

УДК 539.142:539.143

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЯДРА

*Ю. Н. Шубин*

Физико-энергетический институт,  
г. Обнинск

В обзоре излагаются статистические методы, широко используемые для описания свойств возбужденных состояний ядер и ядерных реакций. Подробно обсуждаются физические предположения, лежащие в основе известных распределений между уровнями (распределения Вигнера, Пуассона) и ширины высоковозбужденных состояний (распределение Портера — Томаса), а также предположения, используемые в статистической теории ядерных реакций и флуктуационном анализе.

The statistical methods are outlined for the description of the excited nuclei and nuclear reactions. The basic assumptions underlying the known distributions of the level spacings (Wigner, Poisson) and the reduced partial widths (Porter—Thomas) are discussed. Relations are given which are used in the average cross-sections calculations and the auto-correlation analysis.

### ВВЕДЕНИЕ

Статистические методы используются для описания свойств ядер уже более 30 лет. Для описания различных свойств ядер разрабатывался целый ряд моделей, описывающих те или иные стороны ядерных явлений. По мере развития модельных представлений о структуре и свойствах атомных ядер становилась возможной интерпретация ядерных уровней, которая ограничивалась, однако, областью дискретного спектра. При энергии возбуждения выше нескольких мегаэлектронвольт число уровней в единичном интервале энергий для большинства ядер настолько велико, что их индивидуальное описание практически невозможно, и необходимо применение статистических методов. Эти методы довольно успешно применяются при описании широкого круга явлений, таких, как плотность связанных уровней и резонансных состояний составного ядра, их средние ширины, средние сечения различных процессов и их флуктуации, спектры и угло-

вые распределения продуктов различных реакций. В последние годы интерес к этой области явлений значительно возрос в связи с получением не только качественной, но и количественной информации о средних характеристиках и о структуре состояний, механизмах ядерных реакций.

Хотя основные данные о структуре ядра получены при изучении основных и нескольких первых возбужденных состояний ядер, стало очевидно, что значительную часть информации о структуре можно получить в области более высоковозбужденных состояний, в области непрерывного спектра. Это стало возможным в результате развития экспериментальной техники, получения пучков с высоким разрешением и применения детекторов, работающих с высокой разрешающей способностью в области достаточно больших энергий. Открытие промежуточной структуры в сечениях также послужило толчком к изучению статистических свойств ядер [67].

Статистические методы в описании ядерных явлений грубо можно разделить на два направления: 1) описание средних характеристик ядер — средних сечений, плотности уровней, средних ширин различных процессов. В этой области имеется большое количество экспериментальных данных, охватывающих широкий интервал энергий и разнообразные ядерные процессы; 2) исследование статистических распределений расстояний между уровнями, корреляций ближнего и дальнего порядка в положении уровней, флуктуаций в сечениях, распределений парциальных ширин и т. д. Первое из них является наиболее важным для решения широкого круга прикладных задач.

Для изучения второго направления требуются эксперименты, позволяющие разрешать и анализировать индивидуальные резонансы. Такие данные получают обычно при захвате медленных нейтронов с энергией от 0 до нескольких килоэлектронвольт, что соответствует энергиям возбуждения, близким к энергии связи нейтрона. Аналогичные данные можно получить на реакциях с заряженными частицами в области меньших энергий возбуждения. Ширины уровней можно определить также из флуктуационного анализа при энергиях возбуждения около 20 *Мэв*.

Разнообразие методов, используемых при исследовании этих двух направлений, привело к тому, что часто они рассматриваются как две различные проблемы, не имеющие ничего общего. Однако оба они возникли при изучении одного объекта — атомного ядра и служат этой цели. Кроме того, развиваемые в последнее время идеи применения понятий теории информации для решения этих вопросов позволяют надеяться на получение соотношений, дающих возможность охватить оба эти направления.

Первые статистические модели были основаны на сравнении ядер с известными макроскопическими системами, состоящими

из большого числа взаимодействующих частиц, как, например, жидкая капля. Таким образом, статистическая теория ядра появилась сначала как применение термодинамики к ядру.

В последние годы стало очевидно, что оболочечная модель остается ценной в удивительной степени вплоть до энергии, где становится пригодным статистическое рассмотрение. Поэтому современная статистическая теория существенным образом основывается на оболочечной модели. Простейшей моделью, используемой в статистической теории ядра, является чистая оболочечная модель, в которой остаточными взаимодействиями полностью пренебрегают. Эта модель дает разумную оценку плотности возбужденных состояний ядер, знание которой необходимо при описании средних ширин и сечений различных процессов.

Для другой проблемы, касающейся статистического распределения расстояний между уровнями, распределения парциальных ширин, чистую оболочечную модель нельзя использовать, так как в этом случае остаточные взаимодействия, недиагональные элементы гамильтониана имеют существенное значение. Это обусловлено явлением «отталкивания уровней», хорошо известным в проблеме отыскания собственных значений, где недиагональные элементы существенны. Для изучения проблемы такого рода Вигнер предложил совершенно другую модель по сравнению с чисто оболочечной моделью: модель полностью случайного гамильтониана. Эта модель не дает правильного описания общего поведения плотности уровней, но пригодна для изучения локальных корреляций между соседними уровнями. Эту модель можно использовать для исследования статистического распределения парциальных ширин. Здесь также недиагональные элементы имеют существенное значение, а чистая оболочечная модель будет давать очень ошибочное описание.

При описании сечений различных ядерных реакций также возникает целый ряд проблем. Кроме описания средних сечений и ширин необходимо исследовать отклонения от средних, распределение этих отклонений. Именно изучение таких отклонений дает информацию о структуре состояний, участвующих в данном процессе. Выше области хорошо разрешенных резонансов сечения имеют весьма сложную энергетическую зависимость. В последние несколько лет стало возможным различить в наблюдаемых сечениях относительно медленные вариации, соответствующие так называемым промежуточным гигантским резонансам, на которые накладываются более быстрые флуктуации, связанные с образованием составного ядра. Изучение этих областей энергий стимулирует исследование средних сечений, автокорреляционных функций, статистических распределений и т. д. Теоретическое исследование таких проблем может опираться на комбинацию оболочечной модели и модели случайных гамильтонианов, или, более

точно, использование разбиения гамильтониана на две части, одна из которых рассматривается обычным образом как оболочечная модель с остаточным взаимодействием и другая — как случайный гамильтониан.

Применению статистических методов в теории ядра посвящено большое число работ, в которых рассматриваются различные вопросы описания возбужденных ядер. Наиболее широко проблемы статистического описания обсуждались в обзорах Эриксона [1], Блоха [2], в работах [3, 4], в сборнике, выпущенном Портером [5]. Богатый материал содержится в докладах конференции по статистическим свойствам ядер, состоявшейся в Олбэни в августе 1971 г. В данном обзоре кратко излагается современное состояние статистической теории ядра.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ И ПАРЦИАЛЬНЫХ ШИРИН

### Распределения Вигнера и Пуассона

Пусть  $E_0, E_1, E_2, \dots$  — последовательность уровней ядра, расположенных в порядке возрастания энергии. Тогда расстояния между уровнями

$$\varepsilon_n = E_{n+1} - E_n. \quad (1)$$

Иследуем их статистическое распределение. Для этой цели одночастичная модель, используемая для вычисления плотности уровней, непригодна [1]. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим изменение положения ядерных уровней в чистой оболочечной модели, когда какой-либо параметр модели меняется. Предположим, что одночастичные уровни оболочечной модели претерпевают малые изменения, скажем, порядка  $1 \text{ Мэв}$ . Рассмотрим теперь, что случится с уровнями всей системы в области энергий, где плотность высока. Энергия каждого возбужденного уровня — сумма одночастичных энергий. Можно ожидать, что она будет меняться на величину порядка килоэлектронвольта. Рассмотрим два соседних уровня  $E_n$  и  $E_{n+1}$ . Их энергии — суммы различных одночастичных энергий, и, следовательно, их изменения не будут скоррелированы. Отсюда следует, что если будем рассматривать область, где средние расстояния много меньше  $1 \text{ кэв}$ , то порядок уровней будет всецело нарушен. Если параметры оболочечной модели изменять непрерывно, различные уровни будут пересекаться всевозможным образом. Это означает, что в малой области энергий уровни ядра могут рассматриваться как случайно распределенные, независимо друг от друга. Тогда

плотность вероятности того, что расстояние между уровнями равно  $\varepsilon$ , дается законом Пуассона:

$$P(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon/D)/D, \quad (2)$$

где  $D$  — среднее расстояние.

Это описание игнорирует хорошо известное квантовомеханическое явление «отталкивания уровней», которое обусловлено недиагональными элементами гамильтониана и которым пренебрегают в чистой оболочечной модели. Чтобы проиллюстрировать это явление, рассмотрим чрезвычайно простой случай гамильтониана, представленного двумерной матрицей  $H_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Тогда два собственных значения гамильтониана определяются соотношением

$$E^{\pm} = [H_{11} + H_{22} \pm \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}]/2. \quad (3)$$

В отсутствие недиагонального члена  $H_{12}$  два собственных значения будут совпадать, когда  $H_{11}$  становится равным  $H_{22}$ . Присутствие  $H_{12}$  стремится разделить эти два собственных значения, которые никогда не совпадут при  $H_{12} \neq 0$ . Таким образом, одно условие  $E^+ = E^-$  трудно выполнить, так как оно соответствует двум требованиям, накладываемым на гамильтониан:  $H_{11} = H_{22}$  и  $H_{12} = 0$ . Этот эффект известен также как правило непересечения и является весьма общим, по крайней мере для уровней, имеющих одни и те же квантовые числа, в частности одни и те же спины и четности. Для уровней же с различными квантовыми числами все перекрестные матричные элементы исчезают, и нет никакого отталкивания уровней. Вследствие этого отталкивания уровней закон Пуассона (2) определенно не выполняется для малых  $\varepsilon$ , которые на самом деле менее вероятны.

Рассмотрим теперь приближенную, но в то же время удивительно хорошо работающую модель, предложенную Вигнером [2]. Пусть  $\rho(\varepsilon) d\varepsilon$  — вероятность обнаружить уровень на расстоянии  $\varepsilon$  от некоторого заданного уровня в интервале  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ . Здесь не исключена возможность того, что некоторые уровни лежат на расстоянии между 0 и  $\varepsilon$ . Разделим интервал  $(0, \varepsilon)$  на последовательность бесконечно малых интервалов  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \dots, d\varepsilon_n, \dots$ . Определим вероятность  $P(\varepsilon) d\varepsilon$  как произведение вероятностей того, что имеется один уровень в интервале  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$  и нет уровней в  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \dots, d\varepsilon_n$ :

$$P(\varepsilon) d\varepsilon = \rho(\varepsilon) d\varepsilon \prod_{n=1, 2, 3} [1 - \rho(\varepsilon_n) d\varepsilon_n]. \quad (4)$$

Здесь предполагалось, что присутствие или отсутствие уровня в интервале  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \dots, d\varepsilon_n$  может считаться независимым событием. Это предположение не является строгим, но оказы-

вается, что обусловленная этим погрешность мала. Перейдем теперь в (4) к пределу бесконечно малых интервалов  $d\varepsilon_n$ . Тогда можно записать:

$$P(\varepsilon) = \rho(\varepsilon) \exp \left\{ - \int_0^{\varepsilon} \rho(\varepsilon') d\varepsilon' \right\}. \quad (5)$$

Теперь необходимо сделать предположение о плотности вероятности  $\rho(\varepsilon)$ . В простейшем случае, когда уровни независимы друг от друга,  $\rho = \text{const}$ , и (5) сводится к закону Пуассона (2). Однако в случае уровней одной четности и спина отталкивание уровней означает, что  $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вигнер ввел простейшее предположение  $\rho(\varepsilon) = a\varepsilon$ . Тогда  $P(\varepsilon) = a\varepsilon \exp(-a\varepsilon^2/2)$ . Константу  $a$  можно определить, приравнявая среднее  $\bar{\varepsilon}$  для этого распределения к  $D = \int \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon$ . Таким образом, получим распределение Вигнера:

$$P(\varepsilon) = (\pi\varepsilon/2D^2) \exp[-(\pi\varepsilon^2/4D^2)], \quad (6)$$

которое следует применять лишь к уровням с одинаковыми квантовыми числами. В случае уровней, относящихся к различным подсистемам, имеющим различные квантовые числа, распределение расстояний между уровнями внутри каждой подсистемы определяется выражением (6), тогда как положение уровней, принадлежащих различным подсистемам, никак не скоррелировано. Результирующий закон распределения для всех уровней можно получить с помощью простых расчетов [4].

### Метод случайных матриц

Для того чтобы более подробно исследовать явление отталкивания уровней, необходимо рассмотреть модель, которая в той или иной форме учитывает остаточные взаимодействия оболочечной модели. Ясно, что в области, где плотность уровней высока, не имеет смысла учитывать, даже приближенно, остаточные взаимодействия точно таким же образом, как и для основного или первых возбужденных состояний ядра. В 1950 г. Вигнер предложил модель, в которой гамильтониан рассматривается как случайная матрица. Использование такого приема, когда исследование поведения точно определенной системы (гамильтониан полностью определяется заданием нуклон-нуклонного взаимодействия), слишком сложной для детального анализа, заменяется некоторой задачей рассмотрения случайных величин, является довольно обычным (движение молекул в газе и др.). Основная идея в данном случае заключается в замене матричных элементов остаточного взаимодействия, которых так много, что их трудно

рассчитать точно, случайными переменными с простым статистическим распределением. При этом возникают два вопроса: 1) какому статистическому распределению подчиняются матричные элементы гамильтониана и 2) в каком смысле следует ожидать, что такая модель описывает в среднем свойства конкретных ядер?

Ответ на эти вопросы — сложная задача, которая еще полностью не решена. Выбор статистического ансамбля довольно произволен, так как связан с выбором функции распределения  $P(H) \equiv P(H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots, H_{NN})$  матричных элементов  $H_{ij}$  модельного гамильтониана в данном базисе. Здесь в качестве модели используется модель распределения собственных значений конечномерной матрицы  $(N \times N)$ . Такая упрощенная модель, в которой гамильтониан имеет конечное число  $N$  собственных значений, не является реальной, но она обнаруживает некоторые общие закономерности, которые присущи реальной системе.

Развитию статистического метода случайных матриц посвящено значительное число работ [5—7]. Обширная библиография по этому вопросу содержится в книге Мехты [4].

В ранних работах определение функции распределения основывается на двух предположениях: 1) распределение  $P(H)$  инвариантно относительно произвольного унитарного преобразования базисных состояний; 2) все матричные элементы статистически независимы. Этих предположений достаточно, чтобы определить вид функции распределения  $P(H)$  [9].

Пусть гамильтониан системы, имеющий два собственных значения, обладает симметрией относительно обращения времени и вращательной симметрией. Тогда матрица

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

связывает состояния с одинаковыми квантовыми числами  $J$ ,  $M$  и др. Из инвариантности относительно обращения времени следует, что элементы матрицы  $H$  вещественны, а из эрмитовости гамильтониана имеем  $H_{12} = H_{21}$ .

Рассмотрим ансамбль матриц, в котором вероятность для данной матрицы дается некоторой функцией  $P(H)$ . Чтобы определить вид функции распределения, необходимо воспользоваться гипотезой статистической независимости матричных элементов и инвариантности распределения относительно произвольных унитарных преобразований базисных состояний. Из гипотезы независимости матричных элементов 2) следует, что функция распределения является произведением функций распределения отдельных матричных элементов  $P(H) = \prod_{i \leq j} P_{ij}(H_{ij})$ . Здесь мы ограничиваемся преобразованиями, при которых матричные элементы остаются вещественными, поэтому унитарное преобразова-

ние является ортогональным в двумерном векторном пространстве. Тогда при бесконечно малом повороте в этом пространстве базисные состояния запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} |1'\rangle &= |1\rangle + \varepsilon |2\rangle; \\ |2'\rangle &= -\varepsilon |1\rangle + |2\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В новом базисе матричные элементы с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} H_{1'1'} &= H_{11} + 2\varepsilon H_{12}; \\ H_{1'2'} &= H_{12} + \varepsilon (H_{22} - H_{11}); \\ H_{2'2'} &= H_{22} - 2\varepsilon H_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

а функция распределения

$$P(H') = P(H) \left\{ 1 + \varepsilon \left[ \frac{2H_{12}}{P_{11}} \cdot \frac{dP_{11}}{dH_{11}} + \frac{H_{22} - H_{11}}{P_{12}} \cdot \frac{dP_{12}}{dH_{12}} - \frac{2H_{12}}{P_{22}} \cdot \frac{dP_{22}}{dH_{22}} \right] \right\}. \quad (10)$$

Из инвариантности следует, что коэффициент при  $\varepsilon$  должен обращаться в нуль. Тогда

$$\frac{1}{H_{12}P_{12}} \cdot \frac{dP_{12}}{dH_{12}} = -\frac{2}{H_{22} - H_{11}} \left( \frac{1}{P_{11}} \cdot \frac{dP_{11}}{dH_{11}} - \frac{1}{P_{22}} \cdot \frac{dP_{22}}{dH_{22}} \right) = -C. \quad (11)$$

Отсюда получаем [3]:

$$P_{12} = (C/2\pi)^{1/2} \exp\{-CH_{12}^2/2\}; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= (C/4\pi)^{1/2} \exp\{-CH_{11}^2/4\}; \\ P_{22} &= (C/4\pi)^{1/2} C \exp\{-CH_{22}^2/4\}. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Поэтому

$$P(H) \sim C \exp\{-C(H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_{12}^2)/4\}. \quad (13)$$

Постоянная  $C$  определяет среднее значение матричных элементов и, следовательно, среднее расстояние между уровнями.

