

УДК 539.171.02

УПРУГОЕ И НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ АТОМНЫМИ ЯДРАМИ

В. К. Лукьянов

Объединенный институт ядерных
исследований, г. Дубна

Ю. С. Поль

Физический институт им. П. Н. Лебеде-
ва, г. Москва

Дан обзор современного состояния методов теоретического рассмотрения и основных результатов их применения к упругому и неупругому рассеянию электронов на ядрах с возбуждением в них низколежащих состояний коллективной природы. Рассмотрены достоинства и недостатки методов феноменологического и модельно-независимого анализа экспериментов, продемонстрированы возможности прямого описания данных в рамках модели независимых частиц, α -кластерной модели, подходов с учетом короткодействующих корреляций в ядрах, макро- и микромоделей ядра.

A review is given of the present theoretical methods and results of their applications to elastic and inelastic electron scattering on nuclei with the low-lying collective states excitation. Merits and demerits of the phenomenological and the model-independent analyses of experimental data are considered. Possibilities of the direct analysis in the framework of the shell model, of the alpha — cluster model, of the approximations with accounting of the short-range correlations in nuclei and of the macroscopical and microscopical nuclear models are demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время снова возрос интерес к изучению структуры ядра с помощью упругого и неупругого рассеяния электронов. Это связано с появлением точных данных по рассеянию на ряде ядер при различных энергиях и больших переданных импульсах вплоть до $q \sim 3,5$ ферми⁻¹, с исследованием изотопических различий в распределениях плотности заряда, с попытками совместного изучения упругих и неупругих форм-факторов, с новыми данными по квазиупругому выбиванию протонов из глубоких оболочек ядер, гигантскому дипольному резонансу и другими. (Подробная библиография до 1970 г. приведена в работе [1].) Необходимо отметить также развитие соответствующих теорети-

ческих методов, таких, как модельно-независимый анализ форм-факторов, расчеты основных состояний ядер по методу Хартри — Фока и т. д.

По сравнению с рассеянием ядерных частиц электромагнитный характер взаимодействия электронов с ядрами значительно упрощает интерпретацию экспериментальных данных. Они обладают преимуществами и перед фотоядерными реакциями, так как позволяют более или менее независимо варьировать энергию и импульс, переданные ядру. Это дает возможность судить, например, о распределении заряда в ядре и тех характерных областях, которые отвечают за переходы ядра в возбужденные состояния.

В настоящей работе рассмотрим основные теоретические подходы, используемые для извлечения информации о структуре ядра по данным рассеяния электронов, и методы непосредственного расчета форм-факторов в рамках наиболее типичных ядерных моделей и схем. При этом ограничим задачу изучением только электрических форм-факторов упругого и неупругого рассеяния с переходом ядра в нижайшие состояния коллективного возбуждения.

1. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (ВЭП)

В задачах, где электроны используются как средство изучения ядра, удобно пользоваться максимально простыми выражениями для соответствующих форм-факторов или сечений. Это позволяет понять основы физики явления и, что практически важно, проводить многократные повторные расчеты при подгонке параметров моделей ядра или схем, выбранных для сравнения с экспериментом. С этой точки зрения метод, основанный на численном решении уравнения Дирака для отыскания фаз рассеяния с последующим суммированием парциальных амплитуд и называемый по традиции методом фазового анализа (ФА), оказывается неудобным. Трудности этого подхода связаны еще с необходимостью добиваться высокой точности вычисления кулоновского потенциала по заданной плотности заряда ядра и суммированием знакопеременного ряда парциальных амплитуд (величин порядка единицы) для отыскания экспоненциально малых сечений при больших переданных импульсах.

В этом отношении наиболее простым оказывается плоскотоволновое борновское приближение (БП). Как показывает опыт практической работы, этим методом можно с уверенностью пользоваться для легких ядер с $Z \leq 6$ во всей доступной современным экспериментам области переданных импульсов, за исключением точек минимума сечений. Что касается средних и тяжелых ядер, то здесь важно учитывать искажения падающих и уходящих волн в кулоновском поле ядра. Достаточно точный количественный

способ учета этих искажений можно развить, не прибегая к точному методу ФА, а используя так называемое ВЭП.

Ниже дадим методическое сравнение трех этих методов, но прежде приведем основные исходные выражения для сечений упругого и неупругого рассеяния электронов в ВЭП. Эти выражения не только удобны в проведении конкретных численных расчетов, но также весьма наглядны и в частном случае, когда искажения отсутствуют, сводятся к хорошо известному борновскому приближению.

Теоретические методы в высокоэнергетическом рассеянии электронов

Для изучения деталей ядерной структуры необходимо, чтобы длина волны электрона была меньше размеров ядра, т. е. $kR \gg 1$. При этом наиболее информативно сечение рассеяния на углы $\theta \gg (kR)^{-1}$, где имеются характерные минимумы и максимумы. Их положение и форма сильно зависят от структуры ядра. В рамках этих условий $kR \gg 1$, $E \gg V$ наиболее адекватным поставленной задаче является высокоэнергетическое приближение. Исходные условия позволяют получить несколько разного вида выражений для амплитуды рассеяния. Этот вопрос подробно разбирался в работе [2]. Здесь же дадим краткое перечисление методов, опираясь на общую запись амплитуды в виде:

$$f(q, E) = \frac{E}{2\pi} \int g(\mathbf{r}v_i v_f) \exp\{i[\mathbf{q}\mathbf{r} + \phi(\mathbf{r})]\} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где g и ϕ — амплитудная и фазовая искажающие функции; v_i, v_f — свободные спиноры, а кулоновский потенциал связан с распределением плотности заряда (РПЗ):

$$V(\mathbf{r}) = -Ze^2 \int \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}. \quad (2)$$

Очевидно, что борновское приближение получается из (1), если положить

$$g = v_f^\dagger v_i; \quad \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

Амплитудная g и фазовая ϕ функции зависят от конкретного использования условий ВЭП. Так, обычный эйкональный подход дает

$$g = v_f^\dagger v_i; \quad \phi = -\frac{E}{k} \int_0^\infty V(\mathbf{r} - \hat{k}_i s) ds. \quad (4)$$

Тогда, ограничиваясь малыми углами рассеяния $\vartheta \ll (kR)^{-1}$ и предположением о прямолинейности траектории, можно свести амплитуду к интегралу [3]:

$$f_E = -ik(v_i^\dagger v_i) \int_0^\infty J_0(k\rho\vartheta) \left\{ \exp \left[-i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\mathbf{r} + \hat{k}z) dz \right] - 1 \right\} \rho d\rho. \quad (5)$$

Проведенные на основе этой формулы методические расчеты сечений рассеяния электронов на ядрах со ступенчатым РПЗ показали [4], что требуется более точно находить фазовую функцию ϕ и предэкспоненциальный фактор g . Последний должен учитывать искажение фронта электронной волны кулоновским полем в районе ядра. Такой фактор был искусственно введен в работе [4], однако метод не нашел применения при сравнении с экспериментом.

Другой подход был предложен в работе [5], где методом асимптотического суммирования борновского ряда получено:

$$g = v_i^\dagger v_i; \quad \phi = -\frac{E}{k} \left[\int_0^\infty V(\mathbf{r} - \hat{k}_i s) ds + \int_0^\infty V(\mathbf{r} + \hat{k}_f s) ds \right], \quad (6)$$

что справедливо в области больших углов рассеяния $\vartheta > (kR)^{-1/2}$. В этом случае при переходе к прямолинейным траекториям выражение для амплитуды (1) становится явно определенным. По сравнению с (4) здесь возникает дополнительное слагаемое в фазе, которое, грубо говоря, учитывает искажение волновой функции электрона на участке движения от ядра до $+\infty$. Хотя методические расчеты на основе этого подхода [6] при сравнении с точным методом ФА дают совпадение положений минимумов и максимумов углового распределения, сечения ФА оказываются на 10—15% выше, что опять, видимо, вызвано неточностью в определении предэкспоненциального фактора g .

Наиболее удачная форма амплитуды была предложена в работе [7] специально для случая рассеяния на большие углы $\vartheta > (kR)^{-1}$:

$$g = u_i^\dagger(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}); \quad (7)$$

$$\phi = -\frac{E}{k} \left[\int_0^\infty U(\mathbf{r} - \hat{k}_i s) ds + \int_0^\infty U(\mathbf{r} + \hat{k}_f s) ds \right],$$

где $u_{i,f}(\mathbf{r})$ — спинорные функции, получаемые из квазиклассического решения уравнения Дирака для волновых функций относительно движения электрона:

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = u^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i \frac{E}{k} \int_0^\infty U(\mathbf{r} \mp \hat{k}s) ds \right]. \quad (8)$$

Чтобы обосновать исходное выражение (1) с функциями g и ϕ вида (7), авторам работы [7] пришлось условно разделить кулоновский потенциал V на две части: гладкую U , которая содержит низшие фурье-компоненты потенциала, дающие основной вклад в рассеяние на малые углы $\phi < (kR)^{-1}$, и высокочастотную v , ответственную за рассеяние на большие углы $\phi > (kR)^{-1}$. Тогда, используя известное выражение для матрицы перехода в случае двух потенциалов

$$T_{if} = \langle \Psi_f^{(-)}(U) | v | \chi_i^{(+)}(V) \rangle + \langle \Psi_f^{(-)}(U) | U | \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rangle, \quad (9)$$

можно пренебречь вкладом второго слагаемого в амплитуду для углов $\phi > (kR)^{-1}$, а в первом, как обычно, заменить точное решение $\chi^{(+)}$ на волну $\Psi^{(+)}$, искаженную в потенциале U . Та же аргументация позволяет заменить в полученном выражении потенциал v на полный кулоновский V , так как его низкочастотная часть U по сути дела автоматически вырезается при интегрировании с сильно осциллирующими функциями (8) в изучаемой области углов $\phi > (kR)^{-1}$. В результате имеем

$$f_{HE}(q, E) = \frac{E}{2\pi} \int u_f^+(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) \exp\left[i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\frac{E}{k} \int_0^\infty U(\mathbf{r} - \hat{k}_i s) ds - i\frac{E}{k} \int_0^\infty U(\mathbf{r} + \hat{k}_f s) ds\right] V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Авторы работы [7] провели вычисления амплитуды (10) для потенциала V со ступенчатым РПЗ $\rho = \theta(r - R)$. В этом случае сечение выражается аналитической формулой и хорошо согласуется с соответствующими точными расчетами по методу ФА.

Дальнейшая разработка этого метода для реалистического вида ферми-плотности $\rho_F(r)$ и произвольного вида РПЗ проводилась в работах [8, 9], где конкретным сравнением с ФА были продемонстрированы его широкие возможности и хорошая точность для выполнения количественных расчетов и сравнений с экспериментом.

Дифференциальное сечение упругого и неупругого рассеяния

Запишем сечение рассеяния электронов в общем виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{i \rightarrow f}(\theta) = \frac{E^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{\sigma_i \sigma_f} \sum_{M_i M_f} |T_{if}|^2. \quad (11)$$

Матричный элемент перехода из начального (i) в конечное (f) состояние представим в виде

$$T_{if} = \langle J_f M_f | \int d\mathbf{r} \Psi_f^{(-)}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}\xi) \Psi_i^{(+)}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle. \quad (12)$$

Волновая функция ядерного состояния $|JM\rangle$, зависящая от соответствующих координат внутреннего движения ξ , определяется в рамках той или иной модели ядра. Кулоновское взаимодействие электрона с ядром

$$V(\mathbf{r}\xi) = -Ze^2 \int \frac{\rho(\mathbf{x}\xi) d\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}. \quad (13)$$

Пренебрегая потерей энергии электрона $\Delta E \ll E$, т. е. полагая $k_i = k_f$, в рамках ВЭП представим

$$\Psi_f^{(-)} \Psi_i^{(+)} = g(\mathbf{r}v_i^\dagger) \exp[i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\phi(\mathbf{r})], \quad (14)$$

где g и ϕ даны (7).

Теперь, производя замену переменных $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$ и используя разложения

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{u} + \mathbf{x}, v_i^\dagger v_i) &= g(\mathbf{x}, v_i^\dagger v_i) + \dots; \\ \phi(\mathbf{u} + \mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) + \nabla_u \phi(\mathbf{u} + \mathbf{x})|_{u=0} \mathbf{u} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

получаем

$$T_{if} = -4\pi Ze^2 \int d\mathbf{x} \frac{g(\mathbf{x}v_i^\dagger v_i)}{q_{\text{эф}}^2(\mathbf{x})} \exp\{i[\mathbf{q}\mathbf{x} + \phi(\mathbf{x})]\} \langle J_f M_f | \rho(\mathbf{x}\xi) | J_i M_i \rangle, \quad (16)$$

где

$$q_{\text{эф}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + \nabla_u \phi(\mathbf{u} + \mathbf{x})|_{u=0}. \quad (17)$$

Представляя здесь $\rho(\mathbf{x}\xi)$ в виде разложения[‡]

$$\rho(\mathbf{x}\xi) = \sum_{LM} \mathcal{F}_{LM}(\mathbf{x}\xi) Y_{LM}^*(\hat{x}) \quad (18)$$

и используя теорему Вигнера — Эккерта (L — целое):

$$\langle J_f M_f | \mathcal{F}_{LM} | J_i M_i \rangle = (J_i L M_i M | J_f M_f) \langle J_f || \mathcal{F}_L || J_i \rangle, \quad (19)$$

получаем

$$\langle J_f M_f | \rho(\mathbf{x}\xi) | J_i M_i \rangle = \sum_{LM} \rho_L(x) Y_{LM}^*(\hat{x}) (J_i L M_i M | J_f M_f), \quad (20)$$

где

$$\rho_L(x) = \langle J_f || \mathcal{F}_L(x, \xi) || J_i \rangle \quad (21)$$

назовем радиальной переходной плотностью (РПП) ядра. Подставляя (16) и (20) в формулу для сечения (11) и учитывая, что в высокоэнергетическом приближении [2]

$$g(\mathbf{x}, v_f^{\dagger} v_i) = g(\mathbf{x}) v_f^{\dagger} v_i,$$

получаем окончательное выражение для сечения:

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \sum_{LM} \frac{1}{2L + 1} |F_{LM}|^2, \quad (22)$$

где $\sigma_{\text{Mott}} = \left(\frac{2Ze^2}{q^2}\right)^2 \cos^2 \theta/2$ — сечение Мотта; форм-фактор

$$F_{LM} = q^2 \int d\mathbf{x} \frac{g(\mathbf{x})}{q_{\text{эф}}^2(\mathbf{x})} \exp\{i[q\mathbf{x} + \phi(\mathbf{x})]\} \rho_L(x) Y_{LM}^*(\hat{x}). \quad (23)$$

Таким образом, задача вычисления сечения рассеяния разделяется на две независимые части: расчет в рамках выбранной модели ядра РПП по формуле (21) и вычисление интегралов по (23). Вся физическая информация о структуре ядра содержится в форм-факторах F_{LM} , поэтому в дальнейшем они будут основным объектом исследования данной работы.

Вычисление форм-факторов в ВЭП

Волновые функции относительного движения электрона $\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ как решения уравнения Дирака в ВЭП были найдены в работе [8]. Пренебрегая массой электрона, запишем их в следующем виде:

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2E} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{U(\mathbf{r})}{E} \pm \frac{\hat{k} \nabla \phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{4E} \right) (\sigma \nabla S^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + E - U(\mathbf{r})) v \exp[iS^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k})], \quad (24)$$

где

$$S^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{r} \mp \phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}); \quad \phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} U(\mathbf{r} \mp \hat{k}s) ds. \quad (25)$$

Следуя работе [7], явное выражение для этой функции в окрестности ядра можно получить разложением потенциала V в ряд Тейлора. Тогда гладкий потенциал

$$U(r) = V(0) + ak^3 r^2/2. \quad (26)$$

При вычислении (25) предполагаем, что траектории есть прямые линии. Выбирая тогда $Oz \uparrow \mathbf{k}$ и полагая $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \hat{k}z$, где $\boldsymbol{\rho}$ — прицельное расстояние, получаем

$$\phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = - \int_0^z U(\sqrt{\rho^2 + t^2}) dt \pm \int_0^\infty [U(t) - U(\sqrt{\rho^2 + t^2})] dt. \quad (27)$$

Первый интеграл берется непосредственно после подстановки (26), второй — после разложения по степеням ρ^2 с ограничением квадратичным членом. Выкладки, выражения для (24), вид коэффициентов разложения, а также g , $q_{\theta\phi}$ и ϕ из (23) даны в приложении 1. Последние зависят от выбранного РПЗ ядра.

Теперь рассмотрим интегралы (23), являющиеся форм-факторами ядра в рассеянии электронов. При их вычислении необходимо учитывать, что область главного вклада для углов $\theta > (kR)^{-1}$ есть окрестность ядра, где справедливо разложение (26). При условиях $\theta > (kR)^{-1}$, $qx \sim qR \gg 1$ можно пользоваться методом асимптотического разложения по обратным степеням величины (qx) , стоящей в экспоненте (23). Выберем теперь $Oz \uparrow \mathbf{q}$ и обозначим $\cos \hat{q}\hat{x} = \mu$. Тогда $dx = -x^2 dx d\mu / q$, и соответствующий интеграл по $d\mu$ имеет вид:

$$I_{LM} = \int_{-1}^1 \frac{g(x\mu\phi)}{q_{\theta\phi}^2(x\mu\phi)} \exp\{i[qx\mu + \phi(x\mu\phi)]\} \rho_L(x) Y_{LM}(\mu\phi) d\mu. \quad (28)$$

Пользуясь тождеством

$$\exp\{i[qx\mu + \phi(x\mu\phi)]\} = \frac{1}{iqxD(x\mu\phi)} \frac{\partial}{\partial\mu} \exp\{i[qx\mu + \phi(x\mu\phi)]\}, \quad (29)$$

где

$$D(x\mu\phi) = 1 + \frac{1}{qx} \cdot \frac{\partial}{\partial\mu} \phi(x\mu\phi), \quad (30)$$

интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} I_{LM} = & \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{g(x\varepsilon)}{q_{\theta\phi}^2(x\varepsilon)} \left[\frac{1}{iqx} \sum_{\nu=0}^L \frac{i^\nu}{(qx)^\nu} \frac{\partial^\nu / \partial\mu^\nu Y_{LM}(\mu\phi)}{D^{\nu+1}(x\mu\phi)} \right]_{\mu=\varepsilon} \times \\ & \times \exp\{i[qx\varepsilon + \phi(x\varepsilon)]\} + \left\{ \frac{1}{(qx)^2} \left[\frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{g(x\mu\phi)}{q_{\theta\phi}^2(x\mu\phi) D(x\mu\phi)} \right) \right]_{\mu=\varepsilon} \times \right. \\ & \left. \times \frac{Y_{LM}(\varepsilon\phi)}{D(x\varepsilon\phi)} \cdot \exp\{i[qx\varepsilon + \phi(x\varepsilon)]\} \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Здесь можно пренебречь вторым членом, так как он имеет малость высшего порядка по сравнению с первым. Действительно, оценки

дают их отношение в виде

$$\left(\frac{1}{q^2} \cdot \frac{Z}{137} \cdot \frac{1}{(kR)^2} \cdot \frac{1}{qR} \right) / \left(\frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{qR} \right) = \frac{Z}{137} \cdot \frac{1}{(kR)^2},$$

что превышает точность высокоэнергетического приближения $V/E \sim (Z/137) \cdot (1/kR)$. При записи (31) учтено, что в точках $\mu = \varepsilon = \pm 1$ зависимость от азимутального угла в функциях $q_{\pm\phi}^2$ и ϕ исчезает (см. приложение 1), а остается только в $D(x\mu\phi)$ в виде

$$qx D(x\mu\phi)|_{\mu=\varepsilon} = A(x\varepsilon) + B(x\varepsilon) \cos^2 \phi. \quad (32)$$

Тогда интегрирование по $d\phi$ в (23) проводится точно (приложение 2), и форм-фактор сводится к одномерному интегралу

$$F_{LM} = 2\pi i q \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{G_{LM}(x\varepsilon)}{q_{\pm\phi}^2(x\varepsilon)} \times \\ \times \exp \{i [qx\varepsilon + \phi(x\varepsilon)]\} \rho_L(x) x dx, \quad (33)$$

где

$$G_{LM} = G_0(x\varepsilon) \sum_{\nu=0}^L i^\nu \left[\frac{\partial^\nu}{\partial \mu^\nu} Y_{L_0}(\mu) \right]_{\mu=\varepsilon} J_M^{(\nu)}(x\varepsilon); \quad (34)$$

$$J_{M=2m}^{(\nu)}(x\varepsilon) = \frac{1}{A^\nu} \sum_{n=0}^m (-1)^n C_{2n}^{2m} \frac{(2m-2n-1)!! (2n-1)!!}{2^m m!} \times \\ \times \left(1 - \frac{B}{A+B} \right)^{m-n} \times F(m-n+1/2, m-\nu, m+1, A/(A+B)); \quad (35)$$

$$J_{M=2m+1}^{(\nu)} = 0; \quad G_0(x\varepsilon) = \frac{qxg(x\varepsilon)}{\sqrt{A(x\varepsilon)[A(x\varepsilon)+B(x\varepsilon)]}}. \quad (36)$$

Здесь $F(a, b, c, d)$ — гипергеометрическая функция. Практически в (35) достаточно ограничиться членами второго порядка $1/(qx)^2$, при этом для $L \neq 0$ основной вклад в (34) дают члены с $M=0$. В приложении 2 даны вывод (35) и выражения G_{LM} для $L=2, 3$.

Таким образом, дальнейшая задача нахождения форм-фактора сводится к вычислению одномерных интегралов (33). Это можно сделать численно, выбирая соответствующим образом верхний предел интегрирования, поскольку явный вид подынтегральных выражений получен лишь для области главного вклада в окрестности ядра $x \ll R$. Можно, однако, получить ответ и в явном виде, пользуясь свойствами типичных для многих расчетов выражений $\rho_L(x)$. Ниже дадим два таких примера.

