

УДК 539.142

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ДИАГРАММ В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

В. В. Комаров, А. М. Попова

Институт ядерной физики МГУ, Москва

Приводится вывод интегральных уравнений для амплитуд рассеяния трех и четырех нерелятивистских частиц методом суммирования диаграмм. В основе данного метода лежат свойства перестройки ряда разложения оператора рассеяния, заданного в представлении взаимодействия. Определение оператора взаимодействия в пространстве вторичного квантования позволяет изобразить ряд матричных элементов оператора рассеяния в виде нерелятивистских диаграмм.

A derivation of the integral equations for the three and four nonrelativistic particle scattering amplitudes by the graph summation method is presented. The method is based on rearrangement and summation properties of the scattering operator series. Terms of these series are written in the interaction representation. The second-quantisation formalism which is used for the definition of the interaction operator permits one to represent matrix element series in the form of nonrelativistic graphs.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в теории рассеяния нескольких нерелятивистских частиц успешно развивается формализм интегральных уравнений для нахождения амплитуд переходов системы из одного определенного асимптотического состояния в другое. Сейчас намечены пути решения задач о рассеянии трех частиц для отрицательной и положительной энергии, а в ближайшем будущем ожидаются такие же результаты и в решении задачи четырех тел. Ранее интегральный метод решения задач о рассеянии трех и более частиц был ограничен уравнением Липпмана — Швингера, которое, как известно, непригодно для численного решения таких задач. Неинтегрируемые δ -функции в ядре этого уравнения, возникающие из-за смешивания асимптотических каналов при записи уравнения, казались принципиальным препятствием в при-

менении интегральных уравнений в теории многочастичного рассеяния.

Новые возможности в интегральном подходе при решении задачи нескольких тел были предложены в работе Г. В. Скорнякова и К. А. Тер-Мартirosяна [1], в которой рассматривалась реакция неупругого рассеяния нуклона на дейтоне в предположении двухчастичных сил с нулевым радиусом действия. Было показано, что если амплитуду процессов с участием трех частиц представить в виде суммы трех амплитуд, каждая из которых отвечает переходу системы в одно из возможных асимптотических состояний, т. е. в состояния, где взаимодействует одна из трех возможных пар частиц, то в ядрах интегральных уравнений для этих амплитуд можно избавиться от δ -функций кинематического происхождения.

Метод вывода уравнений, предлагаемый авторами работы [1], справедлив только для случая нулевого радиуса действия ядерных сил. Однако идея получения системы взаимно связанных уравнений для амплитуд переходов в различные каналы реакции с тремя частицами оказалась основополагающей в дальнейшем развитии теории интегральных уравнений для амплитуд рассеяния.

Следующим важным вкладом в эту теорию были работы Л. Д. Фаддеева [2], в которых в рамках формализма трехмерных функций Грина получены интегральные уравнения для амплитуд рассеяния трех тел. Эти уравнения явились обобщением уравнений работы [1] для широкого класса двухчастичных потенциалов.

Далее независимо и почти одновременно были предложены различные методы записи интегральных уравнений для задачи четырех тел [3—12], а также для случая взаимодействия N -тел. Большинство из авторов отмеченных выше работ использовали формализм трехмерных функций Грина. В таком подходе необходимо выделять первое двухчастичное взаимодействие (в предположении двухчастичных сил), даже если в начальный момент времени может взаимодействовать несколько независимых пар частиц. Таким образом, амплитуды, для которых записываются системы интегральных уравнений, оказываются амплитудами переходов из асимптотических состояний с выделенным первым взаимодействием.

Принципиально отличным от этих методов записи интегральных уравнений для амплитуд рассеяния является метод суммирования диаграмм [4, 14—16]. В этом методе уравнения получаются в результате перестройки и суммирования бесконечного ряда матричных элементов четырехмерной теории возмущений для оператора рассеяния при условии, что взаимодействие частиц определено в пространстве вторичного квантования.

В таком подходе матричные элементы оператора рассеяния можно представить в виде графиков лестничного типа. Поскольку в нерелятивистском случае число частиц в процессе взаимодействия сохраняется, то в графиках направление линий распространения частиц совпадает с направлением времени. Отсюда амплитуда перехода из одного асимптотического состояния в другое определяется бесконечным рядом вкладов от диаграмм, точно иллюстрирующих процесс рассеяния.

Графики, относящиеся к амплитуде определенного перехода, могут быть суммированы в графическое уравнение, т. е. фактически осуществляется суммирование всего бесконечного ряда матричных элементов четырехмерной теории возмущений. Поскольку все элементы графиков имеют математические образы, на основе графического уравнения можно записать интегральное уравнение для определения амплитуды вероятности данного процесса. Такой метод записи интегральных уравнений теории рассеяния был назван методом суммирования диаграмм. Впоследствии результаты, полученные методом суммирования диаграмм, были подтверждены на основе операторного формализма [17, 18].