Получим теперь функцию распределения собственных значений и собственных векторов. Для этого необходимо перейти от переменных  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  и  $H_{22}$  к  $E_\alpha$ ,  $E_\beta$  и  $\theta$ , где  $E_\alpha$  и  $E_\beta$  — собственные значения матрицы (7), а  $\theta$  — некоторый угол, характеризующий положение собственных векторов относительно базисных векторов. Собственные значения матрицы (7) определяются соотношениями [см. выражение (3)]:

$$\left. \begin{aligned} E_\alpha &= (H_{11} + H_{22})/2 + \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}/2; \\ E_\beta &= (H_{11} + H_{22})/2 - \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}/2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$



а собственные функции

$$\left. \begin{aligned} |\alpha\rangle &= \cos \theta |1\rangle + \sin \theta |2\rangle; \\ |\beta\rangle &= -\sin \theta |1\rangle + \cos \theta |2\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\operatorname{ctg} \theta = -[H_{22} - H_{11} - \sqrt{(H_{22} - H_{11})^2 + 4H_{12}^2}] / 2H_{12}; \quad -\pi/2 < \theta < +\pi/2.$$

Заметим, что в показателе экспоненты (13) стоит величина, инвариантная при ортогональных преобразованиях базисных состояний:

$$H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_{12}^2 = E_\alpha^2 + E_\beta^2. \quad (16)$$

Поэтому гауссова функция распределения в новых переменных записывается просто. Для того чтобы получить элемент объема в новых переменных, необходимо вычислить якобиан

$$\mathcal{J} = \frac{\partial (H_{11}, H_{12}, H_{22})}{\partial (E_\alpha, E_\beta, \theta)}. \quad (17)$$

Выразив  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  и  $H_{22}$  через  $E_\alpha$ ,  $E_\beta$  и  $\theta$ :

$$H_{11} = E_\alpha \cos^2 \theta + E_\beta \sin^2 \theta;$$

$$H_{12} = (E_\alpha - E_\beta) \sin \theta \cos \theta;$$

$$H_{22} = E_\alpha \sin^2 \theta + E_\beta \cos^2 \theta,$$

вычислим якобиан (17). Тогда распределение вероятностей в новых переменных запишется в виде

$$P(E_\alpha, E_\beta, \theta) = (C/2\pi)^{3/2} (E_\alpha - E_\beta) \exp[-C(E_\alpha^2 + E_\beta^2)/4]. \quad (18)$$

Теперь можно найти вероятность того, что расстояние между двумя собственными значениями равно  $\varepsilon$ :

$$P(\varepsilon) = \int P(E_\alpha, E_\beta, \theta) \delta(\varepsilon - E_\alpha + E_\beta) dE_\alpha dE_\beta d\theta = C\varepsilon \exp(C\varepsilon^2/8)/4 \quad (0 < \varepsilon < \infty). \quad (19)$$

Среднее расстояние между уровнями равно

$$D = \int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = (2\pi/C)^{1/2}, \quad (20)$$

и нормированное распределение имеет вид:

$$P(\varepsilon) = (\pi/2D^2) \varepsilon \exp(-\pi\varepsilon^2/4D^2). \quad (21)$$

Таким образом, получаем следующий результат: для случайного гамильтониана размерности два расстояние между уровнями описывается точно распределением Вигнера [см. выражение (6)].

Линейная зависимость  $P(\varepsilon)$  от  $\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$  обусловлена теми требованиями симметрии, которые накладываются на гамильтоновскую матрицу (7). При ослаблении ограничений результаты оказываются несколько иными [2].

Был рассмотрен простой пример матрицы  $2 \times 2$ , который иллюстрирует результаты, получаемые в методе случайных матриц. Однако при решении некоторых задач, в частности при исследовании корреляций между удаленными уровнями, приходится иметь дело с матрицами, размерность  $N$  которых велика.

В случае матрицы размерности  $N$  имеется  $N(N+1)/2$  независимых переменных  $H_{ij}$ . Для получения вида функции распределения используем предположения об инвариантности распределения относительно унитарных преобразований базисных состояний и статистической независимости матричных элементов.

Перейдем теперь от переменных  $H_{ij}$  к  $N$  собственным значениям  $E_\lambda$  гамильтониана  $H$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, N$ ) и к  $N(N-1)/2$  переменным  $\theta_\alpha$ , определяющим ориентацию  $N$  собственных векторов относительно базисных векторов в  $N$ -мерном пространстве гамильтониана. Производя вращения (8) последовательно в каждом из  $N(N-1)/2$  двумерных подпространств, можно найти, что функция распределения недиагональных матричных элементов имеет вид (12), а функция распределения диагональных матричных элементов определяется выражением (12'). Тогда полная функция распределения

$$\begin{aligned} P(H) &= (1/2^{N/2}) (C/2\pi)^{N(N+1)/4} \exp \left\{ -\frac{C}{4} \text{Sp } H^2 \right\} = \\ &= C' \prod_{\lambda=1}^N \exp [-(E_\lambda - a)^2/2\sigma^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку шпур в экспоненте (22) не зависит от представления, получаем  $P(H)$  как функцию только собственных значений. Теперь вычислим элемент объема, для чего определим якобиан преобразования:

$$\mathcal{J} = \partial(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})/\partial(E_1, E_2, \dots, \theta_1, \dots, \theta_{N(N-1)/2}). \quad (23)$$

Можно установить зависимость якобиана от  $E_\lambda$ , исходя из соображений размерности. Заметим, что матричные элементы являются линейными функциями собственных значений  $E_\lambda$ , так что

$$H_{ij} = \sum_{\lambda=1}^N E_\lambda C_i^\lambda C_j^\lambda, \quad (24)$$

где  $C_i^\lambda$  зависит только от углов  $\theta_\alpha$ . Поскольку имеется всего  $N(N+1)/2$  переменных  $H_{ij}$  и при вычислении якобиана берет  $N$  производных относительно  $E_\lambda$ , то ясно, что якобиан должен

быть полиномом порядка  $N(N - 1)/2$  по  $E_\lambda$ . Далее, при замене переменных  $H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN} \rightarrow E_1, \dots, E_N, \theta_1, \dots, \theta_{N(N-1)/2}$  всякий раз, когда якобиан отличен от нуля, этот переход однозначен, т. е. при  $\mathcal{Y} \neq 0$  знание  $H_{ij}$  определяет однозначно переменные  $\{E_\lambda, \theta_\alpha\}$ . С другой стороны, известно, что когда имеется вырождение, т. е. собственные значения  $E_\lambda$  и  $E_\mu$  равны, определение собственных векторов неоднозначно. Следовательно, обратное преобразование также неоднозначно, и якобиан должен равняться нулю всякий раз, когда два собственных значения равны друг другу. Поэтому якобиан должен содержать произведение разностей всех пар собственных значений  $\prod_{\lambda < \mu} (E_\lambda - E_\mu)$ . Число множителей в таком произведении равно  $N(N - 1)/2$ , что как раз соответствует степени  $\mathcal{Y}$  относительно  $E_\lambda$ . Поэтому можно написать:

$$\mathcal{Y} = \prod_{\lambda < \mu} (E_\lambda - E_\mu) \varphi(\theta_\alpha), \tag{25}$$

где функция  $\varphi$  зависит только от углов  $\theta_\alpha$ .  
Теперь запишем:

$$P(H) dH = P(H) \prod_{\lambda < \mu} |E_\lambda - E_\mu| |\varphi(\theta_\alpha)| dE_1, \dots, dE_N \prod_\alpha d\theta_\alpha.$$

Для того чтобы получить функцию распределения собственных значений, необходимо проинтегрировать по всем углам  $\theta_\alpha$ . В результате получим гауссов ансамбль:

$$P(E_1, E_2, \dots, E_N) = C \prod_{\lambda=1}^N \exp[-(E_\lambda - a)^2/2\sigma^2] \prod_{\lambda < \mu} |E_\lambda - E_\mu|. \tag{26}$$

Константа  $C$  должна быть определена из условия нормировки:

$$\int P(E_1, \dots, E_N) dE_1, \dots, dE_N = 1. \tag{27}$$

Из выражения (26) непосредственно следует, по крайней мере качественно, эффект отталкивания уровней, заключающийся в том, что функция распределения  $P(E_1, \dots, E_N)$  стремится к нулю, когда два собственных значения равны между собой. Чтобы получить более точную информацию, необходимо рассчитать функции распределения для одного и двух уровней, которые находятся из полной функции распределения интегрированием по всем остальным уровням. Тогда плотность уровней будет определяться выражением

$$\rho(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E, E_2, E_3, \dots, E_N) dE_2, \dots, dE_N. \tag{28}$$

Аналогичным образом функция  $P(E', E'')$ , определяющая статистическое распределение расстояний между уровнями, имеет вид

$$P(E', E'') = \int_I P(E', E'', E_3, \dots, E_N) dE_3, \dots, dE_N, \quad (29)$$

где интегрирование по  $E_3, E_4, \dots, E_N$  проводится в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , исключая интервал  $(E', E'')$ .

Таким образом, в случае  $N = 2$  распределение расстояний между уровнями (29) дает точно распределение Вигнера (21). В случае большого числа измерений получить точный результат, следующий из теории, гораздо труднее. Можно показать [4], что в пределе  $N \rightarrow \infty$  плотность уровней гауссова ансамбля дается полукруговым распределением Вигнера [10]:

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma^2} [2N\sigma^2 - (E-a)^2]^{1/2} & \text{при } |E-a|^2 < 2N\sigma^2 \\ 0 & \text{при } |E-a|^2 > 2N\sigma^2, \end{cases} \quad (30)$$

которое не имеет ничего общего с энергетической зависимостью плотности уровней в ядрах.

Распределение расстояний между уровнями при  $N \rightarrow \infty$  не имеет такого простого аналитического вида, как (21) при  $N = 2$ . Гуден и Мехта [11] получили быстро сходящееся выражение для распределения расстояний между уровнями в гауссовом ансамбле. В табл. 1 приведены найденные результаты, которые сравниваются с распределением Вигнера (21).

Таблица 1

$\varepsilon/D$	Точное распределение	Распределение Вигнера	$\varepsilon/D$	Точное распределение	Распределение Вигнера
0	0	0	1,400	0,459	0,471
0,255	0,395	0,380	1,910	0,173	0,170
0,509	0,663	0,652	2,419	0,043	0,038
0,891	0,739	0,750	2,928	0,006	0,005

Видно, что распределение Вигнера очень хорошо описывает точный результат. В настоящее время имеющиеся экспериментальные данные не позволяют увидеть, какое из этих распределений оправдывается на опыте.

Другая процедура была предложена в работах Балиана и Блоха [12]; она использует некоторые понятия теории информации. Рассмотрим сначала дискретные события  $i$ , имеющие вероятно-

сти  $P_i$ . Информация, которая содержится в этих событиях, определяется соотношением

$$I = \sum_i P_i \ln P_i \quad (31)$$

и является отрицательной величиной, достигающей максимума, равного 0, когда все  $P_i$  ( $i \neq i_0$ ) равны нулю, а  $P_{i_0} = 1$ . Такая ситуация означает, что событие  $i_0$  определенно произошло. Наоборот, информация минимальна, когда все  $P_i$  равны, что соответствует полной неопределенности событий, когда они все равновероятны.

Для непрерывной случайной переменной  $x$  с функцией распределения  $P(x)$  информация определяется соотношением

$$I = \int P(x) \ln P(x) dx. \quad (32)$$

В этом случае она может быть положительной и отрицательной. Она больше, когда переменная  $x$  известна с большей точностью, т. е. когда распределение  $P(x)$  более узкое. Определение (32) — естественное обобщение выражения (31), однако в случае непрерывной переменной имеется дополнительная неопределенность, которая отсутствует при дискретных переменных. Это связано с неинвариантностью относительно замены переменных. Однако во многих случаях определение (32) становится однозначным, если имеется такая инвариантность, в частности трансляционная инвариантность, т. е. если информация одна и та же для  $P(x)$  и  $P(x+a)$  для любого  $a$ .

Рассмотрим эрмитов гамильтониан  $H_{ij}$  в  $N$ -мерном пространстве. В случае симметрии гамильтониана относительно обращения времени всегда можно выбрать фазы волновых функций таким образом, что все  $H_{ij}$  будут действительными [3]. Тогда информация о таком гамильтониане с функцией распределения  $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$  определяется соотношением

$$I = \int P(H_{11}, \dots, H_{NN}) \ln P(H_{11}, \dots, H_{NN}) dH,$$

где  $dH$  — элемент объема в пространстве  $N(N+1)/2$  измерений, характеризуемом матричными элементами  $H_{ij}$  ( $i < j$ ):

$$dH = dH_{11} dH_{12} \dots dH_{NN}. \quad (33)$$

Будем считать, что известны некоторые условия, которым удовлетворяет случайный гамильтониан и которые соответствуют определенному числу ограничений, накладываемых на функцию распределения  $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$ . Теперь выберем такой закон распределения, который минимизирует информацию с учетом наложенных ограничений. Такой выбор вполне естествен, так как

любой другой закон распределения содержал бы больше информации, чем следует из ограничений, и эта дополнительная информация была бы полностью произвольной.

Предположим, что известна сумма собственных значений гамильтониана и сумма их квадратов:  $\sum_n E_n = \alpha$ ;  $\sum_n E_n^2 = \beta$ . Эти предположения приводят к следующим условиям, накладываемым на закон распределения:

$$\left. \begin{aligned} \int P(H) \operatorname{Sp}\{H\} dH &= \alpha; \\ \int P(H) \operatorname{Sp}\{H^2\} dH &= \beta; \\ \int P(H) dH &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где третье уравнение связано с условием нормировки.

Теперь, введя три множителя Лагранжа, напишем условие экстремума информации в виде

$$\int \delta P(H) [\ln P(H) + \lambda \operatorname{Sp}\{H\} + \mu \operatorname{Sp}\{H^2\} + \nu] = 0, \quad (35)$$

откуда следует, что

$$P(H) = \exp(-\nu - \operatorname{Sp}\{\lambda H + \mu H^2\}), \quad (36)$$

где параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  определяются из условий (34). Выражение (36) можно переписать в более удобном виде:

$$\begin{aligned} P(H) &= C \exp(-\operatorname{Sp}\{(H-a)^2/2\sigma^2\}) = \\ &= C \exp\left\{-\sum_i \frac{(H_{ii}-a)^2}{2\sigma^2} - \sum_{i<j} \frac{H_{ij}^2}{\sigma^2}\right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Можно показать, что распределение (37) соответствует именно минимуму информации. Закон распределения (37) определяет так называемый гауссов ансамбль [см. выражение (13)], который изучался наиболее интенсивно в последние годы. Он обладает следующими свойствами:

1) распределение (37) инвариантно относительно ортогональных преобразований гамильтониана  $H$ . Это следует непосредственно из того факта, что  $P(H)$  — функция шпура, который инвариантен при таких преобразованиях, так же как и элемент объема (33);

2) различные матричные элементы гамильтониана  $H_{ij}$  статистически независимы. Это видно из правой части уравнения (37), где  $P(H)$  выражено в виде произведения функций распределения для каждого из матричных элементов.

Можно показать, что гауссово распределение (37) — единственное, которое удовлетворяет этим двум условиям инвариантности и статистической независимости. Именно это свойство было использовано впервые для оправдания введения гауссова ансамбля. Условие независимости матричных элементов  $H_{ij}$  кажется менее естественным, чем условие минимума информации, к тому же его не так легко обобщить.

Как было видно [см. распределение (30)], плотность уровней для гауссова ансамбля очень нереалистична. Это следует, в частности, из выражения (37), откуда видно, что плотность уровней будет симметричной относительно энергии  $a$ , тогда как для любой системы частиц плотность уровней растет с увеличением энергии возбуждения. Это наводит на мысль заменить условия (34), ответственные за эту неестественную плотность уровней, другим условием, обеспечивающим правильную зависимость плотности уровней.

В качестве другого примера определим функцию распределения  $P(H)$  таким образом, чтобы она минимизировала информацию при условии: плотность уровней будет определенной функцией энергии  $\rho(E)$ . Эти условия можно написать в виде

$$\rho(E) = \int P(H) \text{Sp} \{ \delta(E - H) \} dH. \quad (38)$$

Действительно, если правую часть этого выражения выразить через собственные значения  $E_1, E_2, \dots, E_N$  гамильтониана  $H$ , она есть не что иное, как сумма вероятностей того, что одно из собственных значений  $E_1, E_2, \dots$ , или  $E_N$  равно  $E$ ; это и является плотностью уровней при энергии  $E$ .