Полный метод вычисления форм-фактора упругого рассеяния для ферми-плотности

В анализе упругого рассеяния электронов средними и тяжелыми ядрами наиболее часто используется ферми-функция РПЗ:

$$\rho_F(x) = \rho_0(x) Y_{00}(\hat{x}) = \rho^{(0)} \frac{1}{1 + \exp[(x-R)/b]}, \quad (37)$$

где $\rho^{(0)}$ определяется условием нормировки

$$\int \rho_F(x) dx = 1; \quad (38)$$

R — параметр полуспада плотности; b — толщина поверхностного слоя ядра. Форм-фактор (33) теперь принимает вид

$$F^F(q, E) = F_{00}^F(\bar{q}, E) = 2\pi i q \rho^{(0)} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \int_0^\infty \frac{G_0(x\varepsilon)}{q_{\varepsilon\Phi}^2(x\varepsilon)} \times \\ \times \exp\{i[qx\varepsilon + \phi(x\varepsilon)]\} \frac{xdx}{1 + \exp[(x-R)/b]}. \quad (39)$$

Для расчета радиального интеграла воспользуемся тем, что функция (37) имеет простые полюса в точках комплексной плоскости [8]:

$$x_s^\varepsilon = R + i\pi b \varepsilon (2s + 1), \quad s = 0, 1, 2, \dots; \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (40)$$

Вначале разберем наиболее простой случай борновского приближения ($\phi = 0$, $G_0 = 1$, $q_{\varepsilon\Phi} = q$). Тогда

$$\bar{F}^F(q) = \frac{i2\pi i}{q} \rho^{(0)} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \int_0^\infty W(x\varepsilon) dx; \quad (41)$$

$$W(x\varepsilon) = \frac{\exp(iqx)x}{1 + \exp[(x-R)/b]}. \quad (42)$$

Представляя интегралы (41) в виде

$$\sum_{\varepsilon=1} \varepsilon \int_0^\infty W(x\varepsilon) dx = \sum_{\varepsilon} \varepsilon \left\{ \oint - \int_{C(\varepsilon)} - \int_{i\varepsilon\infty}^0 \right\} W(x\varepsilon) dx, \quad (43)$$

где направления обходов показаны на рис. 1, видим что подынтегральная функция имеет полюса в точках (40) и стремится к нулю на окружностях $C(\varepsilon)$ бесконечного радиуса в первом (для $\varepsilon = +1$) и четвертом (для $\varepsilon = -1$) квадрантах. Вклад

от мнимой оси удобно оценить сразу для разности

$$\Delta = \left| \sum_{\varepsilon} \varepsilon \int_{i\varepsilon\infty}^0 W(x\varepsilon) dx \right| = \left| \sum_{\varepsilon} \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{\exp(iq\rho) \rho d\rho}{1 + \exp(-R/b) \exp(i\varepsilon\rho/b)} \right| < \\ < \left| \frac{-2i \exp(-R/b) \sin[2 \operatorname{arctg}(1/qb)]}{(1 - \exp(-R/b))^2 (q^2 + 1/b^2)} \right|. \quad (44)$$

Ниже будет видно, что этим вкладом можно пренебрегать из-за малости $\exp(-R/b)$. Кроме того, при $q \rightarrow 0$ имеем $|\Delta| \rightarrow 0$. Таким образом, форм-фактор определяется вычетами в полюсах (40) и может быть записан в виде

$$F^F(q) = -\frac{8\pi^2}{q} \rho^{(0)} Rb \sum_{s=0}^{\infty} \left(\cos qR - \right. \\ \left. - (2s+1) \frac{\pi b}{R} \sin qR \right) \times \\ \times \exp[-(2s+1)\pi b q]. \quad (45)$$

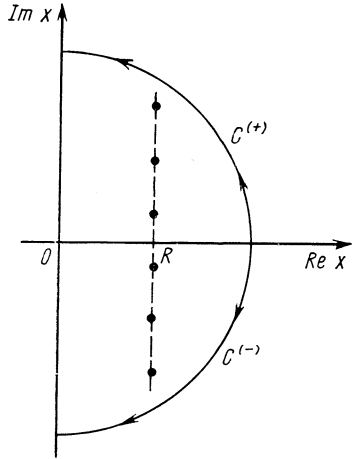


Рис. 1. Выбор контуров интегрирования.

При достаточно больших $q > 1$ основной вклад в (45) дает первый член ряда с $s=0$, так как каждый последующий меньше предыдущего в $\exp(2\pi b q)$ раз и им можно пренебречь, если $2\pi b q \gg 1$.

Однако в (45) удастся провести точное суммирование, используя

$$\sum_{s=0}^{\infty} \exp[-(2s+1)x] = \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}; \\ \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \exp[-(2s+1)x] = \frac{\operatorname{cth} x}{2 \operatorname{sh} x}. \quad (46)$$

В результате для борновского форм-фактора упругого рассеяния электронов на ядре с ферми-плотностью получаем окончательное выражение [8]:

$$F^F(q) = -\frac{8\pi^2}{q} \rho^{(0)} Rb \left[\cos qR - \frac{\pi b}{R} \sin qR \operatorname{cth} \pi b q \right] \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi q b}. \quad (47)$$

Отсюда в предельном случае $b \rightarrow 0$ следует выражение для форм-фактора ступенчатого РПЗ:

$$F^0(q) = \lim_{b \rightarrow 0} F^F(q) = \frac{3}{(qR)^2} \left(\frac{\sin qR}{qR} - \cos qR \right). \quad (48)$$

Полученное выражение (47) можно использовать для качественного анализа сечения рассеяния электронов на средних и тяжелых ядрах. Ниже увидим, что для легких ядер это выражение можно использовать и для количественных сравнений. Сравнивая (47) и оценку (44), находим ограничение на области его применимости:

$$q < R/(\pi b^2), \quad (49)$$

что дает значение, близкое к современному экспериментальному пределу измерения сечений.

Рассмотрим теперь ту же задачу рассеяния на ядре с ферми-плотностью (37), но с учетом искажения волновой функции электрона в кулоновском поле ядра. Пользуемся тем же полюсным методом. Теперь необходимо учесть еще полюсы, возникающие от функций $G_0(x\varepsilon)$ и $q_{\text{эф}}^2(x\varepsilon)$. Анализ показывает, что они расположены далеко от полюсов x_s^ε (40) и их вклад пренебрежимо мал. Далее, наличие в показателе экспоненты функции $\phi(x\varepsilon)$ изменяет поведение подынтегрального выражения на контуре $C^{(\varepsilon)}$. Однако здесь следует помнить, что при больших $|x|$ для нее надо использовать точное асимптотическое значение $\phi \rightarrow 2Ze^2 \ln 2kx$, а не то, которое было получено выше и справедливо лишь в окрестности ядра. При истинном значении ϕ интеграл по контуру $C^{(\varepsilon)}$ оказывается стремящимся к нулю. Разность интегралов на мнимой оси также ограничена сверху оценкой (44). Таким образом, интеграл (39) опять определяется полюсами ферми-плотности и равен

$$F^F(q, E) = -4\pi^2 q \rho^{(0)} b \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \times \\ \times \left\{ \frac{G_0(x_s^\varepsilon \varepsilon)}{q_{\text{эф}}^2(x_s^\varepsilon \varepsilon)} x_s^\varepsilon \exp \{i[\varepsilon q x_s^\varepsilon + \phi(x_s^\varepsilon \varepsilon)]\} \right\}. \quad (50)$$

При $R \gg b$ и $q > 1$ этот ряд быстро сходится из-за множителя $\exp[-\pi b q (2s + 1)]$, что позволяет ограничиваться на практике нулевым членом с $s = 0$. Однако здесь также можно просуммировать по s , вынося из-под суммы слабую функцию $(G_0/q_{\text{эф}}^2) \exp(i\phi)$ в точке главного вклада x_0^ε . Тогда получаем следующий окончательный результат для форм-фактора упругого рассеяния на ядре с ферми-плотностью:

$$F^F(q, E) = -4\pi^2 q \rho^{(0)} b \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{G_0(x_0^\varepsilon \varepsilon)}{q_{\text{эф}}^2(x_0^\varepsilon \varepsilon)} \times \\ \times (R + i\varepsilon \pi b \operatorname{cth} \pi b q) \frac{\exp \{i[\varepsilon q R + \phi(x_0^\varepsilon \varepsilon)]\}}{2 \operatorname{sh} \pi b q}. \quad (51)$$

В пределе $b \rightarrow 0$ отсюда получается выражение для форм-фактора со ступенчатым распределением плотности заряда, полученное ранее в работе [7].

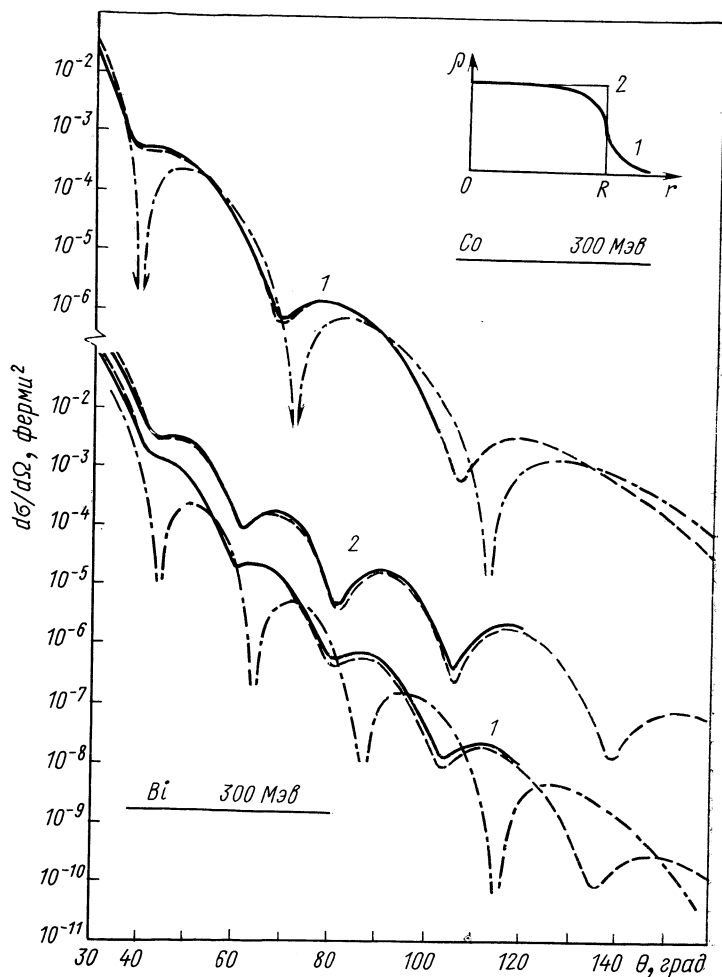


Рис. 2. Сравнение методов расчета сечения упругого рассеяния электронов:

— фазовый анализ; — — — высокоэнергетическое приближение;
 - . - борновское приближение (взяты из работы [8]).

Выражение (51) можно использовать для непосредственных расчетов и сравнений с экспериментами по рассеянию электронов на средних и тяжелых ядрах при выполнении условий ВЭП

$kR \gg 1$, $Z/(137kR) \ll 1$ в области углов $\vartheta > \vartheta_0 \sim 1/kR$; $q < q_0 \sim R/\pi b^2$. Так, на рис. 2 дано методическое сравнение [8] сечений упругого рассеяния электронов на ядрах Co ($R = 4,19$ ферми, $b = 0,52$ ферми) и Bi ($R = 6,64$ ферми, $b = 0,56$ ферми) при энергии электронов $E = 300$ Мэв ($k = 1,5204$ ферми $^{-1}$), рассчитанных по методу ФА [10], по методу ВЭП по формуле (51) и в борновском приближении (47). Видно, что имеется хорошее согласие расчетов по ФА и ВЭП. Небольшое расхождение при больших углах для Bi связано с использованием приближенных функций и метода расчета углового интеграла в ВЭП.

Таким образом, полученные выражения ВЭП хорошо описывают сечения рассеяния на средних и тяжелых ядрах и их удобно использовать для количественного анализа экспериментальных данных из-за явной зависимости от параметров плотности R , b и энергии электрона E .

Форм-фактор для симметризованной ферми-плотности

Интерес к использованию симметризованной ферми-плотности

$$\rho_{SF}(r) = \rho^{(0)} \{ [1 + \exp[(r-R)/b]]^{-1} + [1 + \exp[(-r-R)/b]]^{-1} - 1 \} = \\ = \rho^{(0)} \frac{\text{sh } R/b}{\text{ch } R/b + \text{ch } r/b} \quad (52)$$

появился сравнительно недавно, в основном в связи с задачей феноменологического анализа рассеяния на легких ядрах. Действительно, если анализ форм-факторов средних и тяжелых ядер позволил выбрать единого вида фермиевскую плотность (37), которая для каждого из ядер в этой области дает хорошее описание экспериментальных данных, то для легких ядер найти РПЗ общего для всех ядер вида пока не удавалось. Наоборот, здесь работают с такими плотностями, которые имеют свой специальный вид для каждого ядра. Чаще всего это многопараметрические функции с гауссовым спадом, для которых форм-факторы можно вычислить в явном виде, в других случаях подгонка под эксперимент на этом базисе оказывается невозможной, и приходится подбирать РПЗ с экспоненциальной асимптотикой, для которых форм-фактор обычно явно не вычисляется. Сразу же заметим, что РПЗ с гауссовой асимптотикой не являются теоретически оправданными, так как реальные ядерные функции, а значит, и РПЗ, имеют экспоненциальное поведение на больших расстояниях ($\exp(-\alpha r)$, $r > R$).

Вместе с тем симметризованная ферми-плотность имеет следующие важные черты. Во-первых, это — простая двухпараметрическая функция, где R определяет полуспад плотности; b —

ширину поверхностного слоя РПЗ. Во-вторых, она убывает при больших r в соответствии с правильным экспоненциальным законом. В-третьих, в центре ядра эта плотность всегда выходит на плато, что отличает ее от ферми-плотности (37), которая в точке $r = 0$ имеет отличную от нуля производную. Правда, для средних и тяжелых ядер, где она используется, последнее обстоятельство несущественно, ибо $\rho_F(0) \ll 1$ и обе плотности практически совпадают. Для легких же ядер эта производная не мала, и здесь плотность (52) имеет те же преимущества, что и гауссова.

И, наконец, соответствующий плотности (52) форм-фактор вычисляется в аналитическом виде [11]. Точно так же в явном виде удастся найти нормировочную константу плотности $\rho^{(0)}$ и среднеквадратичный радиус:

$$\rho^{(0)} = \frac{3}{4\pi R^3} [1 + (\pi b/R)^2]^{-1}; \quad (53)$$

$$\bar{R} = \langle r^2 \rangle^{1/2} = R \sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi b}{R}\right)^2}. \quad (54)$$

Все это весьма ценно при практической обработке экспериментальных данных и при использовании форм-фактора в других, теоретических исследованиях.

Чтобы получить явное выражение для борновского форм-фактора с симметризованной ферми-плотностью

$$F_B^{SF}(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \sin(qr) \rho_{SF}(r) r dr, \quad (55)$$

воспользуемся известным интегралом [12]:

$$J(q) = \int_0^\infty \frac{\cos qr dr}{\operatorname{ch} R/b + \operatorname{ch} r/b} = \frac{\pi b}{\operatorname{sh} R/b} \cdot \frac{\sin qR}{\operatorname{sh} \pi b q}. \quad (56)$$

Тогда, подставляя (52) в (55), находим:

$$F_B^{SF}(q) = -\frac{4\pi}{q} \rho^{(0)} \operatorname{sh} R/b \cdot \frac{d}{dq} J(q) \quad (57)$$

или

$$F_B^{SF}(q) = -\frac{4\pi^2 b R \rho^{(0)}}{q \operatorname{sh} \pi b q} (\cos qR - (\pi b/R) \sin qR \operatorname{cth} \pi b q). \quad (58)$$

Интересно, что точное выражение для борновского форм-фактора с ρ_{SF} совпадает с приближенным (47) для фермиевской плотности ρ_F полученным полюсным методом с пренебрежением вклада от мнимой оси. Теперь ясно, что возникновение этого исчезающего вклада связано с плохими аналитическими свойствами ферми-функции, а именно тем, что ее производная в точке $r = 0$ отлична от нуля.

Отметим еще некоторые особенности данного форм-фактора. Это прежде всего его экспоненциальное убывание с ростом q :

$$F(q) \sim \exp(-\pi b q), \quad (59)$$

что отвечает экспериментальному поведению при $q > 1$. Видно, что спад тем круче, чем больше «размыт» заряд в поверхностном слое ядра. Далее, форм-фактор (58) имеет теоретические нули в точках q_s , определяемых уравнением:

$$\operatorname{tg} q_s R = (R/\pi b) \operatorname{th} \pi b q_s, \quad (60)$$

что является следствием конечных размеров ядра. На эксперименте этим точкам отвечают минимумы в дифференциальных сечениях.

В дальнейшем придется сопоставлять результаты борновских расчетов и расчетов по ВЭП. Не приводя деталей вычисления форм-фактора в рамках ВЭП, укажем только, что сама процедура близка к изложенной выше. Явный вид форм-фактора получается опять после замены интеграла типа (41) на два контурных бесконечного радиуса в первом и четвертом квадрантах и суммирования получаемых в результате вычетов в полюсах функции (52) $r_s = R \pm i\pi b(2s + 1)$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Результаты можно представить в виде

$$F^{SF}(q, E) = -\frac{4\pi^2 b R \rho^{(0)}}{q \operatorname{sh} \pi b q} D [\cos(qR + \Phi) - \dots] - (\pi b/q) \sin(qR + \Phi) \operatorname{cth} \pi b q, \quad (61)$$

где D и Φ — комплексные функции от q и E , учитывающие искажение; их нетрудно установить сопоставлением с аналогичной формулой для фермиевского форм-фактора (51). Естественно, что в борновском приближении получается $D = 1$ и $\Phi = 0$.

2. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

В задачу исследования упругого рассеяния (в основном зарядовых форм-факторов) входит выявление детального хода РПЗ для каждого отдельного ядра, а также поведения «средних» ядерных характеристик (радиуса, диффузности и т. п.) с изменением атомного номера и структуры ядра. Решение этих задач упирается в развитие таких методов анализа экспериментальных форм-факторов, как обратное фурье-преобразование интегралов с конечным верхним пределом или соответствующих математических методов оптимизации некорректных задач. Именно эти методы могут дать модельно-независимую информацию о функции РПЗ ядра, которая затем может сравниваться с предсказаниями ядерных моделей. Однако трудности такого анализа (часто принципиальные) заставляют прибегать к более простому прямому

или модельно-зависимому методу, когда в рамках определенной схемы расчета или модели ядра получают сначала РПЗ и рассчитанные затем форм-факторы сравнивают с экспериментальными. Что касается «средних» характеристик ядра, то здесь наиболее экономичным оказывается анализ на базе феноменологических РПЗ, выбираемых из простейших общих физических соображений о структуре основных состояний ядер. В этом случае более или менее надежно проявляются некоторые общие черты поведения параметров по группе ядер в зависимости, скажем, от характера заполнения оболочек, изотопических сдвигов, «мягкости ядра» по отношению к коллективным возбуждениям и т. п. Ниже детально остановимся на некоторых из этих вопросов.

Анализ форм-факторов с помощью феноменологических РПЗ

Метод состоит в выборе определенного вида РПЗ и вычислении соответствующих форм-факторов. Каждое ядро имеет свою индивидуальную структуру. Поэтому анализ на базе единого вида РПЗ имеет смысл проводить лишь для группы ядер. Цель его — в поиске основных закономерностей поведения общих характеристик ядер, таких, как среднеквадратичные радиусы, изотопические и изотонические смещения параметров, отклонения хода форм-факторов конкретных ядер от их общего поведения и т. п. Иногда здесь удается весьма точно описать и весь форм-фактор какого-то отдельного ядра; это, однако не означает, что таким образом найдена «экспериментальная» РПЗ данного ядра. На возможных погрешностях подобной интерпретации остановимся ниже.

Выбор функции РПЗ основывается обычно на общих свойствах ядра, таких, как его несжимаемость, поведение одночастичных функций возле и вне ядерной поверхности и т. п. Приходится учитывать и сложившиеся на протяжении 20 лет традиции. Остановимся на основных вопросах и результатах применения такого подхода к анализу экспериментальных данных.

Легкие ядра. Раньше, когда данные эксперимента имелись лишь для малых переданных импульсов q , для их описания оказывалось достаточным выбрать простую гауссову функцию РПЗ $\exp(-r^2/a^2)$ или домножить ее на фактор $(1 + b^2r^2)$, чтобы имитировать «бамп» плотности в области поверхности ядра. Борновские форм-факторы для этих РПЗ вычисляются в явном виде, что создает определенные удобства в анализе эксперимента. С появлением новых данных при больших q желание описать весь форм-фактор привело к усложнению этих простых функций РПЗ. Появились многопараметрические гауссовы плотности для каждого отдельного ядра (см., например, [13—15]). Их недостатки

очевидны. Это — нереалистическая гауссова асимптотика и большое число параметров (иногда 5—8). Выше подчеркивалось преимущество плотности другого вида — симметризованной ферми-функции:

$$\rho_{SF}(r) = \rho^{(0)} \frac{\text{sh } R/b}{\text{ch } R/b + \text{ch } r/b}, \quad (62)$$

которая приводит к явным выражениям для борновского и высокоэнергетического форм-факторов. Чтобы показать преимущества такой плотности в феноменологическом анализе легких ядер, рассмотрим результаты проведенных для нее расчетов форм-факторов [11], которые даны на рис. 3, отложенные как функции эффективного переданного импульса:

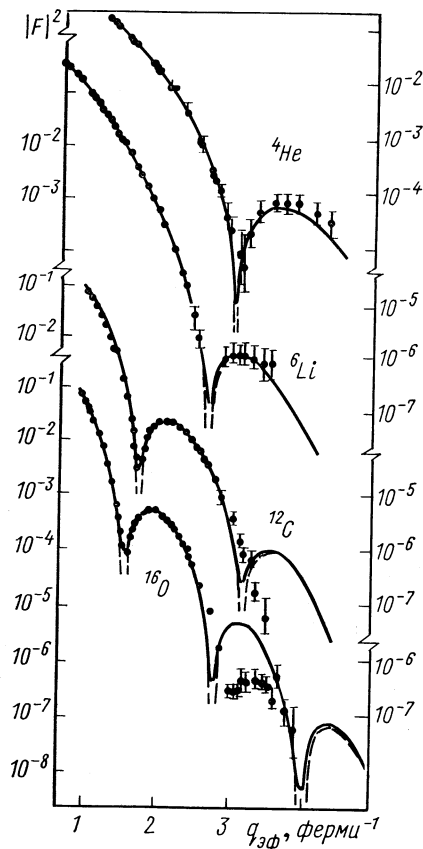
$$q_{\text{эф}} = q \left(1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{Z}{137} \cdot \frac{1}{R(A) \cdot E} \right), \quad (63)$$

в котором учитывается зависимость экспериментальных форм-факторов от энергии. Видно, что на основе РПЗ (62) удается достичь полного согласия с экспериментом для ядер ${}^4\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$. Лишь при самых больших измеренных $q \gtrsim q_0$ (4,4 для ${}^4\text{He}$ и 3,5 ферми $^{-1}$ для ${}^6\text{Li}$) намечается тенденция к расхождению рассчитанных кривых с экспериментом. Отсюда заключаем, что для этих ядер введение большого числа параметров в гауссово РПЗ потребовалось в

Рис. 3. Форм-факторы упругого рассеяния на легких ядрах в высокоэнергетическом приближении для симметризованной ферми-плотности: — — — точные ВЭП; — — — борновское приближение [11].

