

УДК 538.3 + 530.145:538.3

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ И В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ

*В. М. Дубовик,
А. А. Чешков*

Лаборатория теоретической физики
ОИЯИ, Дубна

Разобраны свойства нового мультипольного семейства токовых моментов (тороидных), отличных от зарядовых и магнитных. Указаны принципиальные эффекты и концептуальные изменения, к которым приводит существование этих моментов. Дан полный формализм мультипольных разложений (параметризация тока) в классической и в квантовой теории поля.

It is shown that the procedure of the multipole current expansion in classic electrodynamics gives rise to (static) current moments of a third type (in addition to charge and magnetic ones) which are called toroid moments. A detailed discussion of their properties is given. The general formula for the expansion of the current in the multipole distributions of all the three types is given. The general expression is also given for the vector-potential of the electromagnetic field induced by a set of multipole distributions of all the types and ranks. Some conceptual consequences of the presence of the two kinds of the sources of the electrical type radiation are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — развить на основании классических мультипольных разложений релятивистский формализм, феноменологическим образом описывающий электромагнитные вершины, содержащие частицы с высшими спинами*, и рассмотреть в нем простейший процесс — излучение γ -кванта, учитывая при этом тороидные форм-факторы.

Феноменологическое описание процессов приходится применять из-за того, что мы не знаем динамической картины взаимодействия фотонов с элементарной частицей. При этом теоретико-групповое рассмотрение полевых операторов позволяет выразить матричные элементы, описывающие электромагнитные процессы

* Высшими спинами принято называть спины $j \geq 1$.

с помощью феноменологических инвариантных функций — форм-факторов. Необходимость выделения инвариантных величин из амплитуды упругого электромагнитного рассеяния, комптон-эффекта, фото- и электророждения резонансов возникает также при рассмотрении динамических моделей, например, в дисперсионном подходе. Выражение вершинных функций с помощью форм-факторов необходимо также при использовании таких методов, как модели симметрии элементарных частиц и алгебры токов, правил сумм и т. д.

К частицам с высшими спинами можно отнести также и ядра. Одним из инструментов исследований структуры ядер является рассеяние на них электронов. В настоящее время в связи с ростом энергий эксперимента появляется необходимость вводить в расчеты высшие мультипольные моменты ядер. Следует также учитывать все релятивистские эффекты в рассеянии, поскольку, например, эффект отдачи ядра в экспериментах на новейших электронных ускорителях может быть значителен не только для легких, но и для средних и даже для тяжелых ядер.

Прогресс в методике создания поляризованных мишеней открывает новые экспериментальные возможности для дальнейшего детального исследования электромагнитной структуры нуклонов и ядер (измерение высших мультипольных форм-факторов частиц).

В связи с вышеизложенным, а также с обнаружением нарушений дискретных симметрий, феноменологическое описание электромагнитных свойств частиц получило дальнейшее развитие: были детально изучены свойства оператора электромагнитного тока при P - и T -отражениях, открыто новое мультипольное семейство токовых моментов (тороидных), отличных от зарядовых и магнитных. Существование тороидных моментов радикально изменяет устоявшееся мнение о взаимно-однозначном соответствии мультиполей излучения и мультипольных моментов электромагнитных систем (следовательно, о наборе измерений в полном опыте) и приводит к новым принципиальным эффектам.

Необходимость введения тороидных моментов возникает уже в классической электродинамике. Поэтому целесообразно сначала в ней разобрать свойства этих моментов, а затем, используя правила соответствия, перейти к квантовому случаю. Предварительно покажем, как из общих соображений можно прийти к выводу о существовании тороидных моментов.

Пусть имеется произвольная система, описываемая зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{x}, t)$ и плотностью токов $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$. Зададимся задачей описать электромагнитные свойства этой системы с помощью набора параметров. Выберем некоторую полную систему функций, например сферические гармоники, и разложим по ним $\rho(\mathbf{x}, t)$. Получим общеизвестный ряд мультипольных моментов: полный заряд системы, зарядовый диполь, квадруполь и т. д.

Аналогичным образом можно разложить и каждую из компонент тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$. В итоге получим четыре семейства параметров, описывающих рассматриваемую электромагнитную систему. Имеется, однако, условие сохранения тока:

$$\partial_\mu J_\mu(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

в силу которого только три компоненты $J_\mu(\mathbf{x}, t)$ — независимые функции. Действительно, известно (см., например, [1—4]), что при мультипольном разложении возникает три семейства мультипольных моментов: зарядовые Q_{lm} , магнитные M_{lm} и электрические поперечные моменты E_{lm} .

Напомним теперь, что разложение плотности тока не формально-математическая операция, она имеет наглядный геометрический смысл. Для каждого мультипольного момента существует система

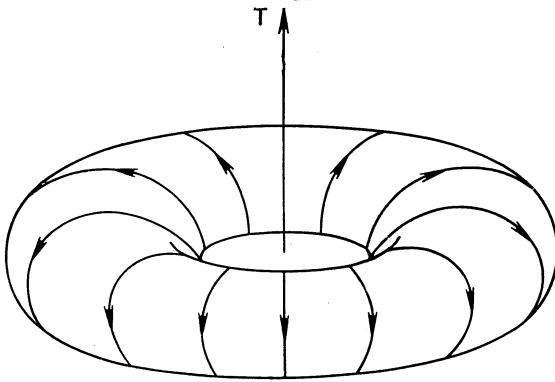


Рис. 1. Конфигурация тока, обладающего тороидальным дипольным моментом.

Стрелками на торе указано направление тока, момент направлен по оси симметрии тора.

зарядов или токов, обладающая только этим моментом (по крайней мере, в первом приближении). Например, плоская рамка с током и зарядовый диполь описываются соответственно магнитным и зарядовым дипольными моментами. Электрические поперечные моменты также соответствуют определенным распределениям токов. Попробуем связать их с геометрическими образами. Для этого рассмотрим простейший пример — тороидальный постоянный ток (рис. 1). Такой ток имеет осевую симметрию и поэтому должен характеризоваться вектором, направленным по оси тора, т. е. дипольным моментом. Так как для данной конфигурации $\rho \equiv 0$, а все витки тора имеют магнитные моменты, лежащие в плоскости симметрии тора, то как зарядовый, так и магнитный дипольные моменты тора равны нулю. Таким образом, тороидальный ток может

характеризоваться только электрическим поперечным дипольным моментом. Однако электрические поперечные моменты E_{lm} обычно приравнивают в длинноволновом приближении к \dot{Q}_{lm} [1, 4]:

$$E_{lm} = \dot{Q}_{lm}, \quad (2)$$

где точка означает дифференцирование по времени. При этом считается, что в общем случае равенство зарядовых и электрических поперечных моментов справедливо с точностью до релятивистских поправок. Покажем, что последнее не справедливо.

Рассмотрим, например, статический случай ($\partial/\partial t = 0$). Тогда при нахождении характеристики тороидального постоянного тока, используя соотношение (2), автоматически получаем нуль. Более того, в общем случае можно сразу сказать, что соотношение (2) в принципе несправедливо даже в длинноволновом приближении, так как оставляет из трех независимых мультипольных семейств Q_{lm} , M_{lm} и E_{lm} только два: Q_{lm} и M_{lm} .

Структура и свойства электрических поперечных мультипольных моментов потребовали, таким образом, более детального изучения и в рамках классической теории поля; они анализировались в работах [5, 6]. Данный вопрос, однако, связан со всей задачей о мультипольном разложении в целом, а решение его определяется самой сущностью мультипольного анализа. Поэтому в этой статье материал излагается в систематическом порядке. Работа разбита на две части, посвященные классическому и квантовому [7, 8] рассмотрению соответственно. В разд. 1 поставлена задача мультипольного разложения. В разд. 2, 3 получены зарядовые $Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$, магнитные $M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ и электрические поперечные $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ мультипольные форм-факторы, зависящие от волнового числа k . Значения Q_{lm} и M_{lm} при $k = 0$ являются соответствующими мультипольными моментами, а их производные при $k = 0$ связаны со средними радиусами этих моментов. В разд. 4 найдено точное соотношение между \dot{Q}_{lm} и E_{lm} , заменяющее равенство (2):

$$E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \dot{Q}_{lm}(0, t) + \mathbf{k}^2 T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t). \quad (37)$$

В этом выражении $T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ — семейство тороидных мультипольных форм-факторов, не зависящее от Q_{lm} и M_{lm} . Дано определение этих форм-факторов и соответствующих моментов и рассмотрены их свойства. В частности, именно они в статическом случае характеризуют «тороидальные» токи. В разд. 5 изложен вопрос об электромагнитных взаимодействиях тороидных моментов.

Вопросу излучения тороидными моментами посвящены разд. 6, 7. Вопрос имеет в некотором отношении принципиальное значение.

В связи с тем, что мультиполи излучения бывают только двух типов Ml и El из-за 4-мерной и 3-мерной поперечности поля излучения, на первый взгляд может показаться, что излучение определяется соответственно только магнитными и зарядовыми мультипольными моментами, а тороидные мультипольные моменты системы, влияя на рассеяние, не излучают подобно средним радиусам заряда (см., например, [9]). Это, однако, не так, что видно из приведенного выше выражения.

В разд. 8 сделаны замечания о мультипольном разложении тока магнитных зарядов. В разд. 9 анализируется причина, приводящая к появлению структуры электрической поперечной части тока и дано заключение к первой части статьи.

Во второй части тороидные моменты введены в квантовую физику. В разд. 10 разбираются специальные (лоренц-инвариантные) системы отсчета, в которых скалярные произведения трехмерных импульсов частиц, участвующих в данном процессе, оказываются лоренцевыми инвариантами. Нековариантные выражения, например формулы нерелятивистских параметризаций, в таких системах в действительности ковариантны. В разд. 11 найдена лоренц-инвариантная система отсчета, мультипольное разложение тока в которой приводит к форм-факторам, описывающим только внутреннюю структуру объектов как в диагональном случае, так и в случае переходов. Связь квантового разложения и классического демонстрируется в разд. 12, а в разд. 13 приведены общие формулы, решающие задачу параметризации тока в релятивистской квантовой теории. Ограничения, налагаемые на мультипольные форм-факторы общими требованиями (эрмитовости, P - и T -инвариантности), разобраны в разд. 14. В разд. 15 приведена общая формула для вероятности мультипольного излучения произвольной квантовой системой, учитывающая существование тороидных форм-факторов. В разд. 16 на примере атома водорода показано, что наличие третьего вида переходного диполя — тороидного — приводит к новым эффектам расщепления атомных уровней (наряду с эффектами Штарка и Зеемана). Последний разд. 17 посвящен описанию роли тороидных форм-факторов в физике ядра и элементарных частиц.

Имеются три приложения и таблица отбора форм-факторов при наложении требований эрмитовости и P - и T -инвариантности.

В приложении 1 приведены формулы мультипольного разложения энергии взаимодействия системы с электромагнитным полем. В приложении 2 дана сводка основных рабочих формул. В приложении 3 найдена связь явно ковариантной параметризации в случае $j_1 = j_2 = 1/2$, $\kappa_1 \neq \kappa_2$ (где $j_{1,2}$ и $\kappa_{1,2}$ — спины и массы начального и конечного состояний) с мультипольной параметризацией. Показано, что обычно используемый для параметризации аксиального тока анаполь содержит кинематическое подавление эффекта излучения.

1. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

1. Задача мультипольного разложения

Мультипольное разложение тока возникло как процедура нахождения параметров системы зарядов и токов, определяющих поле излучения этой системы, т. е. поле в волновой зоне. Математически это означает разложение плотностей распределения заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$ и тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ в ряд по полному набору δ -образных функций, отличных от нуля в бесконечно малой области (см., например, [10, 11]), т. е. представление плотности $J_\mu(\mathbf{x}, t)$ в виде суммы точечных источников:

$$J_\mu(\mathbf{x}, t) = \int J_\mu(\boldsymbol{\xi}, t) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d^3\xi = \sum_{l=0}^{\infty} A_{\mu, ij \dots k}^l(t) \underbrace{\partial_i \partial_j \dots \partial_k}_{l} \delta(\mathbf{x}). \quad (3)$$

В этом выражении

$$A_{\mu, ij \dots k}^l(t) = \frac{(-1)^l}{l!} \int \xi_i \xi_j \dots \xi_k J_{\mu!}(\boldsymbol{\xi}, t) d^3\xi \quad (4)$$

являются линейными комбинациями 2^l -польных моментов и средних значений $2n$ -степенных радиусов 2^{l-n} -польных распределений; n пробегает значения от 1 до $l - 1$. Можно пользоваться непосредственно величинами $A^l(t)$, однако это неудобно, потому что фотоны определенного типа El или Ml (с определенными четностью и моментом) излучаются линейными комбинациями $A^l(t)$, преобразующимися по неприводимым представлениям веса l группы $O(3)$.

Если составление из $A^l(t)$ мультипольных моментов низших рангов ($l = 0, 1, 2$) не представляет труда, то для $l > 2$ это становится чрезвычайно утомительной процедурой, и в общем виде выполнить ее не удается. Поэтому для мультипольного разложения необходимо сразу использовать полный набор подходящих базисных функций, так чтобы коэффициенты разложения были бы неприводимыми тензорами (мультипольными форм-факторами). Далее, если это необходимо, можно переходить к δ -образным функциям (разложение на точечные источники). Образующиеся при них числовые коэффициенты являются моментами и средними радиусами мультипольных распределений. Так решается задача параметризации электромагнитных свойств системы, описываемой данным 4-током.

Подчеркнем, что мультипольные форм-факторы, зависящие от волнового числа \mathbf{k} (фурье-образы мультипольных распределений)

необходимо вводить уже в классической электродинамике, если мы хотим полностью описать свойства системы. Использование только моментов при наличии высоких мультипольностей может оказаться недостаточным даже в длинноволновом пределе. Рассмотрим, например, задачу об излучении. Интенсивность излучения определяется значением форм-факторов при $k = \sqrt{\mathbf{k}^2} = \omega$. В длинноволновом приближении мы заменяем их значениями при $k = 0$, т. е. моментами. Допустим, что у данной системы $\mu_i = 0$, $\mu_{ij} = 0$ и лишь $\mu_{ijk} \neq 0$. Тогда следует рассмотреть также среднеквадратичный радиус магнитного дипольного распределения:

$$\overline{\rho_i^2} = \frac{1}{2} \int \xi^2 [\xi \times \mathbf{J}]_i d^3\xi,$$

имеющий, вообще говоря, тот же порядок, что и октупольный момент $\mu_{ijk} (\sim e \frac{v}{c} a^3)$. Аналогичным образом в задаче о рассеянии наряду с зарядовым квадруполем надо учитывать и среднеквадратичный радиус заряда.

Обобщая, можно сказать, что полная параметризация электромагнитных свойств системы подразумевает два разложения по степеням k : одно, связанное с представлением плотностей заряда и тока в виде набора неприводимых тензорных функций от \mathbf{k}^2 , и другое, связанное с разложением каждой из этих функций в ряд по степеням \mathbf{k}^2 . Мультипольная параметризация, например, фурье-образа зарядовой плотности представлена в табл. 1. Здесь моменты

Таблица 1

Мультипольная параметризация фурье-образа зарядовой плотности $\rho(\mathbf{k}, t)$

n	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
0	q_0	kq_1	k^2q_2	...
1	$k^2\overline{r_0^2}$	$k^3\overline{r_1^2}$	$k^4\overline{r_2^2}$...
2	$k^4\overline{r_0^4}$	$k^5\overline{r_1^4}$	$k^6\overline{r_2^4}$...
3

q_l имеют порядок ea^l , а средние радиусы $\overline{r_l^{2n}} \sim ea^{2n+l}$ (a — размер системы). Таблица, вообще говоря, не ограничена ни по вертикали, ни по горизонтали. Заметим, что в квантовой теории приведенная выше таблица обрывается по горизонтали из-за кинематических свойств спина так, что введение форм-факторов в этом случае имеет смысл вне зависимости от величины безразмерного параметра ka .