Условие экстремума информации при условии (38) с учетом условия нормировки запишется теперь в виде

$$\int \delta P(H) \left[ \ln P(H) + \lambda + \int \lambda(E) \text{Sp} \{ \delta(E - H) \} dE \right] dH = 0, \quad (39)$$

где введены множитель Лагранжа  $\lambda$  для условия нормировки и один непрерывный параметр  $\lambda(E)$  для условия (38). Отсюда можно написать:

$$\begin{aligned} P(H) &= C \exp \left\{ - \int \lambda(E) \text{Sp} \{ \delta(E - H) \} dE \right\} = \\ &= C \exp \{ - [\text{Sp} \{ \lambda(E) \}] \} = C \prod_{\lambda=1}^N f(E_\lambda). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $C$  — константа нормировки;  $E_\lambda$  — собственные значения гамильтониана  $H$ ;  $f(E)$  — функция одной переменной  $f(E) = \exp \{ -\lambda(E) \}$ . Константа  $C$  и функция  $f(E)$  определяются из условия нормировки и по величине плотности уровней (38).

Таким образом, проблема получения статистического распределения матричных элементов  $H_{ij}$  при условии правильного описания энергетической зависимости плотности уровней в принципе решена, хотя определение функции  $f(E)$  для данной плотности уровней требует решения сложной проблемы оценки многократных интегралов. Эти два примера иллюстрируют, как принцип минимума информации дает общий метод для определения статистических ансамблей случайных гамильтонианов.

### Статистическое распределение приведенных парциальных ширин

Для получения функции распределения приведенных ширин  $\Gamma_\lambda^{(0)}$  учтем, что они являются квадратами амплитуд  $g_\lambda$ . В свою очередь, амплитуды  $g_\lambda$  представляют собой интегралы перекрытия между волновой функцией  $s$ -состояния составного ядра и волновой функцией, описывающей ядро-мишень в данном квантовом состоянии и вылетающую частицу, не взаимодействующих между собой. Эта волновая функция значительно проще, чем волновая функция состояния компаунд-ядра. В рамках модели случайных гамильтонианов разумно считать волновую функцию  $s$ -состояния компаунд-ядра одним из собственных векторов случайного гамильтониана, а волновую функцию, описывающую невзаимодействующие остаточное ядро и вылетающую частицу, — одним из базисных векторов пространства, в котором определен гамильтониан. Согласно этим предположениям статистическое распределение амплитуд — распределение компонент нормированного вектора, который случайным образом ориентирован изотропно в  $N$ -мерном пространстве. Для того чтобы получить распределение  $P(C_1)$  компоненты  $C_1$  нормированного вектора с компонентами  $(C_1, C_2, \dots, C_N)$ , необходимо вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} P(C_1) &\sim \int \delta(C_1 - C'_1) \delta(C_1'^2 + C_2'^2 + \dots + C_N'^2 - 1) dC'_1 dC'_2 \dots dC'_N = \\ &= \int \delta(C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_N^2 - 1) dC_1^2 dC_2^2 \dots dC_N^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Перейдем теперь в  $(N - 1)$ -мерном пространстве  $C'_2, C'_3, \dots, C'_N$  к сферическим координатам. Тогда элемент объема запишется в виде

$$dC'_2 \dots dC'_N = R^{N-2} dR d\Omega_{N-1}, \quad (42)$$

где  $d\Omega_{N-1}$  — элемент телесного угла;

$$R^2 = C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_N^2.$$



Теперь имеем:

$$\begin{aligned}
 P(C_1) &\sim \int \delta(R^2 + C_1^2 - 1) R^{N-2} dR d\Omega_{N-1} \sim \\
 &\sim (1 - C_1^2)^{(N-3)/2} \approx \exp\{-[(N-3)/2] C_1^2/2\}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Здесь мы предположили, что  $N$  велико и поэтому  $C_1$  не сильно превышает  $1/\sqrt{N-3}$ . Чтобы определить теперь распределение приведенной ширины, являющейся квадратом соответствующей амплитуды, воспользуемся правилом нахождения распределения функции случайной величины. В результате получим хорошо известное распределение Портера — Томаса:

$$P(\Gamma^{(0)}) d\Gamma^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma^{(0)}\langle\Gamma^{(0)}\rangle}} \exp(\Gamma^{(0)}/2 - \langle\Gamma^{(0)}\rangle) d\Gamma^{(0)}, \quad (44)$$

где  $\langle\Gamma^{(0)}\rangle$  — среднее значение  $\Gamma^{(0)}$ . Из (44) нетрудно видеть, что это распределение дает сильные флуктуации парциальных ширин отдельных резонансов. Это обусловлено предположением, что в приведенную ширину вносит вклад только один канал. Распределение Портера — Томаса — частный случай  $\chi^2_\nu$ -распределения, когда число степеней свободы  $\nu = 1$ . Физическое предположение, использованное при выводе (44), состоит в том, что компонента волновой функции, соответствующая определенному каналу (частица + остаточное ядро), является случайной величиной.

Пусть  $x_i$  — случайные величины, распределенные по нормальному закону со средним, равным нулю ( $x_i = 0$ ) и единичным среднеквадратическим отклонением. Тогда величина  $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$  есть  $\chi^2_\nu$  с  $\nu$  степенями свободы, подчиняющаяся распределению [13],

$$P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2} (\nu/2 - 1)!} \exp(-\chi^2_\nu/2) (\chi^2_\nu)^{\nu/2 - 1}.$$

В результате для распределения приведенных ширин в случае вклада  $\nu$  каналов получим

$$P_\nu(\Gamma) d\Gamma = (\nu\Gamma/2 \langle\Gamma\rangle)^{\nu/2} \frac{1}{(\nu/2 - 1)!} \exp(-\nu\Gamma/2 \langle\Gamma\rangle) (d\Gamma/\Gamma). \quad (45)$$

Флуктуации такого распределения даются выражением

$$\langle(\Gamma - \langle\Gamma\rangle)^2\rangle / \langle\Gamma\rangle^2 = 2/\nu$$

и уменьшаются с ростом  $\nu$ . Этим объясняется, например, приближительное постоянство полной радиационной ширины для всех резонансов, например в  $^{233}\text{Th}$  [14].

## Структура нейтронных резонансов

Основной источник информации о природе состояний ядра при больших энергиях возбуждения — изучение резонансов в сечениях взаимодействия нейтронов малых энергий с ядрами. В ядрах со средней массой ( $A \sim 100$ ) плотность таких резонансов примерно в  $10^6$  раз больше плотности одночастичных уровней. Столь большая плотность резонансов может служить прямым доказательством того, что в рассматриваемой области энергий возбуждения состояния ядра характеризуются большим числом степени свободы. Это говорит о том, что, попав в ядро, нейтрон может передать свою энергию огромному числу степеней свободы ядра-мишени, в результате чего образуется сложное состояние — составное ядро. С точки зрения чистой модели оболочек составное ядро соответствует предельно сильному смешиванию конфигураций. Такое сильное смешивание конфигураций означает, что компонента волновой функции, соответствующая определенному каналу (ядро-мишень в данном квантовом состоянии + частица), распределяется по волновым функциям огромного числа состояний. Все эти состояния могут возбуждаться при рассеянии и захвате нейтронов, причем нейтронная ширина каждого из них, измеренная в одночастичных единицах, будет мала.

Смешивание конфигураций, приводящее к образованию сложного состояния, можно объяснить, если учесть, что с ростом энергии возбуждения увеличивается число возбужденных частиц и, следовательно, число возможных взаимодействий. Кроме того, растет энергия возбуждения, приходящаяся на одну частицу, что приводит к увеличению плотности конечных состояний, куда частицы могут перейти в результате взаимодействия.

Более детальную информацию о структуре состояний составного ядра можно получить при статистическом анализе распределения расстояний между уровнями и их ширин. На рис. 1 показано статистическое распределение расстояний между соседними резонансами в реакции  $n + {}^{232}\text{Th}$  и  $n + {}^{238}\text{U}$ , наблюдаемое в эксперименте. Следует отметить, что при построении таких распределений приходится сталкиваться с некоторой неопределенностью, заключающейся в том, что на опыте наблюдается ряд очень слабых резонансов, которые считаются  $p$ -резонансами. Будем интересоваться распределением уровней с одинаковыми спином и четностью, и эти слабые уровни не будем учитывать. Но пока их спины и четности не будут определены непосредственно, заключения, следующие из настоящего анализа, следует считать предварительными. На рис. 1 представлены также распределения Вигнера (6) и (21) и Пуассона (2). Можно видеть, что малые расстояния между уровнями наблюдаются с очень малой вероятностью; это характерно для ситуации с сильным смешиванием конфигураций.

Как можно видеть, экспериментальные данные не согласуются с распределением Пуассона, которое применимо в том случае, когда резонансные состояния характеризуются помимо момента  $J$  и четности  $\pi$  другими дополнительными квантовыми числами. Поэтому изучение распределения уровней может в принципе дать информацию о существовании других квантовых чисел, связанных с неизвестными законами сохранения.

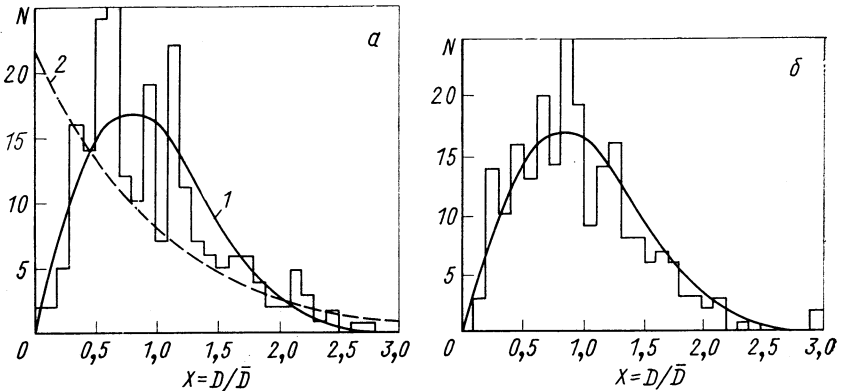


Рис. 1. Статистическое распределение расстояний между соседними нейтронными резонансами, наблюдающимися в реакции:

$a - n + {}^{232}\text{Th}$  до энергии  $3,9 \text{ кэВ}$  [14];  $b - n + {}^{238}\text{U}$  до  $E_n \leq 4 \text{ кэВ}$ ; 1 — распределение Вигнера; 2 — распределение Пуассона.

Анализ резонансов  ${}^{233}\text{Th}$  и  ${}^{239}\text{U}$  особенно прост потому, что спин ядра-мишени  $I_0 = 0$ , так что все резонансы в случае  $l = 0$  имеют спин и четность  $1/2^+$ . Для ядер с нечетными  $A$  спин ядра-мишени  $I_0 \neq 0$ , поэтому спины резонансных состояний  $J = I_0 \pm 1/2$ . Пока спины каждого резонанса не определены экспериментально, статистические свойства резонансных состояний нечетных ядер следует анализировать как суперпозицию двух последовательностей резонансов, не коррелирующих друг с другом. Данные о распределении резонансов, наблюдающихся в реакциях с нейтронами на нечетных ядрах-мишенях, по-видимому, согласуются с такой интерпретацией в предположении, что каждая последовательность подчиняется распределению Вигнера [15].

Дополнительные сведения о структуре нейтронных резонансов можно получить при анализе распределения нейтронных ширин. Наблюдающиеся ширины нейтронных резонансов сильно меняются от уровня к уровню, но их среднее значение

$$\bar{\Gamma}_n \approx 1,2 \cdot 10^{-3} [E_n (\text{эВ})]^{1/2} \text{ эВ.}$$

Это значение примерно в  $10^6$  раз меньше одночастичной оценки [3]. Малая ширина резонансов непосредственно связана с высокой плотностью резонансных состояний и является дополнительным свидетельством в пользу их многочастичной структуры.

Наряду с испусканием нейтронов резонансные состояния могут распадаться, испуская  $\gamma$ -квант, с переходом на любые нижние уровни. Полная ширина относительно испускания  $\gamma$ -квантов  $\Gamma_\gamma$  приблизительно одинакова для всех резонансов, измеренных в  $^{233}\text{Th}$ , и равна  $2,5 \cdot 10^{-2}$  эв. При этом обычно считается, что наиболее существенными являются  $E1$ -переходы. Для более

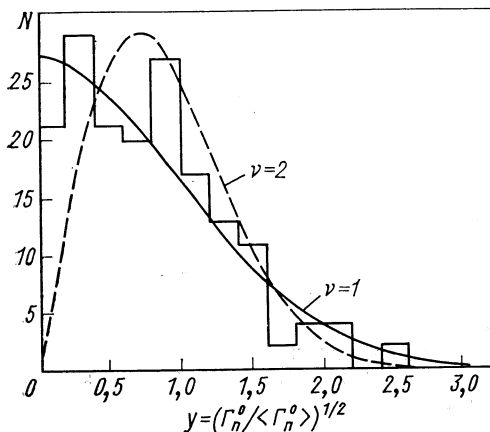


Рис. 2. Распределение приведенных нейтронных ширин в реакции  $n + ^{232}\text{Th}$  [3]: 1 — распределение Портера — Томаса ( $\nu = 1$ ); 2 — распределение Пуассона ( $\nu = 2$ ).

детальной интерпретации радиационных ширин необходимо проанализировать спектр испускаемых  $\gamma$ -квантов и оценить силовую функцию  $E1$ -перехода с энергией в несколько мегаэлектронвольт.

Экспериментальное распределение приведенных нейтронных ширин  $\Gamma_n^{(0)}$ , наблюдающихся в резонансах  $n + ^{232}\text{Th}$  [внутренние свойства] резонанса определяются приведенной шириной  $\Gamma_n^{(0)} = = (E_\gamma)^{-1/2} \Gamma_n(E_\gamma)$ , дано на рис. 2.

Как было показано [см. распределение (44)], распределение приведенных ширин в случае предельно сильного смешивания конфигураций — распределение Портера — Томаса. Поскольку при малых значениях  $\Gamma_n^{(0)}$  оно соответствует зависимости типа  $[\Gamma_n^{(0)}]^{-1/2}$ , удобно рассматривать распределение амплитуд  $[\Gamma_n^{(0)}]^{1/2}$ . Наблюдаемое распределение довольно хорошо описывается распределением Портера — Томаса и не согласуется с распределением Пуассона ( $\chi^2$ -распределение с  $\nu = 2$ ). В данном подходе все каналы распада эквивалентны. Поэтому приведенные нейтрон-

ные и радиационные ширины должны подчиняться одному и тому же распределению. Одно из наиболее убедительных доказательств справедливости распределения Портера — Томаса для приведенных радиационных ширин получено в работе [16], в которой исследовались переходы с 66 уровней  $1^-$  в системе  $n + {}^{195}\text{Pt}$  на основное и первые два возбужденных состояния, причем величина  $\nu$  рассматривалась как параметр. Был получен результат  $\nu = 1,23 \pm 0,19$ .

Таким образом, существующие данные совместимы с представлением о полном смешивании достаточно близких по энергии конфигураций. Наличие такого смешивания означает, что при исследовании резонансов на медленных нейтронах можно наблюдать все уровни, разрешенные правилами отбора по угловому моменту и четности. Это дает возможность оценить величину полной плотности уровней при энергии возбуждения, близкой к энергии связи нейтрона.

Методом случайных матриц исследовались системы с различными свойствами симметрии. Спектр системы будет выглядеть по-разному в зависимости от того, инвариантен гамильтониан или нет относительно операции обращения времени. Если гамильтониан системы инвариантен относительно обращения времени, система будет описываться ортогональным ансамблем. Если часть гамильтониана, меняющая знак при обращении времени, равна части, не меняющей знак, система будет описываться унитарным ансамблем. Если весь гамильтониан меняет знак при обращении времени, система должна описываться ансамблем антисимметричных матриц с чисто мнимыми элементами. Для этих трех предельных случаев получены аналитические результаты [17].

Свойства спектров различных ядер имеют статистические свойства, предсказываемые ортогональным ансамблем, так что гипотеза инвариантности относительно обращения времени оправдывается достаточно хорошо. Что касается частичного нарушения временной симметрии, то в этом случае теория еще не дала пока ясных результатов.

При исследовании экспериментальных спектров состояний конструировались различные «статистики». Под статистической здесь подразумевается величина, которую можно рассчитать на основе экспериментально наблюдаемой последовательности уровней без какой-либо другой информации, среднее значение и дисперсия которой известны из теории. При этом статистика должна быть чувствительной к определенному исследуемому признаку и нечувствительной к другому.

Одно из интересных свойств случайных матриц больших порядков — существование корреляций дальнего порядка. Для оценки таких корреляций используются  $\Delta$ -статистики Дайсона —

Мехты, определяемые соотношениями [18]:

$$\Delta_{\alpha} = \min_{A, B} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [N(E) - AE - B]^2 dE \right\}. \quad (46)$$

Величина  $\Delta$  является мерой среднеквадратичного отклонения функции  $N$  от линейной функции по  $E$ , наилучшим образом описывающей  $N(E)$ .