основном для исправления характера его спада на поверхностном слое ядра на экспоненциальный. Таким образом, область $q < q_0$ можно назвать областью «малых» переданных импульсов, где поведение форм-фактора определяется в основном распределением плотности заряда на границе ядра.

Для ядер ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$ плотность (62) хорошо описывает эксперимент вплоть до $q_0 \approx 3,2$ ферми $^{-1}$ (${}^{12}\text{C}$) и $q_0 \approx 2,85$ ферми $^{-1}$ (${}^{16}\text{O}$),



а при $q > q_0$ начинаются явные отклонения теоретических расчетов от экспериментальных значений форм-факторов. Это означает, что в области больших $q > q_0$ поведение форм-факторов зависит от характера распределения плотности в центральной области ядра, поэтому для улучшения согласия с экспериментом в этой области требуется учитывать особенности внутриядерного поведения РПЗ.

По-видимому, впервые на такого рода отклонения было обращено внимание при анализе экспериментов на средних ядрах ^{40}Ca и ^{48}Ca [16]. То же самое теперь можно сказать и о легких ядрах. Более того, эти отклонения можно было заметить здесь еще до того, как были проведены опыты на изотопах Ca, однако мешал, видимо, традиционный путь анализа, состоящий в подборе специального вида РПЗ для каждого отдельно взятого ядра. Создавалось впечатление, что специфика структуры легких ядер проявляется начиная уже с малых q и что следует искать не «отклонения», а проводить прямые расчеты РПЗ в рамках ядерных моделей с учетом всех особенностей каждого ядра.

Полученные в результате χ^2 -расчетов при $q < q_0$ значения среднеквадратичных радиусов \bar{R} и q_0 для каждого из рассмотренных ядер показывают, что, несмотря на различные для каждого из ядер значения \bar{R} и q_0 , их произведение с погрешностью 10% оказывается постоянной величиной $q_0\bar{R} = 8,5 (\pm 10\%)$.

Разброс здесь вызван как проявлением в известной мере индивидуальной структуры каждого из ядер, особенно ядра ^6Li , которое обнаруживает «рыхлую» структуру поверхности, так и слабой тенденцией к росту этой величины с возрастанием атомного номера (ядра). Иными словами, для всех ядер форм-факторы «начинают чувствовать» отклонения реальных РПЗ от однородного «столообразного» поведения во внутренней области начиная лишь с определенного значения переданного импульса $q > q_0 = 8,5\bar{R}^{-1} \text{ ферми}^{-1}$, которое жестко связано с размерами ядра. При $q < q_0$ поведение форм-фактора определяется в основном структурой РПЗ в районе поверхности.

Из рис. 3 можно сделать также общий вывод о применимости борновских расчетов для легких ядер. Видно, что их отличия от точных становятся заметными лишь при увеличении q и Z , так что начиная с ядра ^{16}O борновское приближение можно использовать скорее для качественных, чем количественных сравнений.

Средние и тяжелые ядра. Здесь традиционной является феноменологическая ферми-плотность:

$$\rho_F(r) = \rho^{(0)} \frac{1}{1 + \exp[(r-R)/b]}, \quad (64)$$

хотя, как уже отмечалось выше, для этих ядер ($R \gg b$) она фак-

тически совпадает с симметризованной ферми-плотностью (62). Тем не менее с РПЗ вида (64) проведено много расчетов, которые позволили сделать некоторые общие заключения о структуре основных состояний таких ядер. Естественно, что теперь борновское приближение несправедливо и учет искажений обязателен.

Типичные примеры использования ферми-плотности в анализе экспериментов приведены на рис. 4, где изображены некоторые данные и расчеты по формуле (50) ВЭП в двухполюсном приближении, выполненные харьковской группой авторов [21—23]. Анализ этих и других результатов приведен в обзоре [24]; там же даны ссылки на те работы, где поставлены некоторые вопросы и получены выводы, которые будут отмечены ниже.

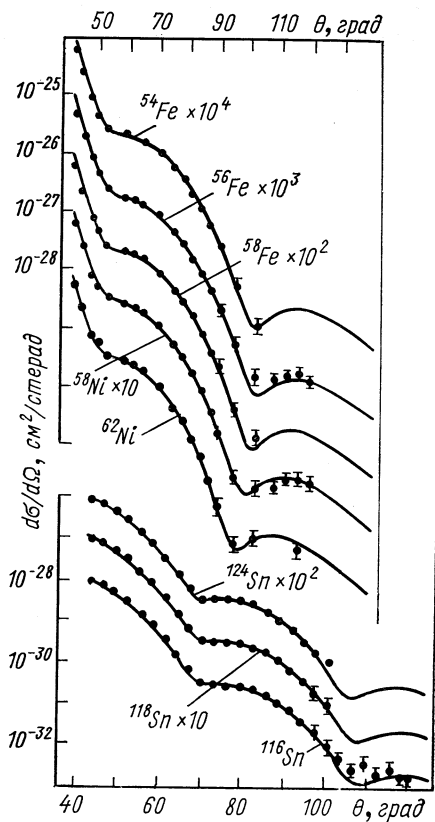


Рис. 4. Анализ изотопических эффектов в упругом рассеянии электронов на базе ферми-плотности [21—23].

Прежде всего видно, что вплоть до импульсов $q \sim 2$ ферми⁻¹ для этих ядер (и ряда других) с помощью ρ_F удается провести хорошую подгонку под эксперимент. Далее авторы отмечают довольно четкую корреляцию между изменениями параметров РПЗ и зарядовых среднеквадратичных радиусов и оболочечно-модельной структурой изучаемых ядер. Так, добавление нейтронов с орбитальным моментом, меньшим орбитального момента последней заполненной протонной оболочки, приводит к увеличению зарядового радиуса. Если же нейтрон попадает на оболочку с равным или большим угловым моментом, то это приводит к аномально малым изменениям параметров протонной плотности. Такого рода изотопические эффекты начали изучаться довольно давно на изотопах Са и Тi [18—20]. Для интерпретации получаемых таким образом изотопических отклонений часто приходится привлекать современные, микроскопические модели ядра.

Другое, пока менее определенное заключение касается сопоставления большого числа данных по рассеянию электронов и протонов на ядрах. Обработка этих данных показывает, что с приемлемой точностью зарядовые радиусы характеризуются законом

$$\langle r^2 \rangle_Z^{1/2} \sim (2Z)^{1/3}, \quad (65)$$

в то же время для распределения ядерного вещества (данные по рассеянию протонов и α -частиц) среднеквадратичный радиус

$$\langle r^2 \rangle_A^{1/2} \sim A^{1/3}. \quad (66)$$

Сопоставляя эти результаты, можно поставить вопрос о существовании у ядер «нейтронной шубы», толщина которой составляет примерно 0,5 ферми.

Интересно, что к такому же выводу приходят авторы работ [25] по рассеянию протонов высокой энергии на ядрах, которые обработали свои данные по методу многократного рассеяния [3] с использованием ферми-распределения ядерного вещества вида (64) и сопоставили их с уже известными зарядовыми РПЗ.

Уже отмечалось, что для описания форм-факторов в области больших q требуется вводить новые параметры в феноменологические РПЗ. Здесь одной из удачных форм оказалась фермиподобная функция вида

$$\rho = \rho^{(0)} (1 + wr^2/c^2) \{1 + \exp[(r^n - c^n)/t^n]\}^{-1}. \quad (67)$$

При $n = 1$ эта плотность близка к (64), поэтому не будем обсуждать работы, в которых эта функция использовалась в качестве подгоночного теста, и рассмотрим лишь случай $n = 2$.

На рис. 5 и 6 приведены некоторые результаты сравнений с экспериментом [26, 27], в которых методом оптимальной подгонки получили значение $n = 2$, т. е. пришли к фермиподобной функции с гауссовой асимптотикой. Аргументировать возможный успех такого вида РПЗ можно с помощью простой одночастичной модели, где РПЗ строится как сумма квадратов модулей функций связанного состояния протонов из всех оболочек ядра в основном состоянии $\rho(r) = \sum_n |\psi_n(r)|^2$. Естественно, что при $r \gg R$ асимптотика плотности определяется только одной, наиболее слабо экспоненциально спадающей функцией верхней оболочки. При $r \approx R$ в плотность дают примерно равный вклад функции уже всех оболочек, имеющих, однако, разный экспоненциальный спад. Видимо, кривую этого суммарного вклада в некоторой области периферии ядра $\rho(r \gtrsim R) \approx \sum_n a_n \exp(-2\sqrt{2E_n m/\hbar^2} r)$ удается параметризовать кривой гауссова вида. В то же время

эта область, вероятно, и дает наибольший вклад в форм-фактор при больших q .

Подобная черта РПЗ должна сильнее проявляться в сравнительно тяжелых ядрах, где в формировании плотности участвуют много оболочек, и слабее — в легких. В какой-то мере это соображение подтверждается рис. 5.

Наконец, отметим, что излишнее доверие к интерпретации форм-фактора отдельного ядра с помощью феноменологических плотностей может привести к оши-

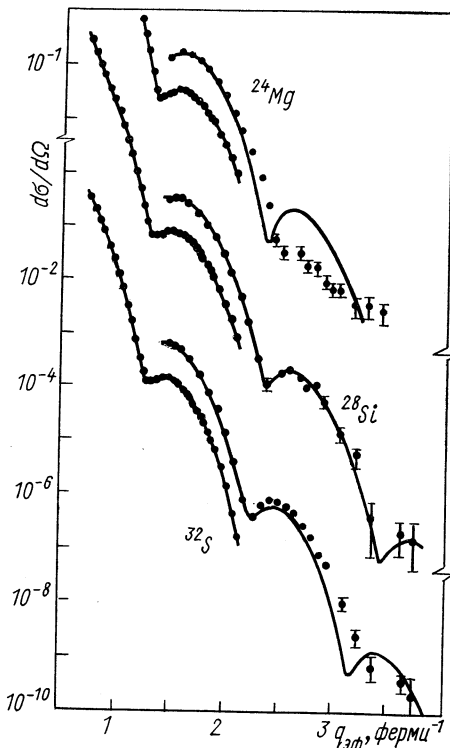


Рис. 5. Подгонка под эксперимент параболической фермиподобной плотности с гауссовой асимптотикой [26].

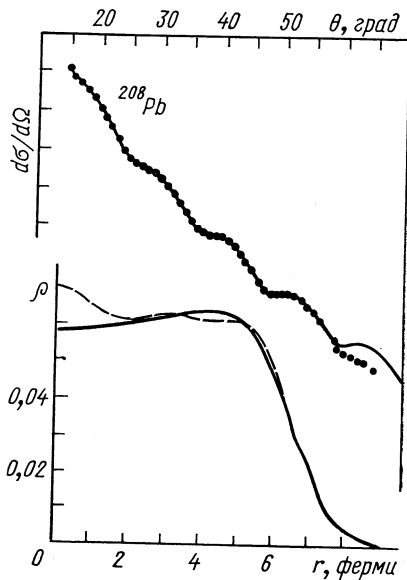


Рис. 6. Форм-фактор ядра ^{208}Pb , рассчитанный с помощью параболической фермиподобной плотности:

— — — расчет РПЗ по модели независимых частиц на базе потенциала Вудса — Саксона [27].

бочным выводам. Типичный этому пример — феноменологический анализ ядра ^{208}Pb [27]. Из рис. 6 видно, что полученная плотность наилучшей подгонки (67) при $n = 2$ имеет провал в центре ядра. В то же время многие расчеты по методу Хартри — Фока и одночастичной модели с потенциалом Вудса — Саксона [27] дают в этом месте устойчивый подъем РПЗ. Ниже увидим, что причина этого противоречия — неоднозначность результатов подобного

анализа эксперимента для поиска «экспериментального» РПЗ конкретного ядра. Оказывается, что существуют и другие РПЗ, одинаково хорошо описывающие тот же эксперимент, которые, однако, соответствуют предсказаниям теоретических расчетов.

Модельно-независимый анализ

Чтобы понять успехи и неудачи феноменологического подхода к описанию форм-факторов конкретных ядер, следует вернуться к некоторым общим вопросам, а именно: какую информацию об РПЗ можно извлечь из заданного экспериментального форм-фактора; как математически сформулировать задачу его модельно-независимого анализа (МНА); какого рода дополнительная информация и ограничения могут быть введены в такой анализ.

Сразу отметим, что в рамках только математической постановки задачи извлечь функцию РПЗ непосредственно из экспериментального, всегда «неточного» форм-фактора невозможно. Дело в том, что данная проблема относится к классу некорректно поставленных задач, когда по значению интеграла с заданной погрешностью требуется найти функцию под знаком интегрального оператора. В этом случае истинное решение (для нас это $\rho_{\text{экс}}(r)$) всегда «затеряно» среди бесчисленных ложных решений, содержащих неопределенно большие, быстро осциллирующие компоненты. Покажем это на примере борновского приближения:

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} \sin qr \rho(r) r dr. \quad (68)$$

Экспериментальный форм-фактор (а вообще лишь его модуль) известен в ограниченной области $\{q_i\}$ с погрешностью $\pm \Delta F(q_i)$. Пусть одно из решений уравнения (68) — гладкая функция $\rho_0(r)$. Тогда можно построить другое решение:

$$\rho(r) = \rho_0(r) + \Delta\rho(r), \quad (69)$$

в котором добавлены радиальные вариации типа

$$\Delta\rho(r) = A(r) \sin\left(\frac{2\pi nr}{R}\right) \quad (70)$$

с амплитудой $A(r)$ и быстрыми осцилляциями (n — велико) в пределах радиуса ядра R . Для любого $A(r)$ можно найти такое n , чтобы возникающие в результате подстановки (69) в (68) добавки к форм-фактору оставались в пределах его погрешностей. Строго говоря, истинное решение уравнения (68) получается обратным фурье-преобразованием точной функции $F(q)$, однако поскольку таковой экспериментально получить невозможно, то и ставить задачу именно так не имеет смысла.

Итак, вопрос сводится к тому, как при поиске $\rho(r)$ из (68) отделить физически допустимые от всех возможных решений. Вначале оценим, какая информация об РПЗ содержится в форм-факторе, если он задан в пределах $q_{\min} < q < q_{\max}$ ($q_{\min} \rightarrow 0$, $q_{\max} \rightarrow 2E$, где E — энергия электронов).

Очевидно, он может «уловить» только те вариации РПЗ, частота которых ниже частоты «измеряющей» функции, т. е.

$$n \ll n_0 = q_{\max} R / 2\pi = E \text{ (Мэв)} R \text{ (ферми)} / 200\pi, \quad (71)$$

или, другими словами, он «чувствует» только те вариации РПЗ, которые имеют характерные длины волн:

$$\Delta r \gg R / n_0 = 2\pi / q_{\max} = 200\pi / E \text{ (Мэв)}, \text{ ферми}. \quad (72)$$

Таким образом, при поиске решений уравнения (68) следует исключить все вариации РПЗ с частотами вне интервала (71). Отсюда также видно, как важно повышать предел измерения форм-факторов по q_{\max} , увеличивая энергию электронов E . В современных экспериментах на ядрах предельные $q_{\max} \approx 3 - 4$ ферми⁻¹, т. е. можно «ухватить» физические вариации РПЗ на интервале $\Delta r \approx 1,5 - 2$ ферми. На рис. 7 показано [9], как меняется «чувствительность» форм-фактора к деталям РПЗ с ростом энергии электронов. Видно, что даже весьма плавная вариация РПЗ проявляется в доступной измерению области углов рассеяния лишь при достаточно высокой энергии $E \approx 500$ Мэв и выше.

Отметим теперь наиболее общие черты РПЗ, которые следует учитывать при поиске физических решений (68):

- 1) экспоненциальный спад при $r \gg R$;
- 2) появление «бампа» в районе поверхности ядра при $r \sim R$, что есть следствие «перегиба» одночастичных функций при переходе от экспоненциально спадающего поведения вне ядра к насыщению либо колебаниям внутри него;
- 3) число возможных радиальных вариаций РПЗ $\Delta\rho(r)$ должно определяться, грубо говоря, числом ядерных оболочек;
- 4) минимальный размер вариации не должен превышать размер нуклона ($\Delta r > 1$ ферми).

Все эти черты весьма удачно учитываются в базисе пробных функций РПЗ, построенном из производных ферми-плотности [9]. Во-первых, нулевая гармоника $\rho_0 = \rho_F(r)$ гарантирует согласие с экспериментом при малых и средних q из-за своего экспоненциального спада. Во-вторых, $\rho'_F(r)$ дает «бамп» при $r \sim R$. И наконец, остальные производные $\rho_F^{(n)}(r)$ позволяют описать любой спектр радиальных вариаций РПЗ внутри ядра, так как из них можно составить полный набор функций:

$$\{\phi_n\} = \left\{ \sum_k \alpha_k^n \rho_F^{(k)}(r) \right\}. \quad (73)$$

Еще одно преимущество этого набора в том, что для всех производных $\rho_F^{(n)}(r)$ существуют явные выражения форм-факторов в рамках ВЭП. Итак, любого вида РПЗ можно представить как [9]

$$\rho(r) = \sum_{n=0}^N a_n \rho_F^{(n)}(r) = \sum_{n=0}^N C_n \frac{\partial^n}{\partial R^n} \rho_F(r, R). \quad (74)$$

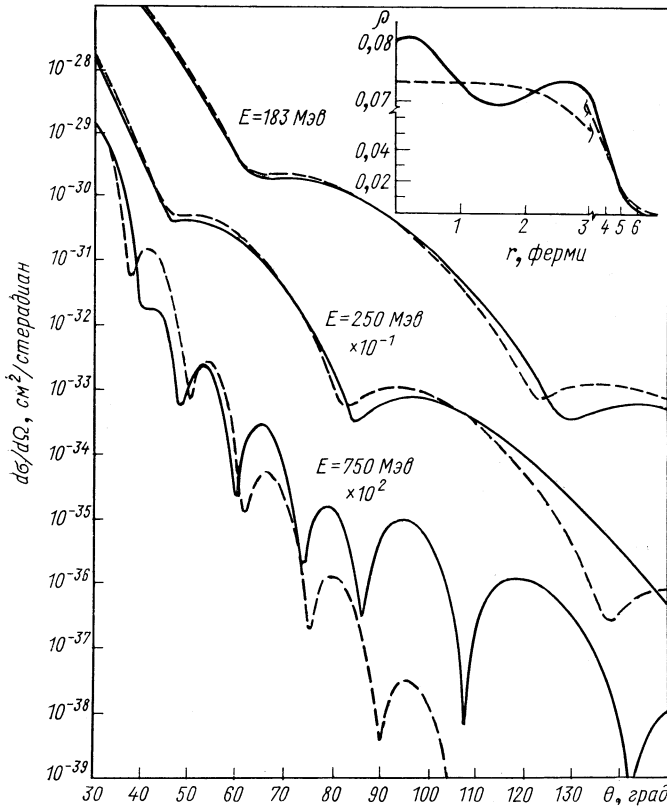


Рис. 7. Зависимость дифференциальных сечений рассеяния электронов [9] на ^{58}Ni для ферми-плотности (пунктир) и плотности из работы [28] (сплошные кривые) от энергии.

Подставляя это выражение в форм-фактор (23), получаем

$$F = \sum_n C_n F_F^{(n)}, \quad (75)$$

где

$$F_F^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial R^n} F_F. \quad (76)$$

Поскольку форм-фактор ферми-плотности F_F известен в явном виде (39), то, вычисляя от него производные, можно найти [9]

$$F^{(n)}(q, E) = -4\pi^2 q b^2 \rho_0^{(0)} (-i)^{n-1} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{G(x_0^\varepsilon, \varepsilon)}{q_{\varepsilon\Phi}^2(x_0^\varepsilon, \varepsilon)} \times \\ \times [bq_{\varepsilon\Phi}(x_0^\varepsilon, \varepsilon)]^{n-1} [n + iq_{\varepsilon\Phi}(x_0^\varepsilon, \varepsilon)R - \varepsilon q_{\varepsilon\Phi}(x_0^\varepsilon, \varepsilon) \pi b \operatorname{cth} \pi q b] \times \\ \times \frac{\exp i[\varepsilon q R + \phi(x_0^\varepsilon, \varepsilon)]}{\operatorname{sh} q \pi b}. \quad (77)$$

При $n = 0$ это выражение переходит в обычный форм-фактор ферми-плотности (39).

Чтобы технически осуществить программу отбора только физически разумных РПЗ, отвечающих сформулированным выше условиям, можно, в принципе, воспользоваться методом регуляризации решения Тихонова [29], состоящим в минимизации функционала:

$$\sum_i |F_{\text{теор}}(qi) - F_{\text{эксп}}(qi)|^2 + \alpha \int \left(\frac{\partial \rho(r)}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (78)$$

где, в отличие от обычного χ^2 -метода, добавлен член, исключаящий вклад в подынтегральную функцию $\rho(r)$ уравнения (68) быстро осциллирующих компонент. Вклад этот можно регулировать подбором параметра α . Однако на практике удобнее просто задавать коридоры разброса амплитуд $A(r)$ и частот n пробных функций типа (69). Тогда в результате подгонки форм-фактора (75) под эксперимент и отыскания соответствующих параметров R , b и коэффициентов $\{C_n\}$ можно «восстановить» с их помощью на основе (74) модельно-независимую функцию РПЗ.

Впервые такая программа модельно-независимого анализа была предложена и реализована на примере рассеяния электронов ядрами ^{40}Ca и ^{48}Ca в работах [9, 30]. Ниже дадим несколько примеров из работы [30].

Изложенный метод применялся для МНА данных упругого рассеяния электронов на ядрах ^{40}Ca ($E = 250$ и 750 Мэв) и ^{48}Ca ($E = 750$ Мэв).

Наличие данных для ^{40}Ca при энергии 250 Мэв [31] (данные I) и 750 Мэв [32] (данные II) позволяет проследить, как сужается неопределенность в получаемых РПЗ с расширением измеренной области переданных импульсов от $q_{\text{макс}} = 2$ до $q_{\text{макс}} = 3,3$ ферми $^{-1}$.