2. Мультипольные зарядовые форм-факторы и моменты плотности заряда

Подходящей системой базисных функций для разложения плотности заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$ является система регулярных решений уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) \mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5a)$$

$$\mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) = f_l(kx) Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|. \quad (5b)$$

Здесь $Y_{lm}(\mathbf{n})$ — сферические гармоники, а f_l — сферические функции Бесселя:

$$f_l(a) = (2\pi)^{3/2} i^l I_{l+1/2}(a)/\sqrt{a}, \quad (5b)$$

где $I_{l+1/2}(a)$ — обычная функция Бесселя с полуцелым индексом.

Функции $\mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x})$ появляются естественным образом в определении мультипольных моментов плотности тока J_μ при разложении на мультиполи электромагнитного излучения данного тока (см., например, [1, 4]). Функции $\mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x})$ ортонормированы:

$$\int \mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) \mathfrak{Y}_{l'm'k'}^*(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{(2\pi)^3}{k^2} \delta(k - k'). \quad (6)$$

Используя условие полноты

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l, m, k} \mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) \mathfrak{Y}_{l'm'k'}^*(\xi) &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{x} - \xi); \\ \sum_k &\equiv \int_0^\infty k^2 dk \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и первое равенство в (3), получаем:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l, m, k} \mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) q_{lm}(k, t), \quad (8)$$

где

$$q_{lm}(k, t) = \int \mathfrak{Y}_{lmk}^*(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (9)$$

Если заряд сосредоточен в малой области, так что $\rho \neq 0$ только при $kx \ll 1$, то для вычисления q_{lm} можно воспользоваться приближенным значением $F_{lmk}(\mathbf{x})$:

$$\mathfrak{Y}_{lmk}(\mathbf{x}) \simeq [4\pi (ikx)^l / (2l + 1)!!] Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (5g)$$

Сравнивая определение 2^l -польного зарядового момента (см., например, [4])

$$Q_{lm}(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int x^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \rho(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (10)$$

и выражение для $q_{lm}(k, t)$ при $k \rightarrow 0$, видим, что величины *

$$Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{(2l+1)!!}{(-ik)^l \sqrt{(2l+1)4\pi}} q_{lm}(k, t) \quad (11)$$

можно назвать зарядовыми 2^l -польными форм-факторами, нормированными при $k \rightarrow 0$ на зарядовые 2^l -польные моменты:

$$Q_{lm}(0, t) \equiv Q_{lm}(t).$$

Используя определение зарядовых мультипольных форм-факторов (11), разложение плотности заряда можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3} \sum_{l, m, k} (-ik)^l \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}) Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t). \quad (12)$$

Разложим мультипольный форм-фактор $Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ в ряд Тейлора по $(-\mathbf{k}^2)$:

$$Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = Q_{lm}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{k}^2)^n}{n!} Q_{lm}^{(n)}(0, t). \quad (13)$$

Производные мультипольного форм-фактора по $(-\mathbf{k}^2)$ в нуле назовем средними $2n$ -степенными радиусами 2^l -польного зарядового распределения, отнормировав их следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{r_{lm}^{2n}}(t) &\equiv \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{(2l+1)!!} Q_{lm}^{(n)}(0, t) = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int x^{l+2n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \rho(\mathbf{x}, t) d^3x. \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее выражение получено с помощью формул (11), (9), (56) и соотношения:

$$\frac{d^n}{d(-k^2)^n} \left[\frac{f_l^*(kx)}{k^l} \right] = \frac{(ix)^n}{2^n} \frac{f_{l+n}^*(kx)}{k^{l+n}}.$$

Заметим, что подставляя разложение (7) в (6) и интегрируя по \mathbf{k} , можно представить плотность заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$ в виде ряда по линейным комбинациям δ -функции и ее производных [ср. с (3)]. Коэффициентами при этих линейных комбинациях будут $Q_{lm}(t)$ и $r_{lm}^{2n}(t)$.

* Замена переменной $|\mathbf{k}|$ на $-\mathbf{k}^2$ несущественна и произведена, как будет видно в дальнейшем, для большей аналогии классических и квантовых выражений.

3. Мультипольные токовые форм-факторы и моменты

Так как закон сохранения тока (1) связывает продольную составляющую плотности тока \mathbf{J}_{\parallel} с плотностью заряда ρ , а в задаче излучения имеет значение поперечная составляющая тока \mathbf{J}_{\perp} , то целесообразно сразу разбить плотность тока \mathbf{J} на эти составляющие, используя теорему Гельмгольца [14] *:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\parallel} + \mathbf{J}_{\perp}; \quad \text{div } \mathbf{J}_{\perp} = \text{rot } \mathbf{J}_{\parallel} = 0; \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_{\parallel} = \text{grad } \varphi; \quad \mathbf{J}_{\perp} = \text{rot } \mathbf{N} + \text{rot rot } \mathbf{R}. \quad (16)$$

Векторы \mathbf{N} и \mathbf{R} можно выразить через скалярные функции ψ и χ [14]:

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}\psi(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{R} = \mathbf{x}\chi(\mathbf{x}, t). \quad (17)$$

Три независимые скалярные функции: φ (определяющая продольную часть тока), ψ и χ (определяющие поперечную часть тока) полностью определяют ток \mathbf{J}_{μ} (φ связана законом сохранения с ρ). Разложение каждой из них в ряд порождает семейство соответствующих мультипольных моментов: ρ (или φ) — зарядовых, ψ — магнитных, χ — электрических поперечных.

Для мультипольного разложения плотности тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ в качестве базисных функций опять выберем $\mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x})$, по которым разложим φ , ψ и χ . Тогда базисными векторными функциями будут

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) &= (-i/k) \text{grad } \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}); \\ \mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}) &= (i/k) \text{rot rot } \{ \mathbf{x} \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}) \} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \equiv \\ &\equiv \frac{-1}{k} \frac{[\nabla \hat{\mathbf{L}}]}{\sqrt{l(l+1)}} \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k} \text{rot } \mathfrak{F}_{lmk}^{(0)}(\mathbf{x}); \\ \mathfrak{F}_{lmk}^{(0)}(\mathbf{x}) &= \text{rot } \{ \mathbf{x} \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}) \} \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \equiv \\ &\equiv \frac{\hat{\mathbf{L}}}{\sqrt{l(l+1)}} \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}) = \frac{i}{k} \text{rot } \mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{L}} \equiv -i \left[\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Первая из них — продольная:

$$\text{rot } \mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) = 0; \quad (19a)$$

$$\text{div } \mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) = ik \mathfrak{F}_{lmk}(\mathbf{x}), \quad (19b)$$

а две последние функции — поперечные:

$$\text{div } \mathfrak{F}_{lmk}^{(0)}(\mathbf{x}) = \text{div } \mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (19b)$$

* Подчеркнем, что введение $\text{rot rot } \mathbf{R}$ не противоречит теореме Гельмгольца, но вытекает из нее, давая возможность построить трехмерный базис для разложения произвольных векторных полей (см., например, [14], гл. 13).

Функции $\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ являются решениями векторного уравнения Гельмгольца и выражаются с помощью функций $f_l(kx)$ и сферических векторов [4]

$$\{\mathbf{Y}_{l'm'}(\mathbf{n})\}^\mu = \sum_{m'} \langle l'm'1\mu | lm \rangle Y_{l'm'}(\mathbf{n}) \quad (19\text{г})$$

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Y}_{lmk}^{(0)}(\mathbf{x}) &= f_l(kx) \mathbf{Y}_{lm}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|; \\ \mathfrak{Y}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}) &= (2l+1)^{-1/2} \{ f_{l-1}(kx) \sqrt{l+1} \mathbf{Y}_{l-1m}(\mathbf{n}) + \\ &\quad + f_{l+1}(kx) \sqrt{l} \mathbf{Y}_{l+1m}(\mathbf{n}) \}; \\ \mathfrak{Y}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) &= (2l+1)^{-1/2} \{ f_{l-1}(kx) \sqrt{l} \mathbf{Y}_{l-1m}(\mathbf{n}) - \\ &\quad - f_{l+1}(kx) \sqrt{l+1} \mathbf{Y}_{l+1m}(\mathbf{n}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Векторы $\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ ортонормированы:

$$\int \mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)*}(\mathbf{x}) \mathfrak{Y}_{l'm'k'}^{(\lambda')}(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} \frac{(2\pi)^3}{k^2} \delta(k-k'), \quad (21\text{а})$$

образуют полную систему

$$\sum_{l, m, k, \lambda} [\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x})]_i^* [\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})]_j = (2\pi)^3 \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (21\text{б})$$

и обладают следующим свойством четности:

$$\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(-\mathbf{x}) = (-1)^{l+\lambda} \mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x}), \quad \lambda = 0, \pm. \quad (22)$$

Требования неприводимости, продольности и поперечности, а также определенной четности базисных векторов определяют систему функций $\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ единственным образом. Теперь, используя первое равенство (3) и условие (21б) полноты функции $\mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$, получаем мультипольное разложение плотности тока:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3} \sum_{l, m, k, \lambda} \mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) m_{lm}^{(\lambda)}(k, t), \quad (23)$$

где

$$m_{lm}^{(\lambda)}(k, t) = \int \mathfrak{Y}_{lmk}^{(\lambda)*}(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (24)$$

Используя условие непрерывности тока, мультипольные разложения плотности заряда (12) и тока (24) и соотношение (19б), находим, что $m_{lm}^{(\lambda)}(k, t)$, определяющие продольную часть тока \mathbf{J}_{\parallel} , выражаются через зарядовые мультипольные форм-факторы:

$$m_{lm}^{(-)}(k, t) = (-ik)^{l-1} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} \dot{Q}_{lm}(-\mathbf{k}^2, t). \quad (25)$$

При этом нужно помнить, что поскольку полный заряд системы $Q_{00}(0, t)$ не зависит от времени, то из (13) следует:

$$\dot{Q}_{00}(-\mathbf{k}^2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathbf{k}^2)^n \dot{Q}_{00}^{(n)}(0, t) = \mathbf{k}^2 \varphi(-\mathbf{k}^2, t), \quad (26)$$

причем, вообще говоря,

$$\varphi(0, t) \neq 0.$$

Таким образом, имеем

$$m_{00}^{(-)}(-\mathbf{k}^2, t) = (ik) \sqrt{4\pi} \varphi(\mathbf{k}^2, t), \quad (27)$$

а потому, например, $m_{00}^{(-)}(0, t) = 0$ из единственного условия сохранения тока (ср. с [4], с. 354), т. е. заряд не попадает в выражение для тока \mathbf{J} , хотя все его средние радиусы стоят в продольной части тока.

Нормируя величины $m_{lm}^{(0)}(k, t)$ на общепринятые 2^l -польные магнитные моменты $M_{lm}(t)$ (см. например [4]), получаем 2^l -польные магнитные форм-факторы:

$$M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{-i(2l+1)!! \sqrt{l}}{(-ik)^l \sqrt{(l+1)(2l+1)4\pi}} m_{lm}^{(0)}(k, t). \quad (28)$$

Разложив эти форм-факторы в ряд Тейлора

$$M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = M_{lm}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{k}^2)^n}{n!} M_{lm}^{(n)}(0, t), \quad (29)$$

можно выразить их через магнитные моменты $M_{lm}(t)$ и средние 2^n -степенные радиусы магнитных 2^l -польных распределений:

$$M_{lm}(t) \equiv M_{lm}(0, t) = \frac{-i}{l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m', \nu} \int x^l Y_{lm'}^*(\mathbf{n}) \langle lm' 1\nu | lm \rangle \times \\ \times \{ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \}_{\nu} d^3x \equiv \frac{1}{l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int x^l ([\mathbf{x}\mathbf{J}] \nabla Y_{lm}^*(\mathbf{n})) d^3x; \quad (30)$$

$$\overline{\rho_{lm}^{2n}}(t) \equiv \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{(2l+1)!!} M_{lm}^{(n)}(0, t) = \\ = \frac{-i}{l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int x^{2n+l} (Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) d^3x. \quad (31)$$

Как и в случае зарядовых распределений, величины $\overline{\rho_{lm}^{2n}}(t)$ являются средними $2n$ -степенными радиусами магнитных 2^l -польных распределений.

Второе, кроме $M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$, семейство мультипольных форм-факторов, определяющих поперечную часть плотности тока, — это семейство электрических поперечных форм-факторов $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$. Они с точностью до нормировки равны $m_{lm}^{(+)}(k, t)$. Нормировка электрических поперечных мультипольных форм-факторов рассмотрена в следующем разделе.

Итак, три независимые семейства мультипольных форм-факторов — магнитное $M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$, поперечное электрическое $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ и зарядовое $Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ — полностью определяют плотность данного тока; при этом два первых — его поперечную часть \mathbf{J}_{\perp} , а последнее — продольную \mathbf{J}_{\parallel} .

4. Структура поперечной электрической части тока. Тороидные мультипольные форм-факторы и моменты

Попробуем теперь пронормировать электрические поперечные форм-факторы на соответствующие моменты, как это сделано с магнитными и зарядовыми.

Под электрическими поперечными моментами следовало бы подразумевать величины, пропорциональные $m_{lm}^{(+)}(0, t)$. Однако поскольку вектора $\mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x})$, которые определяют $m_{lm}^{(+)}(k, t)$, совпадают при малых kx с точностью до постоянного множителя с $\mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}) &\underset{k \rightarrow 0}{\approx} \mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) \sqrt{(l+1)/l} = \\ &= \frac{4\pi (ikx)^{l-1}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \mathbf{Y}_{l-lm}(\mathbf{n}) + O[(kx)^{l+1}], \end{aligned} \quad (32)$$

то независимые на первый взгляд параметры $m_{lm}^{(+)}(0, t)$ даже в общем случае связаны с другими параметрами $m_{lm}^{(-)}(0, t) \sim \dot{Q}_{lm}(0, t)$. На то, что плотность заряда действительно связана с поперечной частью тока, указывает наличие излучения El -мультиполей зарядовыми моментами $Q_{lm}(t)$ (см. в связи с этим разд. 9). Поскольку в соответствии с (32) $m_{lm}^{(+)}(k, t)$ сводится в порядке k^{l-1} к $\dot{Q}_{lm}(0, t) k^{l-1}$, то оставшаяся независимая от $\dot{Q}_{lm}(0, t)$ часть $m_{lm}^{(+)}(k, t)$ начинается с порядка k^{l+1} . Поэтому, имеющая конечный предел при $k \rightarrow 0$ независимая (тороидная) часть $m_{lm}^{(+)}(k, t)$ определяется следующим образом:

$$T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \equiv (E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) - \dot{Q}_{lm}(0, t))/k^2. \quad (33)$$

Пронормируем электрические поперечные мультипольные распределения $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ так, чтобы в длинноволновом приближе-

нии (32) они совпадали с $\dot{Q}_{lm}(0, t)$:

$$E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{(2l+1)!!}{(-ik)^{l-1} \sqrt{4\pi} (2l+1) (l+1)/l} \times \\ \times \int \mathfrak{Y}_{lmk}^{(+)*}(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^2x. \quad (34)$$

Заметим, что идентификация $m_{lm}^{(+)}(k, t)$ с $m_{lm}^{(-)}(k, t)$ в порядках выше k^{l-1} противоречила бы основному свойству тороидной части — зависимости только от поперечной части тока (см. вторую сноску на стр. 805 и особенно разд. 9)

В явном виде определение тороидных мультипольных форм-факторов $T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ записывается следующим образом:

$$T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{(2l+1)!!}{(-ik)^{l+1} \sqrt{4\pi} (2l+1) (l+1)/l} \times \\ \times \int \left\{ \mathfrak{Y}_{lmk}^{(+)*}(\mathbf{x}) - \frac{4\pi (-ikx)^{l-1}}{\sqrt{2l+1}} \frac{\sqrt{l+1}}{(2l-1)!!} \mathbf{Y}_{l-1m}^*(\mathbf{n}) \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x = \\ = \frac{-(2l+1)!!}{(-ik)^{l+1} (2l+1) \sqrt{4\pi} (l+1)/l} \int \left\{ \sqrt{l} f_{l+1}^*(kx) \mathbf{Y}_{l+1m}^*(\mathbf{n}) - \right. \\ \left. - ikx \frac{\sqrt{l+1}}{2} f_l^*(kx) \mathbf{Y}_{l-1m}^*(\mathbf{n}) \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (35a)$$

Назовем величины

$$T_{lm}(t) \equiv T_{lm}(0, t) = -\frac{\sqrt{4\pi l}}{2(2l+1)} \int x^{l+1} \left\{ \mathbf{Y}_{l-1m}^*(\mathbf{n}) + \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{2l+3} \mathbf{Y}_{l+1m}^*(\mathbf{n}) \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (35b)$$

тороидными мультипольными моментами.