Таблица 2

Ядро-мишень; интервал энергии; число уровней	Статистика	Эксперимент	Теория
$^{238}\text{U}$ 0—1 кэв 57	$\Delta_1$	1,78	$0,84 \pm 0,58$
	$\Delta_2$	1,30	$0,53 \pm 0,15$
	$\Delta_3$	1,28	$0,40 \pm 0,11$
$^{181}\text{Ta}$ 0—334 эв 68	$\Delta_1$	3,41	$1,53 \pm 1,24$
	$\Delta_2$	1,44	$0,93 \pm 0,31$
	$\Delta_3$	1,44	$0,87 \pm 0,22$
$^{232}\text{Th}$ 1—4 кэв 154	$\Delta_1$	3,27	$1,04 \pm 0,72$
	$\Delta_2$	88,72	$0,66 \pm 0,18$
	$\Delta_3$	3,12	$0,50 \pm 0,11$

Здесь  $N(E)$  — число уровней, лежащих в интервале  $(-L, E)$ ;  $\alpha$  — параметр, указывающий, каким образом выбираются  $A$  и  $B$ . Если  $B = N(0)$ ,  $\alpha = 1$ ; если  $B = N(-L) + AL$ ,  $\alpha = 2$ , и  $\alpha = 3$ , если на выбор  $A$  и  $B$  не накладывается никаких ограничений. Средние значения и дисперсии  $\Delta$  хорошо известны. В табл. 2 приводятся некоторые результаты анализа спектров ряда ядер [18, 19].

Большое различие результатов теории и эксперимента в случае ядра  $^{232}\text{Th}$  может говорить о значительном отклонении от модели случайных матриц, предполагающей полное смешивание конфигураций. Однако величина  $\Delta$  может сильно измениться, если резонансы были неправильно идентифицированы (включены  $p$ -резонансы или пропущены  $s$ -резонансы). В этом случае можно использовать  $F$ -статистику Дайсона, определяемую соотношениями:

$$F_{ij} = \sum_{j \neq i} f(x_{ji}); \quad x_{ij} = (E_j - E_i)/L;$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{1 - (1 - x^2)^{1/2}} & \text{при } |x| < 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

$F$ -статистика сконструирована таким образом, что позволяет обнаружить присутствие нескольких  $p$ -резонансов или пропуск нескольких  $s$ -уровней в большой последовательности  $s$ -резонансов. Средняя величина  $F_i$  и ее дисперсия даются выражениями:  $\langle F_i \rangle = n - \ln(8n) - \gamma + 2 = n - \ln n - 0,656$ ;  $\langle F_i^2 \rangle - \langle F_i \rangle^2 \approx \ln n$ . Величина  $F_i$  остается почти постоянной для последовательности уровней с одинаковыми квантовыми числами, увеличивается при наличии лишних резонансов и падает при пропуске

уровней. Такой анализ был недавно проведен для улучшения последовательности уровней различных изотопов эрбия [20].

При исследовании структуры низколежащих ядерных уровней расчёты всегда проводились с двухчастичными силами. С другой стороны, в теории случайных матриц предполагается полная случайность, означающая наличие многочастичных сил. Для того чтобы оценить различия в результатах, которые можно получить для этих двух крайних случаев, во многих работах [21, 22] были проведены расчёты с двухчастичными случайными силами методом Монте-Карло. В этом случае плотность уровней определяется гауссовым распределением, а не полукруговым законом Вигнера [30]. Отличия в распределении расстояний между соседними уровнями не найдено. Однако распределение расстояний между более далекими уровнями (например, каждым  $k^m$ ) отличается от распределения, полученного для ортогонального ансамбля.

## 2. СРЕДНИЕ СВОЙСТВА ЯДЕР

### Среднее сечение

Рассмотрим какой-нибудь ядерный процесс (упругое или неупругое рассеяние, ядерную реакцию), для которого полное или дифференциальное сечение под данным углом — функция энергии  $\sigma(E)$ . Во всех ядерных сечениях проявляются сильные флуктуации с энергией, которые обычно считают резонансами, особенно в нижней части энергетического интервала. Среднее по энергии сечение  $\bar{\sigma}(E)$  определяется соотношением [2, 23]

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} \sigma(E') dE', \quad (47)$$

где интервал усреднения  $\Delta E$  нужно выбрать как можно малым, но тем не менее достаточно большим, чтобы сгладить флуктуации. Ясно, что такое определение не очень точное, но во многих случаях структуры в сечениях имеют разный порядок величины (быстрые изменения на интервале в несколько электронвольт или несколько десятков электронвольт в одних случаях или медленные изменения на интервале порядка нескольких килоэлектронвольт. Поэтому интервал  $\Delta E$  можно выбрать достаточно однозначно.

Сечение можно записать также в виде суммы квадратов амплитуд, которые обозначим  $A_i(E)$ :

$$\sigma(E) = \sum_i |A_i(E)|^2. \quad (48)$$

По аналогии со средним сечением можно определить средние амплитуды:

$$\bar{A}_i(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} A_i(E') dE'. \quad (49)$$

Тогда среднее сечение можно записать в виде суммы членов [24, 25]:

$$\bar{\sigma}(E) = \sigma_{\text{ins}}(E) + \sigma_{\text{ret}}(E), \quad (50)$$

где

$$\sigma_{\text{ins}}(E) = \sum_i |\bar{A}_i(E)|^2 \quad (51)$$

и

$$\sigma_{\text{ret}}(E) = \sum_i |A_i(E)|^2 - \sum_i |\bar{A}_i(E)|^2. \quad (52)$$

Для того чтобы понять смысл такого разбиения, рассмотрим для простоты упругое рассеяние нейтронов. Падающей плоской волне

$$\Psi_0 = \exp(ikz) \quad (53)$$

соответствует для данного направления выходящая волна

$$\Psi = a(E) \exp[i\delta(E)] \exp(ikr)/r. \quad (54)$$

Амплитуда  $a \exp(i\delta)$  является элементом  $S$ -матрицы, который был написан таким образом, чтобы выделить амплитуду  $a$  и фазу  $\delta$ , которые зависят от энергии  $E$ .

Для того чтобы оценить задержку, связанную с вылетом нейтрона, необходимо рассмотреть волновой пакет с относительно малой шириной, который проходит через ядро-мишень за короткое время. Поэтому образуем зависящую от времени суперпозицию из волновых функций (53) и (54) с энергетическим размытием относительно энергии  $E_m$ , описываемым функцией  $\alpha(E)$ :

$$\phi_0 = \int \alpha(E) \exp[i(kz - Et)] dE. \quad (55)$$

Предположим, что  $\alpha(E)$  — вещественная функция с максимумом при энергии  $E_m$  и с шириной  $\Delta E$ . Рассмотрим сначала движение волнового пакета (55), центр тяжести которого можно определить, найдя такие величины  $z$  и  $t$ , при которых  $\phi_0$  максимальна. Если  $\alpha(E)$  — вещественная функция с максимумом при  $E_m$ , интеграл (55) имеет максимум, когда фаза экспоненциальной функции удовлетворяет условию стационарности при  $E_m$ :

$$\frac{\partial}{\partial E} (kz - Et)_{E_m} = z/v_m - t = 0, \quad (56)$$



где  $v_m$  — скорость частиц при энергии  $E_m$ :  $v_m = k_m/M$ , так как  $E = k^2/2M$ ;  $\partial k/\partial E = M/k$ ; здесь  $M$  — приведенная масса падающей частицы. Из уравнения (56) видно, что волновой пакет (55) движется со скоростью  $v_m$  и попадает в точку  $z = 0$  при  $t = 0$ . Из соотношения неопределенностей известно, что время  $\Delta t$  прохождения волнового пакета через ядро-мишень связано с шириной амплитуды  $\alpha(E)$  соотношением

$$\Delta E \Delta t \geq 1. \quad (57)$$

Волновой пакет, соответствующий функции (54), определяется соотношением

$$\phi = \int \alpha(E) a(E) (\exp \{i [kr - Et + \delta(E)]\} / r) dE. \quad (58)$$

Точно так же максимум амплитуды получается из условия, что фаза подынтегральной функции должна удовлетворять условию стационарности при  $E = E_m$ :

$$\frac{\partial}{\partial E} (kr - Et + \delta(E)) = r/v_m - t + \partial\delta/\partial E_m.$$

Отсюда видно, что это соответствует движению центра тяжести волнового пакета со скоростью  $v_m$ , но с задержкой относительно падающего волнового пакета, определяемой величиной  $\tau = \partial\delta/\partial E$ . Можно также определить амплитуду волновой функции, которая соответствует вылету без задержки относительно падающей волны, положив в выражении (58)  $t = r/v_m$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t = r/v_m) &= (1/r) \int \alpha(E) a(E) \exp [i\delta(E)] dE = \\ &= (1/r) \overline{\{a(E) \exp [i\delta(E)]\}}. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда полученной волновой функции равна средней амплитуде  $\bar{A}(E)$ , где среднее по энергии берется с весом  $\alpha(E)$ . Отсюда становится ясен смысл сечения (51) как сечения мгновенного процесса. Разность между полным и мгновенным сечениями соответствует запаздывающему процессу. Здесь был рассмотрен только случай упругого рассеяния и было предположено, что имеется лишь одна амплитуда  $A(E)$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для более общего случая.

В качестве примера рассмотрим случай, когда сечение имеет резонанс с шириной  $\Gamma$ . В окрестности такого резонанса фазовый сдвиг претерпевает изменение порядка  $\pi$  на интервале порядка ширины резонанса  $\Gamma$ , поэтому задержка  $\tau \sim 1/\Gamma$ . Это означает, что  $\tau$  равно по порядку величины времени жизни уровней компаунд-ядра шириной  $\Gamma$ , что и следовало ожидать. Для того чтобы можно было наблюдать задержку порядка  $\tau$ , необходимо сформировать

ровать волновой пакет с размытием  $\Delta t$ , много меньшим  $\tau$ . Тогда из соотношений неопределенности (57) следует, что ширина  $\Delta E$  функции  $\alpha(E)$  должна быть больше  $\Gamma$ . Следовательно, весовая функция при вычислении средней амплитуды  $\bar{A}(E)$  должна иметь ширину много больше ширины  $\Gamma$  уровней составного ядра. Это как раз и является условием, при котором осцилляции, связанные с резонансами компаунд-ядра, сглаживаются в среднем сечении.

В приведенных рассуждениях следует в принципе усреднять точное сечение \*. Это невозможно, так как сечение определяют как случайную переменную, ожидаемую величину, которая равна среднему по энергии от точного сечения. При этом возникает вопрос: где и как следует ввести в расчет статистические предположения, чтобы обеспечить равенство ожидаемой величины случайного сечения среднему по энергии от точного сечения. Было введено много статистических предположений, которые дают разумные результаты, согласующиеся с экспериментом. Однако, строгого доказательства пока не получено.

Чтобы получать средние сечения, необходимо описать динамику ядерных реакций. Напомним поэтому основные соотношения теории ядерных реакций. Многоуровневая формула для матрицы рассеяния Брейта — Вигнера имеет вид:

$$S_{\lambda\mu}(E) = \exp[i(\varphi_\lambda + \varphi_\mu)] \left[ \delta_{\lambda\mu} - i \sum_s \frac{G_\lambda^s G_\mu^s}{E - E_s + i\Gamma_{s/2}} \right]. \quad (59)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — индексы каналов, характеризующихся набором квантовых чисел  $\lambda = \{\alpha, l, s, j\}$ , где  $\alpha$  обозначает тип распада;  $l$  — угловой момент вылетающей частицы относительно остаточного ядра;  $s$  — спин канала;  $j$  — сумма спина канала и орбитального момента:  $s = s_a + s_A$ ;  $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ ;  $\varphi_\lambda$  и  $\varphi_\mu$  — фазы потенциального рассеяния;  $G_\lambda^s$  — парциальные амплитуды, связанные с резонансом компаунд-ядра и открытыми каналами при рассматриваемой энергии  $E$ . Квадраты этих амплитуд являются парциальными ширинами, а сумма всех парциальных ширин для данного уровня дает полную ширину  $\Gamma_s$ :  $\Gamma_s^\lambda = |G_\lambda^s|^2$ ;  $\Gamma_s = \sum_\lambda \Gamma_s^\lambda$ .

Выражение (59) для матрицы рассеяния не является строгим, так как при его выводе предполагается случайность знаков амплитуд и малость парциальной ширины по сравнению со средним расстоянием  $D$  между резонансами  $\Gamma_s^\lambda \ll D$ . Здесь не предполагается малость полной ширины по сравнению со средним расстоянием между уровнями. Все величины  $\varphi_\lambda, G_\lambda^s, \Gamma_s$  и  $E_s$  в (59) являют-

\* Под точным сечением подразумевается истинное сечение, не зависящее от разрешающей способности экспериментальной техники.

ся функциями энергии реакции  $E$ , медленно меняющимися по сравнению со знаменателем (59), за исключением области вблизи порога. Формулу (59) Брейта — Вигнера можно рассматривать как упрощенное выражение точного соотношения [26]:

$$S_{\lambda\mu}(E) = \exp [i(\varphi_\lambda + \varphi_\mu)] \left[ \delta_{\lambda\mu} - i \sum_{s, t} \left( s \left| \frac{1}{E - \mathcal{K}} \right| t \right) G_\lambda^s G_\mu^{t*} \right]. \quad (59')$$

В этом выражении  $\mathcal{K}$  — оператор, равный сумме гамильтониана и оператора граничных условий  $\mathcal{K} = H + L$ . Функции  $|s\rangle$  — базисные функции, образующие полный ортонормированный набор. Амплитуды  $G_\lambda^s$  пропорциональны величинам этих базисных функций на поверхности, соответствующей каждому из каналов. Если предположим, что базисные функции  $|s\rangle$  — собственные функции оператора  $\mathcal{K}$ , оператор  $1/(E - \mathcal{K})$  будет диагональным, и если обозначим его собственные значения  $E - i\Gamma_{s/2}$ , то получим разложение, совпадающее с выражением (59). Однако оператор  $\mathcal{K}$  не является эрмитовым, поэтому амплитуды  $G_\lambda^s$  уже не являются вещественными, как в формуле Брейта — Вигнера. Полученное таким образом разложение будет формулой Капура — Пайерлса. Здесь амплитуды  $G_\lambda^s$  — комплексные величины и зависят от энергии довольно сложным образом, как  $E_s$  и  $\Gamma_s$ . Если всеми этими усложнениями пренебречь, то получим приближенное выражение Брейта — Вигнера (59). Парциальные амплитуды  $G_\lambda^s$  можно представить в виде [произведения двух множителей:  $G_\lambda^s = g_\lambda^s \sqrt{2k_\lambda R_\lambda} v_\lambda$ . Здесь  $g_\lambda^s$  — приведенная амплитуда, зависящая только от ядерной волновой функции во внутренней области. Второй множитель характеризует проникаемость частицы с бесконечности до ядерной поверхности, причем  $k_\lambda$  — волновое число;  $R_\lambda$  — радиус, а  $v_\lambda$  — коэффициент проникаемости в канале  $\lambda$ .

Часто удобно использовать  $\tilde{R}$ -матрицу Вигнера, которая определяется выражением, подобным (59'):

$$\tilde{R}_{\lambda\mu}(E) = \sum_{s, t} \left( s \left| \frac{1}{E - H} \right| t \right) g_\lambda^s g_\mu^{t*}.$$

В этом выражении нет ни оператора граничных условий, ни коэффициента проникаемости;  $\tilde{R}$ -матрица является эрмитовой. Выбирая в качестве базисных функций  $|s\rangle$  собственные функции гамильтониана  $H$  во внутренней области, получаем хорошо известное выражение:

$$\tilde{R}_{\lambda\mu} = \sum_s g_\lambda^s g_\mu^s / (E - E_s),$$

где  $g_\lambda^s$  можно выбрать вещественной. Средняя величина приведенной парциальной ширины, деленная на среднее расстояние

между уровнями  $D$ :  $(\overline{g\lambda})^2/D = \Gamma_\lambda^{s(0)}/D$ , называется силовой функцией;  $S$ -матрицу можно выразить через  $\tilde{R}$ -матрицу, что позволяет получать приближенные выражения для  $S$ , которые автоматически являются унитарными.