На рис. 8 даны некоторые типичные результаты МН-анализа данных I ядра ^{40}Ca . Видно, что согласие с экспериментом для всех РПЗ почти полное, но в области $\theta > 125^\circ$, где сечение не было измерено, кривые заметно отличаются друг от друга. Таким

образом, можно сделать вывод, что на базе данных при $E = 250$ Мэв (малые q) можно с помощью МНА определить РПЗ только в области поверхностного спада. Включение же вариаций плотности в центральной области ядра с амплитудами порядка $\pm 20\%$ среднего значения РПЗ и частотой 2—3 вариации на R не приводит к расхождениям соответствующих рассчитанных сечений с экспериментом. Отклонение от средних значений сред-

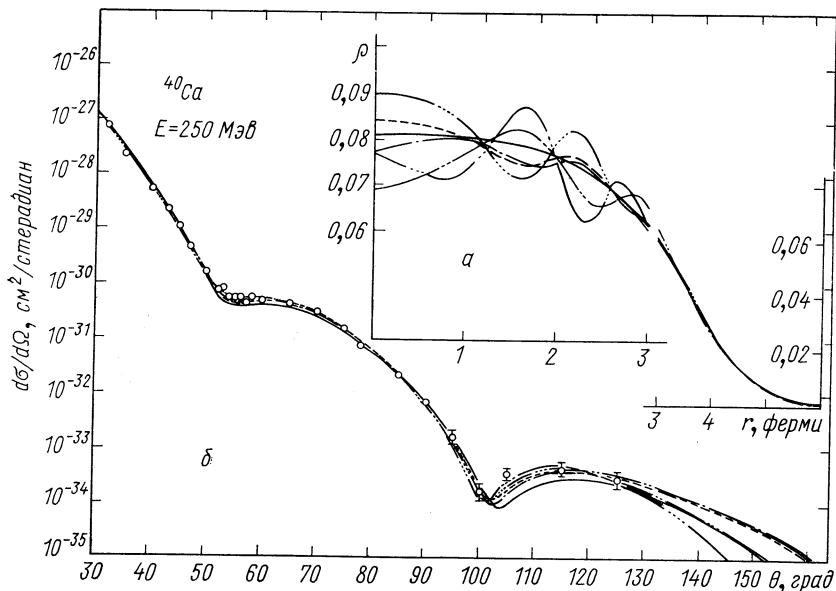


Рис. 8. Модельно-независимый анализ данных упругого рассеяния электронов энергии 250 Мэв на ядре ^{40}Ca :

a — РПЗ; b — соответствующие им сечения; — — — ферми-плотность; - - -, - · - ·, - · - · - ·, - · - · - ·, - · - · - · — получены в МН-анализе [30].

неквадратичных радиусов по разным вариантам РПЗ составляет примерно 1,5% и дает $\bar{R} = 3,4843 \pm 0,038$ ферми, что согласуется со значениями, полученными на базе феноменологического анализа с ферми- и параболической ферми-плотностью.

Чтобы сузить коридор возможного разброса РПЗ и выяснить детали их поведения в центральной области ядра, проанализируем данные П при больших q . Из рис. 9 видно, что здесь также имеется целая совокупность кривых РПЗ, которые дают одинаково хорошее согласие с экспериментом в измеренной области сечений. Однако по сравнению с первым случаем коридор возможных вариаций сузился, и это позволяет судить о качественном ходе РПЗ внутри ядра. Теперь отклонения от среднеквадратич-

не 2 ферми и более пологим поверхностным спадом. Среднеквадратичный радиус по найденному набору РПЗ $\bar{R} = 3,5198 \pm \pm 0,022$ ферми, что согласуется с данными феноменологического анализа рассеяния электронов при 500 Мэв [20] на базе параболической ферми-плотности ($\bar{K} = 3,517$ ферми).

На рис. 10 изображена умноженная на $4\pi r^2$ разница РПЗ ядер ^{40}Ca и ^{48}Ca , которая дает представление об их изотопическом

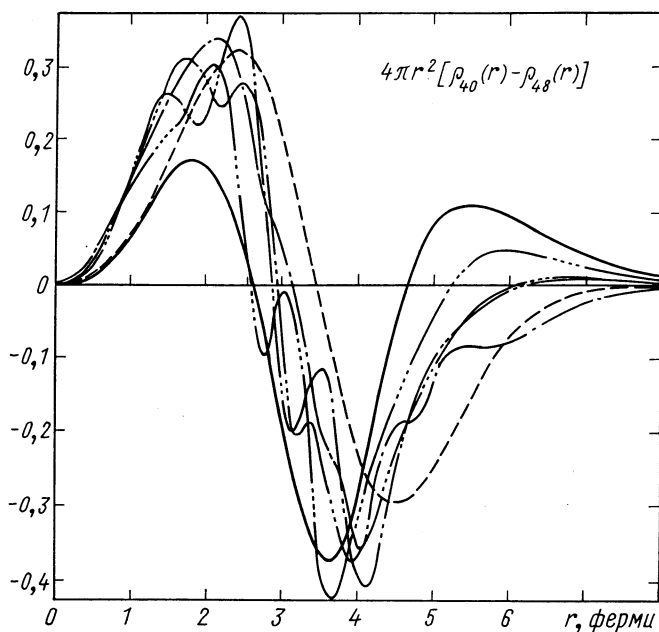


Рис. 10. Различия РПЗ ядер ^{40}Ca и ^{48}Ca :

— — из работы [32]; — — — — из работы [33]; — · — · — на основе МН-анализа [30] и соответствуют РПЗ из рис. 9.

различия. Штрих-пунктирные кривые соответствуют РПЗ из рис. 9. Сплошная кривая — результат работы [32], предсказывающей отрицательное изотопическое смещение РПЗ ядра ^{48}Ca относительно ^{40}Ca , пунктирная — теоретический расчет [33], который дает относительный рост среднеквадратического радиуса от ядра ^{40}Ca и ^{48}Ca , но заниженные их абсолютные значения. Наш анализ приводит к кривым, располагающимся между этими двумя кривыми, и скорее ближе к последней.

В последние годы попытки восстановления РПЗ на основе МНА были сделаны и для других ядер, при этом почти в каждой новой работе пробные РПЗ выбирались по-своему. Наиболее

интенсивно исследовалось ядро ^{208}Pb , для которого, как уже отмечалось выше, наметилось некоторое противоречие между данными феноменологического анализа и модельными расчетами РПЗ. В первых отдавалось предпочтение фермиподобной плотности с гауссовой асимптотикой, которая имеет провал в центральной области ядра, а вторые (расчеты по Хартри — Фоку или одночастичным моделям) приводили вместо этого к равнономерному подъему РПЗ в центре ядра. И хотя МН-анализ данных по ^{208}Pb не разрешил этого противоречия, а общие выводы такого анализа по существу совпали с уже сделанными ранее на примере изотопов Са, тем не менее кратко изложим эти результаты как иллюстрацию возможностей метода.

Так, в работе [34] МН-анализ проводился для данных при $E = 124$ и 167 Мэв на основе пробных функций:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{R_i^2} \delta(r - R_i), \quad (79)$$

где заряды p_i -поясов, на которые разбивалось ядро, его радиусы R_i и толщины $\Delta R = R/N$ варьировались так, чтобы спектр возможных РПЗ был достаточно широким. Как и следовало ожидать, коридор возможных РПЗ при этих энергиях оказался очень широким, так что отдать предпочтение какому-то одному направлению хода кривых — с впадиной в центре или без нее — было нельзя. В этой же работе [34] проводился анализ допустимого разброса РПЗ с помощью функций моментов

$$M(k) = \left(\int_0^{\infty} \rho(r) r^{k+2} dr \right)^{1/k}, \quad (80)$$

для которых из-за интегрирования $\rho(r)$ с весовыми функциями коридор неопределенности сужается. Оказалось, что по этим данным определенный вывод о ходе РПЗ можно сделать лишь для области $r \sim R$. Чтобы сузить этот коридор внутри $r < R$ и вне ядра $r > R$, необходимо вводить модельные предположения.

В другой работе [35], где проводился МН-анализ всех данных по ^{208}Pb , включая энергию $E = 500$ Мэв, использовались следующие функции радиальных вариаций:

$$\Delta\rho = \sum_{n=1}^N C_n \frac{\sin(\pi nr/R)}{r}. \quad (81)$$

В качестве ρ_0 бралась ферми-плотность ρ_F . Естественно, оказалось, что коридор неопределенностей при этих энергиях стал узким. Для данного вида РПЗ ход кривых внутри коридора напоминает форму дна бутылки (рис. 11, кривые b). Этот результат

любопытен, хотя авторы и не могут на нем настаивать, так как в анализе выбирался лишь определенный класс пробных РПЗ. Привлечение к анализу дополнительных данных по μ -мезоатомным энергиям этого ядра сузило неопределенности и несколько сгладило ход кривых. Однако это не изменило их качественного поведения (кривые *a*). Кроме того, все кривые *a* вышли за пределы коридора неопределенностей (кривые *b*) РПЗ, полученных по данным только электронного рассеяния, что связано с неточностями в учете радиационных, дисперсионных и других эффектов при получении абсолютных значений данных эксперимента.

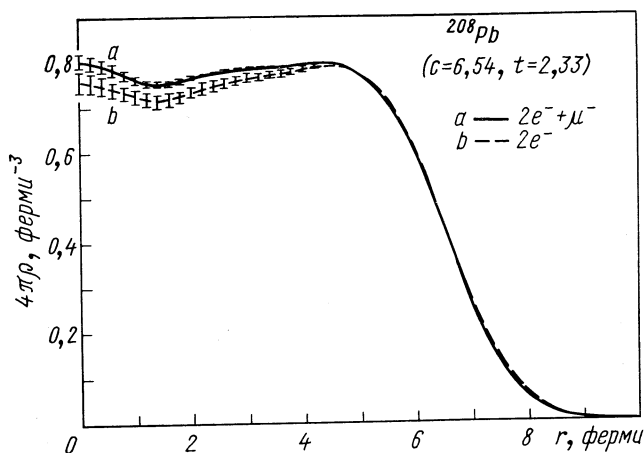


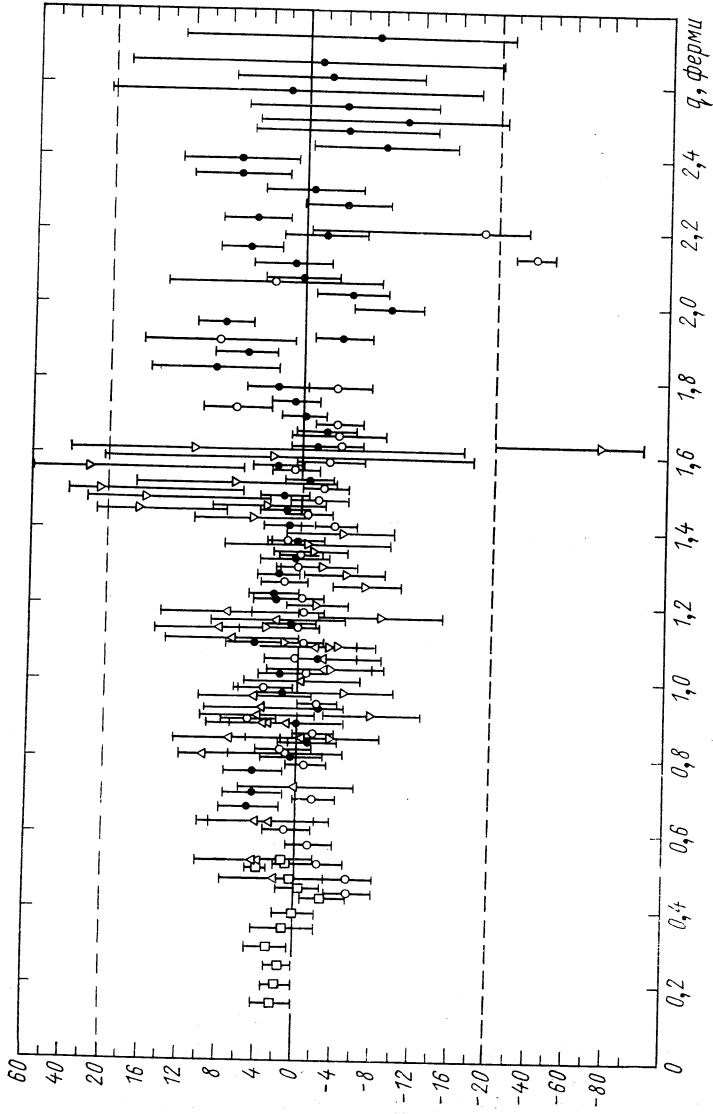
Рис. 11. Плотности распределения заряда, полученные в результате МН-анализа данных по рассеянию электронов и мюонных данных (кривые *a*) и только электронных данных (кривые *b*) [35].

Характерно, что в данном МН-анализе разброс теоретических и экспериментальных сечений $\Delta = (\sigma_{\text{теор}} - \sigma_{\text{экспер}}) / [(\sigma_{\text{теор}} + \sigma_{\text{экспер}}) / 2]$ не превышал $\pm 20\%$ (рис. 12).

В этом отношении представляется важным привлечение к МН-анализу не только (и не столько) данных по μ -мезоатомам, которые измеряются другой методикой и даже по этой причине могут входить в некоторое несоответствие с данными (e, e), но и других данных по рассеянию электронов.

Один из таких способов был предложен в работе [36], где вместе с данными упругого рассеяния использовались данные неупругого рассеяния электронов с возбуждением нижайшего 2^+ фоновое состояние ядра ^{58}Ni . В этом случае возникает дополнительное условие на отбор пробных кривых РПЗ, которое следует из довольно общих, хотя и модельных, предположений

Рис. 12. Относительные разности в процентах теоретических сечений и экспериментальных, полученные в результате МН-анализа данных рассеяния электронов [и мюонных данных [35]].



о том, что для такого типа неупругого рассеяния переходная плотность $\rho_2(r)$ пропорциональна первой производной по R от зарядовой плотности:

$$\rho_2(r) \sim \frac{\partial}{\partial R} \rho(r, R). \quad (82)$$

Тогда, выбирая в качестве $\rho(r)$ представление (74), получаем, что

$$\rho_2(r) \sim \sum_{n=0}^N C_n \frac{\partial^{n+1}}{\partial R^{n+1}} \rho_F(r, R). \quad (83)$$

Вариационные параметры $\{C_n\}$ здесь одинаковы как для упругого, так и для неупругого форм-фактора, что сильно сужает неопределенности при их выборе в процессе подгонки под экспе-

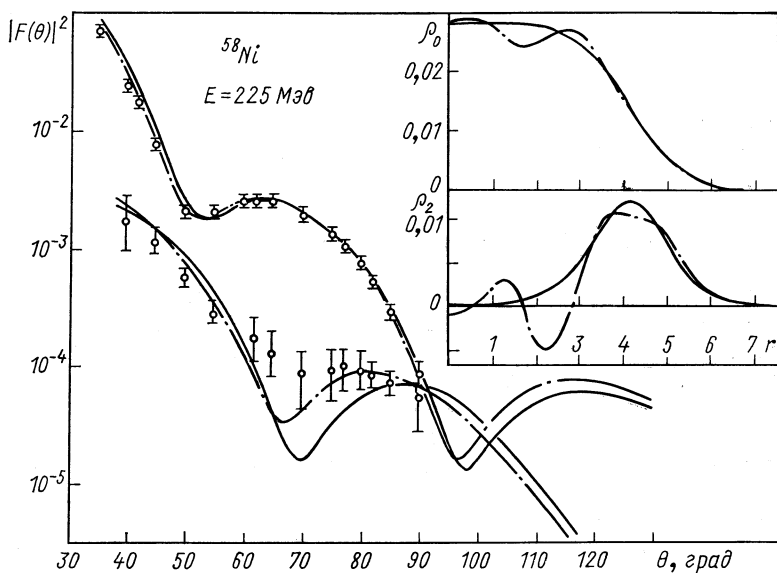


Рис. 13. Совместный МН-анализ упругого и неупругого рассеяния (штрих-пунктир) и расчеты на базе макромодели Тасси с ферми-плотностью (сплошные кривые) [36].

римент. Кроме того, вид (83) для переходной плотности позволяет явно вычислить неупругий форм-фактор в ВЭП. Пример такого анализа данных [37] изображен штрих-пунктирными линиями на рис. 13, взятом из работы [36]. Для сравнения сплошными кривыми показаны результаты, соответствующие обычному подходу, когда $\rho(r, R) = \rho_F(r, R)$. Полученные результаты показывают, что связь (82) оказывается довольно «жестким» условием

и даже для МН-анализа в области малых q сильно сужает возможные варианты отбора РПЗ.

Сформулируем основные выводы этого раздела. Во-первых, метод МН-анализа пока еще до конца не разработан, хотя и есть уже положительные примеры его использования. Основная его трудность — в большой неоднозначности получаемых функций РПЗ. В этом отношении важное значение имеет привлечение дополнительной информации по μ -мезоатомам, неупругому рассеянию электронов и др. Далее, пока не установлено, как влияет на результаты МНА выбор класса пробных функций РПЗ. В этой связи одна из основных задач — правильно выбрать исходное приближение для плотности — функции ρ_0 . Наиболее разумно брать ее из модельных представлений. Можно взять ее и как среднее значение по группе ядер $\rho_0 = \langle \rho \rangle$ на основе предсказаний, скажем, одночастичной модели оболочек, а затем искать $\Delta\rho$ как флуктуации радиальных вариаций плотности, используя, например, метод оболочечных поправок [38]. Во всяком случае, опыт расчета РПЗ в рамках тех или иных моделей ядра может оказать здесь большую пользу для подбора наиболее реалистических классов пробных функций РПЗ. Эти вопросы рассмотрим ниже.

Форм-факторы в модели независимых частиц

Простейший вариант расчета РПЗ — это использование модели независимых частиц (МНЧ). Она позволяет проанализировать, хотя бы качественно, такие вопросы, как возникновение и характер радиальных вариаций РПЗ, значение выбора одночастичного базиса в расчетах РПЗ и учета остаточных взаимодействий в ядре, различие в поведении форм-факторов при больших и малых переданных импульсах и др. Кроме того, прямое обращение к ядерной модели позволяет поставить вопрос о совместном описании данных по структуре ядра и рассеянию, например, объяснить наряду с форм-факторами энергии связи верхних ядерных оболочек, спектроскопические факторы в прямых ядерных реакциях и т. п., что существенно сужает возможные неоднозначности РПЗ, получаемые из МН-анализа только упругого рассеяния электронов.

Обычная процедура расчета РПЗ по МНЧ состоит в следующем. Выбирается одночастичный потенциал с включением кулоновских и спин-орбитальных сил. В старых расчетах потенциал брали в виде гармонического осциллятора, однако в данной задаче естественно использовать конечную яму в форме Вудса — Саксона, где радиус R и диффузность a обычно хорошо известны, а глубина ямы подгоняется под экспериментальные энергии отделения нуклона с верхней оболочки. С помощью найденных ра-

диальных волновых функций протонов ψ вычисляют РПЗ по формуле

$$\rho(r) = \sum_{nlj}^{(Z)} (2j+1) |\psi_{nlj}|^2. \quad (84)$$

Распределение плотности заряда ядра находится с учетом конечных размеров протона:

$$\bar{\rho}(r) = \int \rho(u) \rho_p(|\mathbf{r}-\mathbf{u}|) du, \quad (85)$$

где для РПЗ протона ρ_p можно использовать, например, параметризацию из работы [39].

В качестве примера использования данной процедуры приведем результаты расчета [40] РПЗ и форм-факторов в ВЭП для ряда ядер различной атомной массы. Параметр глубины соответствующего потенциала Вудса — Саксона подгонялся под энергию связи протона из верхней оболочки. На рис. 14 дано сравнение с экспериментом. Видно, что в целом получается удовлетворительное согласие в области малых и средних значений переданных импульсов $q < 2$ ферми⁻¹, что указывает в первую очередь на правильный спад рассчитанных РПЗ в районе границы ядра. Далее, оказывается, что для полученных плотностей среднеквадратичные радиусы ядер ^{58, 60, 64}Ni, ^{40, 48}Ca, ⁸⁹Y, ⁹³Nb, ^{112, 118}Sn, ¹³⁹La лежат в следующих пределах: $\langle r^2 \rangle^{1/2}/A^{1/3} = 0,95 \pm 30\%$; $\langle r^2 \rangle^{1/2}/(2Z)^{1/3} = 0,99 \pm 10\%$, причем их разброс от средних значений оказывается даже меньше, чем для СКР ферми-плотностей, соответствующих наилучшей подгонке. Это может служить еще одним свидетельством в пользу выводов работы [41] о $(2Z)^{1/3}$ -законе изменения зарядовых среднеквадратичных радиусов ядер.

Ясно, что для больших q такого простого подхода МНЧ в расчете РПЗ недостаточно. Чтобы убедиться в этом, обратимся к данным по легким ядрам, где имеются соответствующие эксперименты и сравнения. Как отмечалось, для ядра ¹²C и частично ¹⁶O можно пользоваться борновским приближением, которое отличает ряд расчетов. Так, в БП можно явно учесть конечные размеры протона. Подставляя (85) в форм-фактор ядра (68), нетрудно выделить из него форм-фактор протона, который для гауссовой плотности имеет вид

$$F_p(q) = \exp(-q^2 \bar{R}^2(p)/2), \quad (86)$$

где $\bar{R}(p)$ — среднеквадратичный радиус протона. Для легких ядер важно учитывать также движение центра ядра как целого. В осцилляторном базисе переменные одночастичного движения и движения центра инерции разделяются довольно просто [42]. В результате, с учетом (86), получается общий корректирующий

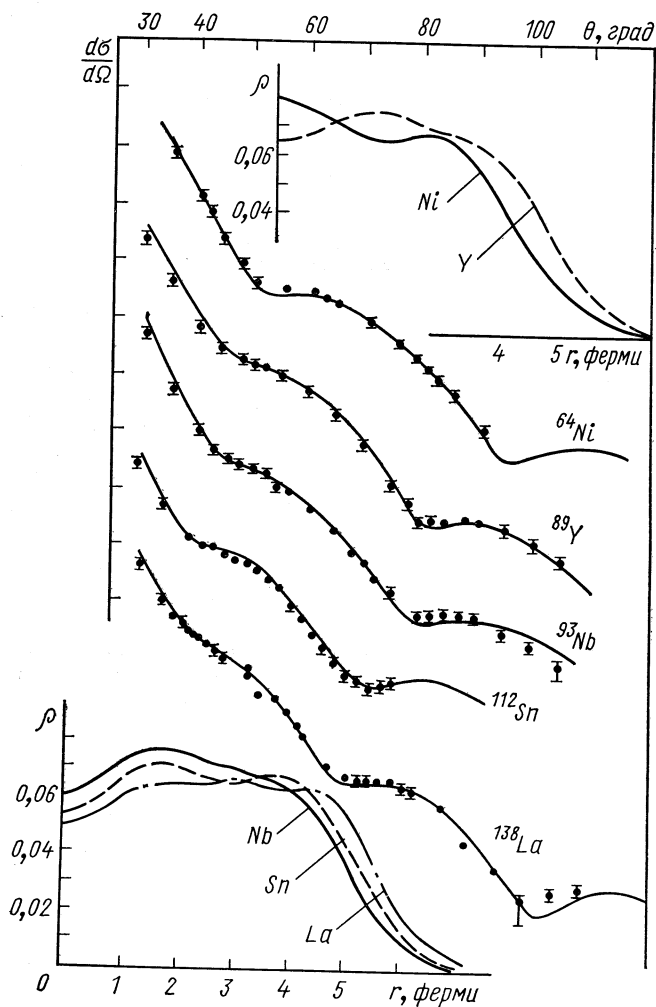


Рис. 14. Форм-факторы некоторых ядер, рассчитанные на основе РПЗ модели независимых частиц с потенциалом Вудса — Саксона [40].