Так же как зарядовые и магнитные форм-факторы, тороидные форм-факторы можно разложить в ряд по средним радиусам соответствующих распределений:

$$T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = T_{lm}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{k}^2)^n}{n!} T_{lm}^{(n)}(0, t), \quad (36a)$$

если ввести их следующим образом:

$$\overline{R}_{lm}^{2n}(t) = \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{(2l+1)!!} T_{lm}^{(n)}(0, t) = -\frac{\sqrt{4\pi l}}{2(2l+1)} \times \\ \times \int x^{2n+l+1} \left\{ \mathbf{Y}_{l-1m}^*(\mathbf{n}) + \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{(2l+2n+3)} \mathbf{Y}_{l+1m}^*(\mathbf{n}) \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (36b)$$

Перепишем (33) в виде соотношения между E_{lm} , \dot{Q}_{lm} и T_{lm} *:

$$E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \dot{Q}_{lm}(0, t) + \mathbf{k}^2 T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t). \quad (37)$$

Соотношение (37) точное, справедливое при любых значениях \mathbf{k}^2 . Оно заменяет один набор независимых форм-факторов

$$Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t), \quad M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \quad \text{и} \quad E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$$

другим эквивалентным набором:

$$Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t), \quad M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \quad \text{и} \quad T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t).$$

Однако в задаче об излучении из-за равенства $k = \omega$ нужно использовать последний набор форм-факторов (см. разд. 7).

Пояснения к тому, как в поперечную часть тока попали зарядовые моменты и почему $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ не содержат их средних радиусов, даны в разд. 9. Заметим, что поскольку $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ содержат только моменты $\dot{Q}_{lm}(0, t)$, то разность $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) - \dot{Q}_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ зависит как от поперечной, так и от продольной части тока, связанной с $\rho(\mathbf{x}, t)$. Такое разбиение $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ смешивает тороидные моменты $T_{lm}(0, t)$ со средними радиусами зарядовых распределений **.

Как следует из (37), тороидные мультипольные моменты $T_{lm}(t)$ по форме выглядят как малые поправки при $k \rightarrow 0$ к зарядовым мультипольным моментам того же ранга $Q_{lm}(t)$. Однако в отличие от истинных поправок, таких как $\overline{r_{lm}^{2n}}(t)$, равных нулю, если $Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \equiv 0$, тороидные моменты, будучи независимыми параметрами, в этом случае не обращаются в нуль. Более того, тороидные моменты, вообще говоря, отличны от нуля, если $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ или $\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. Иными словами, существуют такие системы, для которых представитель семейства $T_{lm}(t)$ — главный или единственный член мультипольного разложения (см. введение и разд. 6). Поэтому мультипольные разложения [1—4, 11—13], используя

* Разбор некорректного перехода к длинноволновому приближению с потерей тороидных моментов, сделанного, например, в книге Роуза [4], дан в работе [5] в приложении. Аналогичная некорректность в рамках макроскопической электродинамики содержится в книге Джексона на с. 611 (см. также обзор [3] и [13] и аналогичные из руководства по теории ядра), где, однако, парадоксальным образом учитываются вклады в тороидные моменты от индукционных токов $\mathbf{J}^{\text{инд}} = \text{rot } \mathbf{M}$ ($\rho_M = \text{div } \mathbf{M}$, где \mathbf{M} — намагниченность среды). Замечания о мультипольном разложении при наличии магнитных зарядов изложены в разд. 8.

** Это не учтено в определении тороидных форм-факторов, данном в работе [5], в то время как в определении (35) и $\text{div } \mathfrak{z}_{lm}^{(\pm)} = 0$, и $\text{div } x^{l-1} \mathbf{Y}_{l-lm} = 0$, так что чисто продольный ток $\mathbf{J} = \nabla \phi$ дает $T_{lm} \equiv 0$.

щие (2), не верны даже в длинноволновом приближении. Рассмотрение с их помощью излучения указанных систем в длинноволновом приближении не учитывает сам эффект излучения. Пренебрежение $T_{lm}(t)$ по сравнению с $\dot{Q}_{lm}(t)$ аналогично пренебрежению высшими мультипольными моментами по сравнению с низшими, что, конечно, законно только в том случае, когда у системы низшие моменты существуют.

Из (37) видно, что структура электрических поперечных форм-факторов $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ не позволяет пронормировать их обычным способом, как магнитные и зарядовые, так чтобы длинноволновое приближение при стремлении k к нулю давало статические мультипольные моменты.

В длинноволновом приближении ($ka \ll 1$) в общем случае основной вклад в $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ дают $\dot{Q}_{lm}(0, t)$, а статическая ($\omega = 0$) часть электрических поперечных форм-факторов определяется тороидными форм-факторами $T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$.

Прежде чем перейти к изучению свойств тороидных мультипольных моментов, выпишем окончательное выражение для мультипольного разложения плотности тока (23) через нормированные зарядовые, магнитные и тороидные форм-факторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = & (2\pi)^{-3} \sum_{l, m, k} (-ik)^{l-1} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)(l+1)/l}}{(2l+1)!!} \times \\ & \times \left\{ k \mathfrak{F}_{lmk}^{(0)}(\mathbf{x}) M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) + \mathfrak{F}_{lmk}^{(+)}(\mathbf{x}) [\dot{Q}_{lm}(0, t) + \mathbf{k}^2 T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)] + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{l}{l+1}} \mathfrak{F}_{lmk}^{(-)}(\mathbf{x}) \dot{Q}_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Суммирование по l выражений, содержащих $\mathfrak{F}_{lmk}^{(0)}$, производится от единицы до бесконечности, а содержащих $\mathfrak{F}_{lmk}^{(\pm)}$ — от нуля до бесконечности.

5. Тороидные моменты и электромагнитные взаимодействия

Поясним название тороидных мультипольных моментов. Простейшим моментом этого семейства — тороидным диполем* и только им характеризуется точечный тороидальный ток (см. рис. 1).

Его тороидный момент равен

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{10} \int [\mathbf{x}(\mathbf{x}\mathbf{J}) - 2\mathbf{x}^2\mathbf{J}] d^3x \quad (39)$$

* На то обстоятельство, что тороидный ток описывается диполем, не сводящимся ни к зарядовому, ни к магнитному моментам, первым обратил внимание Зельдович [15] в связи с нарушением четности в слабых взаимодействиях и назвал его анаполем. Свойства его и связь с тороидным диполем разобраны в приложении 3.

и направлен по оси симметрии тора. Система соответствующего числа и ориентации тороидальных токов описывается высшими тороидными моментами.

При разложении по мультиполям энергии взаимодействия системы зарядов и токов с электромагнитным полем член, пропорциональный тороидному дипольному моменту этой системы, имеет следующий вид (см. приложение 1):

$$W = -\mathbf{T} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(0) = -\mu_0 \mathbf{T} [\mathbf{J}_{\text{ext}}(0) + \dot{\mathbf{D}}(0)] \quad (40)$$

(здесь и далее все выражения даны в рационализованной системе единиц). В этом выражении \mathbf{A} — вектор-потенциал внешнего (по отношению к данной системе) электромагнитного поля; \mathbf{J}_{ext} — плотность внешнего тока; $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ — индукция внешнего электрического поля. Все эти величины взяты в точке расположения тороидного дипольного момента (в «начале координат»).

В случае статических внешних полей ($\partial/\partial t = 0$) тороидный дипольный момент (как и тороидные мультипольные моменты любого ранга) взаимодействуют не с внешним полем (см. (40)), а только с внешним током [15, 16]. Такое взаимодействие часто называют контактным. Из (40) видно, что тороидный дипольный момент ориентируется по внешнему току. Это взаимодействие напоминает взаимодействие среднеквадратичного радиуса распределения заряда:

$$W = \bar{r}_0^2 \Delta \varphi(0) = -\bar{r}_0^2 \rho_{\text{ext}}(0) / \varepsilon_0. \quad (41)$$

Здесь $\rho_{\text{ext}}(0)$ — плотность внешнего заряда. Это взаимодействие тоже контактно. Однако в рамках максвелловских представлений все электромагнитные взаимодействия обязательно опосредуются полями. Поэтому контактные взаимодействия (40) и (41) можно представить через поля: среднеквадратичный радиус заряда и тороидный дипольный момент взаимодействуют соответственно с полями $-\operatorname{div} \mathbf{D} / \varepsilon_0$ и $-\operatorname{rot} \mathbf{B}$ (или $-\mu_0 \dot{\mathbf{D}}$).

Между (40) и (41) есть принципиальное различие. Среднеквадратичный радиус распределения заряда не взаимодействует и с переменными во времени полями, т. е. он не излучает и не поглощает электромагнитных волн. Тороидный дипольный момент, как это видно из (40), взаимодействует с внешним переменным во времени электромагнитным полем (излучением).

Для справочных целей выпишем в ортогональном базисе также квадрупольный тороидный момент:

$$T_{ik} = \frac{1}{28} \int \{4x_i x_k (\mathbf{xJ}) - 5x^2 [x_i J_k + x_k J_i] + 2x^2 (\mathbf{xJ}) \delta_{ik}\} d^3x.$$

6. Излучение тороидным дипольным моментом

Для нахождения излучения тороидным дипольным моментом воспользуемся обычным выражением для запаздывающего потенциала:

$$\left. \begin{aligned} A_0(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Рассмотрим частный случай такого распределения источников поля, при котором полностью исключается излучение зарядовыми мультипольными моментами [6], т. е.

$$\rho(\mathbf{x}, t) \equiv 0; \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{J}_0(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}]. \quad (43)$$

Из (43) следует, что скалярный потенциал $A_0(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, поэтому воспользуемся соленоидальной калибровкой $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Для нахождения вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ в длинноволновом приближении разложим, как обычно, функцию Грина в (42) по степеням x' и почленно проинтегрируем полученное разложение. В результате найдем (с точностью до членов третьего порядка по частоте) вектор-потенциал излучения в волновой зоне:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_{M1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_{M2}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_{T1}(\mathbf{x}, t). \quad (44)$$

В этом выражении \mathbf{A}_{M1} и \mathbf{A}_{M2} — вектор-потенциалы полей, излучаемых магнитными дипольным и квадрупольным моментами соответственно (см., например, [6]). Потенциал \mathbf{A}_{T1} — электрический диполь $E1$. Он излучается (зарядового дипольного момента у нашей системы нет!) тороидным дипольным моментом

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 \cos \omega t$$

и равен:

$$\mathbf{A}_{T1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x^3} [\mathbf{x}^2 \mathbf{T}_0 - \mathbf{x}(\mathbf{x} \mathbf{T}_0)] \cos \omega(t - x). \quad (45)$$

Напомним, что вектор-потенциал поля излучения зарядового диполя $\mathbf{Q}_1(t) = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ в волновой зоне равен

$$\mathbf{A}_{Q1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi x^3} [\mathbf{x}^2 \mathbf{d}_0 - \mathbf{x}(\mathbf{x} \mathbf{d}_0)] \sin \omega(t - x). \quad (46)$$

Из (45) и (46) видно, что угловое распределение излучения $E1$ от зарядового и тороидного моментов одинаково, однако фазы этих излучений сдвинуты (при синфазности источников) на $\pi/2$. Кроме того, интенсивность излучения тороидным моментом пропорциональна четвертой степени частоты, а зарядовым — второй. Если

источник излучения устроен так, что он не имеет зарядовых и магнитных дипольного и квадрупольного моментов, то доминирующим излучением такого источника будет излучение $E1$ -типа, создаваемое его тороидным дипольным моментом. Таким свойством обладает, например, описанный в разд. 5 тор с переменным током.

7. Мультipoльное излучение классических систем

Покажем, что тороидные мультipoльные распределения (моменты) излучают электрические (El -типа) мультipoли. Предположим для простоты, что 4-ток $J_\mu(\mathbf{x}, t)$ а, следовательно, и все распределения, имеют монохроматическую зависимость от времени $\exp[-i\omega t]$. Потенциал излучения в этом случае равен

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(\mathbf{x}, t) &= \{ \exp(-i\omega t) A_\mu(\mathbf{x}) + \text{к. с.} \} / 2; \\ A_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\exp(i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{\exp(i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Для разложения поля потенциала излучения по мультipoлям воспользуемся, следуя, например, Роузу [1], представлениями скалярной и тензорной функций Грина в виде:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\exp(i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \underset{x>x'}{=} \frac{i\omega}{4\pi} \sum_{l,m} \mathfrak{F}_{lm\omega}^*(\mathbf{x}') \mathfrak{G}_{lm\omega}(\mathbf{x}); \quad (48a)$$

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \delta_{ij} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \underset{x>x'}{=} \frac{i\omega}{4\pi} \sum_{l,m,\lambda} [\mathfrak{F}_{lm\omega}^{(\lambda)}(\mathbf{x}')]^* [\mathfrak{G}_{lm\omega}^{(\lambda)}(\mathbf{x})]_j. \quad (48b)$$

В этих выражениях

$$\mathfrak{G}_{lm\omega}(\mathbf{x}) = h_l(\omega x) Y_{lm}(\mathbf{n}),$$

где $h_l(\omega x)$ — сферическая функция Ганкеля:

$$h_l(a) = (2\pi)^{3/2} i^l H_{l+1/2}(a) / \sqrt{a}.$$

Векторные функции $\mathfrak{G}_{lm\omega}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ определяются как и $\mathfrak{F}_{lm\omega}^{(\lambda)}(\mathbf{x})$ формулами (18) и (20), в которых функции $f_l(\omega x)$ заменены функциями $h_l(\omega x)$ и имеют свойства, аналогичные (19), (21), (22).

Подставляя в выражение для запаздывающего потенциала (47) разложение функции Грина (48) и тока (12), (38), получим разложение потенциала излучения по мультipoлям (ср. с [1—4, 12, 13]):

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{-1}{(4\pi)^2 \epsilon_0} C \sum_{l,m} (-i\omega)^{l+1} \frac{V(2l+1)4\pi}{(2l+1)!!} Q_{lm}(-\omega^2) \mathfrak{G}_{lm\omega}(\mathbf{x}); \quad (49a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{-\mu_0}{(4\pi)^2} \sum_{l,m} (-i\omega)^{l+1} \frac{V(2l+1)(l+1)4\pi/l}{(2l+1)!!} \times$$

$$\times \left\{ iM_{lm}(-\omega^2) \mathfrak{G}_{lm\omega}^{(0)}(\mathbf{x}) + [Q_{lm}(0) + i\omega T_{lm}(-\omega^2)] \mathfrak{G}_{lm\omega}^{(+)}(\mathbf{x}) + C \sqrt{\frac{l}{l+1}} Q_{lm}(-\omega^2) \mathfrak{G}_{lm\omega}^{(-)}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (49б)$$

Здесь C — калибровочная постоянная; при соленоидальной калибровке $C = 0$.