Сечения реакций можно легко выразить через  $S$ -матрицу, вернее, через матрицу  $R = 1 - S$ . Можно показать, что сечение  $(\alpha \rightarrow \beta)$ -реакции дается выражением

$$\sigma(\alpha, \beta) = \frac{\pi\lambda_\alpha^2}{4(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_{ll's's'j} (2j+1) |(\beta l' s' j | R | \alpha l s j)|^2, \quad (60)$$

где суммирование по  $l, l', s, s', j$  проводится по всем значениям, разрешенным законом сохранения момента и четности. Угловые распределения также можно выразить через  $R$ -матрицу. Для дифференциального сечения  $(\alpha, \beta)$ -реакции имеем

$$d\sigma(\alpha, \beta)/d\Omega = \frac{k_\alpha^2}{4(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_L C_L P_L(\cos\theta),$$

где  $P_L$  — полиномы Лежандра;

$$C_L = \sum_{l, \tilde{l}, l', \tilde{l}', j, \tilde{j}, s, s'} Z(\tilde{l} \tilde{j} l j | s L) Z(\tilde{l}' \tilde{j}' l' j' | s' L) \times \\ \times (\beta l' s' j | R | \alpha l s j) (\beta \tilde{l}' s' \tilde{j}' | R | \alpha \tilde{l} s \tilde{j}).$$

Здесь  $Z$  — коэффициенты Блатта — Биденхарна, связанные с коэффициентами Рака. Чтобы получить выражение для полного сечения, необходимо сечение (60) просуммировать по всем  $\beta$ . Учитывая унитарность  $S$ -матрицы, получаем

$$\sigma_t = \sum_\beta \sigma(\alpha, \beta) = \frac{2\pi k_\alpha^2}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_{lsj} (2j+1) \text{Re}(\alpha l s j | R | \alpha l s j).$$

Приведем также сечение, полученное суммированием (60) по всем  $\beta \neq \alpha$ :

$$\sigma_r^t(\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} \sigma(\alpha, \beta) = \frac{\pi k_\alpha^2}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \times \\ \times \sum_{lsj} (2j+1) [1 - |(\alpha l s j | S | \alpha l s j)|^2]. \quad (61)$$

В формуле Брейта — Вигнера величины  $\varphi_\lambda, G_\lambda^s, E_s$  — параметры, которые не получаются из теории простым образом. Поэтому формула Брейта — Вигнера используется главным образом для феноменологического описания экспериментально наблюдаемых сечений. В статистической теории относительно этих величин

делается ряд предположений. Рассмотрим однородную модель, для которой статистические предположения наиболее просты:

1) амплитуды  $G_\lambda^s$  — статистически независимые случайные переменные со средним, равным нулю;

2) энергии  $E_s$  распределены случайным образом независимо друг от друга со средним расстоянием между ними  $D$ ;

3) фазы  $\varphi_\lambda$ , средние парциальные ширины  $\bar{\Gamma}_\lambda^s$  и среднее расстояние между уровнями  $D$  — медленно меняющиеся функции энергии.

Отметим, что второе предположение противоречит явлению отталкивания уровней. Поэтому более разумно предположить, что явление отталкивания уровней слабо влияет на средние сечения. Используя эти предположения, оценим среднюю величину  $S$ -матрицы:

$$\bar{S}_{\lambda\mu}(E) = \exp(2i\varphi_\lambda) [1 - \pi(\bar{\Gamma}_\lambda/D)] \delta_{\lambda\mu}. \quad (62)$$

При этом учли, что второй член в скобках (59) не дает вклада, если  $\lambda \neq \mu$ , а также

$$\sum_s \frac{1}{E - E_s + i\Gamma_s/2} = \int \frac{dE}{D(E - E_s + i\Gamma_s/2)} = -i\pi/D.$$

Здесь  $\bar{\Gamma}_s$  — средняя парциальная ширина для канала  $\lambda$ ;  $D$  — среднее расстояние между резонансами с теми же спином и четностью, что и в канале  $\lambda$ . Аналогичным образом можно оценить средний квадрат матричного элемента  $S$ -матрицы:

$$|\bar{S}_{\lambda\mu}|^2 = 2\pi \frac{\bar{\Gamma}_\lambda \bar{\Gamma}_\mu}{D\bar{\Gamma}} = \frac{2\pi}{D} \cdot \frac{\bar{\Gamma}_\lambda \bar{\Gamma}_\mu}{\sum_\nu \bar{\Gamma}_\nu} \quad (63)$$

При выводе этих соотношений предполагалось, что флуктуации полной ширины достаточно малы, так что среднее от  $1/\Gamma_s$  равно  $1/\bar{\Gamma}_s$ . В выражении (63) каналы  $\lambda$  и  $\mu$  имеют одинаковые спины и четности, а суммирование в знаменателе проводится только по каналам  $\nu$ , имеющим те же спины и четности. Это соотношение является основным в теории Хаузера — Фешбаха [27]. Для среднего квадрата диагонального матричного элемента получим несколько иное выражение, так как ряд членов не уничтожается теперь из-за независимости знаков амплитуд  $G_\lambda^s$ :

$$|\bar{S}_{\lambda\lambda}|^2 = 1 - 2\pi\bar{\Gamma}_\lambda/D + (\pi\bar{\Gamma}_\lambda/D)^2 + 2\pi\bar{\Gamma}_\lambda^2/(\bar{\Gamma}D). \quad (64)$$

Полученные выражения зависят от величины силовой функции  $\Gamma_\lambda/D$ . Чтобы определить эту функцию, необходимо использовать какие-либо модели. Простейшие модели описывают, что происходит с падающей частицей при первом взаимодействии

с ядром, предсказывая, таким образом, мгновенные сечения. Поэтому естественно отождествить величину  $\bar{S}$  статистической модели (62) с величиной  $S$ , даваемой этой простой моделью. В частности, диагональные элементы во входном канале  $(\alpha l s j | \bar{S} | \alpha l s j)$  являются амплитудами парциальной волны  $(\alpha l s j)$ , мгновенно рассеянной во входной канал, а величина

$$T_{\alpha l s j} = 1 - |(\alpha l s j | \bar{S} | \alpha l s j)|^2 \quad (65)$$

является частью парциальной волны  $(\alpha l s j)$ , которая мгновенно поглощается. Естественность такой интерпретации видна также из выражения (61), которое с учетом (65) можно записать в виде

$$\sigma_r^{t, \text{ins}} = \frac{\pi \lambda_\alpha^2}{(2s_\alpha + 1)(2s_A + 1)} \sum_{l s j} (2j + 1) T_{\alpha l s j}. \quad (66)$$

Простые модели основаны на следующей картине. Частицы, прошедшие через потенциальный барьер во входном канале, сильно взаимодействуют с ядром-мишенью и образуют составное ядро. Следовательно, они имеют исчезающе малую вероятность мгновенного вылета обратно во входной канал. Таким образом, величины  $T_{\alpha l s j}$  — просто коэффициенты проицаемости потенциального барьера во входном канале для различных парциальных волн. С учетом выражений (62) и (65) связь между коэффициентами проицаемости  $T_\lambda$  и силовой функцией  $\bar{\Gamma}_\lambda/D$  можно представить в виде

$$T_\lambda = 2\pi \bar{\Gamma}_\lambda/D - \pi^2 (\bar{\Gamma}_\lambda/D)^2. \quad (67)$$

Для расчета коэффициентов проицаемости используются различные модели, наиболее простая из которых — классическая модель черного ядра. Эта модель основана на предложении, что все нейтроны с прицельными параметрами  $d = \hbar h$  меньшими, чем радиус ядра  $R$ , полностью поглощаются, а нейтроны с бóльшими прицельными параметрами не поглощаются вообще:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha l s j} &= 1, & l < R/\lambda; \\ T_{\alpha l s j} &= 0, & l > R/\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Квантовая модель черного ядра более точно описывает влияние центробежного барьера, чем (68), но качественное поведение в классической и квантовой моделях одно и то же. В действительности определенная часть падающей волны испускается обратно во входной канал, и этот эффект учитывается оптической моделью, в которой наличие комплексной потенциальной ямы приводит к фазовому сдвигу  $\delta_{\alpha l s j}$  для различных парциальных волн. Эти

фазовые сдвиги связаны с диагональными элементами  $S$ -матрицы во входном канале соотношением

$$S_{\lambda\lambda}^{\text{опт}} = \exp(2i\delta_\lambda), \quad (69)$$

причем фазовый сдвиг комплексный:

$$\delta_\lambda = \delta_\lambda^r + i\delta_\lambda^i.$$

Коэффициенты проницаемости  $T_\lambda$  можно выразить через мнимую часть фазового сдвига:

$$T_\lambda = 1 - |S_{\lambda\lambda}^{\text{опт}}|^2 = 1 - \exp(-4\delta_\lambda^i). \quad (70)$$

Согласно выражению (62), средняя матрица  $\bar{S}$  является диагональной, поэтому мгновенное сечение реакции равно нулю. Этого следовало ожидать, так как в статистической модели ядерные реакции могут идти только с образованием составного ядра. Сечение реакции через составное ядро дается хорошо известной формулой Хаузера — Фешбаха [27]:

$$\sigma(\alpha, \beta) = \frac{\pi\lambda_a^2}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_{ll's's'} \frac{2\pi}{D} (2j+1) \frac{\bar{\Gamma}_{\alpha l s j} \bar{\Gamma}_{\beta l' s' j}}{\sum_{\gamma l'' s'' j} \bar{\Gamma}_{\gamma l'' s'' j}}, \quad (71)$$

которая следует непосредственно из выражений (60) и (63). Суммирование здесь проводится по всем значениям, разрешенным законом сохранения момента и четности. Учитывая соотношения (60) и (63), получим выражение для коэффициентов  $C_L$ , определяющих угловое распределение:

$$C_L = \sum_{ll's's'j} Z(lj|lj|sL) Z(l'j|l'j|s'L) \frac{2\pi}{D} \frac{\bar{\Gamma}_{\alpha l s j} \bar{\Gamma}_{\beta l' s' j}}{\sum_{\gamma l'' s'' j} \bar{\Gamma}_{\gamma l'' s'' j}}, \quad (72)$$

где  $Z$  — коэффициенты отличны от нуля только при  $L$  четном. Отсюда следует, что угловые распределения в статистической модели симметричны относительно  $\pi/2$ .

При выводе этих соотношений не учитывалась флуктуация ширин [28]. С учетом флуктуаций ширин выражения для среднего сечения можно записать в виде [29]:

$$\bar{\sigma}_{CC'} = \pi\lambda^2 \frac{T_C T_{C'}}{\sum_{C''} T_{C''}} F_{CC'}. \quad (73)$$

Это уравнение известно как формула Хаузера — Фешбаха с поправкой на флуктуации:

$$F_{CC'} = \left\langle \frac{\Gamma_{\mu C} \Gamma_{\mu C'}}{\Gamma_\mu} \right\rangle / \frac{\langle \Gamma_{\mu C} \rangle \langle \Gamma_{\mu C'} \rangle}{\langle \Gamma_\mu \rangle}. \quad (74)$$

Величина  $F_{CC}$  зависит от закона распределения ширин  $\Gamma_{\mu c}$  и изменяется от  $1/2$  (в случае двух конкурирующих нейтронных каналов с равными коэффициентами проницаемости) до 1 (для случая большого числа конкурирующих каналов). За исключением этого множителя, выражение (73) полностью определяется оптической моделью. Формула Хаузера — Фешбаха получена в предположении об образовании долгоживущего компаунд-ядра. Это предположение не является справедливым в случае быстрых нейтронов, когда ширины резонансов сравнимы с расстоянием между уровнями или даже больше его. Здесь уже времена жизни состояний системы короче, чем характерные периоды внутренних движений. Система распадается до того, как достигается равновесие, и нельзя больше говорить об образовании составного ядра.

Чтобы обойти эту трудность, Вигнер предложил некоторый прием, названный  $R$ -матричной теорией [30]. Согласно этой теории компаунд-система помещается в теоретический контейнер, который полностью предотвращает ее распад. Теперь компаунд-система имеет спектр строго стабильных состояний. Эти  $R$ -матричные состояния можно рассчитать на основе конкретных моделей ядерной структуры, например на основе оболочечной модели. После того как  $R$ -матричные состояния получены, выполняются расчеты, связанные с устранением контейнера, позволяющие системе распадаться. Таким путем получается  $S$ -матрица. Для того чтобы найти среднее сечение, необходимо найти средние по энергии матричные элементы  $S$ -матрицы. Конечные выражения для среднего сечения реакции можно записать в виде, подобном формуле Хаузера — Фешбаха (73) с поправкой на флуктуации ширин, где вместо  $T_c$  стоит величина  $\theta_c$ , связь которой с  $T_c$  определяется деталями статистических распределений параметров  $S$ -матрицы, которые, в свою очередь, сильно зависят от степени перекрытия резонансов [31]. Функциональную связь  $\theta_c$  и  $T_c$  можно выразить через параметр  $Q$ , который изменяется в пределах от 0 до 1. Поправка на флуктуации также зависит от распределения параметров  $S$ -матрицы. В большинстве случаев достаточно хорошая оценка получается из уравнения (73) с обычной поправкой (Портер — Томас) на флуктуации. Отклонения от точной формулы обычно меньше, чем разница в сечениях, обусловленная неопределенностью в параметрах оптической модели, и меньше, чем экспериментальные погрешности.

Экспериментальные дважды дифференциальные сечения неупругого рассеяния нейтронов с энергией  $E_{n0} = 14 \text{ Mev}$  на ядрах железа [32, 33] сравниваются с результатами расчетов по статистической модели (71), (72) [34] на рис. 3. По жесткой части спектра определен также вклад предравновесных процессов [35]. Различие эксперимента и теории в мягкой части спектра обуслов-



лено вкладом нейтронов из  $(n, 2n)$ -реакции. Аналогичные расчеты проводились многими авторами. Хорошее описание экспериментальных данных результатами расчетов в статистической теории говорит о том, что реакция идет через образование составного ядра. В некоторых случаях, например в реакции  $^{27}\text{Al}(d, p)^{28}\text{Al}$ , расче-

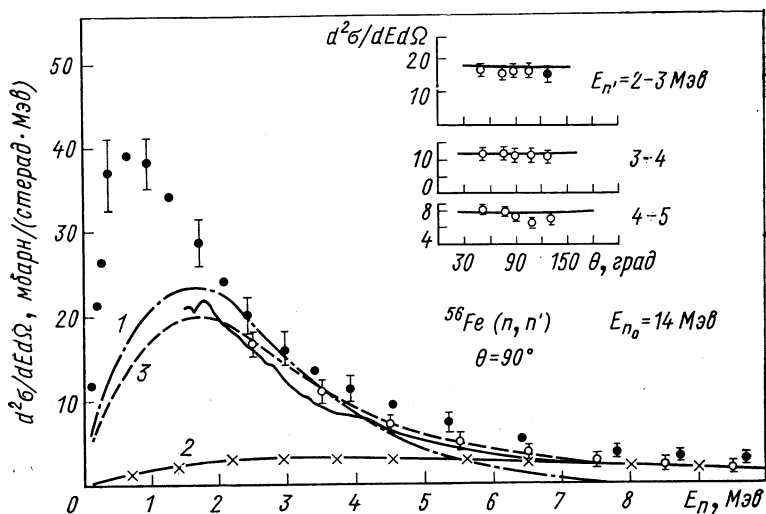


Рис. 3. Дважды дифференциальные сечения  $^{56}\text{Fe}(n, n')$ -реакции  $E_{n0} = 14 \text{ Мэв}$ ,  $\theta = 90^\circ$ :

● — из работы [32]; ○ и сплошная кривая — из работы [33]; 1 — результаты расчета по статистической модели; 2 — вклад предравновесного распада [35]; 3 — суммарный вклад равновесного и предравновесного распада: в верхней части рисунка приведены угловые распределения.

ты по формуле Хаузера — Фешбаха не описывают эксперимент. Существенным здесь является вклад прямых процессов, и экспериментальные данные хорошо описываются суммой вкладов, рассчитанных по статистической теории и по методу искаженных волн [36]. Таким образом, изучение средних сечений может дать информацию о структуре составного ядра и механизмах протекания различных ядерных реакций.

### Флуктуации в сечениях.

#### Метод автокорреляционной функции

В 1960 г. Эриксон отметил [37], что при высоких энергиях возбуждения, когда среднее расстояние между уровнями компанд-ядра меньше средней ширины, в сечениях должны наблюдаться флуктуации. В этом случае сечение следует рассматривать как случайную функцию, а экспериментальные данные будут

тогда одной частной выборкой этой случайной функции. Нельзя ожидать, чтобы отдельная выборка описывала среднее значение; следовательно, для оценки отклонений теории от эксперимента необходимо знать характеристики флуктуаций. Наиболее простой метод состоит в измерении автокорреляционной функции

$$C_{12} = \frac{M_{12}}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle}, \quad (75)$$

где

$$M_{12} = \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle.$$

В случае, если в качестве  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  берется сечение в разных точках по энергии, автокорреляционная функция принимает вид

$$C(\varepsilon) = \frac{\langle \sigma(E) \sigma(E + \varepsilon) \rangle}{\langle \sigma(E) \rangle^2} - 1. \quad (76)$$

Можно показать [38], что в случае одного изолированного уровня

$$C(\varepsilon) = -\varepsilon^2 / (\Gamma^2 + \varepsilon^2). \quad (77)$$

Заметим, что с точностью до постоянного множителя  $\int \sigma(E) \times \sigma(E + \varepsilon) dE$  есть не что иное как свертка, т. е. компонента Фурье от функции  $F^2(t)$ , если  $\sigma(E)$  — компонента Фурье от функции  $F(t)$ . Компонента Фурье от  $\sigma(E) \sim \Gamma / [(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4]$  имеет вид

$$\begin{aligned} F(t) &= \Gamma \exp(iE_0 t) \int \frac{\exp[i(E - E_0)t]}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} dE = \\ &= \Gamma \exp(iE_0 t) \int \frac{\exp(i\omega t)}{\omega^2 + \Gamma^2/4} d\omega. \end{aligned}$$

Замечая, что подынтегральное выражение имеет два полюса в точках  $\omega = \pm \Gamma/2$ , находим с помощью теории вычетов, замыкая контур на верхнюю полуплоскость при  $t > 0$  и на нижнюю при  $t < 0$ :

$$F(t) = \pi \exp(iE_0 t) \begin{cases} \exp\left(-\frac{\Gamma}{2} t/2\right) & t > 0; \\ \exp(\Gamma t/2) & t < 0. \end{cases}$$

Компонента Фурье от функции

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} \exp(-\Gamma t), & t > 0; \\ \exp(\Gamma t), & t < 0 \end{cases}$$

равна  $2\Gamma/(\Gamma^2 + \varepsilon^2)$ , откуда и следует формула (77). Таким образом, вычисляя корреляционную функцию, можно определить среднее значение ширины  $\Gamma$  на рассматриваемом участке спектра.