множитель $G(q)$, на который следует умножить квадрат модуля теоретического форм-фактора МНЧ при его сравнении с экспериментом:

$$G(q) = \exp[-q^2(\bar{R}^2(p) - \bar{R}^2(A)/A)/3]. \quad (87)$$

На рис. 15 приведены взятые из работы [15] результаты сравнения с экспериментом рассчитанных таким образом форм-факторов ядер p -оболочки ^{12}C и ^{16}O с использованием традиционной модели гармонического осциллятора и потенциала Вудса — Сакса —

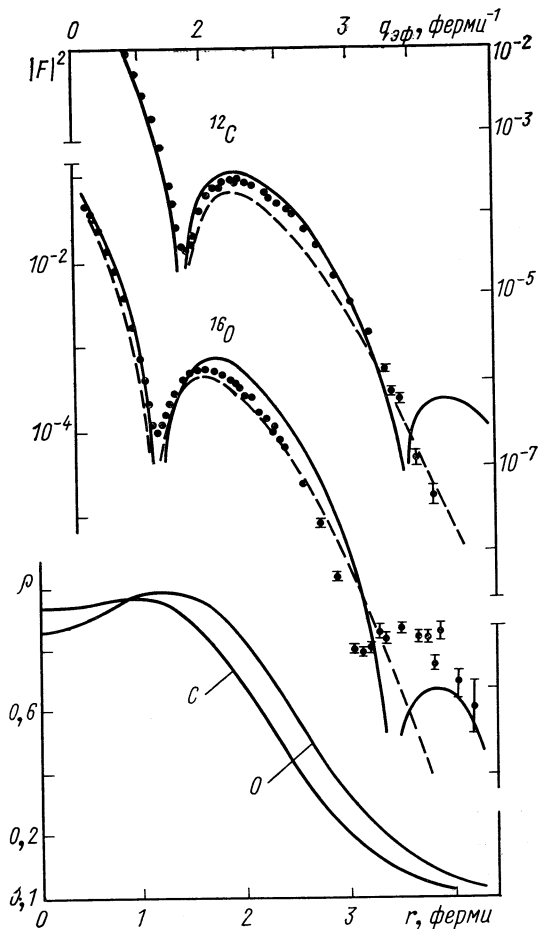


Рис. 15. Сравнение экспериментальных и рассчитанных в модели независимых частиц форм-факторов [15].

сона. Видно, что в приближении осцилляторного потенциала нельзя даже качественно описать эксперимент при больших q , так как оно не дает второго минимума, наблюдаемого в форм-факторе ^{16}O . В потенциале конечной глубины этот минимум присутствует. Интересно, что для этих ядер спин-орбитальные

силы не меняют существенно форм-фактор (поправка около 1%). Далее, учет четырехквaziчастичных примесей в результате под-

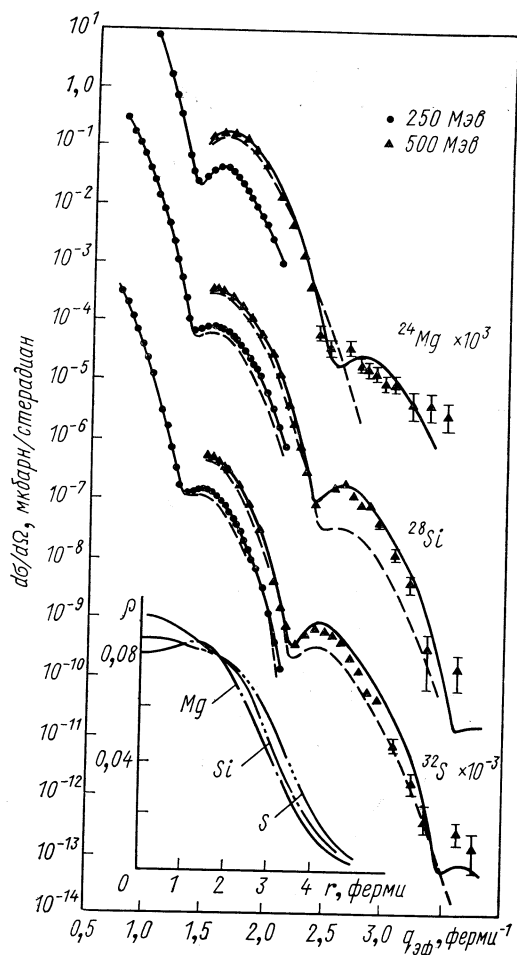


Рис. 16. Сравнение экспериментальных данных и теоретических расчетов по модели независимых частиц в потенциале гармонического осциллятора (пунктир) и Вудса — Саксона (сплошные) с введением чисел заполнения. Внизу изображены РПЗ, соответствующие расчетам Вудса — Саксона [43].

ядре ^{32}S полностью заполняется $2s$ -оболочка. Поскольку функция $1d$ -состояния имеет максимум на периферии ядра, а функция $2s$ -со-

ключения других оболочек ядра также не приводит к заметным изменениям упругих форм-факторов, хотя и влияет на неупругие. Общий ход найденных кривых РПЗ показывает, что, как и следовало ожидать, по мере заполнения p -оболочки плотность приобретает «бамп» в области $r \sim R$, где функции $1p$ -состояний имеют максимум.

Ясно, что для количественного объяснения поведения форм-факторов при больших q требуется совершенствовать МНЧ, вводя нуклон-нуклонные корреляции. Это приводит к таким физическим следствиям, как кластеризация, деформация ядер и т. п. В волновой функции ядра это приводит к сильному смешиванию конфигураций. Однако можно ввести это смешивание формально, с помощью чисел заполнения, определяющих примесные компоненты. Рассмотрим в связи с этим пример ядер ^{24}Mg , ^{28}Si и ^{32}S [43], где идет заполнение $1d_{5/2}$ - и $2s$ -оболочек. Согласно МНЧ в ядре ^{28}Si заполнена $1d_{5/2}$ -оболочка, а в

стояния — в центре, то при переходе от ^{28}Si к ^{32}S должен был бы наблюдаться резкий подъем РПЗ в центре ядра (примерно в 2 раза). Однако анализ эксперимента показывает [43], что это изменение происходит гораздо плавнее начиная с ядра ^{24}Mg и есть результат влияния $2s$ -примесей к функциям $1d$ -состояния. Соответствующий расчет РПЗ и форм-факторов в рамках МНЧ с введением чисел заполнения $2s$ -оболочки приведен на рис. 16. Подгонка под эксперимент приводит к следующим их значениям: 0,6 для ^{24}Mg , 0,9 для ^{28}Si и 1,4 для ^{32}S , которые близки к 0,19 (0,46), 0,79 и 1,5, полученным из анализа реакций срыва и подхвата на основе правил сумм [44].

Таким образом, можно заключить, что расчеты в рамках МНЧ с конечным потенциалом Вудса — Саксона воспроизводят основные черты РПЗ и позволяют описать эксперимент при малых и средних переданных импульсах. При больших q требуется вводить в РПЗ радиальные вариации с длиной волны порядка 2 ферми, которые могут появляться только от примешивания к функциям основного состояния компонент из других оболочек ядра. Получить такое смешивание в рамках самой МНЧ нельзя, поэтому необходим переход к более совершенным многочастичным ядерным моделям.

Влияние α -кластеризации ядер на форм-факторы

Прямой способ учесть смешивание одночастичных конфигураций — это ввести наряду со средним полем остаточные нуклон-нуклонные взаимодействия. Более наглядный путь — сразу строить из одночастичных функций такие конфигурации, которые отвечали бы определенным физическим представлениям о структуре ядра. Один из таких подходов опирается на предположение об α -кластеризации ряда ядер p - и sd -оболочек [45]. Самая простая α -модель предполагает, что положение α -частиц в ядре жестко фиксировано, антисимметризация нуклонов не учитывается. В этой модели удалось качественно объяснить форм-факторы некоторых легких ядер [46]. Более последовательна α -кластерная модель с проектировкой (АКМП), или модель Бринка [47]. Здесь волновые функции ядерных состояний вращения генерируются из антисимметризованной многочастичной функции, построенной на базе одночастичных (обычно гауссовых) функций s -состояний нуклонов, движущихся относительно центров α -кластеризации.

Надо отметить, что все задачи рассеяния, в том числе и электронов, весьма чувствительны к тому недостатку большинства многочастичных моделей, который связан с использованием ими базиса функций гармонического осциллятора. В этом отношении многочастичная модель Бринка представляет исключение, поскольку

ку в ней, как показано в работе [48], удается использовать базисные функции с реалистической экспоненциальной асимптотикой.

Суть модели в том, что в ядре выделяются центры расположения α -кластеров \mathbf{R}_i ($i = 1, \dots, N$ — индекс кластера; N — полное число кластеров в ядре). Относительно этих центров четыре нуклона находятся в s -состояниях с функциями

$$u_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = \chi_\sigma \chi_\tau u(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|), \quad (88)$$

где $a = i$, σ, τ — индекс одночастичного состояния. Затем на основе (88) строится пробная многочастичная антисимметризованная функция

$$U(\mathbf{R}) = \sum_p \varepsilon_p \prod_{a=1}^A u_a(pa), \quad (89)$$

из которой с помощью операторов четности \hat{P}_π проектировки \hat{P}_{MK}^J [49] составляются функции с заданными квантовыми числами $|JMK\pi\rangle$, где K — проекция момента J на внутреннюю ось ядра.

Полная функция есть суперпозиция

$$|JMK\pi\rangle = \sum_K C_K^J |JMK\pi\rangle, \quad (90)$$

где коэффициенты C_K^J для нижних состояний определяются из соображений симметрии выбранной α -частичной конфигурации ядра. С помощью этих функций вычисляются матричные элементы оператора плотности заряда ядра:

$$\rho(\mathbf{r}, \xi) = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^A \varepsilon_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = \sum_{LM} \mathcal{F}_{LM}(r, \xi) Y_{LM}^*(\hat{r}), \quad (91)$$

где

$$\mathcal{F}_{LM} = \sum_{k=1}^A \mathcal{F}_{LM}^{(k)} = \sum_{k=1}^A \frac{\varepsilon_k}{Z} \delta(r - r_k) \frac{1}{r^2} Y_{LM}(\hat{r}_k). \quad (92)$$

Можно показать [48], что в этом случае для четного ядра РПЗ и переходная плотность (11) оказываются равными

$$\rho_L = \frac{1}{4\pi^2 N_{00\pi_0}^{1/2}} \sum_K C_K^L N_{LK\pi}^{-1/2} \int d\theta [\langle U(\mathbf{R}) | \mathcal{F}_{LK} | U(\mathbf{S}) \rangle + P_{\pi_0} \langle U(\mathbf{R}) | \mathcal{F}_{LK} | U(-\mathbf{S}) \rangle], \quad (93)$$

где N — нормировочные множители волновых функций. Интегрирование ведется по углам Эйлера и возникает из-за поворота,

предписываемого оператором проектировки, от исходной α -конфигурации ядра $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_i\}$ к новой, повернутой конфигурации $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_i = \hat{R}(\theta) \mathbf{R}_i\}$. Многочастичные матричные элементы выражаются через детерминанты

$$\langle U(\mathbf{R}) | \mathcal{F}_{LK} | U(\varepsilon \mathbf{S}) \rangle = 2 [\det B_{ij}(\varepsilon)]^3 \sum_{n=1}^A \det B_{ij}^{(n)LK}(\varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (94)$$

которые определяются одночастичными функциями:

$$B_{ij}^{(n)LK} = (u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \mathcal{F}_{LK}^{(i)} u(\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{S}_j)) \delta_{ni} + B_{ij}(\varepsilon) (1 - \delta_{ni}); \quad (95)$$

$$B_{ij}(\varepsilon) = (u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), u(\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{S}_j)). \quad (96)$$

Итак, в техническом плане задача состоит в вычислении сначала одночастичных (95), (96), а затем многочастичных (94) матричных элементов и проведении трехмерного интегрирования в (93) по углам Эйлера.

Естественно, результат зависит от того, какая выбрана геометрическая конфигурация расположения центров α -кластеров \mathbf{R}_i и какого вида пробные функции $u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$ используются в расчетах. Что касается α -конфигураций, то расчеты характеристик основных состояний ряда ядер по АКМП [47, 50], а также расчеты форм-факторов по α -частичной модели [51] позволяют выбрать их в виде, изображенном на рис. 17. А именно: ^{12}C — равносторонний треугольник, ^{16}O — тетраэдр, ^{24}Mg — битетраэдр, ^{28}Si — D_{3d} -структура, ^{32}S — D_{3h} -структура, ^{40}Ca — тетраэдр внутри октаэдра, $(T_d + O_h)$ -структура. На основе присущих этим фигурам симметрий можно найти коэффициенты C_K^J в волновой функции (90). Одночастичные пробные функции выбирались в работе [48, 52] в форме традиционных гауссовых:

$$u_G(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|) = \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)^2/b_i^2] \quad (97)$$

и в виде функций с экспоненциальной асимптотикой:

$$u_{SF}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|) = [\text{ch}(R_{\alpha i}/b_{\alpha i}) + \text{ch}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|/b_{\alpha i})]^{-1}, \quad (98)$$

где $R_{\alpha i}$ и $b_{\alpha i}$ определяют радиус и ширину области полуспада функции нуклона от центра α -кластера i . Оказывается, что одночастичные матричные элементы с функциями (97) и (98) вычисляются в явном виде [48], что весьма ценно в практических приложениях.

Результаты расчетов форм-факторов в ВЭП согласно изложенной схеме приведены на рис. 18—21 [52]. Общее замечание, касающееся всех ядер, состоит в том, что возможности гауссовых проб-

ных функций весьма ограничены. Так, расчеты с этими функциями не дают особенностей поведения форм-факторов в области второго минимума ядер p -оболочки и третьего минимума ядер d -оболочки. Это поведение интересно связать с появлением дифракционного минимума в форм-факторе ${}^4\text{He}$ при $q \sim 3,3$ ферми $^{-1}$.

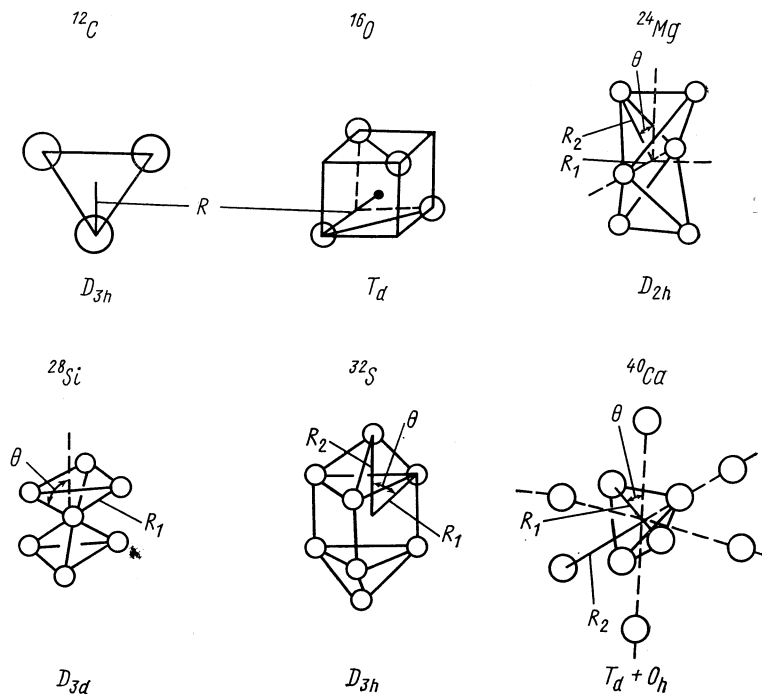


Рис. 17. Альфа-конфигурации ядер p - и sd -оболочек, используемые в расчетах форм-факторов.

Действительно, гауссова функция РПЗ $\rho({}^4\text{He}) = \exp(-2r^2/b^2)$ в принципе не может дать минимума. В то же время функция (98) с реалистической асимптотикой дает такую плотность $\rho({}^4\text{He}) = u_{SF}^2(r, R_i = 0)$, которая при $R = 1,59$ ферми и $b = 0,545$ ферми объясняет не только «размерный» минимум свободной α -частицы, но и весь ход ее экспериментального форм-фактора [48]. Поэтому естественно считать, что те «дополнительные» минимумы или особенности при $q \sim 3 - 3,3$ ферми $^{-1}$, которые наблюдаются в форм-факторах указанных ядер, являются не обычным проявлением размеров ядра как целого, а несут в себе черты структуры α -кластера внутри ядра. В то же время попытки [52] описать наблюдаемые форм-факторы ядер ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{28}\text{Si}$ с параметрами

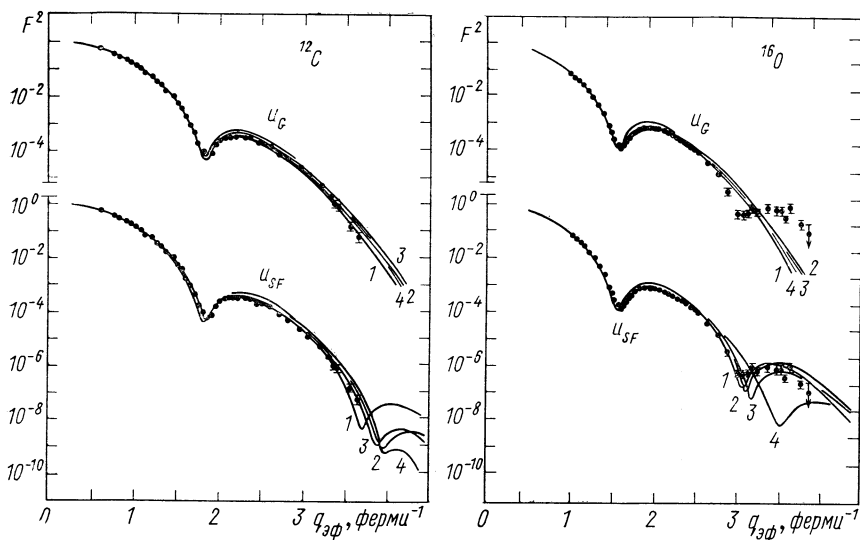


Рис. 18. Форм-факторы ядер ^{12}C и ^{16}O , рассчитанные по модели Бринка с пробными гауссовыми функциями и функциями экспоненциальной асимптотики при различных наборах параметров [52].

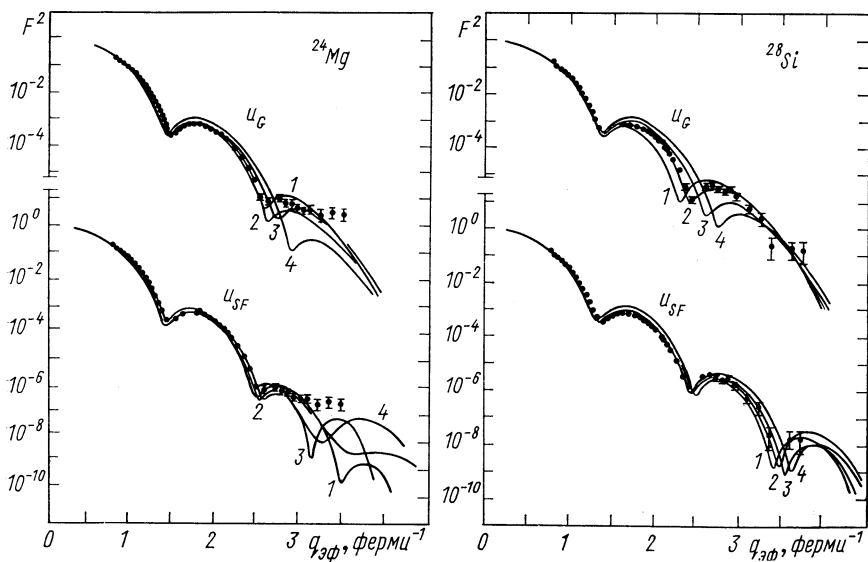


Рис. 19. То же, что и на рис. 18, но для ядер ^{24}Mg и ^{28}Si .

R и b свободной α -частицы и подгонкой только по конфигурационным параметрам R_i не дали согласия при средних и больших q . Исключение составило ядро ^{24}Mg , которое, таким образом, можно считать близким к α -частичному. В остальных же ядрах размеры α -кластеров сильно отличаются от α -частичных.

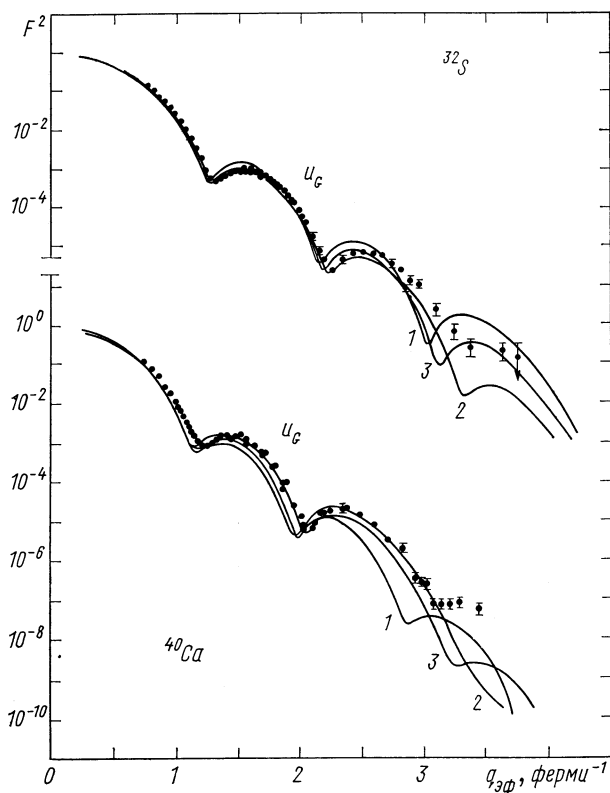


Рис. 20. Форм-факторы ядер ^{32}S и ^{40}Ca . Расчет по модели Бринка с пробными гауссовыми функциями [52].

Полученные для ^{12}C и ^{16}O наборы параметров показывают [48, 50], что для ^{12}C расстояние от центра ядра до α -кластеров $R_i = 0,7 - 1,4$ ферми, т. е. оказывается достаточно малым. Поскольку при $R \rightarrow 0$ АКМП переходит в модель оболочек, то этот результат можно расценивать как факт слабой кластеризации ^{12}C в основном состоянии. Относительно ядра ^{16}O можно заключить, что в основном состоянии оно вообще не кластери-

зовано, так как для него $R_i \approx 0$. Интересно, что в возбужденных состояниях этих ядер кластеризация усиливается [48, 52].