Из (49) следует, что подобно тороидному дипольному моменту тороидный мультипольный момент T_{lm} излучает соответствующий электрический мультиполь El -типа, причем интенсивность его излучения по частоте на два порядка выше, чем излучение El -типа зарядовым моментом Q_{lm} . Соотношение между фазами излучений синфазных источников T_{lm} и Q_{lm} то же, что и у диполей \mathbf{T} и \mathbf{Q} . Из (49б) видна необходимость разбиения $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ на зарядовую и тороидную части в задаче об излучении ($\omega = |\mathbf{k}|$). Действительно, наличие структуры (37) у $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ приводит к тому, что интенсивность излучения El -мультиполя может быть как четной, так и нечетной функцией ω из-за интерференции источников излучения $Q_{lm}(0)$ и $T_{lm}(-\omega^2)$. Напомним, что интенсивность излучения Ml -мультиполя всегда четная функция частоты. Это различие El - и Ml -мультиполей — одно из проявлений асимметрии уравнений Максвелла относительно электрических и магнитных величин.

Существование двух различных источников (Q_{lm} и T_{lm}) излучения типа El приводит к принципиально новой ситуации. Если до введения тороидных моментов считалось, что можно определить все характеристики источника излучения по типу самого излучения, то теперь стало очевидным, что это не так. Для определения характеристик источника El -излучения следует провести еще один эксперимент, например, по рассеянию пробных зарядов на данном источнике или изучить спектральный состав мультиполей излучения.

8. О мультипольном разложении тока магнитных зарядов

Под магнитными зарядами и их токами, плотности которых обозначим соответственно $\rho^g(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{J}^g(\mathbf{x}, t)$, подразумеваются источники электрического и магнитного полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho^e; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= \rho^g; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{J}^g - \partial \mathbf{B} / \partial t; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}^e + \partial \mathbf{D} / \partial t; \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}; & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Символы ρ^e и \mathbf{J}^e обозначают плотности электрических зарядов и токов.

Очевидно, что плотность магнитного тока J_{μ}^g , как и J_{μ}^e , можно разложить в мультипольные ряды (12), (38). Электромагнитные свойства мультипольных форм-факторов магнитного тока легко предсказать, используя дуальную инвариантность * уравнений Максвелла [17]. «Магнитные» мультипольные форм-факторы магнитного тока M_{lm}^g излучают El -мультиполи, а «зарядовые» Q_{lm}^g и «тороидные» T_{lm}^g — мультиполи Ml -типа.

Таким образом, в случае существования и электрических, и магнитных зарядов, мы имели бы, например, тройную неопределенность при нахождении вида источника излучения по типу его излучения. Действительно, El -мультиполи излучались бы моментами Q_{lm}^e и T_{lm}^e и M_{lm}^g , а Ml -мультиполи — моментами M_{lm}^e , Q_{lm}^g и T_{lm}^g . Как и следовало ожидать, появилась полная симметрия между видами источников и типами излучения.

9. Об излучении зарядовыми и тороидными распределениями

Формулы (12) и (38) дают мультипольное разложение плотности 4-тока. Из (38) видно, что хотя сохранение тока $\text{div } \mathbf{J} \equiv \text{div } \mathbf{J}_{\parallel} = -\dot{\rho}$ связывает плотность заряда только с продольной составляющей \mathbf{J}_{\parallel} , поперечная составляющая \mathbf{J}_{\perp} также оказывается зависящей от плотности заряда. Так, например, в случае стационарного распределения зарядов и токов не только на продольную часть тока накладывается ограничение $\mathbf{J}_{\parallel} = 0$, но и в поперечной части $\dot{Q}_{lm}(0, t) = 0$. Итак, возникает вопрос, каким образом в «излучающую» часть тока \mathbf{J}_{\perp} попадают зарядовые моменты $Q_{lm}(0, t)$.

Для локализованной в конечной области пространства системы 4-токов этот факт объясняется тем [18], что вне этой области

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_{\perp} + \mathbf{J}_{\parallel} = 0,$$

а следовательно, на границе системы имеется соотношение между \mathbf{J}_{\perp} и \mathbf{J}_{\parallel} :

$$\mathbf{J}_{\perp} = -\mathbf{J}_{\parallel}.$$

Таким образом, существует дополнительное условие, связывающее мультипольные характеристики поперечной части тока с зарядовыми. При этом, как следует из (38), электрические распределения $E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ связаны только с моментами $\dot{Q}_{lm}(0, t)$, но не со средними радиусами заряда, так что последних нет в \mathbf{J}_{\perp} . Проиллюст-

* Предполагаем, что дуально инвариантны не только уравнения Максвелла (50), но и уравнения движения электрических и магнитных зарядов.

рируем сказанное на простейшем примере. Пусть имеется распределение заряда с плотностью, характеризуемой только дипольным моментом $\mathbf{d}(t)$ и его среднеквадратичным радиусом $\overline{r_d^2}(t)$:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{d}(t) \nabla) \delta(\mathbf{x}) - \overline{r_d^2}(t) \nabla \Delta \delta(\mathbf{x})/10.$$

Для нахождения соответствующего этому заряду тока необходимо решить уравнение непрерывности с граничным условием для тока $\mathbf{J} = 0$ вне бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ (т. е. найти δ -образный ток). Общее решение имеет вид:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{d}}(t) \delta(\mathbf{x}) + \text{grad} \overline{r_d^2}(t) \nabla \delta(\mathbf{x})/10 + \text{rot} \mathbf{C} \varphi(\mathbf{x}).$$

Здесь \mathbf{C} — произвольный вектор, а $\varphi(\mathbf{x})$ — любая δ -образная функция. Из полученного решения видно, что точечный ток, соответствующий дипольному моменту $\mathbf{d}(t)$, имеет как продольную, так и поперечную части, а соответствующий $\overline{r_d^2}(t)$ — только продольную. Независимые параметры \mathbf{C} и $\varphi(\mathbf{x})$ определяются другими мультипольными характеристиками — тороидными и магнитными.

Легко видеть, что и любому мультипольному зарядовому моменту $Q_{lm}(t)$, определяющему плотность заряда

$$\rho^{(l)}(\mathbf{x}, t) \sim Q_{ij}^{(l)} \dots_k(t) \nabla_i \nabla_j \dots \nabla_k \delta(\mathbf{x}),$$

соответствует точечный ток

$$\mathbf{J}_i^{(l)}(\mathbf{x}, t) \sim \dot{Q}_{ij \dots k}^{(l)}(t) \nabla_j \dots \nabla_k \delta(\mathbf{x}),$$

с необходимостью имеющий как продольную, так и поперечную части. Любому же среднему радиусу зарядового распределения $\overline{r_{lm}^{2n}}(t)$ соответствует чисто продольный ток:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \sim \text{grad} \overline{r_{i \dots k}^{2n}}(t) \nabla_i \dots \nabla_k \Delta^n \delta(\mathbf{x}).$$

Таким образом, в поперечную часть тока \mathbf{J}_\perp из $Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t)$ попадают только моменты $Q_{lm}(0, t)$ [см. (38)]. Из этого, в частности, следует, что интенсивность EL -излучения от 2^l -польного зарядового распределения зависит только от величины соответствующего момента и не зависит от степени его «размазанности». Легко убедиться на конкретных примерах, что если излучение данной модели «размазанного» зарядового распределения (например, диполя Герца) зависит от степени размазанности, то модель обладает отличным от нуля тороидным мультипольным распределением. Другими словами, эффекты запаздывания EL -излучения от разных частей системы описываются тороидными мультипольными распределениями. Подчеркнем, что структура мультипольного разложения не является условной, а есть строгое следствие обсужденных требований.

В заключение этого раздела заметим, что разобранный пример показывает справедливость общепринятого способа решения задачи о дипольном излучении системы зарядов (например, с помощью диполя Герца) только в длинноволновом приближении (в пренебрежении «размазанностью» системы).

II. КВАНТОВОЕ РАССМОТРЕНИЕ

10. О способах параметризации матричных элементов операторов в квантовой теории поля

В квантовой теории электродинамические свойства объектов задаются матричными элементами оператора (м. э. о.) тока, которые можно выразить через форм-факторы — инвариантные функции скалярных переменных, не зависящие от произвола в выборе системы координат. Эта процедура обычно называется инвариантной параметризацией м. э. о. тока.

Существует два основных способа параметризации матричных элементов квантово-механических операторов — явно ковариантный и неявно ковариантный [19].

В связи с квантованием моментов количества движения и законом их сохранения м. э. о. тока удобно параметризовать таким образом, чтобы каждый форм-фактор соответствовал определенному мультипольному моменту частицы, а каждый форм-фактор перехода определял интенсивность излучения одного из мультиполей (E_l или M_l), т. е. таким образом, чтобы параметризация м. э. о. тока соответствовала мультипольному разложению классической плотности тока и разложению поля излучения по мультиполям. Методика неявно ковариантных параметризаций, позволяющая решить эту задачу в общем виде, возникает в связи с возможностью выбора специальных систем отсчета, в которых разложения выглядят по форме трехмерно-ковариантными, но по существу их параметры оказываются заданными лоренц-инвариантным образом [19]. Такие специальные системы отсчета будем называть лоренц-инвариантными системами (л. и. с.). Л. и. с. — это система, задание которой (с точностью до трехмерных поворотов и трансляций) однозначным и единым образом определяется в произвольной лабораторной системе отсчета (л. с.). Переход в данную л. и. с. из произвольной л. с. задается единым алгоритмом, универсальным для всех л. с. При переходе из одной л. с. в другую данная л. и. с. остается неподвижной, а трехмерный репер в л. и. с. при этом совершает, естественно, пространственный поворот. Трехмерные скаляры в л. и. с. являются 4-скалярами. Л. и. с. выделены из всех инерциальных систем отсчета внутренней кинематикой рассматриваемого процесса (объекта). Поэтому л. и. с.

можно, например, задать условием:

$$\mathbf{R}^{\text{л. и. с.}} \equiv \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{p}_i^{\text{л. и. с.}} = 0, \quad (51)$$

где $\mathbf{p}_i^{\text{л. и. с.}}$ — трехмерный импульс в л. и. с. i -ой частицы, участвующей в процессе. Величины a_i здесь — произвольные инварианты, выбранные из соображений удобства, но так, чтобы вектор R_μ был времениподобным, так как скорость преобразования из л. с. в л. и. с. равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{R}^{\text{л. с.}}/r; & u_0 &= R_0^{\text{л. с.}}/r; \\ r^2 &= R_\mu^2 \equiv R_0^2 - \mathbf{R}^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Соотношение (51) инвариантно при лоренцевых преобразованиях из одной л. с. в другую. Все л. и. с., определенные уравнением (51), образуют семейство, параметрами которого являются $N - 1$ независимых коэффициентов a_i . Рассмотрим примеры. При наличии в пространстве лишь одной частицы имеется единственная л. и. с. — система покоя этой частицы (определенная, естественно, с точностью до трехмерных поворотов). Для двух частиц возникает однопараметрическое семейство л. и. с. При $a_1 = a_2 = 1$ — это система центра инерции (с. ц. и.) или брейтовская (б. с.); при $a_1 = \kappa_2$, $a_2 = \kappa_1$ — это брейтовская система скоростей* (б. с. с.) и т. д.

В случае двух частиц можно инвариантным образом закрепить одну из пространственных осей системы. При наличии трех и более частиц можно в общем случае инвариантным образом фиксировать все пространственные оси л. и. с. Для решения задачи — релятивистской параметризации м. э. о. электромагнитного тока с помощью мультипольных разложений — воспользуемся неявно ковариантным методом с подходящим выбором л. и. с.

Кроме указанной выше прямой идентификации форм-факторов по их классическим аналогам [7, 8], этот способ параметризации (в отличие от явноковариантного) дает универсальную технику для частиц с любыми значениями спинов и облегчает выделение кинематических сингулярностей и подавлений [20].

11. Выбор лоренц-инвариантной системы отсчета и нормировка форм-факторов

В явно ковариантных параметризациях (см., например, [9, 21]) форм-факторы $F(k_\mu^2)$ нормируются обычно на значения форм-

* Б. с. с. называется система, в которой скорости частицы в начальном и конечном состояниях \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 равны по величине и антипараллельны. При одинаковых массах $\kappa_1 = \kappa_2$ б. с. и б. с. с. совпадают.

факторов при нулевом квадрате передаваемого 4-импульса * $k_{\mu}^2 = 0$.

Какой физический смысл имеет такая нормировка? Как связаны форм-факторы в нуле $F(0)$ с соответствующими мультипольными моментами (статическими или переходными)? В каком соотношении находятся значения $F(0)$, собственные моменты и моменты, возникающие вследствие движения рассматриваемого объекта как целого («орбитальные» моменты)? Как исключить из форм-факторов вклад от «орбитального» движения? Только в простейших случаях частиц со спином 0 и 1/2 сравнительно просто ответить на эти вопросы.

При неявно ковариантной параметризации м. э. о. тока, так как она совершенно аналогична мультипольному разложению плотности классического тока, первые два вопроса автоматически отпадают. А два последних решает выбор лоренц-инвариантной системы отсчета.

В классической физике для определения собственных мультипольных моментов (форм-факторов) разложение проводят в с. ц. и. В л. с., относительно которой скорость с. ц. и. равна w , мультипольные моменты складываются из собственных и «орбитальных», последние полиномиально зависят от времени. Например, дипольный зарядовый момент классической системы, имеющей заряд e , равен:

$$d^{л. с.}(t) = d^{с. ц. и.}(t) + ewt; \tag{53}$$

$$d^{с. ц. и.}(t) = \exp(-i\omega t) d_0^{с. ц. и.} \tag{54}$$

Если момент статический, то в выражении (54) имеем $\omega = 0$.

В квантовом случае аналогом с. ц. и. при определении форм-факторов и собственных моментов частицы (статических моментов) является система отсчета, в которой $\omega = 0$. Такова б. с., в ней $\omega = 0$, и для м. э. о. дипольного зарядового момента частицы справедливы классические соотношения (53) и (54).

При неявно ковариантной параметризации естественным аргументом форм-фактора является не k_{μ}^2 , а $-k^2$, заданный в определенной л. и. с., например, в б. с., и связанный с инвариантными величинами следующим образом:

$$k_{б. с.}^2 = -k_{\mu}^2 + (\kappa\Delta\kappa/\kappa')^2. \tag{55}$$

Здесь $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$, $\Delta\kappa = \kappa_1 - \kappa_2$, $P_{\mu} = p_{1\mu} + p_{2\mu}$, $\kappa' = \sqrt{P_{\mu}^2}$ — масса покоя «системы», состоящей из частицы в начальном и частицы в конечном состояниях.

* Квадрат 4-вектора $k_{\mu} = p_{1\mu} - p_{2\mu}$ будем снабжать индексом μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Параметрам, характеризующим начальное и конечное состояния объекта, будем приписывать индексы 1 и 2 соответственно, например: $p_{1\mu}$ и $p_{2\mu}$.

Для м. э. о. тока частицы ($\Delta\kappa = 0$) $\mathbf{k}_{0.c.}^2 = -k_\mu^2$. Таким образом, в статическом случае ($\Delta\kappa = 0$) приравнивание форм-факторов при $\mathbf{k}_{0.c.}^2 = 0$ в неявно ковариантной параметризации соответствующим собственным мультипольным моментам согласуется с обычной нормировкой форм-факторов явно ковариантной параметризации, если, конечно, последние мультипольные.

При рассмотрении переходных ($\Delta\kappa \neq 0$) м. э. о. тока вопрос выбора л. и. с. для определения собственных переходных моментов осложняется. М. э. о. тока в этом случае зависит от времени, но только экспоненциально, а полиномиальной зависимости от времени у собственных моментов и их средних радиусов не должно быть (ср. с (54)).

Члены, пропорциональные t^n в выражениях для моментов и средних радиусов распределений, обусловлены зависимостью частоты перехода ω , стоящей в экспоненциальном множителе м. э. о. тока, от передаваемого импульса \mathbf{k} . Эта зависимость определяется выбором л. и. с. Так в б. с.

$$\omega^{б.с.} = \sqrt{\kappa_1^2 + \mathbf{k}^2/4} - \sqrt{\kappa_2^2 + \mathbf{k}^2/4}, \quad (56a)$$

а в системе покоя частицы в начальном или конечном состояниях зависимость соответственно следующая:

$$\begin{aligned} \omega^{(i)} &= \kappa_1 - \sqrt{\kappa_2^2 + \mathbf{k}^2}; \\ \omega^{(f)} &= \sqrt{\kappa_1^2 + \mathbf{k}^2} - \kappa_2 \end{aligned} \quad (56b)$$

и т. д.