В действительности анализ оказывается сложнее из-за того, что усреднение проводится по конечному участку спектра, а так-

же из-за вклада прямых реакций. С учетом вклада прямых процессов  $S_d(E)$  запишем сечение в виде

$$\sigma(E) \sim \left| S_d(E) + \sum_s \frac{a_s}{E - E_s + i\Gamma_s/2} \right|^2, \quad (78)$$

где  $a_s = G_\lambda^s G_\mu^s$  — независимые случайные переменные, удовлетворяющие условиям:

$$\langle a_s \rangle = 0; \quad \langle a_s a_t \rangle = \delta_{st} a^2; \quad (79)$$

здесь  $a = \text{const}$ . Будем считать также, что энергии резонансов  $E_s$  равномерно распределены независимо друг от друга со средним расстоянием  $D$  между собой, а  $\Gamma_s$  — медленно меняющаяся функция энергии ( $\Gamma_s \approx \Gamma$ ). Тогда среднее значение сечения можно записать в виде

$$\langle \sigma(E) \rangle = |S_d(E)|^2 + a^2 \int \frac{dE_s}{D} \frac{1}{(E - E_s)^2 + (\Gamma_s/2)^2} = |S_d(E)|^2 + \frac{2\pi a^2}{\Gamma D}.$$

Используя условия (79), можно получить [2]:

$$M(E, E') = N \operatorname{Re} \left[ i\Gamma \frac{2S_d^*(E') S_d(E) + N}{E' - E + i\Gamma} \right], \quad (80)$$

где  $N = 2\pi a^2 / (\Gamma D)$ . Если пренебречь энергетической зависимостью  $S_d(E)$  и  $\Gamma_s$ , то функция  $M(E, E')$  становится функцией разности  $\varepsilon = E' - E$ , и будем иметь хорошо известное выражение, полученное Эриксоном [37]:

$$M(\varepsilon) = N(N + 2|S_d|^2) [\Gamma^2 / (\varepsilon^2 + \Gamma^2)].$$

Из этого соотношения видна зависимость флуктуаций от вклада прямых процессов.

Другой тип корреляций изучается при измерении автокорреляционной функции по углам при заданной энергии:

$$C(\alpha) = \frac{\langle \sigma(\theta) \sigma(\theta + \alpha) \rangle}{\langle \sigma(\theta) \rangle^2} - 1.$$

Эта функция характеризует когерентность излучения разных участков поверхности ядра. Отсюда можно определить радиус ядра. Опыты дают значения, близкие к определенным из других данных [38]. Было выполнено много работ, в которых использовался метод корреляционной функции; результаты этих работ подтверждают теоретические предсказания [39].

### Плотность возбужденных состояний ядер

**Основные соотношения.** Плотность уровней атомных ядер довольно подробно обсуждалась в работах [2, 40, 41], поэтому здесь остановимся лишь на отдельных вопросах, не обсуждавших-

ся ранее, и рассмотрим результаты, полученные в последнее время.

Пусть имеется изолированная система, собственные значения гамильтониана которой  $E_1, E_2, \dots, E_n \dots$ . Тогда плотность уровней такой системы определяется соотношением [42]

$$\rho(E, N) = \sum_{n, i} \delta(E - E_n) \delta(N - N_i).$$

Используя интегральное представление  $\delta$ -функции, можно переписать это выражение в виде

$$\rho(E, N) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} d\beta \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} d\alpha \times \\ \times \exp(\beta E - \alpha N) \text{Sp} [\exp(-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N})], \quad (81)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы;  $\hat{N}$  — оператор числа частиц. Таким образом, если известна функция  $Q(\alpha, \beta)$ :

$$Q(\alpha, \beta) \equiv \text{Sp} \{ \exp(-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N}) \} = \sum_{n, i} \exp(-\beta E_n + \alpha N_i) \equiv \\ \equiv \exp[-\beta \phi(\alpha, \beta)], \quad (82)$$

можно, вычислив интеграл (81), получить плотность уровней системы как функцию энергии и числа частиц. Интеграл (81) оценивается обычно методом перевала. Разлагая логарифм подынтегральной функции

$$S(\alpha, \beta) = \beta E - \alpha N + \ln Q(\alpha, \beta) \quad (83)$$

в точках  $\alpha_0, \beta_0$ , в которых подынтегральная функция имеет минимум при движении по действительной оси (максимум при движении по мнимой оси), и ограничиваясь квадратичными членами, получаем

$$\rho(E, N) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\exp\{S(\alpha_0, \beta_0)\}}{|\text{Det}(\alpha_0, \beta_0)|^{1/2}}, \quad (84)$$

где

$$\text{Det}(\alpha_0, \beta_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} \end{array} \right|. \quad (85)$$

Все величины в (84) и (85) должны вычисляться в седловых точках  $(\alpha_0, \beta_0)$ , определяемых системой уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q(\alpha_0, \beta_0); \\ N = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Q(\alpha_0, \beta_0). \end{array} \right\} \quad (86)$$

**Модель невзаимодействующих частиц.** До сих пор не вводилось никаких модельных представлений о структуре системы. Ясно, что построение функции  $Q(\alpha, \beta)$  эквивалентно определению спектра собственных значений гамильтониана системы, что является очень трудной задачей. Чтобы обойти эту трудность, вводят определенные предположения о структуре системы. Наиболее широкое применение получила модель невзаимодействующих ферми-частиц [40], для которой энергия равна сумме одночастичных энергий. В этом случае

$$\ln Q = \sum_i \ln [1 + \exp(\beta \varepsilon_i - \alpha)], \quad (87)$$

а уравнения седловой точки принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_i \frac{\varepsilon_i}{1 + \exp(\beta \varepsilon_i - \alpha)}; \\ N &= \sum_i \frac{1}{1 + \exp(\beta \varepsilon_i - \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Здесь  $\varepsilon_i$  — энергии одночастичных уровней.

До сих пор не вводилось никаких термодинамических понятий. Однако вычисление плотности уровней привело к выражениям, которые можно интерпретировать на языке статистической механики на основе представления о большом каноническом ансамбле [3]. В таком ансамбле вероятность того, что ядро, состоящее из  $N$  частиц, находится в состоянии с собственным значением энергии  $E_i(N)$ , пропорциональна  $\exp\{-\beta E_i + \alpha N\}$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — подгоночные параметры, позволяющие определить средние значения числа частиц и энергии. Поэтому соотношения (86) и (88) для седловых точек следует понимать как уравнения, определяющие средние по ансамблю:

$$E = \langle \hat{H} \rangle; \quad N = \langle \hat{N} \rangle, \quad (89)$$

где

$$\langle E \rangle \equiv \frac{\text{Sp} \{ \hat{H} \exp(-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N}) \}}{\text{Sp} \{ \exp(-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N}) \}}. \quad (90)$$

На языке статистической механики функция  $Q(\alpha, \beta)$  называется статистической суммой большого канонического ансамбля;  $\phi$  — термодинамическим потенциалом;  $S$  — энтропией,  $\lambda = \alpha/\beta$  — химическим потенциалом. Параметр  $\beta_0$  в экстремальной точке — величина, обратная температуре  $1/t$ . Действительно, пользуясь определением температуры в термодинамике  $t = (\partial S/\partial E)^{-1}$  с учетом уравнений (86), получаем

$$\frac{dS}{dE} = \beta + E \frac{d\beta}{dE} + \frac{d \ln Q}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dE} = \beta = \frac{1}{t}. \quad (91)$$

Таким образом, задача определения плотности состояний, задача комбинаторики, привела к средним выражениям. Такое усреднение обусловлено использованием метода перевала. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим метод Дарвина — Фаулера. Пусть имеем систему  $N$  фермионов с энергией  $E$ , находящихся на одночастичных уровнях  $\varepsilon_i$ , причем единица измерения энергии выбрана таким образом, что все  $\varepsilon_i$  — целые числа:

$$\sum_i n_i = N; \quad \sum_i \varepsilon_i n_i = E. \quad (92)$$

Здесь  $n_i$  — числа заполнения одночастичных уровней. Составим некоторую производящую функцию:

$$Q(x, y) = (1 + xy^{\varepsilon_1}) (1 + xy^{\varepsilon_2}) \dots (1 + xy^{\varepsilon_i}) \dots = \prod_i (1 + xy^{\varepsilon_i}).$$

Сопоставим общему члену суммы  $x^{n_1+n_2+\dots+n_i} \times y^{\varepsilon_1 n_1+\varepsilon_2 n_2+\dots+\varepsilon_i n_i}$  состояние системы, для которого на одночастичном уровне  $\varepsilon_1$  находится  $n_1$  частиц, на уровне  $\varepsilon_2$  —  $n_2$  частиц и т. д. Если для какого-либо члена в скобках взята единица, то будем считать, что на этом уровне нет частиц. Таким образом, каждому члену суммы соответствует определенное распределение по уровням и каждому распределению — определенный член суммы. Рассматривая  $Q(x, y)$  как функцию комплексных переменных  $x$  и  $y$ , видим, что она представляет собой ряд Лорана с положительными действительными коэффициентами. Интересующая нас плотность состояний системы — число комбинаций, которым данную энергию  $E$  можно распределить по уровням  $N$  частиц, определяется коэффициентом при  $x^N y^E$ , который можно найти с помощью теоремы Коши [43]:

$$\rho(E, N) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{Q(x, y) dx dy}{x^{N+1} y^{E+1}}.$$

Подынтегральная функция (запишем ее через  $\exp[S(x, y)]$ ) имеет наибольшее значение модуля, когда переменные  $x$  и  $y$  реальные и положительны. Определим минимум  $S(x, y)$  на действительных осях  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial x} - \frac{N+1}{x} &= 0 \\ \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial y} - \frac{E+1}{y} &= 0 \end{aligned} \right|_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}}$$

Проводя контуры интегрирования через  $x = \xi$  и  $y = \eta$ , можно видеть, что при переходе от точки  $x = \xi$  перпендикулярно к действительной оси величина  $|\exp[S(x, y)]|$  быстро убывает, и интеграл будет определяться в основном окрестностью седловой

точки. Разложим логарифм подынтегральной функции в ряд и ограничимся членами второго порядка. В результате

$$\rho(E, N) = \frac{1}{2\pi} \frac{Q(\xi, \eta)}{\xi^{N+1} \eta^{E+1} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right)_{\xi, \eta}^{1/2}}$$

Производя замену переменных  $x = \exp(\alpha)$  и  $y = \exp(-\beta)$ , приходим к соотношениям (84) — (86).

Аналитические выражения для плотности уровней в модели невзаимодействующих частиц получаются на основе приближения непрерывного спектра, при котором вводит плотность одночастичных состояний и суммы по одночастичным состояниям заменяются интегралами. Кроме того, интегралы вычисляются с использованием еще двух приближений: низких температур  $t/\lambda \ll 1$  и малых моментов [40]. Основанная на этих приближениях модель ферми-газа, в которой остаточные взаимодействия учитываются феноменологически, широко используется при анализе экспериментальных данных. Однако приближение непрерывного спектра является слишком грубым. Уже в модели с эквидистантным одночастичным спектром неоднородность в спектре приводит к зависимости эффективной энергии возбуждения от степени заполнения ферми-уровня [44]. Учет этой зависимости позволяет получить более согласованный набор параметров плотности уровней модели ферми-газа [45].

Плотность уровней ядер с одночастичным спектром Нильссона подробно исследовалась в работе [46]. В этом случае приходится отказаться от наглядных аналитических выражений модели ферми-газа и проводить расчеты численно. Результаты проведенных расчетов показали, что индивидуальные особенности ядер, связанные с оболочечной структурой одночастичного спектра, сильно влияют на средние характеристики ядер, в частности на плотность возбужденных состояний. Это влияние проявляется в энергетической зависимости параметра плотности уровней, особенно для магических и близких к ним ядер. Экспоненциальный рост плотности уровней  $\rho \sim \exp(U/T)$ , где  $U$  — энергия возбуждения;  $T$  — константа, называемая ядерной температурой, наблюдаемой в некоторых случаях на эксперименте [47], служил основой для введения модели «плавящегося» ядра [48]. В работе [49] было показано, что постоянства термодинамической температуры, как в случае фазового перехода первого рода, здесь нет, поэтому рассматривать какие-либо физические эффекты, связанные с плавлением, не имеет смысла. Постоянство ядерной температуры в данном случае обусловлено влиянием дискретной структуры одночастичного спектра. Результаты расчетов плотности уровней для ядер  $^{208}\text{Pb}$  и  $^{209}\text{Bi}$  с использованием одночастичного спектра модели Нильссона приведены на рис. 4. Здесь же показаны плотность

уровней, температура и параметр плотности уровней модели ферми-газа с феноменологическим учетом остаточного взаимодействия, для которой логарифм плотности уровней не имеет линейной зависимости от энергии возбуждения.

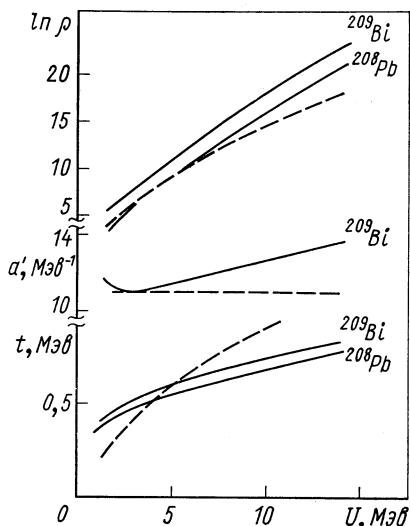


Рис. 4. Зависимость температуры, плотности уровней  $^{208}\text{Pb}$  и  $^{209}\text{Bi}$ , параметра  $a$  для  $^{209}\text{Bi}$  от энергии возбуждения:

— — — — — соответствующие величины для ядер  $^{208}\text{Pb}$  и  $^{209}\text{Bi}$  с использованием одночастичного спектра модели Нильсона;  
 — — — — — соответствующие величины для  $^{209}\text{Bi}$  в модели ферми-газа.

термодинамическим потенциалом, который соответствует переходу от гамильтониана  $H$  взаимодействующих частиц к модельному гамильтониану  $H_0$  взаимодействующих квазичастиц:

$$Q_0(\alpha, \beta) \equiv \exp[-\beta\phi_0(\alpha, \beta)] = \text{Sp}\{\exp(-\beta H_0)\}.$$

Явный вид гамильтониана  $H_0$  можно получить с помощью вариационного принципа Хартри — Фока — Боголюбова [50]. В этом случае статистическая сумма  $Q_0$  будет наилучшим одночастичным приближением к статистической сумме взаимодействующих частиц. Однако модельный гамильтониан  $H_0$  теперь уже зависит от температуры и химического потенциала, поэтому может не выполняться целый ряд термодинамических соотношений [51]. При вычислении плотности возбужденных состояний ядра это обстоятельство оказывается существенным. Если перейти к модельному гамильтониану невзаимодействующих квазичастиц еще в выраже-

Экспериментальные данные [47] указывают на экспоненциальную зависимость плотности уровней этих ядер с постоянной ядерной температурой, согласующуюся с расчетом [49].