Для ядер ^{32}S и ^{40}Ca сравнение было сделано на базе гауссовых пробных функций (см. рис. 20). Здесь число вводимых параметров, определяемых конфигурацией α -кластеров в ядре, увеличивается, поэтому найденное согласие может оказаться не всегда отражающим физическую картину истинного РПЗ в ядре (см. рис. 21).

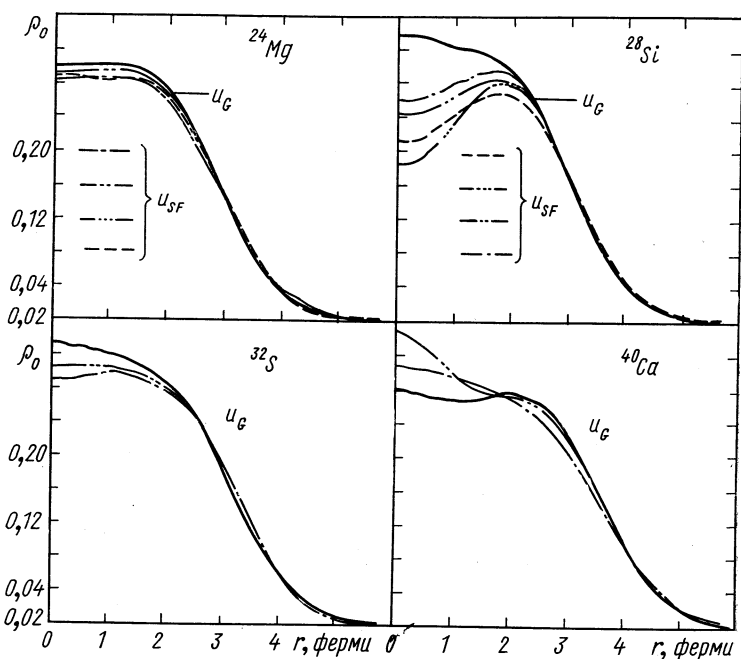


Рис. 21. Распределения плотности заряда, соответствующие расчетам на рис. 19 и 20.

Последний вывод касается обнаруженной неоднозначности модельного описания. Для многих ядер удается найти несколько наборов параметров, для которых эксперимент описывается примерно с одинаковой точностью. Среди наборов имеются и такие, которые близки к найденным в других работах [47, 50] из вариационных расчетов энергий с разного типа нуклон-нуклонными силами. В этом отношении надежды на успешное описание форм-факторов как критерия отбора вариантов NN -сил пока себя не оправдывают. Можно только еще раз подчеркнуть, насколько важно привлекать к анализу данные других экспериментов.

Короткодействующие корреляции в ядрах и форм-факторы

При переходе к большим q кажется естественной идея [53] о необходимости учитывать короткодействующие корреляции нуклонов ядра, возникающие из-за отталкивания на малых расстояниях. Один из простых способов их введения — метод Ястрова [54] — состоит в параметризации волновых функций движения нуклонов ядра друг относительно друга так, чтобы они «выми­рали» при сближении на расстояния порядка диаметра «кора» нуклона. Функция вымирания задается феноменологически, параметры ее определяются подгонкой под эксперимент, связь с реальными нуклон-нуклонными потенциалами не устанавливается. Второй путь более сложный. Это введение реалистических или эффективных NN -сил и численное решение ядерной многочастичной задачи методом Хартри — Фока или более сложным методом Хартри — Фока — Боголюбова, когда наряду с короткодействующими учитываются еще и длиннодействующие корреляции нуклонов ядра.

Остановимся вначале на результатах, полученных в методе Ястрова [55—57]. Многочастичная функция ядра записывается в этом методе в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) = \Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \prod_{i < j}^A F(r_{ij}), \quad (99)$$

$$\Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) = \sum_p \varepsilon_p \frac{1}{A^{1/2}} \prod_{a=1}^A u(pa) = \frac{1}{A^{1/2}} \det \{u_p\} \quad (100)$$

обычный детерминант Слэтера, построенный из одночастичных функций; $F(r)$ параметризуется так, чтобы учесть короткодействующее отталкивание нуклонов на малых расстояниях, например $F^2(r) = 1 + h(r)$; $h(r) = \exp(-r^2/b^2)$. Здесь b — параметр, определяющий скорость спада на малых расстояниях. Подставив (99) в выражение для борновского форм-фактора (68) с РПЗ ядра в виде суммы точечных зарядов (91)

$$F^p(q) = \frac{1}{A} \left\langle \Psi \left| \sum_{j=1}^A \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_j) \right| \Psi \right\rangle, \quad (101)$$

можно, пользуясь методом кластерного разложения [58] и оставляя только нулевые и линейные члены по функции парной корреляции $h(r)$, выразить форм-фактор через одночастичные матрич-

ные элементы [55]:

$$F^p(q) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_i \langle i | j_0(qr_1) | i \rangle - \sum_{ij} \langle ij | j_0(qr_1) h(r_{12}) | ij - ji \rangle - \sum_i \langle i | j_0(qr_1) | i \rangle \sum_{kl} \langle kl | h(r_{12}) | kl - lk \rangle \right\}. \quad (102)$$

Напомним, что измеряемый форм-фактор $|F(q)|^2 = G(q) |F^p(q)|^2$, где $G(q)$ учитывает размеры нуклона и движение центра инерции ядра (87). Таким образом, задача состоит в разделении переменных в (102) и проведении соответствующих интегрирований. Трудности задачи разделения переменных заставляют обычно обращаться к базисным функциям гармонического осциллятора, для которых переход к переменным относительного движения осуществляется с помощью преобразования Талми — Мошинского. При этом приходится жертвовать правильной асимптотикой одночастичных функций. На рис. 22 приведен типичный пример таких расчетов [55] для легких ядер ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$. Видно хорошее согласие с экспериментом и, что наиболее интересно, возможность получить таким методом второй минимум в форм-факторах ядер p -оболочки, который четко наблюдается в ${}^{16}\text{O}$. Таким образом, можно заключить, что метод Ястрова воспроизводит реальные черты РПЗ, несмотря на то, что в основе расчета лежат базисные функции с неправильной асимптотикой. Характерно, что учет короткодействующих корреляций приводит к ослаблению вклада одночастичных функций в РПЗ в центральной области ядра и росту РПЗ на периферии ядра.

Осуществить расчет (102) с функциями конечного потенциала весьма трудная задача — здесь приходится разрабатывать специальные методы для разделения переменных и, в частности, выделения переменных центра инерции ядра. Тем не менее уже есть расчеты по методу Ястрова с использованием потенциалов Вудса — Саксона [57]. Сопоставляя эти два подхода и результаты их сравнения с экспериментом, можно заключить, что введение короткодействующих корреляций в многочастичные функции, построенные на базисе одночастичных функций конечной ямы, позволяет улучшить количественное согласие с экспериментом в области больших q . Поскольку вопрос оценки этого вклада во многом связан с тем или иным произволом в выборе одночастичного базиса, то окончательно ответить на вопрос об истинном значении короткодействующих корреляций в этой области импульсов пока невозможно. Вполне возможно, что эффект короткодействующих корреляций во многом учитывается введением среднего поля — потенциала конечной глубины.

Из многочисленных расчетов РПЗ и других характеристик ядра методом самосогласованного поля приведем здесь только два

примера: 1) расчет по методу Хартри — Фока, который в последние годы стал весьма популярен и экономичен из-за введения эффективного NV -потенциала Скинра [59]. В этом потенциале

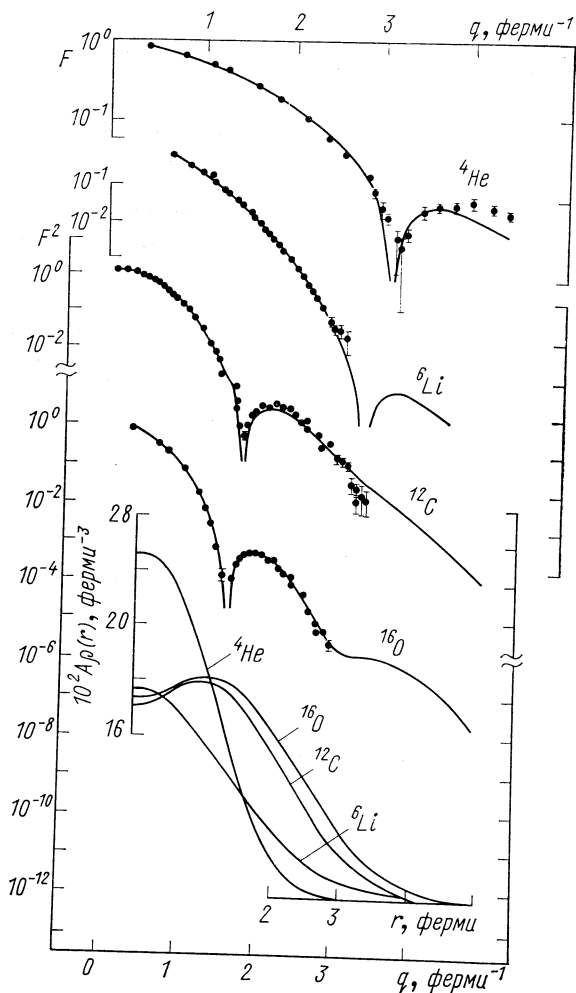


Рис. 22. Форм-факторы легких ядер и соответствующие им РПЗ, рассчитанные с учетом короткодействующего отталкивания нуклонов (базис — функции гармонического осциллятора) [55].

весьма просто учитываются короткодействующее отталкивание нуклонов и зависимость от плотности ядра, что эквивалентно учету трехчастичных сил. На рис. 23 дана типичная иллюстра-

ция расчета по этому методу [60] форм-фактора ядра ^{208}Pb для потенциала Скирма двух видов. Удастся получить хорошее согласие с экспериментом вплоть до максимальных значений переданного импульса. Характерно, что соответствующие РПЗ не совпа-

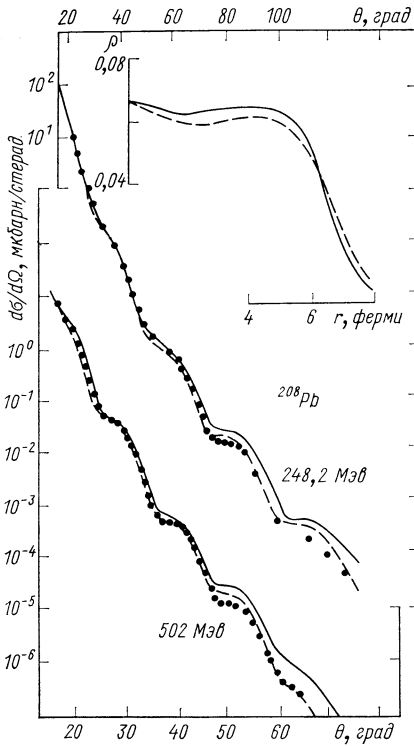


Рис. 23. Распределения плотности заряда ядра ^{208}Pb , рассчитанные методом Хартри—Фока, и соответствующие им форм-факторы [60].

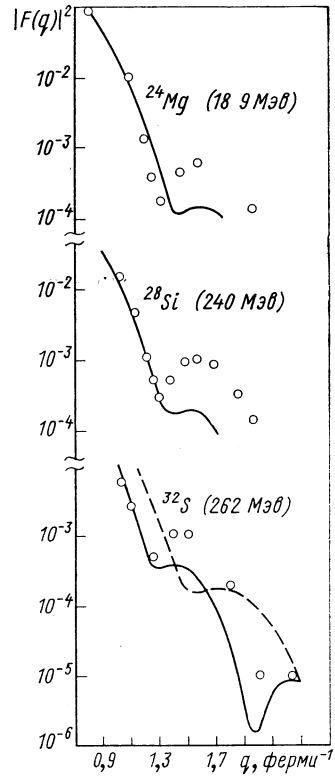


Рис. 24. Расчеты по Хартри—Фоку форм-факторов ядер sd -оболочки:
 — — — базис гармонического осциллятора; — — — — — базис функций потенциала Вудса—Саксона [61].

дают с поведением, предписываемым феноменологической функцией РПЗ с гауссовой асимптотикой (ср. с рис. 6). Для расчетов Хартри—Фока типичным является использование осцилляторного базиса; 2) расчет [61], который только условно можно назвать расчетом по методу Хартри—Фока. Он состоит в использовании пробных многочастичных функций, полученных методом проектировки вращения из детерминанта базисных функций

деформированного поля. Сами базисные функции выбирались как в осцилляторном, так и в потенциале Вудса — Саксона.

Некоторые результаты таких расчетов для ядер $2s - 1d$ -оболочки приведены на рис. 24. Из-за ограниченности выбранного базиса, а в потенциале Вудса — Саксона здесь имеются и принципиальные трудности учета несвязанных состояний, сравнение с экспериментом носит качественный характер. Тем не менее из рисунка видно, что преимущества функций конечной ямы начинают сказываться с ростом переданных импульсов.

Итак, подводя итог «модельным сравнениям», можно сделать общий вывод, что имеется своего рода модельная неоднозначность в описании форм-факторов упругого рассеяния, т. е. почти каждая модель, доведенная до определенной степени совершенства, позволяет хорошо описать зарядовые форм-факторы фактически при всех наблюдаемых значениях переданных импульсов, включая большие q . Такой результат является, с одной стороны, следствием большой работы по совершенствованию моделей, проведенной в последние годы, а с другой, заставляет искать новые данные, скажем, анализировать еще и неупругое рассеяние, чтобы по совокупности многочисленных сравнений установить преимущества исходных предположений, лежащих в основе какой-то определенной модели ядра.

Все же с определенностью можно утверждать, что методы и модели, основанные на использовании функций осцилляторного потенциала, требуют, как правило, введения дополнительных предположений, взаимодействий и т. д., которые в конце концов позволяют просто исправить асимптотику этих функций. Описание экспериментальных данных становится более естественным, если в основу расчетов положены функции с правильной экспоненциальной асимптотикой.

3. НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ НИЗКОЛЕЖАЩИХ КОЛЛЕКТИВНЫХ УРОВНЕЙ ЯДЕР

Неупругое рассеяние электронов ядрами дает ценную информацию о структуре ядра. Помимо приведенной вероятности перехода, которую в некоторых случаях можно выделять из таких сечений, сама форма углового распределения связана с мультипольностью перехода и довольно чувствительна к виду радиальной переходной плотности РПП (21). Кроме того, данные неупругого рассеяния дают дополнительную информацию, анализ которой вместе с данными упругого рассеяния позволяет сформулировать более строгие ограничения на выбор РПЗ и РПП в процедуре модельно-независимого поиска или в результате прямых

модельных расчетов и сравнений с экспериментом, позволяет выявить наиболее оправданные модели ядра.

Так же, как и в случае упругого рассеяния, неупругие форм-факторы можно вычислять, пользуясь борновским приближением для легких ядер, точным методом фазового анализа или высокоэнергетическим приближением для средних и тяжелых ядер. Выше было приведено общее выражение (23) для форм-фактора неупругого рассеяния в ВЭП, которое выражается через интегралы от функций РПП $\rho_L(x)$. Последние можно вычислять независимо в любой модели ядра. Ниже, следуя работе [36], покажем, как вычислить соответствующие форм-факторы в явном аналитическом виде, если использовать характерные общие свойства РПП при возбуждении низколежащих коллективных уровней ядер. Далее разберем отдельно, как вычисляется РПП в рамках макро- и микромоделей ядра. Конкретные примеры расчета неупругих форм-факторов и их сравнение с экспериментом, а также некоторые общие выводы даны ниже.

Неупругие форм-факторы в ВЭП

Вычислим интеграл (23), определяющий форм-фактор неупругого рассеяния, в общем виде для произвольного вида РПП $\rho_L(x)$. Для этого обратим внимание на характерную черту в поведении РПП при однофонных переходах — все они имеют максимум в районе границы ядра ($x \approx R$), экспоненциально спадают во внешней области ($x > R$), а внутри ядра ($x < R$) имеют ряд осцилляций. Для такого вида функций можно применять разработанный в работах [9, 36] метод, суть которого состоит в представлении фермиподобной функции в виде ряда производных от ферми-плотности. В данном случае

$$\rho_L(x) = \sum_{m=0}^N a_m^L \phi^{(m)}(x; R, b); \quad (103)$$

$$\phi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \phi^{(0)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \cdot \frac{1}{1+e^z} \left(z = \frac{x-R}{b} \right). \quad (104)$$

Здесь коэффициенты разложения a_m^L и число членов ряда N проще всего отыскивать подгонкой методом наименьших квадратов ряда (103) к заданной функции $\rho_L(x)$. Таким образом, разложение (104) становится вполне определенным. Подставляя его в (23) с заменой там знаков интегрирования и дифференцирования и используя полюсный метод расчета получаемых интегралов, находим:

$$F_{L0}(q, E) = \sum_{m=0}^N a_m^L I_{L0}^{(m)}(q, E), \quad (105)$$

где

$$I_{L_0}^{(m)}(q, E) = 4\pi^2 q b^2 (-i)^{m-1} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{G_{L_0}(x_0^\varepsilon)}{q_{\text{эф}}^2(x_0^\varepsilon)} \times \\ \times (bq_{\text{эф}}(x_0^\varepsilon))^{m-1} [m + q_{\text{эф}}(x_0^\varepsilon)(iR - \varepsilon b \operatorname{cth} \pi q b)] \times \\ \times \frac{\exp i[\varepsilon q R + \phi(x_0^\varepsilon)]}{2 \operatorname{sh} q \pi b}.$$

Здесь $x_0^\varepsilon = R + i \varepsilon b$; функции $\phi(x)$, $q_{\text{эф}}(x)$ и $G_{L_0}(x)$ известны в явном виде и приведены в приложении 1. В случае $L = 0$ этот результат совпадает с полученным ранее выражением [9] для упругого рассеяния при произвольном РПЗ $\rho_0(x)$. Не представляет труда обобщить этот результат на случай $M \neq 0$, что, однако, приводит к малой добавке порядка $(qR)^{-2}$.

Итак, теперь задача вычисления сечения неупругого рассеяния сводится к тому, чтобы полученную в рамках какой-либо модели ядра РПП разложить в ряд (103) и воспользоваться найденными коэффициентами a_m^L для вычисления интеграла (105), определяющего сечение неупругого рассеяния.

Переходная плотность в макромодели

Обычно в этом случае РПП отыскивается на базе ферми-плотности ядра $\rho_F(x, R, b)$, где параметр R рассматривается как функция динамических переменных $\alpha_{\lambda\mu}$, характеризующих колебания поверхности ядра возле равновесной сферической формы, а именно

$$\rho_F(xR_0b) = \rho_0 \{1 + \exp[(x - R_0 - \Delta R(\Omega))/b]\}^{-1}, \quad (106)$$

где

$$\Delta R(\Omega) = R_0 \sum_{\lambda\mu} \{\alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\Omega) - [(-1)^\mu / 4\pi] \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda-\mu}\};$$

Ω — угловые координаты движущегося электрона. Разлагая теперь ρ_F по малости $\Delta R/R_0$ и ограничиваясь первыми исчезающими слагаемыми в каждом переходе, получаем для радиальной плотности перехода $\rho_L^{(n)}(x)$ из основного состояния ядра $|0\rangle$ в возбужденное $|n, JM\rangle$ (n — число фононов) следующие выражения:

1) для основного состояния ($n = 0$, упругое рассеяние):

$$\rho_L^{(0)}(x) = \rho_F^{(0)}(x) \cdot \langle 0 | \delta_{L_0} | 0 \rangle; \quad (107)$$

2) для однофононного перехода ($n = 1$, $L = 2, 3$), модель Тасси [62]:

$$\rho_L^{(1)}(x) = \langle J; 1 | \hat{\mathfrak{M}}_L | 0 \rangle \frac{1}{J_L^{(1)}} \rho_F^{(1)}(x); \quad (108)$$

3) для двухфононного перехода ($n = 2, L = 2, 4, \dots$):

$$\rho_L^{(2)}(x) = \langle J; 2 \parallel \hat{\mathfrak{M}}_L \parallel 0 \rangle \frac{1}{J_L^{(2)}} \rho_F^{(2)}(x); \quad (109)$$

4) для монополюсных переходов ($n = 2, L = 0$):

$$\rho_0^{(2)}(x) = \langle 0; 2 \parallel \hat{\mathfrak{M}}_0 \parallel 0 \rangle \frac{1}{J_0^{(2)}} [\rho_F^{(1)}(x) - R\rho_F^{(2)}(x)], \quad (110)$$

где

$$J_{L \neq 0}^{(n)} = \int \rho_F^{(n)}(x) x^{L+2} dx; \quad J_0^2 = R^3 \int [\rho_F^{(1)}(x) - R\rho_F^{(2)}(x)] x dx; \quad (111)$$

$$\rho_F^{(n)}(x) = \frac{\partial^n}{\partial (\Delta R)^n} \rho_F(x, R_0, b) \Big|_{\Delta R=0},$$

а $\hat{\mathfrak{M}}_L$ — оператор электрического и монополюсного ($L = 0$) переходов.

Используя определение приведенной вероятности перехода [63]

$$B^{(n)}(EL; J \rightarrow 0) = |\langle J; n \parallel \hat{\mathfrak{M}}_L \parallel 0 \rangle|^2, \quad (112)$$

получаем, таким образом, следующее выражение для сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{i \rightarrow j}^{(n)} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \frac{2J_i + 1}{2J_f + 1} \sum_{LM} \frac{1}{e^2} B^{(n)}(EL; J_f \rightarrow J_i) \times \\ &\times \frac{|F_{LM}^{(n)}|^2}{2L + 1}. \end{aligned} \quad (113)$$

Здесь

$$F_{LM}^{(n)}(q, E) = \frac{1}{J_L^{(n)}} \sum_{m=0}^N a_m^{(n)} I_{LM}^{(m)}(q, E), \quad (114)$$

где в случае однофононных, двухфононных и монополюсных переходов имеем соответственно: $a_m^{(n)} = \frac{1}{b^n} \delta_{mn}$; $a_m^{(0)} = [\delta_{1m}/b - R\delta_{2m}/b^2]$.