Для наших целей подходит л. и. с., в которой $\omega = \text{const}$ при заданных κ_1 и κ_2 , но произвольных \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Из физических соображений наиболее естественно использовать систему отсчета, в которой $\omega = \Delta\kappa$ — «собственную» систему отсчета (с. с.). Такая система существует при любых значениях масс κ_1 и κ_2 ($\kappa_1 = \kappa_2$ и $\kappa_1 \neq \kappa_2$) и импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . В этой системе излученный фотон имеет собственную, без доплеровского смещения частоту $\omega^{с.с.} = \Delta\kappa$. Используя условие $\omega^{с.с.} = \Delta\kappa$ и (51), найдем коэффициенты a_1 и a_2 , R_μ и r , определяющие с. с.:

$$\begin{aligned} a_1^{с.с.} &= 1 - (\kappa\Delta\kappa/k_\mu^2) (1 - r/\kappa); \\ a_2^{с.с.} &= 1 + (\kappa\Delta\kappa/k_\mu^2) (1 - r/\kappa); \end{aligned} \quad (57)$$

$$R_\mu^{с.с.} = P_\mu - (\kappa\Delta\kappa/k^2) (1 - r/\kappa) k_\mu; \quad (58)$$

$$r^{с.с.} = \kappa \sqrt{1 - k_\mu^2/\kappa^2}.$$

Переход из л. с. в с.с. осуществляется чисто лоренцевым преобразованием со скоростью u , определяемой уравнением (52).

Если например л. с. — система покоя первой частицы, то импульсы в с. с. определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^{с.с.} &= \frac{\kappa_1 [1 + (\kappa \Delta \kappa / k_\mu^2) (1 - r/\kappa)]}{2\kappa r} \mathbf{p}_2^{л.с.}; \\ \mathbf{p}_2^{с.с.} &= - \frac{\kappa_1 [1 - (\kappa \Delta \kappa / k_\mu^2) (1 - r/\kappa)]}{2\kappa r} \mathbf{p}_2^{л.с.}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\mathbf{p}_2^{л.с.}$ — импульс конечной частицы в л. с.

Отметим, что система $\omega = \text{const} = \Delta \kappa$ — простейшая по кинематике система, отвечающая сформулированным в начале этого раздела требованиям. Для м. э. о. тока частицы ($\Delta \kappa = 0$) собственной системой является, естественно, б. с., что видно из (57) и (51).

Итак, собственная система отсчета является универсальной л. и. с. для определения собственных мультипольных моментов и средних радиусов распределений, как статических, та и переходных. При этом и статические и переходные мультипольные моменты и средние 2^n -степенные радиусы мультипольных распределений определяются как значения соответствующих форм-факторов и их n -х производных по k_μ^2 при $k_\mu^2 = \Delta \kappa^2$.

12. Связь параметризации тока с классическим мультипольным разложением

Классические мультипольные разложения (12) и (38) можно непосредственно использовать для параметризации м. э. о. тока. Для этого необходимо рассматривать фигурирующие в них величины как операторные, а само разложение — проведенным в выбранной системе. Поступим иначе. Сначала проведем параметризацию м. э. о. тока в с. с., а затем установим их связь с мультипольными форм-факторами классического тока (11), (28) и (35а).

Как обычно вектор состояния частицы $|\mathbf{p}, \kappa, j, m, \alpha\rangle$ зададим импульсом \mathbf{p} , массой κ , спином j , его проекцией m на ось z в системе покоя частицы (или спиральностью λ) и лоренц-инвариантными параметрами α (например, зарядом, барионным числом и т. п.), которые обычно будем опускать. Вектора состояния нормируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_2, \kappa_2, j_2, m_2, \alpha_2 | \mathbf{p}_1, \kappa_1, j_1, m_1, \alpha_1 \rangle &= \\ &= \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(\kappa_1 - \kappa_2) \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}. \end{aligned} \quad (60)$$

Прежде чем произвести параметризацию матричного элемента локального 4-векторного оператора тока, перейдем из произволь-

НОЙ Л. С. В С. С.:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_2, \kappa_2, j_2, m_2 | J_{\mu}^{j_2, c.}(\tilde{x}) | \mathbf{p}_1, \kappa_1, j_1, m_1 \rangle = \\ & = a_{\mu\nu}(\mathbf{u}) \sum_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2} D_{m_2 \tilde{m}_2}^{j_2^*}(\mathbf{p}_2, \mathbf{u}) \times \\ & \times \langle \tilde{\mathbf{p}}_2, \kappa_2, j_2, \tilde{m}_2 | J_{\nu}^{c.}(\tilde{x}) | \mathbf{p}_1, \kappa_1, j_1, \tilde{m}_1 \rangle D_{\tilde{m}_1 m_1}^{j_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь \mathbf{u} — скорость преобразования к с. с., найденная с помощью (52) и (58); $a_{\mu\nu}(\mathbf{u})$ — матрица преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} a_{00} &= u_0; & a_{0i} &= -a_{i0} = u_i; \\ a_{ik} &= -[\delta_{ik} + u_i u_k / (u_0 + 1)]; \end{aligned} \quad (62)$$

$D_{m_2 \tilde{m}_2}^{j_2^*}$ и $D_{\tilde{m}_1 m_1}^{j_1}$ — матрицы релятивистского поворота спина, «бусты» (вид их дан, например, в [19] и [22]); $\tilde{\mathbf{p}}_1$ и $\tilde{\mathbf{p}}_2$ — импульсы начального и конечного состояний в с. с.:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_1 &= \mathbf{k} a_2^{c.} / 2; \\ \tilde{\mathbf{p}}_2 &= -\mathbf{k} a_1^{c.} / 2. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь и везде далее \mathbf{k} обозначаем переданный импульс в с. с. Теперь с учетом трансляционной инвариантности запишем м. э. о. тока в с. с. в виде:

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\mathbf{p}}_2, \kappa_2, j_2, \tilde{m}_2 | J_{\mu}^{c.}(\tilde{x}) | \tilde{\mathbf{p}}_1, \kappa_1, j_1, \tilde{m}_1 \rangle = \\ & = \exp(-i k_{\lambda} \tilde{x}_{\lambda}) \langle \tilde{\mathbf{p}}_2, \kappa_2, j_2, \tilde{m}_2 | J_{\mu}^{c.}(0) | \tilde{\mathbf{p}}_1, \kappa_1, j_1, \tilde{m}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (64)$$

Для параметризации $\langle J_{\nu}(\mathbf{k}) \rangle \equiv \langle \tilde{\mathbf{p}}_2, \kappa_2, j_2, \tilde{m}_2 | J_{\nu}^{c.}(0) | \tilde{\mathbf{p}}_1, \kappa_1, j_1, \tilde{m}_1 \rangle$ используем полную систему скалярных $Y_{lm}(\mathbf{n})$ и векторных $F_{lm}^{(0)}(\mathbf{n})$ функций на сфере:

$$F_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}) \equiv Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|; \quad (65a)$$

$$F_{lm}^{(+)}(\mathbf{n}) = (2l+1)^{-1/2} [\sqrt{l+1} Y_{l, l-1, m}(\mathbf{n}) + \sqrt{l} Y_{l, l+1, m}(\mathbf{n})]; \quad (65b)$$

$$F_{lm}^{(-)}(\mathbf{n}) = (2l+1)^{-1/2} [\sqrt{l} Y_{l, l-1, m}(\mathbf{n}) - \sqrt{l+1} Y_{l, l+1, m}(\mathbf{n})]. \quad (65b)$$

где канонические контравариантные¹ координаты векторов Y_{lm} задаются равенством (19г). Свойства продольности и поперечности этих векторов определяются известными соотношениями:

$$\mathbf{n} F_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}) = 0; \quad F_{lm}^{(+)}(\mathbf{n}) = i [F_{lm}^{(0)} \cdot \mathbf{n}], \quad (66)$$

$$F_{lm}^{(-)}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} Y_{lm}(\mathbf{n}).$$

С точностью до нормировки получим мультипольное разложение:

$$\langle \rho(\mathbf{k}) \rangle = \sum_{l, m} \langle q_{lm}(k) \rangle Y_{lm}(\mathbf{n}); \quad (67)$$

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{k}) \rangle = \sum_{l, m, \sigma} \mathbf{F}_{lm}^{(\sigma)}(\mathbf{n}) \langle m_{lm}^{(\sigma)}(k) \rangle. \quad (68)$$

Чтобы идентифицировать величины $\langle q_{lm}(k) \rangle$ и $\langle m_{lm}^{(\sigma)}(k) \rangle$ с мультипольными форм-факторами, подставим выражения для м. э. тока (64) с мультипольными разложениями (67) и (68) в определения зарядовых (10), магнитных (30) и тороидных (35б) моментов и средних радиусов соответствующих распределений (14), (31), (36б), считая эти определения справедливыми для м.э.о. тока $\langle J_{\nu}^{c.c.}(x) \rangle$. Тогда, например, для зарядовых моментов и средних радиусов их распределений получим:

$$\langle Q_{lm}(t) \rangle = \exp(-i\Delta\chi t) \frac{(2l+1)!!}{\sqrt{4\pi}(2l+1)} \delta(\mathbf{k}) \langle q_{lm}(k) \rangle / (-ik)^l; \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{r_{lm}^{2n}}(t) \rangle &= \exp(-i\Delta\chi t) \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{\sqrt{4\pi}(2l+1)} \delta(\mathbf{k}) \times \\ &\times \{d^n/d(-\mathbf{k}^2)^n\} \{ \langle q_{lm}(k) \rangle / (-ik)^l \}. \end{aligned} \quad (70)$$

Формулы (69) и (70) и аналогичные для магнитных и тороидных характеристик отличаются от соответствующих выражений для классических экспоненциально зависящих от времени моментов и средних радиусов распределений наличием $\delta(\mathbf{k})$ в правых частях.

При использовании волновых пакетов (см., например, [24, 36]), нормированных на единицу, $\delta(\mathbf{k})$ в этих выражениях отсутствует.

Таким образом, величины $\langle q_{lm}(k) \rangle$, нормированные, как и классические $q_{lm}(k)$ по формуле (14), являются матричными элементами квантовых операторов зарядовых мультипольных форм-факторов $\langle Q_{lm}(-\mathbf{k}^2) \rangle$. Аналогичные выражения получаются и для матричных элементов квантовых операторов магнитных и тороидных форм-факторов. При этом, конечно, как и в классическом случае (37), справедливо соотношение:

$$\langle E_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \rangle = \langle \dot{Q}_{lm}(0, t) \rangle + \mathbf{k}^2 \langle T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) \rangle. \quad (71)$$

Для квантовых форм-факторов тоже справедливы разложения в ряды по средним радиусам распределений (13), (29), (36а). Конечно, они целесообразны только при $\mathbf{k}^2 \ll \min\{\kappa_1^2, \kappa_2^2\}$, поскольку фактически разложение следует проводить по безразмерному параметру \mathbf{k}^2/κ_1^2 , или \mathbf{k}^2/κ_2^2 .

Соотношения (67)–(71) показывают, что параметризация м. э. о. тока совершенно аналогична классическому мультипольному разложению, а классические и квантовые форм-факторы определяются одними и теми же формулами (11), (28), (35а).

13. Общий вид мультипольной параметризации м. э. о. тока

Учтем теперь, что равенства (41), (28), (35а) и (67), (68) операторные, и применим теорему Вигнера—Эккерта [23], утверждающую, что для неприводимого тензорного оператора O_{lm} справедливо равенство:

$$\langle j_2, m_2 | O_{lm} | j_1, m_1 \rangle = \beta_{1,2}^O \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle} O_{l12}. \quad (72)$$

Здесь $\beta_{1,2}^O$ — произвольная фаза, выбор которой сделан ниже. Тогда параметризация (мультипольное разложение) м. э. о. тока в с. с. примет вид ($\beta^Q = i^l$, $\beta^M = \beta^T = i^{l-1}$):

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^{-3} \sum_{l,m} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} k^l \times \\ &\times \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle} Y_{lm}(\mathbf{n}) Q_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2); \\ \langle \mathbf{J}(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^{-3} \sum_{l,m} k^{l-1} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)(l+1)/l}}{(2l+1)!!} \times \\ &\times \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle} \left\{ k F_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}) M_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2) + \right. \\ &+ \mathbf{F}_{lm}^{(+)}(\mathbf{n}) [\Delta \kappa Q_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(0) + \mathbf{k}^2 T_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2)] + \\ &\left. + \Delta \kappa \sqrt{\frac{l}{l+1}} \mathbf{F}_{lm}^{(-)}(\mathbf{n}) Q_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2) \right\}, \quad (74) \end{aligned}$$

В отличие от классических квантовые форм-факторы

$$\langle Q_{lm}(-\mathbf{k}^2) \rangle, \quad \langle M_{lm}(-\mathbf{k}^2) \rangle, \quad \langle T_{lm}(-\mathbf{k}^2) \rangle$$

факторизуются, выражаясь через инварианты:

$$\begin{aligned} Q_{l12}(-\mathbf{k}^2) &\equiv Q_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2); \\ M_{l12}(-\mathbf{k}^2) &\equiv M_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2); \\ T_{l12}(-\mathbf{k}^2) &\equiv T_{lj_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем называть приведенные матричные элементы

$$Q_{l12}(-\mathbf{k}^2), \quad M_{l12}(-\mathbf{k}^2) \quad \text{и} \quad T_{l12}(-\mathbf{k}^2)$$

соответственно тоже кулоновскими (зарядовыми), магнитными и торoidalными мультипольными форм-факторами. Для них, естественно, тоже выполняется соотношение (70):

$$E_{l12}(\mathbf{k}^2) = \Delta \kappa Q_{l12}(0) + \mathbf{k}^2 T_{l12}(-\mathbf{k}^2). \quad (75)$$

Еще раз обратим внимание на то, что в формулах разделов 12 и 13 все кинематические переменные и матричные элементы взяты в с. с., так как определялись собственные форм-факторы системы (ядра, элементарной частицы) или данного перехода системы. В произвольной системе отсчета только формулы (73), (74) и (75) остаются справедливыми, если $\Delta\kappa = \omega^c$. с. заменить на ω в рассматриваемой системе отсчета.

Если форм-факторы рассматриваются как функции инвариантной переменной k_μ^2 , то разложение форм-факторов в ряд по средним радиусам распределений, например, для $Q_{l12}(k_\mu^2)$ будет выглядеть следующим образом:

$$Q_{l12}(k_\mu^2) = i^l Q_{l12} + i^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2l+1)!! (k_\mu^2 - \Delta\kappa^2)^n}{2^n (2l+2n+1)!! n!} \overline{r_{l12}^{2n}}, \quad (76a)$$

где моменты и средние радиусы распределений соответственно равны ($\beta^c = i^l$):

$$Q_{l12} = (-i)^l Q_{l12}(\Delta\kappa^2);$$

$$\overline{r_{l12}^{2n}} = (-i)^l \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{d^n}{d(k_\mu^2)^n} Q_{l12}(k_\mu^2) \Big|_{k_\mu^2 = \Delta\kappa^2}. \quad (76b)$$

Итак, параметризация матричных элементов тока на этом завершена.

Как и в классической электродинамике, условие сохранения заряда в нестационарном случае ($\kappa_1 \neq \kappa_2$):

$$\frac{d}{dt} \int \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle d^3x = i\omega Q_{012}(0) = 0 \quad (77)$$

приводит к равенству: $Q_{012}(0) = 0$, поскольку $\omega \neq 0$ (например, в с. с. $\omega = \Delta\kappa$). Таким образом, для $\kappa_1 \neq \kappa_2$ разложение (76) начинается не с заряда, а со среднеквадратичного радиуса распределения заряда, а потому

$$Q_{012}(-\mathbf{k}^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{k}^2)^n}{2^n (2n+1)!! n!} \overline{r_{012}^{2n}}(0) \equiv \mathbf{k}^2 \varphi_{012}(\mathbf{k}^2), \quad (78)$$

где φ_{012} — произвольная функция, не имеющая полюса в точке $\mathbf{k}^2 = 0$. В рамках релятивистской квантовой теории поля соотношение (78) устанавливается с помощью обобщенного тождества Уорда — Такахаши (см. например, [24], с. 196 и [4], с. 353).