#### Модель сверхтекучего ядра.

Учет парных корреляций сверхпроводящего типа, необходимый при описании основных и первых возбужденных состояний ядер, существенным образом влияет и на характеристики высоковозбужденных состояний. Гамильтониан системы запишем в виде

$$H = \sum_{k,s} \varepsilon_k a_{ks}^+ a_{ks} - \sum_{kk'} G_{kk'} a_k^+ a_{k'}^+ a_{k'}^- a_k. \quad (93)$$

В теории сверхпроводимости [49] термодинамический потенциал  $\phi(\alpha, \beta)$  исследуемой системы (82) заменяется модельным



нии (81), при вычислении предэкспоненциального множителя [85] появляется дополнительная зависимость от производных модельного гамильтониана. Именно такой порядок вычислений был использован в работах [52—54]. Вследствие этого в предэкспоненциальном множителе в точке фазового перехода возникает скачок, аналогичный скачку теплоемкости в сверхпроводнике. Для того чтобы обойти эти трудности, необходимо перейти к гамильтониану невзаимодействующих квазичастиц после использования метода перевала [выражения (84) — (86)] и усреднение (90) проводить уже по гамильтониану невзаимодействующих квазичастиц [55]. Предэкспоненциальный множитель (85) можно записать в виде

$$\text{Det}(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 & \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle - \langle \hat{H}\hat{N} \rangle \\ \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle - \langle \hat{H}\hat{N} \rangle & \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 \end{vmatrix}. \quad (94)$$

Используя преобразование Боголюбова

$$a_{ks} = u_k \alpha_{k, -s} + sv_k \alpha_{ks}^\dagger,$$

перейдем к гамильтониану невзаимодействующих квазичастиц, который запишем в виде

$$H_0 = U_0 + \sum_{ks} E_{ks} \alpha_{ks}^\dagger \alpha_{ks}.$$

Постоянная  $U_0$  определяется из условия [50]:

$$\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 = \langle H_0 \rangle_0.$$

Для коэффициентов  $u_k$ ,  $v_k$  и энергии квазичастиц  $E_{ks}$  получим систему уравнений:

$$\delta \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 / \delta v_k = 0; \quad \delta \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 / \delta \bar{n}_{ks} = E_{ks}; \quad u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (95)$$

Все величины в (84) — (86) можно выразить через средние от произведения пар операторов частиц [53]:

$$\left. \begin{aligned} f_{ks} &\equiv \langle a_{ks}^\dagger a_{ks} \rangle_0 = u_k^2 \bar{n}_{k, -s} + v_k^2 (1 - \bar{n}_{ks}); \\ \omega_k &\equiv \langle a_{k+}^\dagger a_{k-}^\dagger \rangle_0 = \langle a_{k-} a_{k+} \rangle_0 = u_k v_k (1 - \bar{n}_{k+} - \bar{n}_{k-}), \end{aligned} \right\}$$

где

$$\bar{n}_{ks} \equiv \langle \alpha_{ks}^\dagger \alpha_{ks} \rangle_0 = [1 + \exp(\beta E_{ks})]^{-1}.$$

Уравнения седловой точки примут вид

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_k \varepsilon_k (f_{k+} + f_{k-}) - \sum_{kk'} G_{kk'} (\omega_k \omega_{k'} + \delta_{kk'} f_{k+} f_{k-}); \\ N &= \sum_k (f_{k+} + f_{k-}). \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Аналогичным образом можно выразить величины, входящие в предэкспоненциальный множитель (94). В модели сверхтекучего ядра матричный элемент корреляционного взаимодействия в (93) полагают равным константе, не зависящей от энергии. Тогда решение системы уравнений (95) можно записать в виде

$$\left. \begin{array}{l} u_k^2 \\ v_k^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (1 \pm \mathcal{E}_k/E_{ks}); \quad E_{ks} = \sqrt{\mathcal{E}_k^2 + \Delta^2},$$

где использована перенормированная энергия одночастичных состояний:

$$\mathcal{E}_k = \varepsilon_k - \lambda - \frac{G}{2} [1 - \mathcal{E}_k (1 - n_{k+} - n_{k-})/E_k]/2,$$

и уравнение для корреляционной функции  $\Delta$ , которое необходимо добавить к системе уравнений (96) седловой точки, имеет вид

$$2/G = \sum_{\mathbf{k}} [(1 - n_{k+} - n_{k-})/E_k].$$

В этом случае корреляционная функция не зависит от энергии одночастичных уровней, но меняется с ростом энергии возбуждения. При некоторой критической температуре  $t_c$  корреляционная функция обращается в нуль, и система переходит из сверхпроводящего состояния в нормальное. Чтобы определить критическую температуру в общем случае, также необходимо решать систему уравнений [56]. В приближении непрерывного спектра [52] можно найти связь между критической температурой и корреляционной функцией  $\Delta_0$  в основном состоянии:

$$t_c = 0,567\Delta_0. \quad (97)$$

Связь между корреляционной функцией возбужденного состояния и корреляционной функцией в основном состоянии определяется уравнением

$$\ln [\Delta/\Delta_0] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0(n\Delta/t), \quad (98)$$

а для энтропии (83) системы в сверхпроводящем состоянии получим

$$S = 2g \frac{t_1 \Delta^2}{t_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_2(n\Delta/t). \quad (99)$$

Здесь  $K_n(x)$  — функции Макдональда;  $g$  — плотность одночастичных состояний. Тогда энергию возбуждения можно записать в виде

$$U = E - E_0 = tS/2 + g(\Delta_0^2 - \Delta^2)/4. \quad (100)$$

Отсюда видно, что при  $t > t_c$  имеем соотношения модели не взаимодействующих частиц [40], но с энергией возбуждения, сдвинутой на энергию конденсации:

$$U = at^2 + E_{\text{конд}}; \quad S = 2 \sqrt{a(U - E_{\text{конд}})}; \quad (101)$$

$$E_{\text{конд}} = g\Delta_0^2/4,$$

где  $a = \pi^2 g/6$  — параметр плотности уровней.

Эти результаты качественно подтверждают учет остаточных взаимодействий введением эффективной энергии возбуждения. Однако оболочечная структура также может приводить к сдвигу в энергии возбуждения [44, 45]. В работе [57] плотность уровней с учетом парных корреляций анализировалась для многих ядер на основе реального спектра модели оболочек. Результаты расчетов плотности возбужденных состояний ядер при энергии возбуждения, равной энергии связи нейтрона, достаточно хорошо согласуются с экспериментальной плотностью нейтронных резонансов, особенно для ядер тяжелее Те, но имеется систематическое отличие для более легких ядер. Экспериментальные данные по плотности нейтронных резонансов дают наиболее прямую и надежную информацию о плотности возбужденных состояний ядер. Однако в этом случае интервал энергий возбуждения, в котором определяется плотность уровней, составляет лишь несколько килоэлектронвольт, т. е. фактически имеется одна точка при энергии возбуждения, равной энергии связи нейтрона.

Чтобы выбрать определенную модель и ее параметры, необходимо провести анализ данных в более широкой области энергий. Такие данные можно получить из спектров частиц в реакциях через составное ядро. В этом случае определяется энергетическая зависимость плотности уровней в интервале энергий в несколько мегаэлектронвольт [41]. Абсолютную величину и энергетическую зависимость плотности уровней можно получить при измерении абсолютных значений функций возбуждения изолированных уровней. Это связано с тем, что по абсолютной величине сечения возбуждения отдельного уровня можно определить эффективное число конкурирующих каналов, непосредственно связанное с плотностью состояний остаточных ядер, коэффициентами проницаемости и величинами порогов соответствующих реакций [1]. В работе [58] на основе модели сверхтекучего ядра проанализирована энергетическая зависимость плотности уровней легких ( $A < 70$ ) четно-четных ядер в интервале от 0 до 20 Мэв. Экспериментальные данные в области низких энергий получены в  $(n, n')$ -,  $(p, p')$ -,  $(p, \alpha)$ - и т. д. реакциях [59].

С помощью магнитного спектрографа для ряда ядер определено до 100—150 отдельных уровней. На рис. 5 в виде гистограмм показано число уровней, возбуждаемых в различных ядерных

реакциях ниже заданной энергии [59]. При анализе была сделана поправка на возможный пропуск уровней из-за конечного разрешения, и полученные результаты также показаны на рис. 5. Спектр одночастичных состояний модели оболочек получен на осно-

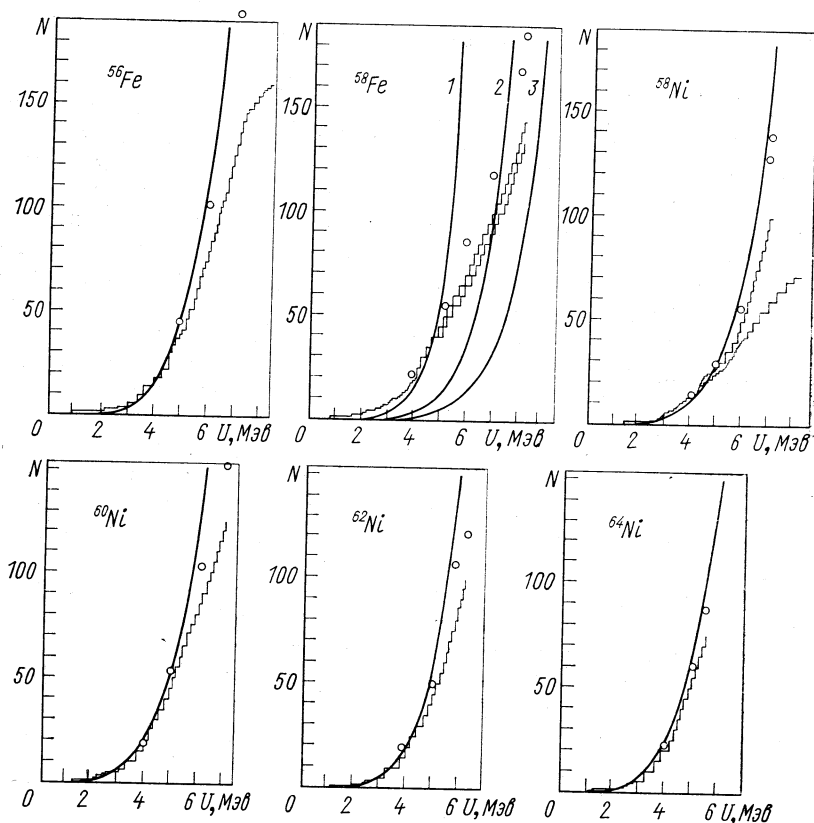


Рис. 5. Зависимость полного числа уровней ядер от энергии возбуждения:

ooo — данные, полученные с учетом поправки на пропуск уровней; — — — результаты расчетов; 1, 2, 3 — значения констант  $G_{ZA}$  и  $G_{NA}$  для  $^{58}\text{Fe}$ , равные 19,0 и 16,5; 20,0 и 19,5; 21,0 и 21,5.

ве потенциала Вудса — Саксона с параметрами, найденными в работах [60, 61]. Результаты расчетов весьма чувствительны к константе парного взаимодействия, что можно видеть на примере ядра  $^{58}\text{Fe}$ , для которого приведены три кривые, соответствующие изменению констант в пределах 10—15%. Показанные на рис. 5 кривые (для  $^{58}\text{Fe}$  — кривая 1) получены с оптимально подобранными параметрами (табл. 3). Величина найденных кон-

Таблица 3

Ядро	$G_Z A$ , Мэв	$G_N A$ , Мэв	$\Delta_0^Z$ , Мэв	$\Delta_0^N$ , Мэв	$E_{\text{конд}}^Z$ , Мэв	$E_{\text{конд}}^N$ , Мэв	$g_0^Z$ , Мэв <sup>-1</sup>	$g_0^N$ , Мэв <sup>-1</sup>	$\bar{g}_Z$ , Мэв <sup>-1</sup>	$\bar{g}_N$ , Мэв <sup>-1</sup>
<sup>56</sup> Fe	19,0	16,5	1,37	1,19	2,33	1,49	4,99	4,21	1,68	1,88
<sup>58</sup> Fe	19,0	16,5	1,26	1,34	2,14	1,24	5,40	2,76	1,68	2,01
<sup>58</sup> Ni	19,5	17,5	0,40	1,30	0	1,64	—	3,88	1,77	1,89
<sup>60</sup> Ni	19,5	16,5	0	1,24	0	1,04	—	2,71	1,77	2,02
<sup>62</sup> Ni	19,5	16,5	0	1,26	0	2,15	—	5,41	1,78	2,08
<sup>64</sup> Ni	19,5	17,5	0	1,33	0	2,44	—	5,52	1,78	2,07

стант очень близка к значениям  $G_Z A = 19,5$ ;  $G_N A = 16,5$  Мэв, полученным в работе [62] для более тяжелых ядер. В табл. 3 приведены также энергии конденсации и корреляционные функции в основном состоянии протонной и нейтронной компонент.

Поведение плотности уровней в более широком интервале энергий показано на рис. 6. Экспериментальные данные для <sup>58</sup>Fe и <sup>62</sup>Ni в области 10 Мэв получены из плотности нейтронных резонансов, данные при высоких энергиях для <sup>56</sup>Fe и <sup>60</sup>Ni — из флуктуационного анализа [63], низкоэнергетические данные те же, что и на рис. 5.

Для изучения влияния оболочечной структуры определим среднюю плотность одночастичных состояний. Такая величина не входит непосредственно в эти расчеты, а является удобным параметром для сопоставления с различными феноменологическими моделями. Одночастичные плотности, определенные по энергии конденсации  $g_0 = 4E_{\text{конд}}/\Delta_0^2$  и по дисперсии числа частиц при высоких энергиях возбуждения  $\bar{g} = (\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2)/t$ , также приведены в табл. 3. Отличие этих величин друг от друга характеризует влияние оболочечных эффектов. Оболочечные эффекты можно также исследовать, используя непосредственно для описания наблюдаемой плотности уровней соотношения (97) — (101), полученные в приближении непрерывного спектра. Результаты этих расчетов приведены на рис. 6. Параметрами модели в данном случае являются  $\Delta_0^Z$ ,  $\Delta_0^N$ ,  $g^Z$ ,  $g^N$ . Первые два параметра были взяты из табл. 3, а  $g = g_Z + g_N$  определен по экспериментальным данным при высокой энергии возбуждения. Для определения  $g_Z$  и  $g_N$  использовалась квазиклассическая оценка  $g^Z/g^N = (Z/N)^{1/3}$ . Найденные таким образом параметры приведены в табл. 4.

Из таблицы видно, что параметры  $g$  близки к параметрам  $g$  табл. 3, найденным для спектра модели оболочек при больших энергиях возбуждения. Для области малых энергий возбуждения эти параметры не отражают изменения в средней плотности одночастичных состояний, и этим обусловлено отклонение пунктирных

кривых от эксперимента. Полученные для этих параметров энергии конденсации также заметно отличаются от величин, вычисленных для оболочечного спектра.

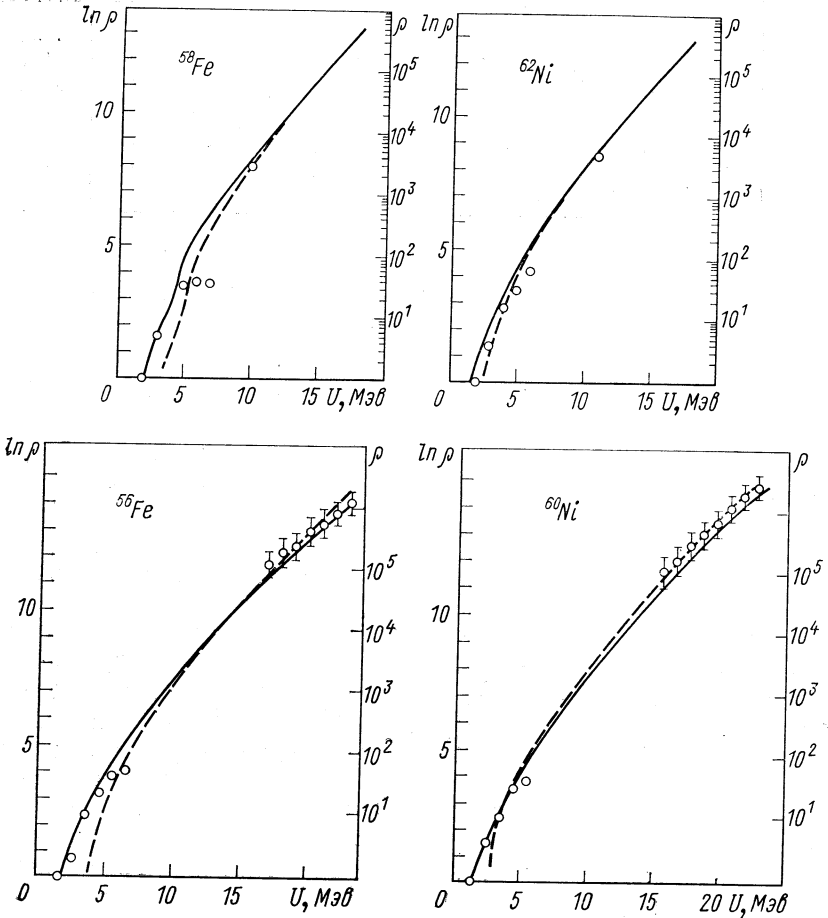


Рис. 6. Энергетическая зависимость плотности уровней:  $\circ\circ\circ$  — экспериментальные данные; — — — результаты расчетов с одночастичным спектром модели оболочек; — — — — результаты расчетов в приближении непрерывного спектра.

