text{э. с.} + L(A_\mu\varphi). \tag{125}$$

Здесь φ — изовекторное скалярное поле, а $L(A_\mu, \varphi)$ обозначает лагранжиан, описывающий калибровочно-инвариантное взаимодействие поля φ с янг-миллсовским полем A_μ. Каноническое преобразование

$$\varphi^a \to \varphi^a + \delta^{a3}\xi \tag{126}$$

приводит к появлению массы у двух компонент векторного поля и к появлению дополнительного массового члена для полей ψ.

Лагранжиан (125) инвариантен относительно чисто векторных калибровочных преобразований. Поэтому для него можно построить инвариантную регуляризацию и доказать перенормируемость и унитарность S-матрицы.

Лагранжиан взаимодействия лептонов имеет стандартный вид:

$$L_I = eA_\mu(\overline{E}^+\gamma^\mu E^+ - \overline{e}^-\gamma^\mu e^-) + \frac{1}{2}e\sin\beta W_\mu^+\overline{e}^-\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu + \ldots + \text{э. с.} \tag{127}$$

В модели Джорджи и Глешоу возникают следующие соотношения между параметрами:

$$g_W = \frac{1}{2}e\sin\beta; \quad 2m(\theta^0)\cos\beta = m(E^+) + m(e^-), \tag{128}$$

откуда

$$m_W \leqslant 53 \ \textit{Гэв}.$$

μ-Мезоны вводятся независимо вместе со своими партнерами E_μ^+ и θ_μ^0. Поскольку значение угла β в модели не фиксировано, μ — e-универсальность автоматически не возникает, хотя и не противоречит модели.

Вторая модель [42] основана на группе U (2). В этой модели для лептонной пары e, ν_e вводится всего один дополнительный нейтральный партнер θ_e.

Лептоны объединяются в четырехкомпонентный дублет и синглет

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \sin\beta + \theta_{eL} \cos\beta + \theta_{eR} \\ e \end{pmatrix}; \qquad \psi_S = (\nu_{eR} - \nu_{eL} \cos\beta + \theta_{eL} \sin\beta). \tag{129}$$

Исходный лагранжиан

$$L = \bar{\psi}_D \gamma^\mu \left(\partial_\mu + igA_\mu \tau + \frac{ig_1}{2} B_\mu \right) \psi_D + m\bar{\psi}_D \psi_D + \\ + G (\bar{\psi}_D \varphi)(1 - \gamma_5) \psi_5 + \text{э. с.} + L(B_\mu, A_\mu, \varphi), \tag{130}$$

где $L\ (B_\mu,\ A_\mu,\ \varphi)$ — лагранжиан янг-миллсовских полей B_μ, A_μ, взаимодействующих со скалярным дублетом φ.

Как и первая, эта модель основана на чисто векторной калибровочной группе, и поэтому, пользуясь сформулированными выше правилами, можно построить для нее унитарную и перенормируемую S-матрицу.

Лагранжиан (130) порождает взаимодействие нейтральных лептонных токов. Однако при $g = g_1$ члены, описывающие взаимодействие нейтральных электронных токов, обращаются в нуль, и остается лишь взаимодействие нейтральных нейтринных токов. (В модели Вайнберга этого нельзя добиться никаким выбором g и g_1.)

При $g = g_1$ электрический заряд $e = (g/\sqrt{2}) \sin\beta$, где $\cos\beta = m_e/m_\theta$. Поскольку m должно быть $\gg m_e$, $\sin\beta \approx 1$, и модель предсказывает массу промежуточного мезона $m_w \approx 76{,}4$ *Гэв*.

μ-Мезоны вводятся аналогичным образом. Если выполнено условие $m_\mu \ll m_{\theta_\mu}$, то автоматически возникает универсальность.

На этом закончим описание перенормируемых моделей лептонов. Все они основаны на описанном выше механизме. Их общий недостаток — необходимость введения гипотетических частиц, существование которых сомнительно с экспериментальной точки зрения. Необходимо отметить, что «тяжелым» лептонам нельзя приписывать сколь угодно большую массу. Для нее существуют довольно жесткие ограничения (конкретный вид которых зависит от модели).