Напомним также, что в квантовой теории целесообразность мультипольных разложений определяется не столько малостью передаваемых импульсов (в отличие от классической теории, где ряд форм-факторов бесконечен и имеется вопрос о его сходимости), сколько квантовыми законами сложения и сохранения момента количества движения. В связи с последним в квантовом случае **общее** число форм-факторов N всегда ограничено (см. таблицу 2

Таблица 2

Правила отбора форм-факторов по P - и T -инвариантности для частиц со спином j .

Тип форм-факторов	P	$+1$	$+1$	$+1$	-1	Общее число факторов данного типа
	T	$+1$	-1	$+1$	-1	
Q_{ljj}	$(j - \text{цел.})$	$j + 1$	0	0	j	$2j + 1$
	$(j - \text{полуцел.})$	$j + 1/2$	0	0	$j + 1/2$	$2j + 1$
M_{ljj}	$(j - \text{цел.})$	j	0	0	j	$2j$
	$(j - \text{полуцел.})$	$j + 1/2$	0	0	$j - 1/2$	$2j$
T_{ljj}	$(j - \text{цел.})$	0			0	$2j$
	$(j - \text{полуцел.})$	0	$j - 1/2$	$j + 1/2$	0	$2j$

для $j_1 = j_2 = j$) и зависит от величин спинов j_1 и j_2 системы в начальном и в конечном состояниях: $N \leq 3(2j + 1)$, где $j = \min \{j_1, j_2\}$, а вклады форм-факторов старших рангов могут быть не подавлены, т. к. k^2 не обязательно мал. Кроме того, существуют правила отбора при пространственных и временных отражениях, различные для различных семейств форм-факторов. Это принципиально выделяет тороидные форм-факторы в квантовой теории и делает их исследование особенно интересным.

14. Правила отбора форм-факторов

Условие эрмитовости оператора тока накладывает на форм-факторы ограничения [7]:

$$\begin{aligned}
 Q_{l12} &= (-1)^{l+j_1-j_2} Q_{l21}^*; \\
 M_{l12} &= (-1)^{l+1+j_1-j_2} M_{l21}^*; \\
 T_{l12} &= (-1)^{l+1+j_1-j_2} T_{l21}^*; \\
 \beta^Q &= i^l, \quad \beta^M = \beta^T = i^{l-1}.
 \end{aligned} \tag{79a}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{l12} &= (-1)^{j_1-j_2} Q_{l21}^*; \\
 M_{l12} &= (-1)^{j_1-j_2} M_{l21}^*; \\
 T_{l12} &= (-1)^{j_1-j_2} T_{l21}^*; \\
 \beta^Q &= \beta^M = \beta^T = 1.
 \end{aligned} \tag{79б}$$

Звездочкой здесь обозначено комплексное сопряжение. Из выражений (79б) видно, что у частицы ($\kappa_1 = \kappa_2$, $j_1 = j_2$) все форм-факторы

оказываются действительными только из условия эрмитовости м. э. о. тока. При таком выборе фаз выражения для мультипольных разложений м. э. о. тока $\langle \rho(\mathbf{k}) \rangle$, $\langle \mathbf{J}(\mathbf{k}) \rangle$ по форме полностью совпадают с фурье-образом мультипольных разложений классического тока (12) и (38).

Закон преобразования оператора тока при пространственных (P) и временных (T) отражениях накладывает дополнительные условия на форм-факторы. Если в классической физике электромагнитный ток может обладать, вообще говоря, любым мультипольным моментом, то в квантовом случае, поскольку операторы мультипольных моментов — спиновые операторы (для которых справедлива теорема Вигнера — Эккерта), это не так. Например, вектор дипольного момента частицы направлен вдоль вектора спина. Спин и магнитный дипольный момент — псевдовекторы, а кулоновский и тороидный дипольные моменты — истинные векторы. Таким образом, при сохранении четности частица может обладать только магнитным дипольным форм-фактором, а кулоновский и тороидный тождественно равны нулю.

Рассмотрим в общем виде эти правила отбора. Под действием оператора инверсии P вектор состояния и оператор истинного векторного тока преобразуются по закону * (см., например, [25]):

$$P | \mathbf{p}, \mathbf{x}, j, m \rangle = \eta^P (-1)^j | -\mathbf{p}, \mathbf{x}, j, m \rangle; \quad (80a)$$

$$P^{-1} \rho(\mathbf{x}, t) P = \rho(-\mathbf{x}, t); \quad (80б)$$

$$P^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) P = -\mathbf{J}(-\mathbf{x}, t). \quad (80в)$$

Множитель $\eta^P = \pm 1$ указывает на внутреннюю четность частицы. Учитывая четность базисных функций и правила (80), найдем, что

$$Q_{l12}(-\mathbf{k}^2) = 0; \quad l = 2n + 1 + \nu; \quad (81a)$$

$$M_{l12}(-\mathbf{k}^2) = 0; \quad l = 2n + \nu; \quad (81б)$$

$$T_{l12}(-\mathbf{k}^2) = 0; \quad l = 2n + 1 + \nu, \quad (81в)$$

где $\nu = |\eta_1^P - \eta_2^P|/2$, так что $\nu = 0$, если четности начального и конечного состояний совпадают, и $\nu = 1$, если они разные.

Соотношения (81) можно непосредственно учесть в мультипольных разложениях (73) и (74), введя множители:

$$\theta_{l+\nu}^{(\pm)} = [1 \pm (-1)^{l+\nu}]/2.$$

* Предполагаем, что операторы P и T не действуют на «зарядовую» переменную α , так что множитель η^P — число. Случай, когда отражения P и T включают операцию типа зарядового сопряжения, подробно рассмотрен Ю. М. Широковым [25]. Поэтому в дальнейшем индекс α будем опускать.

В рядах (73) и (74) нужно домножить каждый магнитный форм-фактор на θ_{l+v}^{-} , а кулоновские и тороидные — на θ_{l+v}^{+} *.

Преобразование векторов состояния и оператора тока при отражении времени задается вигнеровским антиунитарным оператором T **:

$$T | \rho \kappa j m \rangle = (-1)^{j-m} \langle -\rho \kappa j - m |; \quad (82a)$$

$$T \rho(\mathbf{x}, t) T^{-1} = \rho(\mathbf{x}, -t); \quad (82б)$$

$$T \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) T^{-1} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, -t). \quad (82в)$$

Из условий (82) следует:

$$Q_{l12}(-\mathbf{k}^2) = (-1)^{l+j_1-j_2} Q_{l21}(-\mathbf{k}^2); \quad (83a)$$

$$M_{l12}(-\mathbf{k}^2) = (-1)^{l+1+j_1-j_2} M_{l21}(-\mathbf{k}^2); \quad (83б)$$

$$T_{l12}(-\mathbf{k}^2) = (-1)^{l+1+j_1-j_2} T_{l21}(-\mathbf{k}^2). \quad (83в)$$

Соотношения (81), (83) верны при любом выборе фаз β^0 .

Эрмитовость (79а) и T -инвариантность тока (82б), (82в) приводят к действительности всех форм-факторов — как переходных, так и диагональных.

Из соотношений (81) и (83) следует, что у частицы ($\kappa_1 = \kappa_2$, $j_1 = j_2$) не может быть при сохранении четности зарядовых и тороидных форм-факторов нечетного ранга и магнитных — четного ранга, а при T -инвариантности равны нулю зарядовые форм-факторы нечетных рангов и магнитные и тороидные — четных рангов. Таким образом, при наличии строгой P - и T -инвариантности одновременно все тороидные форм-факторы частиц тождественно обращались бы в нуль. Если же учесть то обстоятельство, что в форм-факторы частиц дают вклад слабые взаимодействия, нарушающие P -инвариантность, то малыми по величине тороидными моментами нечетных рангов должны обладать, вообще говоря, все частицы со спином, отличным от нуля. С учетом нарушения T -инвариантности оказываются также разрешенными тороидные моменты четных рангов, а все переходные форм-факторы могут быть комплексными [7, 26].

* Для «аксиального» тока ($\eta_1^P \eta_2^P = -1$) форма параметризации (74) остается прежней, но изменяется знак в соотношении (80в) и правила отбора становятся обратными:

$$\theta_{l+v}^{(\pm)} = [1 \mp (-1)^{l+v}]/2.$$

** См. замечание к соотношениям (80).

15. Мультипольное излучение квантовых систем

Постановка задачи излучения квантовых систем несколько отличается от соответствующей классической задачи. В данном случае по заданным матричным элементам оператора тока (73), (74) вычисляется стандартным способом (см., например, [4]) вероятность излучения $W_{l\omega}$ мультиполя l -го ранга с энергией ω . Вектор-потенциал мультиполя — волновую функцию свободного фотона с энергией ω , моментом l и его проекцией m — можно записать, пользуясь вместо сингулярных функций $\mathfrak{G}_{lm\omega}(\mathbf{x})$, $\mathfrak{H}_{lm\omega}^{(0)}(\mathbf{x})$ несингулярными функциями $\tilde{\mathfrak{Y}}_{lm\omega}(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathfrak{Y}}_{lm\omega}^{(0)}(\mathbf{x})$:

$$A_{lm\omega}^0(\mathbf{x}, t) = \frac{\sqrt{\omega}}{4\pi} C \mathfrak{Y}_{lm\omega}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \tag{84a}$$

$$A_{lm\omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sqrt{\omega}}{4\pi} \{ \alpha^0 \tilde{\mathfrak{Y}}_{lm\omega}^{(0)}(\mathbf{x}) + \alpha^+ \tilde{\mathfrak{Y}}_{lm\omega}^{(+)}(\mathbf{x}) + C \tilde{\mathfrak{Y}}_{lm\omega}^{(-)}(\mathbf{x}) \} \exp(-i\omega t), \tag{84б}$$

$$|\alpha^0|^2 + |\alpha^+|^2 = 1.$$

Здесь C — произвольный множитель. Произвол определяется калибровочной инвариантностью волновой функции фотона. При соленоидальной калибровке $C = 0$. Волновая функция фотона (84) нормирована на функцию $\delta(\omega - \omega')$.

При выбранной нормировке искомая вероятность излучения $W_{l\omega}$ рассчитывается по обычным формулам:

$$W = 2\pi \Sigma |V_{if}|^2; \quad V_{if} = \int \langle f | J_\mu | i \rangle A_\mu^* d^3x. \tag{85}$$

Используя выражение для матричных элементов оператора тока (74) и волновой функции фотона (84), получим:

$$W_{l\omega} = \frac{(l+1)(2l+1)}{2\pi l [(2l+1)!!]^2} \frac{\omega^{2l+1}}{\langle j_1 j_1 | j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle^2} \{ |\alpha^0|^2 \theta_{l+v}^{(-)} | M_{l12}(-\omega^2) |^2 + |\alpha^+|^2 \theta_{l+v}^{(+)} [|Q_{l12}(0)|^2 + 2\omega \operatorname{Re} Q_{l12}(0) T_{l12}^*(-\omega^2) + \omega^2 |T_{l12}(-\omega^2)|^2] \}. \tag{86}$$

Новым по сравнению с известными формулами [1—4] в этом выражении является излучение тороидных форм-факторов, вероятность которого на два порядка по ωa (где a — размер излучающей системы) выше, чем вероятность излучения зарядовых моментов того же ранга. Имеется также интерференционный член ($\sim \operatorname{Re} Q_l T_l^*$), который дает вклад только на один порядок выше, чем $|Q_l|^2$.

Рассмотрим для примера, каков относительный вклад тороидного дипольного момента в вероятность $E1$ перехода для различ-

ных квантовых систем. Для перехода $2P - 1S$ атома водорода имеем:

$$W(T_1^2)/W(Q_1^2) \sim 10^{-10}; \quad W(Q_1 T_1^*)/W(Q_1^2) \sim 10^{-5}.$$

Соответствующие отношения для излучения ядер равняются 10^{-4} и 10^{-2} , а для распадов резонансов (например, $\Sigma^+ \rightarrow p\gamma$), где $\omega a \sim \sim \Delta\kappa/\kappa \approx 1/4$, соответственно 0,1 и 0,3.

16. Эффекты Штарка и Зеемана и тороидный эффект

Как известно, дополнительная энергия атомов в однородном электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях, равная соответственно:

$$\Delta W_{\text{эл.}} = -d\mathbf{E}; \quad (87a)$$

$$\Delta W_{\text{маг.}} = -m\mathbf{B}, \quad (87б)$$

приводит к расщеплению спектральных линий (эффекты Штарка и Зеемана).

Аналогично, существование дополнительной энергии атомов в однородном внешнем токе, равной:

$$\Delta W_{\text{ток}} = -\mu_0 \mathbf{T} (\mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}), \quad (87в)$$

также приводит к расщеплению спектральных линий. В (87в) наряду с внешним током проводимости \mathbf{J} стоит также внешний ток смещения $\dot{\mathbf{D}}$, который взаимодействует с тороидным дипольным моментом \mathbf{T} так же, как и \mathbf{J} .

Например, атомы и ионы плазмы в газоразрядной трубке взаимодействуют таким образом с протекающим в плазме током.

Как отмечалось уже в разд. 5, контактное взаимодействие атома (иона) с током в плазме может быть, в принципе, детализировано и выражено в терминах потенциалов Лиенара — Вихерта, описывающих поля носителей тока. Аналогичное взаимодействие (с током смещения) возникает и в том случае, когда атомы или ионы попадают в быстропеременное электрическое поле (быстрый пролет сквозь конденсатор, мощное высокочастотное электромагнитное поле).

Тороидный эффект, обусловленный неоднородностью и нестационарностью поля, возникает практически всегда наряду с эффектами Штарка и Зеемана, хотя его наличие и величина не зависят от последних.

Расщепление спектральных линий в результате «тороидного» взаимодействия, как и эффект Штарка, — вообще говоря, эффект второго порядка теории возмущений, и лишь для водорода (и водородоподобных ионов) имеется эффект первого порядка из-за вырожденности спектра по орбитальному квантовому числу. Величину тороидного эффекта интересно сравнить с эффектами Штарка

и Зеемана, например, для перехода из первого возбужденного в основное состояние атома водорода. Расщепления спектральных линий в этих случаях оцениваются соответственно по формулам:

$$\Delta W_{\text{эл.}} = 3ea_0E; \quad \Delta W_{\text{маг.}} = mB; \quad \Delta W_{\text{тон}} = \mu_0 m a_0 J,$$

где a_0 — боровский радиус; m — магнетон Бора. Нетрудно предложить идею эксперимента для измерения тороидного эффекта, однако реальные измерения могут быть затруднены, поскольку ему почти всегда сопутствуют эффекты Штарка или Зеемана.

Описанные расщепления за счет тороидных моментов возникают лишь при переходах с изменением четности. Если учесть нарушение P -инвариантности, вызываемое наличием слабых взаимодействий, то в первом порядке по константе G возникает расщепление термов всех атомов [27]. Однако, из-за малости константы слабых взаимодействий этот эффект значительно меньше указанных выше эффектов второго порядка (в α/G раз).

17. О проявлениях тороидных форм-факторов в физике ядра и элементарных частиц

Задача об излучении уже подробно разобрана. Коротко опишем роль тороидных форм-факторов при рассмотрении следующего простейшего процесса — электромагнитного рассеяния на частицах с высшими спинами.