Проведенный анализ показал, что модель сверхтекучего ядра достаточно хорошо описывает существующие для легких ядер экспериментальные данные. В некоторых случаях такого же хорошего описания плотности уровней можно достичь и при использовании более грубых моделей [63], но значения параметров

Таблица 4

Ядро	$\Delta_0^Z$ , Мэв	$\Delta_0^N$ , Мэв	$E_{\text{конд}}^Z$ , Мэв	$E_{\text{конд}}^N$ , Мэв	$g_{\text{Мэв}^{-1}}^Z$	$g_{\text{Мэв}^{-1}}^N$
$^{56}\text{Fe}$	1,37	1,19	0,87	0,69	1,85	1,95
$^{58}\text{Fe}$	1,26	1,24	0,85	1,03	2,15	2,29
$^{60}\text{Ni}$	0	1,24	0	0,791	1,93	2,06
$^{62}\text{Ni}$	0	1,26	0	0,827	1,90	2,08

будут давать искаженную оценку влияния различных эффектов на поведение характеристик возбужденного ядра.

**Альтернативное описание парных корреляций в возбужденных ядрах.** В подавляющем большинстве работ, в которых исследуются парные корреляции в ядрах, используется предположение, что матричный элемент взаимодействия в (93) не зависит от энергии в некотором, довольно большом интервале:

$$G_{kk'} = \begin{cases} G & k_{\text{мин}} \leq k, k' < k_{\text{макс}}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (102)$$

Уравнение для корреляционной функции, которое в общем случае имеет вид [64]

$$\Delta_k(t) = \sum_{k'} \frac{G_{kk'} \Delta_{k'}(t)}{2E_{k'}} \text{th} \frac{E_k}{2t}, \quad (103)$$

значительно упрощается, так как корреляционная функция не зависит от энергии одночастичных состояний. Решение задачи в общем случае наталкивается на значительные трудности, так как при отказе от упрощающего предположения (102) необходимо решать систему большого числа нелинейных уравнений, определяющих корреляционные функции для каждого одночастичного уровня. В работе [65] было показано, что для довольно общего вида матричного элемента парного взаимодействия эту задачу можно значительно упростить, если искать решение (103) в сепарабельной форме:

$$\Delta_k(t) = \Delta(\varepsilon_k) f(t), \quad (104)$$

где  $\Delta(\varepsilon_k)$  зависит от одночастичных энергий;  $f(t)$  определяет температурную зависимость (зависимость от энергии возбуждения). В этом случае отношение  $\text{th} \left( \frac{\beta E_k}{2} \right) / E_k$  не должно зависеть от температуры, и, используя это обстоятельство, легко получить

соотношения, определяющие  $\Delta(\varepsilon_k)$  и  $f(t)$ :

$$\Delta(\varepsilon_k) = \frac{\varepsilon_k - \lambda}{\text{sh}[(\varepsilon_k - \lambda)/2t_c]}; \quad (105)$$

$$f(t) = \text{th}[t_c f(t)/t]. \quad (106)$$

Критическая температура  $t_c$  фазового перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное соответствует  $f(t_c) = 0$  и связана с величиной корреляционной функции на поверхности Ферми соотношением

$$\Delta(\varepsilon_f) = 2t_c. \quad (107)$$

Используя (104) — (107), для энергии конденсации в приближении непрерывного спектра получаем

$$E_{\text{конд}} = \pi^2 g \Delta^2(\varepsilon_f)/48. \quad (108)$$

Корреляционная функция  $\Delta(\varepsilon_f)$  в данной модели и  $\Delta_0$  в модели с постоянным матричным элементом определяют ширину щели в спектре возбужденных состояний системы. Можно видеть, что при одинаковой щели  $\Delta(\varepsilon_f) = \Delta_0$  наличие энергетической зависимости матричного элемента приводит к уменьшению энергии конденсации [см. выражения (101) и (108)] и критической температуры фазового перехода. Энергетическая зависимость корреляционной функции приводит также к изменению величин, входящих в выражение для плотности уровней (84) и предэкспоненциальный множитель (94). Для зависящего от энергии матричного элемента величины, входящие в (94), имеют вид [66]:

$$\left. \begin{aligned} \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 &= 2 \sum_k \left\{ \varepsilon_k^2 [\omega_k^2 + f_k(1-f_k)] + \right. \\ &+ \frac{\Delta_k^2}{2} [(1-f_k)^2 + f_k^2 - 2\omega_k^2] - 2\Delta_k \omega_k \varepsilon_k (1-2f_k) \left. \right\} + \\ &+ 4 \sum_k G_{kk} \{ \Delta_k \omega_k f_k (1-2f_k) - \varepsilon_k f_k [\omega_k^2 + f_k(1-f_k)] \} + \\ &+ 2 \sum_k G_{kk}^2 [f_k^2 (1-f_k) - \omega_k^2 f_k (1-f_k)] + \\ &+ \sum_{kk'} G_{kk'}^2 [\omega_k \omega_{k'} + f_k^2 (1-f_{k'})^2]; \\ \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 &= 2 \sum_k [f_k (1-f_k) + \omega_k^2]; \\ \langle \hat{H} \hat{N} \rangle - \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle &= 2 \sum_k \varepsilon_k [f_k (1-f_k) + \omega_k^2] - \\ &- 2 \sum_k \Delta_k \omega_k (1-2f_k) - \sum_k G_{kk} f_k [f_k (1-f_k) + \omega_k^2]. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$



Если воспользоваться соотношениями (104) — (107), то для термодинамических функций системы можно получить:

$$\left. \begin{aligned} U &= E - E_0 = \pi^2 g t_c^2 [1 - f^2(t)]/4; \\ S &= \pi^2 g (t_c^2/t) [1 - f^2(t)]/3; \\ \delta^2 N &\equiv \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = g t_c [1 + f^2(t)]; \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

$$\langle \hat{H} \hat{N} \rangle - \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle = \lambda \delta^2 N; \quad (111)$$

$$\text{Det} = \pi^2 g^2 t_c^4 [1 + f^2(t)]^2 [1 - f^2(t)]/3. \quad (112)$$

При выводе (111) и (112) отброшены некогерентные члены, пропорциональные матричному элементу парного взаимодействия (или его квадрату), вклад которых мал.

Соотношения рассматриваемой модели можно использовать и для вычисления плотности возбужденных состояний системы с заданной проекцией  $M$  углового момента на ось симметрии. В приближении малых моментов

$$\rho(U, N, M) = \exp[-M^2/(2\sigma^2)] \rho(U, N) / \sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

Параметр спиновой зависимости  $\sigma^2$  связан с величиной момента инерции  $\mathcal{F}_{||}$  и определяется соотношением

$$\sigma^2 = \mathcal{F}_{||} t = 2 \sum_k m_k^2 \bar{n}_k (1 - n_k). \quad (113)$$

В данной модели для момента инерции имеем

$$\mathcal{F}_{||} = g \bar{m}^2 t_c [1 - f^2(t)]/t.$$

Температурная зависимость  $f(t)$  корреляционной функции и других характеристик (110, 112) показана на рис. 7. Здесь же приведены результаты расчетов аналогичных величин, полученные в модели с постоянным матричным элементом. Отличие в температурной зависимости корреляционной функции в этих моделях очень мало, поэтому на рис. 7 показана их разность  $\delta\Delta$ , увеличенная в 100 раз.

Выше точки фазового перехода плотность возбужденных состояний определяется соотношениями модели ферми-газа с эффективной энергией возбуждения  $U_{\text{эф}} = U - E_{\text{конд}}$ .

Полученное в рассматриваемой модели более низкое значение энергии конденсации (108) для систем с развитым спариванием может привести к заметному увеличению плотности возбужденных состояний выше точки фазового перехода. Следует отметить, что сама точка фазового перехода также находится ниже (107), и поэтому, несмотря на малое отличие температурной зависимости в без-

размерных переменных (см. рис. 7), отличие в плотности состояний может оказаться заметным и ниже точки фазового перехода.

В настоящее время анализ экспериментальных данных проводится только на основе соотношений модели с постоянным матричным элементом парного взаимодействия. Поэтому неясно,

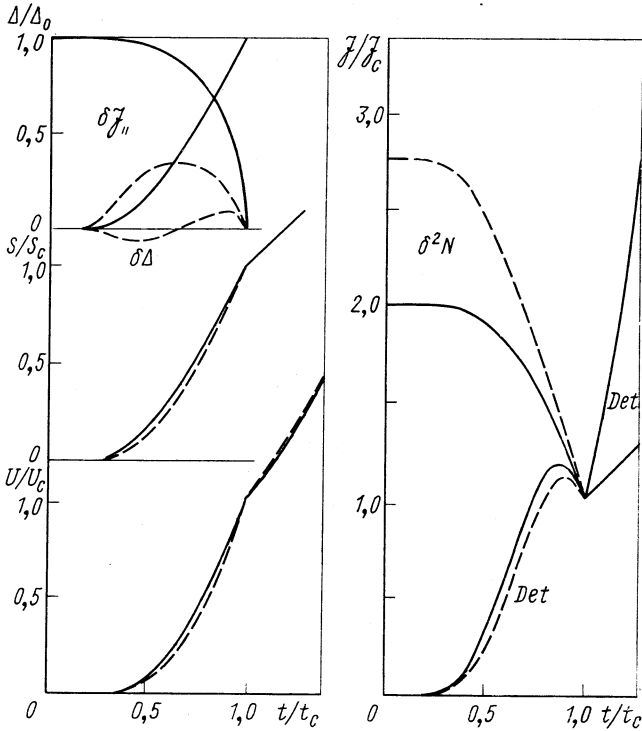


Рис. 7. Температурная зависимость термодинамических функций в данной модели (сплошные кривые) и модели с постоянным матричным элементом (пунктир).

Для корреляционной функции и момента инерции пунктиром показана разность соответствующих величин, увеличенная в 100 раз.

в какой мере это предположение отражается на параметрах, извлекаемых из опыта. Рассмотренная здесь модель позволяет оценить изменения, которые можно ожидать при отказе от упрощения (102). В то же время соотношения (110) и (113) для характеристик системы оказываются значительно проще, чем в традиционной модели [54, 57] [см. выражения (97) — (101)], и их использование позволяет упростить основанные на статистическом описании расчеты сечений различных ядерных реакций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ericson T. Adv. Phys., 1960, v. 9, p. 425.
2. Bloch C. Physique Nucleaire. Dewitt C. and Gillet V., Gordon and Breach, N.Y., 1969, p. 305.
3. Бор О., Мотгельсон Б. Структура атомного ядра. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
4. Mehta M. L. Random Matrices. Acad. Press, N.Y., 1967.
5. Porter C. E. Statistical Theories of Spectra. Fluctuations. Acad. Press, N.Y., 1965.
6. Wigner E. P. Ann. Math., 1951, v. 53, p. 36; Proc. Cambr. Phil. Soc., 1951, v. 47, p. 790; Ann. Math., 1955, v. 62, p. 548.
7. Дайсон Ф. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
8. Mehta M. L. Comm. Math. Phys., 1970, v. 20, p. 245; Nuovo cimento B, 1970, v. 65, p. 107; Mehta M. L., Rosenzweig N. Nucl. Phys. A, 1968, v. 109, p. 449; Пастур Л. А. УМН, 1973, т. 28, вып. 1.
9. Porter C. E., Rosenzweig N. Ann. Acad. Sci. Finland A, 1960, v. 6, p. 44.
10. Wigner E. P. Ann. Math., 1957, v. 65, p. 203.
11. Mehta M. L. Nucl. Phys., 1960, v. 18, p. 395; Gaudin M. Nucl. Phys. 1961, v. 25, p. 447.
12. Balian R. Nuovo cimento B, 1968, v. 57, p. 183; J. Phys. Soc. Japan, 1968, v. 26, Suppl. 30; Bloch C. J. Phys. Soc. Japan, 1968, v. 26, Suppl. 57.
13. Худсон Д. Статистика для физиков. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
14. Garg J. B. e. a. Phys. Rev. B, 1964, v. 134, p. 985.
15. Desjardins J. S. e. a. Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 2214.
16. Jackson H. J. Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 656.
17. Mehta M. L., Rosenzweig N. Nucl. Phys. A, 1968, v. 109, p. 449.
18. Dyson F. J., Mehta M. L. J. Math., 1963, v. 4, p. 701.
19. Mehta M. L. In: Statistical Properties of Nuclei. Ed. Garg J. B. Plenum Press, N.Y., 1972, p. 179.
20. Camarda H. e. a. In: Statistical Properties of Nuclei. Ed. Garg J. B. Plenum Press, N.Y., 1972, p. 205.
21. French J. B., Wong S. S. Phys. Lett., B, 1970, v. 33, p. 449.
22. Bohigas O., Flores J. Phys. Lett., B, 1971, v. 34, p. 261; In: Statistical Properties of Nuclei, Plenum Press, N.Y., 1972, p. 195.
23. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F. Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 448.
24. Фридман Ф. Л., Вайскопф В. Ф. В кн.: «Нильс Бор и развитие физики». Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
25. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960, с. 176.
26. Bloch C. Nucl. Phys., 1957, v. 4, p. 503 (см. перевод в кн. [25]).
27. Hauser W., Feshbach H. Phys. Rev., 1952, v. 87, p. 366.
28. Lane A. M., Lynn J. E. Proc. Phys. Soc. A, 1957, v. 70, p. 557.
29. Moldauer P. A. Proc. Int. Conf. on Neutron Cross-Sections and Technology, Knoxwill, 1971, p. 154.
30. Wigner E. P., Eisenbud L. Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 29.
31. Moldauer P. A. Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 1079.
32. Сальников О. А. и др. Бюллетень ЦЯД. 1971, т. 7. Nucl. Data for Reactors, Vienna, 1970, v. 2, p. 359.
33. Hauben V. e.a. Kernenergie, 1970, v. 13, p. 226.
34. Тертыйный Г. Я., Шубин Ю. Н. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 287.
35. Griffin J. J. Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 478; Blann M. Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1357; Kleine C. K., Blann M. Nucl. Phys. A, 1971, v. 172, p. 225.
36. Bassani e. a. Recent Progress in Nuclear Physics with tandems, Heidelberg, 1966.
37. Ericson T. Phys. Rev. Lett., 1960, v. 5, p. 430.

38. Смородинский Я. А. Лекции Всесоюзной школы по ядерной спектроскопии при ядерных реакциях. Обнинск, 1966.
39. Gibbs W. R. In: *Statistical Properties of Nuclei*. Ed. Garg J. B. Plenum Press, N.Y.— Lond., 1972, p. 131.
40. Малышев А. В. Плотность уровней и структура атомных ядер. М., Атомиздат, 1969.
41. Ставинский В. С. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 4, с. 833.
42. Strutinsky V. M. *Int. Conf. Nucl. Phys. Paris*, 1958, p. 617.
43. Van Lies C. Uhlenbeck G. E. *Physica*, 1937, v. 4, с. 531.
44. Rosenzweig N. *Phys. Rev.*, 1957, v. 108, с. 817.
45. Шубин Ю. Н. «Ядерная физика», 1968, т. 7, с. 1178.
46. Игнатюк А. В., Шубин Ю. Н. Препринт ФЭИ 121, 1969.
47. Marujama M. e. a. *Nucl. Phys.*, A, 1969, v. 131, p. 145; Graves E. R., Rosen L. *Phys. Rev.*, 1953, v. 89, p. 343.
48. Trainor L. E. H., Dixon W. R. *Can. J. Phys.*, 1956, v. 34, p. 229.
49. Bardeen J., Cooper L., Schrieffer J. *Phys. Rev.*, 1957, v. 108, p. 1175.
50. Боголюбов Н. Н. УФН, 1959, т. 67, с. 549.
51. Кирьяниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц. М., Госатомиздат, 1963.
52. Sano M., Yamasaki S. *Prog. Theor. Phys.*, 1963, v. 29, p. 397; Гринь Ю. Т., Струтинский В. М. «Ядерная физика», 1965, т. 1, с. 420.
53. Kammuri T. *Prog. Theor. Phys.*, 1964, v. 31, p. 595.
54. Decowski P. e.a. *Nucl. Phys. A*, 1968, v. 110, p. 129; Moretto L. G. *Nucl. Phys. A*, 1972, v. 182, p. 641.
55. Игнатюк А. В. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 502.
56. Игнатюк А. В., Шубин Ю. Н. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 1135.
57. Игнатюк А. В., Ставинский В. С., Шубин Ю. Н. *Nuclear Data for Reactors*, Vienna, 1970, IAEA-CN-26/76, p. 885.
58. Игнатюк А. В., Соколов Ю. В., Шубин Ю. Н. «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 989.
59. *Nuclear Data* 1970, В3-4.
60. Ширикова Н. Ю. Препринт ОИЯИ 11-3362, 1967.
61. Немировский П. Э., Чепурнов В. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 998.
62. Вдовин А. И., Комов А. Л., Малов Л. А. Препринт ОИЯИ Р4-5125, 1970.
63. Vonach H. K., Huizenga J. R. *Phys. Rev.*, 1969, v. 182, p. 1149.
64. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, с. 788.
65. Rothwarf A. *Phys. Lett. A*, 1967, v. 24, p. 307.
66. Игнатюк А. В., Шубин Ю. Н. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1973, т. 37, с. 1947.
67. Griffin J. J. In: *Intermediate Structure in Nuclear Reactions*. Ed. Kennedy H. P. and Schriels R. University of Kentucky Press, 1968, p. 191.