Следует заметить, что традиционный подход к неупругому рассеянию, базирующийся на гидродинамическом описании колебаний или вращений ядра, весьма удобен для обработки экспериментальных данных. При этом анализируется лишь кинематическая часть сечения, описывающая угловое распределение, а сравнение абсолютных величин сечений дает приведенную вероятность электрического перехода мультиполюсности L . Однако можно сделать некоторое обобщение такого подхода, где учитывались бы, по крайней мере формально, некоторые характерные черты РПЗ

(их «тонкая», оболочечная структура), которые выявились в последние годы. С другой стороны, расчеты РПЗ и РПП на базе микромоделей ядра всегда дают подобного вида радиальные вариации, причем их поведение в основном соответствует рассмотренному выше. Именно переходная плотность однофононного перехода весьма близка к производной от плотности заряда. Все это позволяет строить единое феноменологическое описание упругого и неупругого рассеяния электронов на базе одного и того же РПЗ произвольного вида:

$$\rho(x) = \sum_{m=0}^N a_m \phi^{(m)}(x; R, b). \quad (115)$$

В этом случае функциям $\rho^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2$) из формул (107) — (114) придается более общий смысл — теперь они есть производные от РПЗ (115) и выражаются через те же самые коэффициенты:

$$\rho^{(n)}(x) = \frac{1}{(-b)^n} \sum_{m=0}^N a_m \phi^{(m+n)}(x; R, b). \quad (116)$$

Хотя подобное обобщение несколько формально, оно справедливо в той же мере, т. е. в той же мере нарушает принципы гидродинамической модели ядра, что и изложенная выше традиционная схема. С другой стороны, это обобщение может быть полезным при МН-анализе экспериментальных данных с целью извлечения информации о РПЗ. Такой анализ теперь можно проводить совместно для упругого и неупругого рассеяния, используя выражение для РПЗ (115) и РПП (116) с одними и теми же коэффициентами a_m , которые отыскиваются как варьируемые параметры при сравнении теории и эксперимента по χ^2 -методу. Такой совместный анализ может сузить неопределенность в ходе РПЗ во внутриядерной области, которая получалась из анализа данных только упругого рассеяния при обычных энергиях электронов (см. рис. 13).

Переходная плотность в микромоделю

В рамках микромодели динамическими переменными ξ , описывающими состояния сферического ядра, являются операторы $a_{\nu\tau}^+ a_{\nu\tau}$ рождения и уничтожения частицы в состоянии $\nu = n, l, j, m$ с проекцией изоспина τ . В терминах этих операторов РПЗ записывается в следующем общем для всех микромоделей виде:

$$\rho(x\xi) = \sum_{n=1}^A \rho(x - r_n) = \sum_{\nu_1 \tau_1 \nu_2 \tau_2} \langle \nu_1 \tau_1 | \rho(x - r) | \nu_2 \tau_2 \rangle a_{\nu_1 \tau_1}^+ a_{\nu_2 \tau_2}. \quad (117)$$

Волновые функции базиса $|\nu\tau\rangle$ определяются так:

$$\left. \begin{aligned} |\nu\tau\rangle &= R_{\bar{\nu}}(r) \chi_{\bar{\nu}}^{\tau;l} \left| l \frac{1}{2} jm \right\rangle; \\ \left| l \frac{1}{2} jm \right\rangle &= \sum_{\mu} \left(l \frac{1}{2} \mu, m - \mu \mid jm \right) Y_{l\mu}(\hat{r}) \chi_{1/2}^{m-\mu} \\ & \quad (\bar{\nu} = n, l, j). \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Для точечных зарядов

$$\rho(\mathbf{x} - \mathbf{r}) = \varepsilon_{\tau} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) = \varepsilon_{\tau} \frac{\delta(x-r)}{x^2} \sum_{LM} Y_{LM}(\hat{r}) Y_{LM}^*(\hat{x}),$$

и тогда

$$\rho(\mathbf{x}\xi) = \sum_{LM} \mathcal{P}_{LM}(x, \xi) Y_{LM}^*(\hat{x}),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{LM} &= \sum_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \tau} A_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \tau}^L(x) [a_{\bar{\nu}_1 \tau}^+ a_{\bar{\nu}_2 \tau}]_{LM}; \\ A_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \tau}^L(x) &= \varepsilon_{\tau} R_{\bar{\nu}_1}(x) R_{\bar{\nu}_2}(x) \times \\ & \times i^{l_1 - l_2 - 1} (-1)^{j_1} \sqrt{(2j_2 + 1)/4\pi} \left(j_1 j_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} / L0 \right); \\ [a_{\bar{\nu}_1 \tau}^+ a_{\bar{\nu}_2 \tau}]_{LM} &= \sum_{m_1 m_2} (j_2 L m_2 M \mid j_1 m_1) a_{\bar{\nu}_1 \tau}^+ a_{\bar{\nu}_2 \tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, РПП выразится в общем виде:

$$\begin{aligned} \rho_L(x) &= \langle J_f \parallel \mathcal{P}_L(x, \xi) \parallel J_i \rangle = \\ &= \sum_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \tau} A_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \tau}^L(x) \langle J_f \parallel [a_{\bar{\nu}_1 \tau}^+ a_{\bar{\nu}_2 \tau}]_{LM} \parallel J_i \rangle, \end{aligned} \quad (119)$$

где $|J_{i,f}\rangle$ — волновые функции основного i и возбужденного f состояний ядра — определяются в рамках какой-либо конкретной микромодели.

Выражение (119) для точечных частиц можно обобщить на случай, когда нуклоны имеют размазанный заряд с плотностью $\rho_p(x)$. Тогда РПП $\bar{\rho}_L(x)$ определяется следующим образом:

$$\bar{\rho}_L(x) Y_{LM}^*(\hat{x}) = \int \rho_L(r) Y_{LM}^*(\hat{r}) \rho_p(|\mathbf{x} - \mathbf{r}|) dr. \quad (120)$$

Предложенный выше метод расчета неупругого рассеяния интересно проверить сравнением с соответствующими точными расчетами, взяв за основу одну и ту же микромодель ядра. Такого рода точные расчеты были выполнены в работе [28], где рассматривалось неупругое рассеяние электронов на сферических ядрах.

причем волновые функции относительного движения электрона находились численным решением уравнения Дирака, а низколежащие возбужденные состояния рассматривались как фононные на базе микромодели ядра с учетом остаточных парных и квадрупольных взаимодействий нуклонов. Подобные модели часто используются в последние годы, однако в работе [28] введены изменения, которые необходимы при рассмотрении вопросов рассеяния. Именно: в качестве одночастичного базиса (118) выбирались функции в поле потенциала Вудса — Саксона с включением $1s$ -членов. Это дает правильную (экспоненциальную) асимптотику таких функций и соответствующих РПЗ и РПП в районе границы ядра, что важно при описании упругого и неупругого рассеяния.

В рамках этой модели для перехода на однофононное состояние $|JM\rangle = B_{JM}^{\dagger} |0\rangle$ получим в согласии с работой [28] выражение для РПП:

$$\rho_L(x) = \sum_{\substack{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{\nu} \\ (j_1 \leq j_2)}} (1 + \delta_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2})^{-1/2} (v_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}} u_{\bar{\nu}_2 \bar{\nu}} + v_{\bar{\nu}_2 \bar{\nu}} u_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}}) \times \\ \times (\Pi_L^{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{\nu}} - \Lambda_L^{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{\nu}}) A_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{\nu}}^L(x). \quad (124)$$

Здесь (u, v) и (Π, Λ) — амплитуды квазичастичных и фононных преобразований.

Сравнение с экспериментом

Феноменологическая модель Тасси до сих пор является одной из популярных моделей РПП, используемой для анализа неупругого рассеяния электронов на ядрах с возбуждением нижайших однофононных уровней. Обычно цель такого анализа состоит в получении с помощью (113) точной (из-за электромагнитного характера взаимодействия) информации о вероятностях перехода $B(EL)$ и основных характеристиках размера той области ядра, где осуществляется переход, — ее «центра тяжести» R и «ширины» b . Поскольку нижайшие производные от ферми-плотности, определяющие в феноменологическом подходе функции РПП, не содержат быстрых, оболочечного типа вариаций, то модели такого вида могут претендовать на описание эксперимента лишь в области малых и средних переданных импульсов.

В качестве примера приведем результаты анализа [64] ранних экспериментальных данных [65] неупругого рассеяния электронов на ядре ^{52}Cr с возбуждением в нем однофононного 2^+ и двух двухфононных 2^+ и 0^+ состояний (рис. 25). Расчет велся в ВЭП, параметры R и b фиксировались в работе [8] по данным упругого рассеяния на том же ядре. Сравнение экспериментальных и теоретических сечений (113) позволило определить соответствующие $B(EL)$. Сопоставление расчетов в ВЭП и в борновском приближе-

нии показывает, что эффекты искажения имеют важное значение и дают не только сдвиг и заполнение дифракционных минимумов, но также меняют и абсолютные значения сечений, что важно для получения точной информации о $B(E_L)$.

В последние годы с появлением данных по рассеянию на деформированных ядрах эта модель стала использоваться для извлечения основных характеристик таких ядер — параметров деформации β_L . Так, в работе [66] был проведен анализ неупругого рассеяния электронов на ядре ^{152}Sm с возбуждением 0^+ , 2^+ , 4^+ -уровней основной вращательной полосы (рис. 26). При этом модель Тасси обобщалась таким образом, чтобы были учтены поправки на возможную деформацию ядра высших порядков:

$$\Delta R = R_0 (1 + \beta_2 Y_{20}(\Omega) + \beta_4 Y_{40}(\Omega) + \beta_6 Y_{60}(\Omega)). \quad (122)$$

Методом оптимальной подгонки были найдены следующие значения: $\beta_2 = 0,287$ и $\beta_4 = 0,070$ (параметр β_6 был взят из данных по рассеянию α -частиц; $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ — из данных по μ -мезоатомам; $B(E2)$ известно). Следует, однако, отметить, что кроме эффекта увеличения параметра диффузности в упругом рассеянии на деформированных ядрах [24] при возбуждении уровней вращательной полосы заметное значение приобретают эффекты высших порядков теории возмущений — многократное рассеяние, на что обращалось внимание в работе [67]. В деформированных ядрах должны также легко возбуждаться уровни β - и γ -колебаний, для которых можно рассчитать соответствующие форм-факторы [68] в рамках феноменологических моделей Давыдова. В последние годы к этому вопросу снова возрос интерес.

Итак, можно заключить, что феноменологический анализ неупругого рассеяния в рамках модели Тасси или близких к ней

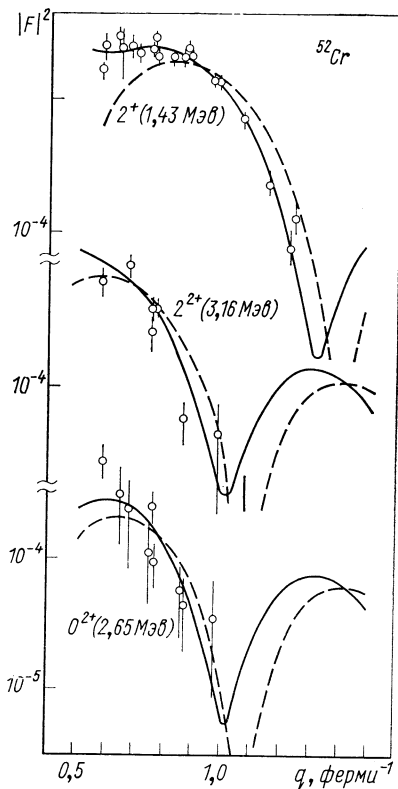


Рис. 25. Форм-факторы неупругого рассеяния электронов на ^{52}Cr , рассчитанные по макромоделю Тасси: — — — — вЭП; — — — — (борновское приближение [64]).

является типичным как первая стадия обработки данных эксперимента с целью установления основных характеристик возбужденных ядер. (Краткий обзор данных, полученных харьковской группой и их анализ дан в работе [24], обзор некоторых других работ имеется в работе [69].)

При переходе к большим q или для более детального анализа эксперимента естественно использовать микромоделные расчеты РПП.

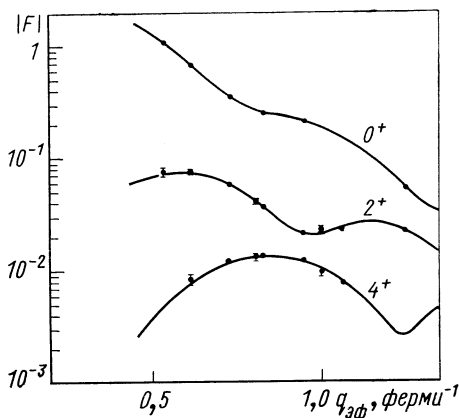


Рис. 26. Неупругое рассеяние электронов на ^{152}Sm с возбуждением уровней основной вращательной полосы. Расчет по макромоделе [66].

ности (пунктирная кривая). Следуя методике, изложенной выше, представим функцию в виде ряда (103) и методом наименьших квадратов найдем набор коэффициентов $\{a_m^L\}$. Оказывается, что при большой точности подгонки (99%) достаточно взять всего $N = 10$ членов этого ряда. Подставив полученный набор $\{a_m^L\}$ в формулу для амплитуды (105) и далее — в выражение для сечения (23), найдем окончательный результат, который показан на рис. 27, б, где отложено значение форм-фактора $|F|^2 = \sigma_{i \rightarrow f} / \sigma_{\text{Mott}}$ (сплошные и пунктирные кривые соответствуют приведенным на рис. 27, а переходным плотностям). Штрихпунктирной кривой даны точные расчеты [28] с переходной плотностью в случае «размазанного» протонного заряда. Видно, что предложенный метод приводит к хорошему согласию (в рамках исходного ВЭП, начиная с $\vartheta = 40^\circ$ и далее) с точными расчетами.

Теперь проанализируем последние экспериментальные данные по упругому и неупругому рассеянию электронов с энергией $E = 225 \text{ Мэв}$ на ядре ^{58}Ni [37] с использованием тех же плотно-

ты РПП. Рассмотрим пример анализа [36] ядра ^{58}Ni . В работе [28] на основе формулы (121) были выполнены расчеты РПЗ и РПП этого ядра. Результаты их приведены на рис. 27, а и 28, а. Видно, что РПП имеет характерный максимум на границе ядра (пунктирная кривая). Усреднение ее по формуле (120) с эмпирической плотностью заряда нуклона дает более плавную РПП (сплошная кривая). На рис. 28 сплошной кривой дано рассчитанное в работе [28] РПЗ и видны типичные для микромодел предсказания радиальных вариаций этой функции, которые и отличают ее от ферми-плотности (пунктирная кривая).

стей заряда и перехода. На рис. 28, б изображены результаты этого анализа. Пунктирные кривые — расчеты на базе гидродинамической макромодели с ферми-плотностью ($R_0 = 4,148$, $b = 0,559$), а сплошные кривые соответствуют РПЗ и РПП, полученным в микромоделе [28]. Сравнение с экспериментом показывает, что рассчитанная «микроплотность» имеет завышенный радиус; это проявляется в сдвиге первого минимума упругого рассеяния в сторону малых углов. Более интересно то, что обе

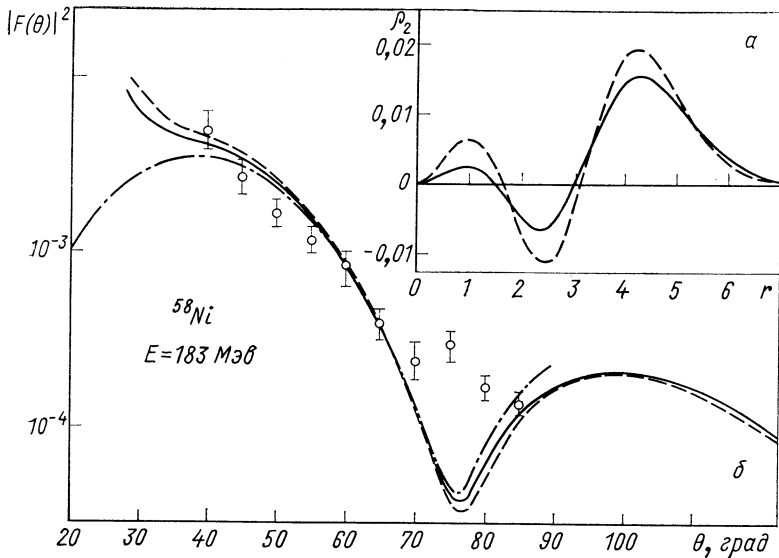


Рис. 27. Сравнение точных (штрих-пунктирная кривая) и приближенных (по ВЭП) расчетов неупругого рассеяния с возбуждением первого 2^+ -уровня в ^{58}Ni :
 — — — и — — — — «точечная» и «размазанная» плотности перехода, рассчитанные по микромоделе в работе [28], и соответствующие им форм-факторы [36].

модели дают явно неудовлетворительное описание неупругого рассеяния в области минимума, где расхождение с экспериментом достигает 70%.

В связи с отмеченным расхождением был предпринят модельно-независимый поиск возможных переходных плотностей, которые дали бы хорошее описание всех экспериментальных точек неупругого рассеяния. В нашем подходе эту задачу нетрудно осуществить, так как сечение (23) выражается в виде ряда известных функций с теми же коэффициентами a_m , что и в переходной плотности (103). Поэтому, проводя анализ экспериментальных точек по χ^2 -методу, где эти коэффициенты выступают как варьируемые параметры, можно отыскать один из возможных наборов a_m ,

а следовательно, и соответствующую переходную плотность, которая всюду нормировалась на величину $B(E2)$ так, чтобы $B(E2)/e^2 = |\int \rho_2(x) x^2 dx|^2$ (анализ показал, что наилучшим является значение $B(E2)/e^2 = 120$ ферми²). МН-анализ уже применялся для упругого рассеяния; было показано, что на основе имеющихся экспериментальных данных невозможно однозначно определить распределение плотности заряда в центральной части ядра. В данном случае получается аналогичный результат.

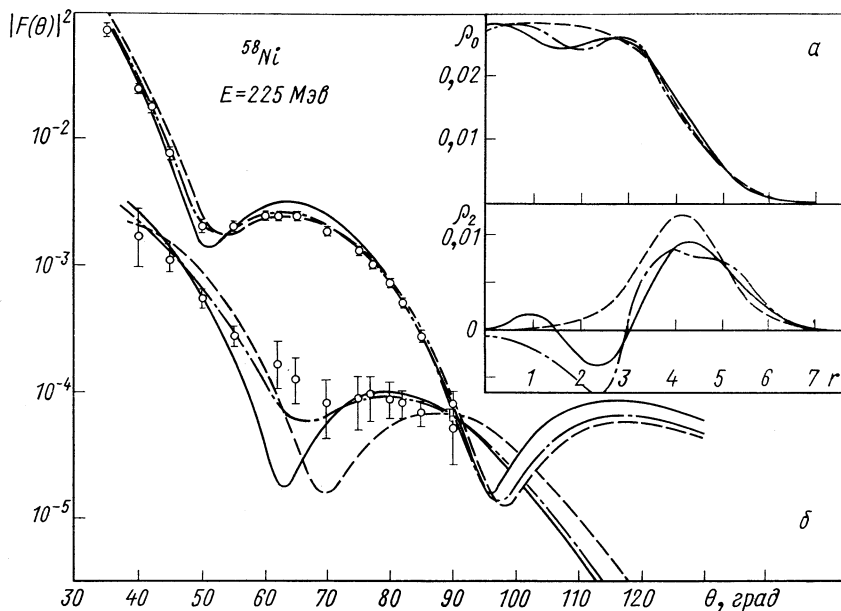


Рис. 28. Анализ упругого и неупругого рассеяния электронов с возбуждением первого 2^+ -уровня ^{58}Ni :

— — — расчеты по макромоделю с ферми-плотностью; — — — по микромоделю [28]; — · — · — один из вариантов РПЗ и РПП, восстановленных соответственно из упругого и неупругого форм-факторов методом МН-анализа [36].

На рис. 28, а штрих-пунктиром изображена одна из возможных переходных плотностей, которая дает хорошее согласие с экспериментальным форм-фактором, но, однако, значительно отличается от модельных РПП тем, что имеет сглаженный пик у границы ядра и более сложный ход вне ядра. Результат независимо проведенного анализа для упругого рассеяния дан на этом же рисунке (штрих-пунктир). Сравнение полученных кривых показывает, что поведение переходной плотности у границы ядра не совпадает с поведением производной от плотности заряда, что постулируется моделью Тасси. Последний результат может показаться любопыт-

ным, так как до сих пор все попытки описать неупругое рассеяние строились в основном на базе макромоделей, где эта зависимость предполагается с самого начала. Поэтому был проведен совместный МН-анализ упругого и неупругого рассеяния, где данное условие также вводилось, хотя форма исходного РПЗ могла быть произвольной, как было показано выше. На рис. 13 штрих-пунктиром показаны результаты такого анализа. Для сравнения сплошными кривыми даны расчеты, соответствующие обычному подходу на базе ферми-плотности. Полученные результаты показывают, что постулируемая связь между РПЗ и РПП оказывается довольно жестким условием и не позволяет дать полное описание неупругого рассеяния, несмотря на то, что имеется широкая возможность варьировать плотность во внутренней области ядра.

Рассмотрим теперь еще один пример: результаты анализа неупругих форм-факторов легких ядер ^{12}C и ^{16}O в рамках α -кластерной модели Бринка. Выше были даны вывод соответствующих выражений для РПЗ и РПП (93) и некоторые выводы относительно α -кластерных свойств основных состояний ряда ядер, следующие из анализа упругого рассеяния. В частности, оказалось, что ядро ^{12}C слабо кластеризовано, а ядро ^{16}O фактически не кластеризовано в основном состоянии. Что касается неупругого рассеяния, то анализ, проведенный в работах [48, 52], приводит к следующему. Прежде всего, расчеты форм-фактора 2^+ - и 3^- -состояний вращательной природы ядра ^{12}C [48] с параметрами, соответствующими наилучшей подгонке упругого рассеяния (см. рис. 17), дают лишь качественное согласие с экспериментом, в основном для малых переданных импульсов. Далее, в обоих случаях не удается найти набор параметров, одинаково хорошо описывающих упругое и неупругое рассеяние при всех значениях q . Это свидетельствует об ограниченности подхода, в котором параметры АКМП задаются одинаковыми для всех состояний вращательной полосы.

Поэтому представляет интерес независимая подгонка в результате вариации параметров пробных функций форм-факторов неупругого рассеяния с возбуждением 2^+ - и 3^- -уровней без привязки к параметрам упругого рассеяния. Это позволяет детальнее понять структуру возбужденных состояний ядра, например их плотности перехода и соответствующие среднеквадратичные радиусы. Естественно, подгонка должна вестись на базе пробных функций с экспоненциальной асимптотикой так, чтобы описать область минимума неупругого форм-фактора в районе $q \approx 2,5 - 3,0 \text{ ферми}^{-1}$.