Сечение рассеяния электрона, учитывающее все форм-факторы, было получено [28] в однофотонном приближении с помощью формул (73) и (74) для случая $j_1 \neq j_2$ и $\kappa_1 \neq \kappa_2$ и наиболее общего вида матрицы плотности спиновых состояний мишени. Тороидные форм-факторы четных рангов *, стоящие в этих выражениях при $j_1, j_2 \geq 1$, отличны от нуля только в случае нарушения T -инвариантности. Поскольку проверка гипотезы об электромагнитном происхождении нарушения T -инвариантности остается актуальной, целесообразно измерить асимметрию рассеяния электронов на поляризованных дейтонах (простейшее ядро со спином 1) или поляризацию дейтонов отдачи при рассеянии на неполяризованной мишени [29]**, тем более, что ранее обнаруженное расхождение [30] между экспериментальной зависимостью от k_μ^2 сечения упругого рассеяния на большие углы электронов на неполяризованных

* Напомним, что тороидные форм-факторы нечетных рангов существуют с учетом нарушения P -инвариантности слабых взаимодействий и в случае переходов между состояниями с разной внутренней четностью.

** Этот опыт во втором его варианте был поставлен в Стэнфорде [32]. Было получено значение векторной поляризации дейтона отдачи $0,075 \pm \pm 0,088$, которое не позволяет исключить предположения даже о сильном нарушении T -инвариантности в электромагнитных взаимодействиях.

дейтонах и теоретическими, модельными ее предсказаниями, в настоящее время подтверждено с большей точностью [31]. Это расхождение может быть вызвано вкладом T -неинвариантного тороидного квадрупольного форм-фактора дейтона. Зная о существовании T_1 , можно избежать распространенной в ядерной физике ошибки — замены $E_l \rightarrow \omega Q_l$ при описании электромагнитного неупругого рассеяния на ядрах (см. ссылки в [33]). В качестве примера в работе [33] был разобран случай перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$ ядра Be^9 при рассеянии на нем высокоэнергетических электронов на большие углы. Были вычислены форм-факторы этого перехода с помощью оболочечной модели с $L - S$ -связью, и показано, что из-за малой энергии возбуждения вкладом зарядового дипольного форм-фактора в поперечной электрической части тока можно пренебречь, в то время как тороидный дипольный форм-фактор существен — того же порядка, что и квадрупольный магнитный.

Существование тороидных форм-факторов изменяет ситуацию с экспериментальным измерением магнитных форм-факторов, поскольку, например, в случае перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$ сечение имеет вид:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{mott}} \frac{k^2}{9} \left\{ Q_1^2 + \frac{2}{5} k^2 \left(\frac{1}{2} + \text{tg}^2 \theta/2 \right) [T_1^2 + 3/5 M_2^2] \right\}.$$

Так как модельные значения T_1 и M_2 приблизительно равны, традиционное мнение о возможности разделения вкладов зарядовых и магнитных форм-факторов по угловым распределениям оказывается неверным. В работе [33] разобраны все возможности (полный опыт) действительно раздельного измерения форм-факторов перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$. В случае электромагнитных распадов с конверсией γ -квантов (например, $N_{1520}^{**} \rightarrow pe^+e^-$) ситуация аналогична и даже усугубляется большим значением параметра $ka = \Delta\kappa/\kappa$.

Авторы благодарны А. М. Балдину, В. М. Галицкому, С. Б. Герасимову, А. Б. Говоркову, В. К. Игнатовичу, И. Ю. Кобзареву, Л. Б. Окуню и Я. А. Смородинскому за обсуждение ряда вопросов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Мультипольное разложение энергии взаимодействия системы с внешним электромагнитным полем

Выпишем энергию взаимодействия произвольной электромагнитной системы, описываемой плотностью тока

$$J_\mu = \{\rho(\mathbf{x}, t); \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)\},$$

с внешним электромагнитным полем $A_\mu = \{\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}$:

$$W = \int J_\mu A_\mu d^3x = \int \rho\varphi d^3x - \int \mathbf{J}\mathbf{A} d^3x \equiv W^{\text{зар.}} + W^{\text{ток.}}$$

Применяя метод разложения по точечным источникам (см. разд. 1) и разбивая тензоры $\xi_i \xi_j \dots \xi_k$ на неприводимые, представим $W^{\text{зар.}}$ в виде:

$$W^{\text{зар.}} = q\varphi + (\mathbf{d}\nabla)\varphi + Q_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + \\ + \overline{r_q^2}\Delta\varphi/6 + Q_{ijk}\nabla_i\nabla_j\nabla_k\varphi + (\overline{r_d^2}\nabla)\Delta\varphi/10 + \dots,$$

где $q = \int \rho d^3\xi$ — полный заряд системы; $\mathbf{d} = \int \rho\xi d^3\xi$ — зарядовый дипольный момент;

$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int (\xi_i \xi_j \frac{\xi^2}{3} \delta_{ij}) \rho d^3\xi$ — зарядовый квадрупольный момент;

$$Q_{ijk} = \frac{1}{6} \int [\xi_i \xi_j \xi_k - \frac{1}{5} \xi^2 (\xi_i \delta_{jk} + \xi_j \delta_{ik} + \xi_k \delta_{ij})] \rho d^3\xi$$

— зарядовый октупольный момент; $\overline{r_q^2}$ и $\overline{r_d^2}$ — среднеквадратичные радиусы заряда и диполя:

$$\overline{r_q^2} = \int \xi^2 \rho d^3\xi \quad \text{и} \quad \overline{r_d^2} = \int \xi^2 \xi \rho d^3\xi,$$

а $\Delta\varphi = (-1/\epsilon_0) \rho^{\text{ext}}$.

Действуя по тому же методу (см. разд. 1), разобьем теперь на неприводимые тензоры $\xi_i J_j$ и $\xi_i \xi_j J_k$. Идентифицируя затем одни члены разложения (с помощью условия сохранения тока) с зарядовыми характеристиками и вводя определения других, получаем разложение $W^{\text{ток}}$ в виде:

$$W^{\text{ток}} = \dot{\mathbf{d}}\mathbf{A} - \mathbf{m}[\nabla\mathbf{A}] + \frac{1}{2} \dot{Q}_{ij}(\nabla_i A_j + \nabla_j A_i) + \\ + \overline{r_q^2}(\nabla\mathbf{A})/6 + \dot{Q}_{ijk}\nabla_j\nabla_k A_i - m_{ij}\nabla_i[\nabla\mathbf{A}]_j + \\ + (\overline{r_d^2}\nabla)(\nabla\mathbf{A})/10 - \mathbf{T}[\nabla[\nabla\mathbf{A}]] - \dots$$

где $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\xi J] d^3\xi$ — магнитный дипольный момент системы;

$$m_{ij} = \frac{1}{3} \int \{[\xi J]_i \xi_j + [\xi J]_j \xi_i\} d^3\xi$$

— магнитный квадрупольный момент;

$$\mathbf{T} = \frac{1}{10} \int \{\xi(\xi J) - 2\xi^2 J\} d^3\xi$$

— дипольный тороидный момент;

$$\dot{\mathbf{d}} = \int \mathbf{J} d^3\xi, \quad \overline{r_d^2} = \int \{2\xi(\xi J) + \xi^2 J\} d^3\xi$$

и т. д.

Для статических полей имеем:

$$W^{\text{зар.}} = q\varphi - (\mathbf{dE}) - Q_{ij}\nabla_i E_j - (1/6\epsilon_0) \overline{r_d^2} \rho^{\text{ext}} - (Q_{ijk}\nabla_i \nabla_j E_k) - \\ - (1/10\epsilon_0) (\overline{r_d^2} \nabla) \rho^{\text{ext}} - \dots,$$

$$W^{\text{ток}} = -\mathbf{mB} - m_{ij}\nabla_i B_j - \mathbf{T} (\mathbf{J}^{\text{ext}} + \dot{\mathbf{D}}) - \dots$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основные рабочие формулы

Выищем определения мультипольных форм-факторов зарядового:

$$Q_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{(2l+1)!!}{(-ik)^l \sqrt{4\pi} (2l+1)} \int \tilde{f}_l^*(kx) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \rho(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (9), (11);$$

магнитного:

$$M_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = \frac{-i(2l+1)!!}{(-ik)^l \sqrt{4\pi} (2l+1) (l+1)/l} \int \tilde{f}_l^*(kx) \times \\ \times Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (24), (28)$$

тороидного:

$$T_{lm}(-\mathbf{k}^2, t) = -\frac{(2l-1)!!}{(-ik)^{l+1} (2l+1) \sqrt{4\pi} (l+1)/l} \times \\ \times \int \left\{ \sqrt{l} \tilde{f}_{l+1}^*(kx) Y_{l+1m}^*(\mathbf{n}) - ikx \frac{\sqrt{l+1}}{2} \tilde{f}_l^*(kx) Y_{l-1m}^*(\mathbf{n}) \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

где

$$f_l(a) = (2\pi)^{3/2} (i^l/\sqrt{a}) I_{l+1/2}(a); \quad (5b)$$

$$[Y_{l'm}(\mathbf{n})]_V = \sum_m' \langle l'm'1v | lm \rangle Y_{l'm'}(\mathbf{n}). \quad (19g)$$

В точке $\mathbf{k} = 0$ (длинноволновый предел) все распределения нормированы на соответствующие моменты, имеющие определенный геометрический смысл. В квантовом случае мультипольные форм-факторы факторизуются по теореме Вигнера — Эккерта:

$$\langle \kappa_2, j_2, m_2, \alpha_2 | \hat{O}_{lm}(-\mathbf{k}^2) | \kappa_1, j_1, m_1 \alpha_1 \rangle = \\ = \beta_{12}^O \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle} O_{j_1 j_2}^{\kappa_1 \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2}(-\mathbf{k}^2), \quad (72)$$

Заметим, что форм-факторы действительны, если рассматриваемый оператор эрмитов и T -инвариантен, а фазы равны:

$$\beta^Q = i^l; \quad \beta^M = \beta^T = i^{l-1}.$$

Приведем разложение форм-фактора $Q_{l12}(k_\mu^2)$ в ряд по средним $2n$ -степенным радиусам:

$$Q_{l12}(k_\mu^2) = i^l \langle Q_{l12} \rangle + i^l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2l+1)!! (-\mathbf{k}^2)^n}{2^n n! (2l+2n+1)!!} \overline{\langle r_{l12}^{2n} \rangle}, \quad (76a)$$

где моменты и средние радиусы распределений соответственно равны:

$$\begin{aligned} \langle Q_{l12} \rangle &= (-i)^l Q_{l12}(\Delta x^2), \\ \overline{\langle r_{l12}^{2n} \rangle} &= (-i)^l \frac{2^n (2l+2n+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{d^n}{d(k_\mu^2)^n} Q_{l12}(k_\mu^2) \Big|_{k_\mu^2 = \Delta x^2}. \end{aligned} \quad (76b)$$

Эрмитовость тока накладывает на форм-факторы условия:

$$\begin{aligned} Q_{l12} &= (-1)^{l+j_1-j_2} Q_{l21}^*; & M_{l12} &= (-1)^{l+1+j_1-j_2} M_{l21}^*; \\ T_{l12} &= -(-1)^{l+1+j_1-j_2} T_{l21}^*. \end{aligned} \quad (79a)$$

Условие Р-инвариантности требует:

$$\left. \begin{aligned} Q_{l12}(k_\mu^2) &= 0; & l &= 2n+1+\nu; \\ M_{l12}(k_\mu^2) &= 0; & l &= 2n+\nu; \\ T_{l12}(k_\mu^2) &= 0; & l &= 2n+1+\nu, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

где $\nu = 0$ или 1 для одинаковых или противоположных четностей конечного и начального состояний.

Условие Т-инвариантности накладывает на форм-факторы ограничения:

$$\left. \begin{aligned} Q_{l12}(k_\mu^2) &= (-1)^{l+j_1-j_2} Q_{l21}(k_\mu^2); \\ M_{l12}(k_\mu^2) &= (-1)^{l+1+j_1-j_2} M_{l21}(k_\mu^2); \\ T_{l12}(k_\mu^2) &= (-1)^{l+1+j_1-j_2} T_{l21}(k_\mu^2). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Приведем окончательные формулы разложения зарядовой плотности

$$\begin{aligned} &\langle \kappa_2, j_2, m_2, \alpha_2 | \rho(\mathbf{k}) | \kappa_1, j_1, m_1, \alpha_1 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{l, m} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} k^l \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 m_2 \rangle} Y_{lm}(\mathbf{n}) Q_{l12}(k_\mu^2) \quad (73) \\ &k \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2} \end{aligned}$$

и плотности тока

$$\begin{aligned} &\langle \kappa_2, j_2, m_2, \alpha_2 | \mathbf{J}(\mathbf{k}) | \kappa_1, j_1, m_1, \alpha_1 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{l, m} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}(l+1)l}{(2l+1)!!} k^{l-1} \frac{\langle j_1 m_1 l m | j_2 m_2 \rangle}{\langle j_1 j_1 l j_2 - j_1 | j_2 j_2 \rangle} \times \\ &\times \left\{ k F_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}) M_{l12}(k_\mu^2) + F_{lm}^{(+)}(\mathbf{n}) [\omega Q_{l12}(\omega^2) + \mathbf{k}^2 T_{l12}(k_\mu^2)] + \right. \\ &\left. + \omega \sqrt{\frac{l}{l+1}} F_{lm}^{(-)}(\mathbf{n}) Q_{l12}(k_\mu^2) \right\}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Мультипольная явно ковариантная параметризация тока частиц со спином 1/2. О свойствах анаполя

В этом приложении дана явно ковариантная параметризация матричных элементов электромагнитного тока частиц со спинами $j_1 = j_2 = 1/2$ и массами $\kappa_1 = \kappa_2^*$, $\kappa_1 \neq \kappa_2$ для случая одинаковых и противоположных четностей частиц. При этом использованы такие базисные векторы, разложение по которым дает мультипольную параметризацию, т. е. каждый из определенных таким образом форм-факторов перехода и только он определяет соответствующий мультипольный момент перехода и (или) все его средние радиусы распределения, определенные в подходящей системе отсчета. Такой способ параметризации помогает разобраться в вопросе о кинематических сингулярностях и подавлениях.

Различные формы явно ковариантной параметризации сохраняющегося векторного тока перехода без изменения четности частиц ** имеют вид:

$$J_{\mu}^{(V)}(k_{\lambda}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}_2 \left\{ (k_{\lambda}^2 \gamma_{\mu} - \hat{k} k_{\mu}) F_{1\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} F_{2\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) \right\} u_1 = \quad (3.1a)$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}_2 \left\{ \frac{k_{\lambda}^2 P_{\mu} - (k_{\lambda} P_{\lambda}) k_{\mu}}{\kappa (1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2)} F_{3\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) + \frac{1}{\kappa} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} F_{4\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) \right\} u_1 = \quad (3.1b)$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}_2 \left\{ \frac{k_{\lambda}^2 P_{\mu} - (k_{\lambda} P_{\lambda}) k_{\mu}}{\kappa (1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2)} F_{5\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) + (k_{\lambda}^2 \gamma_{\mu} - \hat{k} k_{\mu}) F_{6\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) \right\} u_1 = \quad (3.1v)$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}_2 \left\{ \frac{k_{\lambda}^2 P_{\mu} - (k_{\lambda} P_{\lambda}) k_{\mu}}{\kappa (1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2)} F_{\kappa_1\kappa_2}^{(e)}(k_{\lambda}^2) - \right. \\ \left. - \frac{i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P_{\nu} k_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_5}{\kappa^2 (1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2)} F_{\kappa_1\kappa_2}^{(m)}(k_{\lambda}^2) \right\} u_1, \quad (3.1r)$$

где $F_{\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2)$ — форм-факторы, а множитель $(1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2)^{-1}$ компенсирует лоренцево сокращение [24, 35]. Соответствующие параметризации *** тока

* См., например, [4], с. 474 и [24], с. 267.