Некоторые авторы предлагают конструировать свободные от аномалии модели, используя вместо тяжелых лептонов барионы или кварки. Мы не будем подробно останавливаться на этих моделях. Им также присущ ряд трудностей, связанных в первую очередь с необходимостью учета сильных взаимодействий.

Хотя создание единой теории, объединяющей сильные, электромагнитные и слабые (а может быть и гравитационные) взаимодействия, весьма заманчиво, нам кажется, что должна существовать менее претенциозная возможность внутренне замкнутого описания лептонов по крайней мере в ограниченной области энергий. Успех квантовой электродинамики свидетельствует в пользу такой точки зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hooft G't** Nucl. Phys. B, 1971, v. 35, p. 173.
2. **Higgs P. W.** Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 508; Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1156.
3. **Kibble T. W. B.** Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 1554.
4. **Weinberg S.** Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264.
5. **Faddeev L. D., Popov V. N.** Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 29. Препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967.
6. **De Witt B. S.** Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1195, 1239.
7. **Mandelstam S.** Phys. Rev. 1968, v. 175, p. 1580.
8. **Fradkin E. S., Tiytin I. V.** Phys. Rev., 1970, v. 2, p. 2841.
9. **Славнов А. А.** ТМФ, 1972, т. 10, с. 153; Preprint ITP-71-83E, Kiev, 1971.
10. **Taylor J. C.** Nucl. Phys. B, 1971, v. 33, p. 436.
11. **Славнов А. А.** ТМФ, 1971, т. 13, с. 174; Preprint ITP-71-131E, Kiev, 1971.
12. **Yang C. N., Mills R.** Phys. Rev., 1959, v. 96, p. 191.
13. **Utiyama R.** Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 1597.
14. **Glashow Sh. L., Gell-Mann M.** Ann. Phys., 1961, v. 15, p. 437.
15. **Shwinger J.** Ann. Phys., 1957, v. 2, p. 407.
16. **Sakurai J. J.** Ann. Phys., 1960, v. 11, p. 1.
17. **Stuekelberg E. S.** Helv. Phys. Acta., 1938, v. 11, p. 226, 229.
18. **Славнов А. А.** ТМФ, 1972, т. 10, с. 305.
19. **Фаддеев Л. Д.** Препринт ЛОМИ № 1. Ленинград, 1972.
20. **Nambu Y., Iona-Lasinio G.** Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345.
21. **Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.** «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, с. 345.
22. **Goldstone I.** Nuovo cimento, 1961, v. 19, p. 155.
23. **Боголюбов Н. Н.** Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1961.
24. **Фаддеев Л. Д.** ТМФ, 1969, т. 1, с. 1.
25. **Завьялов О. И.** Диссертация ОИЯИ. Дубна, 1971.
26. **Shwinger J.** Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 728.
27. **Фрадкин Е. С.** В кн.: Тр. ФИАН СССР. Т. 23. М., «Наука», 1965.
28. **G't Hooft.** Nucl. Phys. B, 1971, 33, p. 173.
29. **Borhers H. J.** Nuovo cimento, 1960, v. 25, p. 270.
30. **Kallosh R., Tiytin I.** Preprint PhIAN No. 90, Moscow, 1972.
31. **Slavnov A. A.** Nucl. Phys. B, 1971, v. 31, p. 301.

17—0228

32. **Nooft G't, Veltman M.** Nucl. Phys. B, 1972, v. 44, p. 189.
33. **Ross D. A., Taylor J. C.** Preprint University of Oxford 46/72.
34. **Lee B. W., Zinn-Justin J.** Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3121.
35. **Adler S.** Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2426.
36. **Bell J. S., Jackiw R.** Nuovo cimento, 1969, v. 60, p. 47.
37. **Славнов А. А.** ТМФ. 1971, т. 7, с. 13.
38. **Bouchiat C., Illiopoulos J., Meyer Ph.** Phys. Lett., B, 1972, v. 38, p. 519.
39. **Georgi H., Glashow S.** Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 429.
40. **Gross D., Jackiw R.** Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 477.
41. **Georgi H., Glashow S.** Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1494.