На рис. 29 приведены результаты таких расчетов и их сравнение с экспериментом. Во-первых, из рисунка видно, что и в этом случае проявляется неоднозначность модели, так как по крайней

мере по три кривые на каждое состояние можно считать удачно описывающими эксперимент. Таблица соответствующих параметров приведена в работе [52]. Далее, среднеквадратичные радиусы

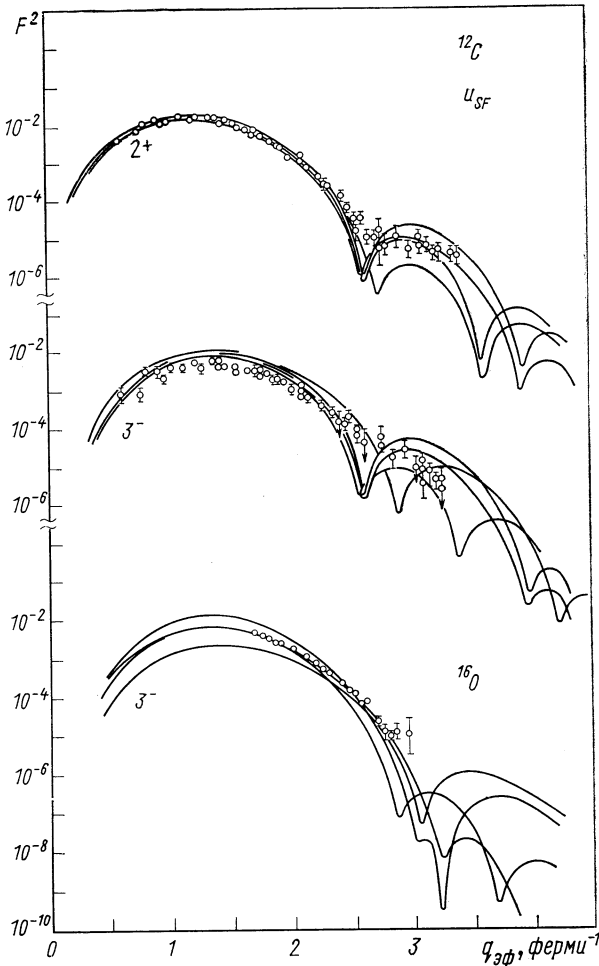


Рис. 29. Различные варианты расчетов неупругих форм-факторов ядер ^{12}C и ^{16}O в рамках α -кластерной модели Бринка с пробными функциями экспоненциальной асимптотики [52].

ядер с параметрами подгонки по неупругому рассеянию оказываются примерно на 0,2 ферми больше соответствующих радиусов упругого рассеяния. Но более интересным результатом является то, что, например, требование наилучшей подгонки неупругого

рассеяния для ^{12}C приводит к параметрам $R_\alpha = 2,0$ ферми и $b_\alpha = 0,5-0,6$ ферми ($R(^4\text{He}) = 1,77-1,9$ ферми). Их можно оценить так, что α -кластеры в возбужденных состояниях ядра ^{12}C становятся более компактными, чем в основном состоянии, и имеют тенденцию к сближению с параметрами свободной α -частицы. Этот же эффект формирования кластеров при возбуждении ядра обнаруживается и при анализе соответствующих плотностей перехода. Так, для ядра ^{12}C плотности перехода с параметрами наилучшей подгонки неупругих форм-факторов выдвинуты от центра ядра значительно дальше (примерно на 1 ферми), чем рассчитанные с параметрами наилучшей подгонки упругого рассеяния. Об этом же говорит и изменение параметра конфигурации R . По данным упругого рассеяния он оказывается заметно меньшим, чем для возбужденных состояний.

Тот факт, что параметры структуры ядер оказываются разными для различных состояний, указывает на существенное значение взаимосвязи вращений и колебаний. В этой связи отметим, что анализ форм-факторов в простой α -частичной модели с учетом возможных колебаний α -кластеров возле своих центров [70] расширяет возможности единого описания целой группы ядерных состояний.

Подведем некоторые итоги рассмотрения неупругого рассеяния. Так, феноменологический подход уже дал много информации о таких важных структурных характеристиках ядра, как вероятности перехода, параметры формы ядра и т. п. С другой стороны, он используется и для установления основных геометрических характеристик той области ядра, где сосредоточен переход. При малых и средних q эту область можно определить согласно модели Тасси, связав функцию РПП с производной от РПЗ. Однако при детальном анализе эксперимента, включая область больших q , обнаруживается, что эта связь нарушается, и функцию РПП приходится задавать независимо. С каким-то уровнем точности ее можно найти, пользуясь методами МНА. Но для понимания основных черт РПП в зоне периферии ядер (особенно средних и тяжелых) важно привлекать микромоделли, которые дают «тонкую структуру» функции переходной плотности. Современные эксперименты позволяют различать эту структуру. Сейчас уже можно сделать некоторые заключения о поведении ядра в возбужденных состояниях. В частности, для ряда легких ядер оказывается, что их α -кластеризация в некоторых возбужденных состояниях усилена по сравнению с основным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прошло время согласия с экспериментом и удовлетворения простыми феноменологическими моделями типа гауссовых или ферми-функций РПЗ для упругого или модели Тасси РПП для

неупругого рассеяния. Современные данные эксперимента требуют нового уровня их теоретического анализа. Развиваются математические основы метода модельно-независимого анализа форм-факторов с целью извлечения из них непосредственной информации об истинных функциях РПЗ и РПП ядра. По существу это есть развитие методов обратной задачи рассеяния. А пока МНА не может выделять единственную (конечно, в пределах каких-то погрешностей) функцию РПЗ или РПП, которую можно было бы назвать экспериментальной. Из-за ограниченности экспериментальной информации и собственного несовершенства этот метод пока не может избавиться от неоднозначности решений. Многое здесь зависит от выбора вида пробных функций РПЗ и РПП и внесения дополнительной информации из других экспериментов. В то же время совершенствуются модели структуры ядра, так чтобы на основе прямого анализа можно было объяснить не только общие качественные закономерности хода форм-факторов, но и все детали их поведения, особенно в области больших переданных импульсов.

Очевидно, что форм-факторы — гораздо более чувствительная ко всякого рода погрешностям подходов и моделей характеристика ядра, чем более «грубые» интегральные характеристики ядра, такие, как, например, энергия или вероятность перехода. И тем не менее даже здесь в анализе современных, очень точных данных сталкиваемся с весьма любопытной ситуацией. Действительно, целый ряд моделей ядра при внесении в них определенных усовершенствований дает примерно одинаково хорошее описание одних и тех же данных эксперимента. (Выше мы намеренно подбирали одни и те же данные для сравнений, чтобы проиллюстрировать этот тезис.) Таким образом, прямой, модельно-зависимый анализ не позволяет на основе только данных рассеяния электронов сделать выбор между используемыми моделями. Необходимо анализировать «обоснованность» тех или иных предположений, которые лежат в основе выбранных для сравнения моделей, привлекая в качестве тестов дополнительные данные других экспериментов. Интересно, что даже в рамках одной модели при известном напряжении можно получить несколько возможностей объяснения одних и тех же форм-факторов, хотя это и делается в результате изменения внутренних параметров модели в «допустимых» пределах, так чтобы не нарушать уровня согласия с другими данными. Мы видели это на примере α -кластерной модели ядра.

Из всего этого можно сделать вывод, что при современном уровне развития вычислительной техники, когда имеются чрезвычайно большие возможности производить подгонку под эксперимент практически любой разработки, требуется особая бдительность в отборе именно научных, а не спекулятивных подходов

и моделей. В противном случае излишняя вера в иллюстрацию любой хорошей подгонки под эксперимент может через некоторое время обернуться напрасно потраченными усилиями на движение в ложном направлении.

В заключение авторы выражают свою признательность В. В. Бурову за помощь в подборе и оформлении материалов при подготовке обзора.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Получим выражение для функций $g(\mathbf{r}, \sigma)$ и $\phi(\mathbf{r})$ из (14) и (23) в явном виде. Для этого, следуя работе [7], разложим кулоновский потенциал в ряд Тейлора и ограничимся квадратичным членом разложения. Для сферически симметричного распределения плотности заряда $\rho(x)$ имеем

$$V(r) = -4\pi\gamma \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(x) x^2 dx + \int_r^\infty \rho(x) x dx \right\} \quad (\text{П.1})$$

и

$$V(r) \approx V(0) + ak^3 r^2/2, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\gamma = Ze^2/(\hbar c) = Z/137; \quad V(0) = -4\pi\gamma \int_0^\infty \rho(x) x dx; \quad a = (4\pi/3) \gamma \rho(0)/k^3.$$

Тогда первый интеграл функции (27) берется непосредственно подстановкой (П.2), второй оценим, разлагая его по степеням прицельного расстояния (ρ^2) и ограничиваясь квадратичным членом

$$\phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -V(0) \cdot z - a(k^3 \rho^2 z + k^3 z^2/3)/2 \mp b(\rho k)^2 + c(\rho k)^4, \quad (\text{П.3})$$

где

$$b = \frac{\pi\gamma}{k^2} \int_0^\infty \rho(x) dx; \quad c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\pi\gamma}{k^4} \int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \rho(x) dx.$$

Учитывая, что $\mathbf{r} = \rho + \hat{k}z$ и $\rho \perp \mathbf{k}$, можно записать (П.3) в виде

$$\phi^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -V(0)(\mathbf{k}\mathbf{r})/k - \frac{1}{2} a(\mathbf{k}\mathbf{r})(3k^2 r^2 - 2(\mathbf{k}\mathbf{r})) \mp b[\mathbf{r}\mathbf{k}]^2 \pm c[\mathbf{r}\mathbf{k}]^4. \quad (\text{П.4})$$

Подставляя (П.4) и (П.2) в (24) и (14) и ограничиваясь линейными по $V(0)$ a , b и c членами, получаем

$$g(\mathbf{x}, \sigma) = (1 - V(0)/k) \{ 1 + a((\mathbf{k}_i \mathbf{x})^2 - [\mathbf{k}_i \mathbf{x}]^2 + (\mathbf{k}_f \mathbf{x})^2 - [\mathbf{k}_f \mathbf{x}]^2) + 3b((\mathbf{k}_i \mathbf{x}) - (\mathbf{k}_f \mathbf{x})) - 10c((\mathbf{k}_i \mathbf{x})[\mathbf{k}_i \mathbf{x}]^2 - (\mathbf{k}_f \mathbf{x})[\mathbf{k}_f \mathbf{x}]^2) - [a((\mathbf{k}_i \mathbf{x}) + (\mathbf{k}_f \mathbf{x}))/2 - 2c([\mathbf{k}_i \mathbf{x}]^2 - [\mathbf{k}_f \mathbf{x}]^2)](\sigma \mathbf{x})(1 - V(0)/k); \quad (\text{П.5})$$

$$\phi(\mathbf{x}) = -(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \mathbf{x} [V(0)/k] - a(3k^2 x^2 (\mathbf{k}_i \mathbf{x} - \mathbf{k}_f \mathbf{x}) - 2(\mathbf{k}_i \mathbf{x})^3 + 2(\mathbf{k}_f \mathbf{x})^3)/2 - b([\mathbf{x}\mathbf{k}_i]^2 + [\mathbf{x}\mathbf{k}_f]^2) + c([\mathbf{x}\mathbf{k}_i]^4 + [\mathbf{x}\mathbf{k}_f]^4). \quad (\text{П.6})$$

Выберем ось $oz \uparrow \mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f = 2k \sin \vartheta/2 = 2k\alpha$, $\alpha = \sin \vartheta/2$, и ось $ox \perp \mathbf{q}$. Тогда $\cos(\hat{q}\hat{x}) = \mu, \mathbf{x} = \{x\mu\varphi\}$;

$$\begin{aligned}\cos \hat{x} \hat{k}_i &= \mu\alpha + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\alpha^2} \cos \varphi; \\ \cos \hat{x} \hat{k}_f &= -\mu\alpha + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\alpha^2} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Учитывая это и $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$, получаем для $\mu = \varepsilon = \pm 1$

$$g(x\mu\varphi)|_{\mu=\varepsilon} = g(x, \varepsilon) = (1 - V(0)/k)^2 \cdot \{1 + \varepsilon b 3qx + a(q^2 - 2k^2)x^2 - 5\varepsilon c q(4k^2 - q^2)x^3/2\}; \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned}\phi(x\mu\varphi)|_{\mu=\varepsilon} = \phi(x, \varepsilon) &= -\varepsilon V(0)qx/k - b(4k^2 - q^2)x^2/2 - \varepsilon a(qk^2/2 - \\ &- q^3/12)x^3 + c(4k^2 - q^2)x^4/8.\end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Найдем еще выражения для $q_{\text{эф}}(x, \varepsilon)$ и $D(x, \varepsilon, \varphi)$:

$$\begin{aligned}q_{\text{эф}}(x\mu\varphi)|_{\mu=\varepsilon} = q_{\text{эф}}(x\varepsilon) &= \varepsilon q(1 - V(0)/k) - \varepsilon a q(3k^2/2 - q^2/4)x^2 - \\ &- b(4k^2 - q^2)x + c(4k^2 - q^2)^2 x^3/2;\end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$qx D(x\varepsilon\varphi) = qx + \frac{\partial}{\partial \mu} \phi(x\mu\varphi)|_{\mu=\varepsilon} = A(x, \varepsilon) + B(x, \varepsilon) \cos^2 \varphi; \quad (\text{П.10})$$

$$A(x\varepsilon) = qx(1 - V(0)/k) - a(k^2 q^2/2 - q^3/4)x^3 + \varepsilon b q^2 x^2 - \varepsilon c q^2/2(4k^2 - q^2)x^4; \quad (\text{П.11})$$

$$B(x\varepsilon) = -a q/2(4k^2 - q^2)x^3 - \varepsilon b(4k^2 - q^2)x^2 + \varepsilon c(2k^2 - 3q^2/2)(4k^2 - q^2)x^4. \quad (\text{П.12})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

При вычислении $G_{LM}(x, \varepsilon)$ в (31) возникают интегралы типа

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos M\varphi}{[A + B \cos^2 \varphi]^v} d\varphi, \quad (\text{П.13})$$

отличные от нуля только при четных $M = 2m$. Используя

$$\cos 2m\varphi = \sum_{n=0}^m (-1)^n C_{2n}^{2m} \cos^{2m-2n} \varphi \sin^{2n} \varphi \quad (\text{П.14})$$

и заменяя $\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$, приходим к интегралу [12]

$$\begin{aligned}& \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} \varphi \cos^{2m} \varphi}{[(A+B) - B \cos^2 \varphi]^v} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2(A+B)^v} B \left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right) F \left(\frac{m+1}{2}, v, \frac{m+n}{2} + 1; Z \right), \quad (\text{П.15})\end{aligned}$$

где гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma, Z)$ выражается в виде ряда по $Z = B/(A+B)$.

Приведем несколько выражений для $G_{LM}(x, \varepsilon)$:

$$G_{00} = \frac{qxg(x, \varepsilon)}{\sqrt{A(x, \varepsilon)[A(x, \varepsilon) + B(x, \varepsilon)]}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}};$$

$$\begin{aligned}
 G_{10} &= G_{00} \sqrt{3} [\varepsilon + i(1 - Z/2)/A]; \\
 G_{20} &= G_{00} \sqrt{5} [1 + i3\varepsilon(1 - Z/2)/A - 3(1 - Z + 3Z^2/8)/A^2]; \\
 G_{2\pm 2} &= \sqrt{30} G_{00} [i\varepsilon(Z - 3Z^2)/A - (3Z/2 - 15Z^2/2)/A^2]/4; \\
 G_{30} &= G_{00} \sqrt{7} [\varepsilon + i6(1 - Z/2)/A - 15\varepsilon(1 - Z + 3Z^2/8)/A^2 - \\
 &\quad - i15(1 - 3Z/2 + 9Z^2/8)/A^3]; \\
 G_{3\pm 2} &= \sqrt{210} G_{00} [i(Z - 3Z^2)/A - 3\varepsilon(3Z/4 - 15Z^2/4)/A^2 - i3(Z - 7Z^2)/A^3]/4.
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Überall H. Electron scattering from complex nuclei, Academic Press, N.Y.-Lond., 1971.
2. Pol'Yu. S., Lukyanov V. K., Petkov I. Z. Acta Phys. Pol., 1968, v. 34, p. 49.
3. Glauber R. J. Lectures in Theor. Phys. N.Y., 1959, v. 1, p. 315.
4. Baker A. Phys. Rev. B, 1964, v. 134, p. 240.
5. Schiff L. I. Phys. Rev., 1956, v. 103, p. 443.
6. Tiemann J. J. Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 183.
7. Yennie D. R., Boos F. L., Ravenhall D. G. Phys. Rev. B, 1965, v. 137, p. 882.
8. Петков И. Ж., Лукьянов В. К., Поль Ю. С. «Ядерная физика», 1966, т. 4, с. 57.
9. Лукьянов В. К., Петков И. Ж., Поль Ю. С. «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 349.
10. Herman R., Clark V. C., Ravenhall D. G. Phys. Rev., 1963, v. 132, p. 414.
11. Еддышев Ю. Н., Лукьянов В. К., Поль Ю. С. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 506.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. Frosch R. F. e. a. Phys. Rev., 1967, v. 160, p. 874.
14. Li G. C. e. a. Nucl. Phys. A, 1971, v. 162, p. 583.
15. Sick I., McCarthy J. S. Nucl. Phys. A, 1970, v. 150, p. 631.
16. Bellicard J. B. e. a. Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 9.
17. Hahn B., Hofstadter R., Ravenhall D. G. Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 1353.
18. Hofstadter R. e. a. Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 758.
19. Van Oostrum K. J. e. a. Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 528.
20. Frosch R. F. e. a. Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1380.
21. Хвастунов В. М. и др. «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 217; Khvastunov V. M. e. a. Nucl. Phys. A, 1970, v. 146, p. 15.
22. Литвиненко А. С. и др. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 40.
23. Литвиненко А. С. и др. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 479.
24. Афанасьев Н. Г. и др. В сб. «Тр. IV Международной конференции по физике высоких энергий и структуре ядра. Дубна, 1971», Дубна, 1971.
25. Алхазов Г. Д. и др. Препринт ЛИЯФ, 48, 1973.
26. Li G. C., Sick I., Yearian M. R. Phys. Lett. B, 1971, v. 37, p. 282; Preprint NEPL 691, Stanford, 1973.
27. Heisenberg J. e. a. Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1402.
28. Reynolds I. T., Onley D. S. Nucl. Phys., 1965, v. 66, p. 1.
29. Тихонов А. Н. «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, с. 501; 1963, т. 153, с. 49.
30. Поль Ю. С. «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 771.
31. Groissiaux M. e. a. Phys. Rev. B, 1965, v. 137, p. 865.
32. Bellicard J. B. e. a. Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 527.
33. Wolter H. H., Faessler A., Sauer P. U. Nucl. Phys. A, 1968, v. 116, p. 145.

34. Friedrich J., Lenz F. Nucl. Phys. A, 1972, v. 183, p. 523.
35. Friar J. L., Negele J. W. Nucl. Phys. A, 1973, v. 212, p. 93.
36. Лукьянов В. К., Польш Ю. С. «Ядерная физика», 1970, т. 11, с. 556.
37. Khvastunov V. M. e.a. Phys. Lett. B, 1968, v. 28, p. 119. Афанасьев В. Д. и др. «Укр. физ. ж.», 1968, т. 13, с. 1919; Афанасьев В. Д. и др. «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 33.
38. Струтинский В. М. В сб. «Структура ядра (лекции Алуштинской школы)», 1972, Д-6465, с. 467.
39. Немировский П. Э. «Ядерная физика», 1968, т. 7, с. 53.
40. Польш Ю. С. «Программа и тезисы докладов XIX совещания по ядерной спектроскопии и структуре ядра в Ереване». М.—Л., «Наука», 1969.
41. Афанасьев Н. Г. и др. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 1112.
42. de Forest T., Walecka J. D. Adv. Phys., 1966, v. 15, No. 57, p. 1.
43. Li G. C., Sick I., Yearian M. R. HEPL-691, 1973.
44. Castel B. e. a. Nucl. Phys. A, 1970, v. 157, p. 137.
45. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М., «Наука», 1969.
46. Инопин Е. В., Тищенко Б. И. ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 1160; Вадиа Е. В., Инопин Е. В., Юсеф М. ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 1164; Инопин Е. В., Креснин А. А., Тищенко Б. И. «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 802.
47. Бринк Д. В сб. «Структура сложных ядер». Пер. с англ., М., Атомиздат, 1966, с. 111. Brink D. M. Intern. School of Physics, «Enrico Fermi», Course XXXVI, 1965; Brink D. M. e.a. Phys. Lett. B, 1970, v. 33, p. 143.
48. Инопин Е. В., Лукьянов В. К., Польш Ю. С. «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 987; Inopin E. V., Lukanov V. K., Pol'Yu. S. Proc. Intern. Conf. Nucl. Phys. Munich., 1973, v. 1, p. 617.
49. Peierls R. E., Yoccoz J. Proc. Roy. Soc. A, 1970, v. 70, p. 381.
50. Ватакидзе И. Ш., Джалагания Т. Р. «Ядерная физика», 1971, т. 6, с. 941; Takigawa N., Arima A. Nucl. Phys. A, 1971, v. 168, p. 593.
51. Hauge P. S., Williams S. A., Duffey G. H. Phys. Rev. C, 1971, v. 4, p. 1044; McDonald L. J., Uberall H., Numrich S. Nucl. Phys. A, 1970, v. 147, p. 541.
52. Инопин Е. В. и др. Препринт ОИЯИ, P4-7741, 1974.
53. Czyz W., Lesniak L. Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 319.
54. Jastrow R. Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 1479.
55. Chiofi degli Atti C. Nucl. Phys. A, 1969, v. 129, p. 350.
56. Malecki A., Picchi P. Riv. Nuovo cimento, 1970, v. 2, p. 119; Lett. Nuovo cimento, 1971, v. 1, p. 41.
57. Chiofi degli Atti C., Kabachnic N. M. Phys. Rev. C, 1970, v. 1, p. 809.
58. Iwamoto F., Yamada H. Progr. Theor. Phys., 1957, v. 17, p. 543.
59. Skyrme T. H. R. Phyl. Mag., 1956, v. 1, p. 1043; Nucl. Phys., 1959, v. 9, p. 615.
60. Vautherin D., Brink D. M. Phys. Rev. C, 1972, v. 5, p. 626.
61. Ford W. F., Braley R. C., Bar-Touv J. Phys. Rev. C, 1971, v. 4, p. 2099.
62. Tassie L. J. Austral. J. Phys., 1956, v. 9, p. 407.
63. Brink D., Satchler G. Angular Momentum, Oxford, 1962.
64. Петков И. Ж., Лукьянов В. К., Польш Ю. С. «Ядерная физика», 1966, т. 4, с. 556.
65. Bellicard J., Barreau P., Blum D. Nucl. Phys., 1964, v. 60, p. 319.
66. Bertozzi W. e. a. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1711.
67. Петков И. Ж., Лукьянов В. К., Польш Ю. С. Препринт ОИЯИ P-2490 Дубна, 1965.
68. Лукьянов В. К., Петков И. Ж., «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1964, т. 28, с. 1207.
69. Де Форест Т. В сб. «Электромагнитные взаимодействия ядер при малых и средних энергиях». М., «Наука», 1973.
70. Антонов А. Н., Инопин Е. В. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 326.