** Используем следующее представление γ -матриц (см., например, [34]):

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4.$$

Уравнение Дирака в этом представлении выглядит следующим образом:

$$(\hat{p} - \kappa) u = \bar{u} (\hat{p} - \kappa) = 0, \quad \bar{u} = u^+ \gamma_4.$$

Нормировка биспиноров: $\bar{u}(p) u(p) = 1$,

$$\sigma_{\mu\nu} = 1/2(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}); \quad \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}; \quad g_{00} = 1; \quad g_{ii} = -1, \quad \hat{k} \equiv k_{\lambda}\gamma_{\lambda}.$$

*** См. например, сноску в работе [4] на стр. 570.

частиц ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$) получаются из (3.1а) — (3.1г) заменой векторов $k_\lambda^2 \gamma_\mu - k k_\mu$ и $k_\lambda^2 P_\mu - (k_\lambda P_\lambda) k_\mu$ на γ_μ и P_μ соответственно.

Нетрудно убедиться, перейдя в с. с. к двумерным спинорам и используя формулы нормировки форм-факторов на мультипольные моменты, что ни в одной из параметризаций (3.1а) — (3.1в) форм-факторы не соответствуют однозначно определенным мультипольным распределениям. Так, в случае (3.1а) магнитный момент частицы, определенный в б. с., оказывается равным

$$m = (e/2\kappa_0) [F_1(0) + F_2(0)],$$

в то время как заряд

$$q = eF_1(0),$$

а среднеквадратичный радиус заряда частицы

$$\bar{r}_q^2 = 6e \left[\frac{d}{dk_\mu^2} F_1(0) + \frac{1}{\kappa_0^2} F_2(0) \right],$$

т. е. содержит, например, F_2 — форм-фактор, который принято называть аномальным магнитным.

Аналогично в случае (3.1в):

$$\bar{r}_q^2 = 6e \left[\frac{d}{dk_\mu^2} F_5(0) + \frac{1}{\kappa_0^2} F_6(0) \right].$$

Только последняя параметризация (3.1г) является мультипольной в указанном смысле [36].

Легко показать также, пользуясь соотношениями

$$\bar{u}_2 \left\{ k_\lambda^2 \sigma_{\mu\nu} k_\nu + (k_\lambda^2 \gamma_\mu - \hat{k} k_\mu) - \frac{1}{\kappa} [k_\lambda^2 P_\mu - (k_\lambda P_\lambda) k_\mu] \right\} u_1 = 0$$

и

$$\bar{u}_2 \{ i \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P_\nu k_\lambda \gamma_\sigma \gamma_5 + \kappa \sigma_{\mu\nu} k_\nu - (k_\lambda^2 \gamma_\mu - \hat{k} k_\mu) \} u_1 = 0,$$

что все формы параметризации (3.1а) — (3.1г) сводятся одна к другой, и при этом все форм-факторы оказываются свободными от кинематических сингулярностей и подавлений, кроме F_6 :

$$F_{\kappa_1 \kappa_2}^{(e)} = F_{1\kappa_1 \kappa_2} + F_{2\kappa_1 \kappa_2} = F_{3\kappa_1 \kappa_2} + F_{4\kappa_1 \kappa_2} = F_{5\kappa_1 \kappa_2} + F_{6\kappa_1 \kappa_2};$$

$$F_{\kappa_1 \kappa_2}^{(m)} = (k_\lambda^2 / \kappa^2) F_{1\kappa_1 \kappa_2} + F_{2\kappa_1 \kappa_2} = F_{4\kappa_1 \kappa_2} = (k_\lambda^2 / \kappa^2) F_{6\kappa_1 \kappa_2}.$$

То есть в параметризации (3.1в) форм-фактор F_6 должен быть пропорционален $1/k_\lambda^2$, чтобы имело место $M1$ -излучение.

Однако явно ковариантные параметризации аксиального электромагнитного тока перехода (с изменением четности частиц) с использованием различных наборов базисных векторов оказываются физически неэквивалентными. Для примера разберем мультипольную и «аномальную» [9, 27] параметризации этого тока. Обе они справедливы как при $\kappa_1 = \kappa_2$, так и при $\kappa_1 \neq \kappa_2$.

В анапольной параметризации

$$J_{\mu}^{(A)}(k_{\lambda}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\kappa^2 - \Delta\kappa^2}{\kappa^2 - k_{\lambda}^2}} u_2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} G_{1\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa^2} (k_{\lambda}^2 \gamma_{\mu} - \hat{k} k_{\mu}) G_{2\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2) \right\} \gamma_5 u_1 \quad (3.2a)$$

форм-фактор G_1 принято называть дипольным электрическим (зарядовым), а G_2 — анапольным.

Однако ни один из этих форм-факторов не соответствует определенному мультипольному распределению. Так, собственный переходный зарядовый диполь определяется как величиной G_1 , так и величиной G_2 :

$$d = i \frac{e}{\kappa} \left[G_{1\kappa_1\kappa_2}(\Delta\kappa^2) - \frac{\Delta\kappa}{\kappa} G_{2\kappa_1\kappa_2}(\Delta\kappa^2) \right]. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) видно, что только в статическом случае ($\Delta\kappa = 0$) форм-фактор $G_{1\kappa_1\kappa_2}$ можно назвать дипольным зарядовым.

Анапольный член в токе $J_{\mu}^{(A)}$ обладает тем существенным отличием от зарядовых и магнитных, что он не дает вклада в излучение, а определяет «контактное» взаимодействие [15, 9, 27]. Действительно, первое его слагаемое, содержащее поперечную часть, пропорционально k_{λ}^2 и равно нулю для реальных фотонов, а второе пропорционально k_{μ} , т. е. чисто продольно. Излучающая (поперечная) составляющая анапольной части тока [см. (3.2a)], например, в с. с. равна:

$$\frac{e}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\kappa^2 - \Delta\kappa^2}}{\kappa^3} k_{\lambda}^2 \sigma_{\perp} G_{2\kappa_1\kappa_2}(k_{\lambda}^2); \\ \sigma_{\perp} = \sigma - \mathbf{k} (\mathbf{k}\sigma)/k^2. \quad (3.4)$$

Таким образом, в соответствии с анапольной параметризацией (3.2a) ток $J_{\mu}^{(A)}(k_{\lambda})$ содержит только один форм-фактор $G_{1\kappa_1\kappa_2}$, определяющий излучение $E1$ -типа. Это означает, что интенсивность электрического дипольного перехода как функция частоты ω (в с. с. $\omega = \Delta\kappa$) может содержать только нечетные степени ω начиная с ω^3 . Явно ковариантная мультипольная параметризация аксиального тока $J_{\mu}^{(A)}$ соответствует неявно ковариантной (см. разд. 13). Это означает, что только зарядовые моменты (в данном случае диполь), вычисленные, конечно, в с. с., являются коэффициентами при базисных векторах, трехмерная часть которых (в с. с.) имеет как продольную, так и поперечную части. Все же средние радиусы зарядового дипольного распределения, т. е. фактически весь дипольный зарядовый форм-фактор за вычетом его значения при $\mathbf{k}_{с.с.} = 0$, стоит при базисном векторе, трехмерная часть которого (в с. с.) чисто продольная.

Мультипольная параметризация $J_{\mu}^{(A)}$ имеет вид

$$J_{\mu}^{(A)}(k_{\lambda}) = \frac{e}{(2\pi)^3 \kappa} \sqrt{\frac{\kappa^2 - \Delta\kappa^2}{1 - k_{\lambda}^2/\kappa^2}} u_2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} G_{\kappa_1\kappa_2}^{(\pi)}(\Delta\kappa^2) - \right. \\ \left. - \frac{k_{\lambda}^2 P_{\mu} - (k_{\lambda} P_{\lambda}) k_{\mu}}{\kappa (k_{\lambda}^2 - \Delta\kappa^2)} [G_{\kappa_1\kappa_2}^{(\pi)}(k_{\lambda}^2) - G_{\kappa_1\kappa_2}^{(\pi)}(\Delta\kappa^2)] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\kappa^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P_{\nu} k_{\lambda} \gamma_{\sigma} \gamma_5 G_{\kappa_1\kappa_2}^{(T)}(k_{\lambda}^2) \right\} \gamma_5 u_1. \quad (3.2b)$$

В этом выражении $G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(n)}(k_\lambda^2)$ — дипольный зарядовый форм-фактор, $G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(\Delta \kappa^2)$ — дипольный зарядовый момент (в единицах e/κ), а $G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(T)}(k_\lambda^2)$ — тороидный дипольный форм-фактор (в единицах e/κ^2).

Данная параметризация мультипольная, т. е. дипольный зарядовый момент определяется только коэффициентом при первом базисном векторе, все его средние радиусы — форм-факторами при втором базисном векторе и только ими, а дипольный тороидный момент и все его средние радиусы определяются только тороидным форм-фактором:

$$\left. \begin{aligned} d &= i(e/\kappa) G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(\Delta \kappa^2); \\ \bar{r}_d^2 &= i(6e/\kappa) \frac{d}{dk_\lambda^2} G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(\Delta \kappa^2); \\ T &= (e/\kappa^2) G_{\kappa_1 \kappa_2}^T(\Delta \kappa^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Далее, пользуясь соотношениями

$$\bar{u}_2 \{ \Delta \kappa \sigma_{\mu\nu} k_\nu + (k_\lambda^2 \gamma_\mu - \hat{k} k_\mu) - i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P_\nu k_\lambda \gamma_\sigma \gamma_5 \} \gamma_5 u_1 = 0;$$

$$\bar{u}_2 \{ k_\lambda^2 \sigma_{\mu\nu} k_\nu + \Delta \kappa (k_\lambda^2 \gamma_\mu - \hat{k} k_\mu) + [k_\lambda^2 P_\mu - k_\lambda P_\lambda k_\mu] \} \gamma_5 u_1 = 0,$$

можно показать, что имеется связь между форм-факторами

$$\left. \begin{aligned} G_{1\kappa_1 \kappa_2}(k_\lambda^2) &= G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(k_\lambda^2) + \frac{\Delta \kappa}{\kappa} G_{\kappa_1 \kappa_2}^T(k_\lambda^2) + \\ &+ \frac{\Delta \kappa^2}{k_\lambda^2 - \Delta \kappa^2} [G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(k_\lambda^2) - G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(\Delta \kappa^2)]; \\ G_{2\kappa_1 \kappa_2}(k_\lambda^2) &= G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(T)}(k_\lambda^2) + \frac{\kappa \Delta \kappa}{k^2 - \Delta \kappa^2} [G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(k_\lambda^2) - G_{\kappa_1 \kappa_2}^{(d)}(\Delta \kappa^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Очевидно, что в статическом случае ($\Delta \kappa = 0$) обе параметризации совпадают:

$$G_{1\kappa_0 \kappa_0}(k_\lambda^2) = G_{\kappa_0 \kappa_0}^{(d)}(k_\lambda^2); \quad G_{2\kappa_0 \kappa_0}(k_\lambda^2) = G_{\kappa_0 \kappa_0}^{(T)}(k_\lambda^2).$$

Из соотношений между форм-факторами (3.6), казалось бы, следует, что все форм-факторы свободны от кинематических особенностей. При этом, поскольку d и T дают вклад в излучение одного и того же типа $E1$ (которое определяется одним числом — интенсивностью), нет необходимости вводить два вида излучателей, и анапольная параметризация даже предпочтительнее. В соответствии с ней, вероятность $E1$ -излучения $W(E1)$ пропорциональна $|G_{1\kappa_1 \kappa_2}(0)|^2$:

$$W(E1) \sim \omega^3 |G_{1\kappa_1 \kappa_2}(0)|^2, \quad (3.7)$$

т. е. является нечетной функцией частоты ω , так как

$$G_1(0) = \sum_n \frac{(-\omega^2)^n}{n!} G_1^{(n)}(\omega^2),$$

где $G_1^{(n)}(\omega^2)$ — числа, пропорциональные средним радиусам данного распределения. Однако из (3.6) легко видеть, что при наличии излучателей $G^{(d)}$ и G^T из-за их интерференции вероятность излучения $W(E1)$ — полином всех (как четных, так и нечетных) степеней ω , начиная с ω^3 . Действительно,

используя (3.6) и (3.7), находим, что вероятность $W(E1)$ пропорциональна полиному:

$$W(E1) \sim \omega^3 \{ |G^{(A)}(\omega^2)|^2 + 2(\omega/\kappa) \operatorname{Re} [G^{(A)}(\omega^2) G^{(T)}(0)] + (\omega^2/\kappa^2) |G^{(T)}(0)|^2 \} \quad (3.8)$$

в соответствии с общей формулой для интенсивности мультипольного излучения (86). Заметим, что все форм-факторы действительны, если рассматриваемый ток CP -инвариантен.

Таким образом, применение для параметризации анапольного вектора $(k\lambda\gamma_\mu - \hat{k}k_\mu) \gamma_5$ вносит подавление, приводящее к невозможности правильного аналитического продолжения форм-факторов G_1 и G_2 по одной из масс. Анаполь действительно оправдывает свое название, так как не является представителем ни одного из семейств мультипольных моментов. Однако непригодность его для параметризации тока определяется не этим обстоятельством, а наличием у него кинематического фактора $k\lambda^2$, подавляющего его излучение. Это утверждение, очевидно, справедливо не только для перехода $j_1 = j_2 = 1/2$, но и в общем случае анапольной параметризации тока перехода частиц с произвольными спинами [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роуз М. Поля мультиполей. Пер с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
3. Alder K. e.a. Rev. Mod. Phys., 1956, v. 28, p. 432.
4. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
5. Дубовик В. М., Чешков А. А. Препринт ОИЯИ Р2-5283, Дубна, 1970.
6. Дубовик В. М., Чешков А. А. Препринт ОИЯИ Р2-5284, Дубна, 1970.
7. Дубовик В. М., Чешков А. А. ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1369.
8. Дубовик В. М., Чешков А. А. Препринт ОИЯИ Р-2502, Дубна, 1965.
9. Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., Терентьев М. В. «Письма ЖЭТФ», 1965, т. 2, с. 10; Долгов А. Д., там же, с. 7.
10. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1951.
11. Любошиц В. Л., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 846.
12. Берестецкий В. Б., Долгинов А. З., Тер-Мартirosян Р. А. ЖЭТФ, 1950, т. 20, 527.
13. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
14. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Пер. с англ., Т. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1960.
15. Зельдович Я. Б., ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1531.
16. Чешков А. А., ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 144.
17. Rainich G. Y. Trans. Amer. Math. Soc., 1925, v. 27, p. 106.
18. French I. B., Shimamoto Y. Phys. Rev., 1959, v. 91, p. 898.
19. Чешков А. А. Диссертация, ФИАН СССР, 1965.
20. Theis W. R., Hertel P. H. Nuovo cimento A, 1970, v. 66A, p. 152.
21. Glaser V., Jaksic V. Nuovo cimento, 1957, v. 3, p. 1197.
22. Jacob M., Wick G. C. Ann. Phys., 1959, v. 7, p. 404.
23. Edmonds A. R. CERN 55-25, Geneva (см. пер. в сб. [3]).
24. Бартон Г. Дисперсионные методы в теории поля. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1968.
25. Широков Ю. М. ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 140.
26. Bernstein J., Feinberg G., Lee T. D. Phys. Rev., 1965, v. 139, p. 1650.
27. Зельдович Я. Б., Переломов А. М. ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1114.

28. Дубовик В. М., Чешков А. А. Сообщение ОИЯИ P2-2991, Дубна, 1966; En english SLAC, Trans. 1967.
29. Дубовик В. М., Чешков А. А. ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 169; Дубовик В. М., Лихтман Е. П., Чешков А. А. ЖЭТФ, 1967, т. 52, с. 706.
30. Buchanan H. C. D., Yearian M. R. Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 303.
31. Ganichot D. e.a. Report L.A.L. 1250, april, 1971.
32. Prepost R., Simonds R. M., Wilk H. Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1271.
33. Блувштейн Р. Э., Дубовик В. М., Чешков А. А. Препринт ОИЯИ, P2-5861, 1971.
34. Окунь Л. Б. Слабые взаимодействия элементарных частиц. М., Физматгиз, 1963.
35. Дубовик В. М. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 148.
36. Sachs R. G. Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 2256.