В случае задачи трех тел интегральные уравнения для амплитуд взаимодействия, в методе суммирования диаграмм, полностью согласуются с интегральными уравнениями работы [2], и в этом смысле оба метода дают тождественные результаты. Однако метод суммирования диаграмм оказался более полезным при исследовании задач четырех и более тел и, что важно, для приложения к проблемам ядерной физики. Дело в том, что в элементах ряда четырехмерной теории возмущений безразличен порядок следования взаимодействий, происходящих в независимых парах частиц, что соответствует опыту. Поэтому амплитуды, для которых записываются уравнения, являются амплитудами переходов из реальных асимптотических состояний системы. Потенциалы полностью исключены из уравнений. Число уравнений определяется числом физических асимптотик, итерации уравнений можно непосредственно применить, и они уже применялись [13—16] для объяснения механизмов процесса рассеяния.

1. ФОРМАЛИЗМ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ДИАГРАММ

Постановка задачи о рассеянии N -частиц

Рассматривается система нескольких нерелятивистских частиц. Предполагается, что все частицы разные, взаимодействуют только попарно и не имеют ни спина, ни изоспина.

Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = H_0 + V, \quad (4)$$

где H_0 — оператор кинетической энергии свободных частиц; V — оператор потенциальной энергии, который в предположении двухчастичного взаимодействия имеет вид

$$V = \sum_{i < j}^N V_{ij}; \quad (2)$$

V_{ij} — оператор взаимодействия пары частиц i и j ; N — число частиц в системе.

Введем оператор T , который связан с матрицей рассеяния соотношением

$$S = 1 + T. \quad (3)$$

Будем в дальнейшем T называть оператором рассеяния N -частиц в системе, так как матричный элемент оператора T является по определению амплитудой рассеяния. В методе суммирования диаграмм решение задачи о рассеянии N -частиц сводится к нахождению интегральных уравнений для амплитуды рассеяния частиц в заданной системе.

Для выполнения этой цели введем оператор рассеяния T в представлении взаимодействия:

$$2\pi i T = \sum_{n=1}^{\infty} (-i/\hbar)^n (1/n!) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V(t_1) \dots V(t_n)\}, \quad (4)$$

где P — оператор упорядочения по времени, а оператор взаимодействия $V(t) = \sum_{i < j}^N V_{ij}(t)$ определяется в пространстве вторичного квантования:

$$V_{ij}(t) = \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j, \mathbf{k}'_i, \mathbf{k}'_j} a_i^\dagger(\mathbf{k}_i, t) a_j^\dagger(\mathbf{k}_j, t) V_{ij}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j; \mathbf{k}'_i - \mathbf{k}'_j) \times \\ \times a_i(\mathbf{k}'_i, t) a_j(\mathbf{k}'_j, t) \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}'_i - \mathbf{k}'_j). \quad (5)$$

Здесь $a_i^\dagger(\mathbf{k}_i, t)$ и $a_j^\dagger(\mathbf{k}_j, t)$ — операторы рождения частиц i и j в момент времени t с импульсами \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_j соответственно; $a_i(\mathbf{k}'_i, t)$ и $a_j(\mathbf{k}'_j, t)$ — операторы уничтожения частиц i и j в момент времени t с импульсами \mathbf{k}'_i и \mathbf{k}'_j соответственно; взаимодействие $V_{ij}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j; \mathbf{k}'_i - \mathbf{k}'_j)$ есть фурье-образ функции потенциала взаимодействия:

$$V_{ij}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j; \mathbf{k}'_i - \mathbf{k}'_j) = \int d\mathbf{r}_{ij} V(\mathbf{r}_{ij}) \exp\{i\mathbf{r}_{ij}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j - \mathbf{k}'_i + \mathbf{k}'_j)\}. \quad (6)$$

Зависящие от времени операторы рождения и уничтожения частиц связаны с операторами, не зависящими от времени, соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_i(\mathbf{k}_i, t) &= a_i(\mathbf{k}_i) \exp(-iE_{k_i}t); \\ a_i^\dagger(\mathbf{k}_i, t) &= a_i^\dagger(\mathbf{k}_i) \exp(iE_{k_i}t), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $E_{k_i} = k_i^2/2m_i$.

Операторы $a_i(\mathbf{k}_i)$ и $a_i^\dagger(\mathbf{k}_i)$ определены только для волновой функции частицы i следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_i(\mathbf{k}_i) | \mathbf{k}_i \rangle &= | 0 \rangle; \\ a_i^\dagger(\mathbf{k}_i) | 0 \rangle &= | \mathbf{k}_i \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда для операторов рождения и уничтожения частиц справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [a_i(\mathbf{k}_i) a_j^\dagger(\mathbf{k}_j)] &= \delta(i, j) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j); \\ [a_i(\mathbf{k}_i) a_j(\mathbf{k}_j)] &= 0; \\ [a_i^\dagger(\mathbf{k}_i) a_j^\dagger(\mathbf{k}_j)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Правило определения среднего значения по вакуумному состоянию P — произведения зависящих от времени операторов рождения и уничтожения частиц — состоит в следующем:

$$\langle 0 | P \{ a_i^\dagger(\mathbf{k}_i, t) a_j(\mathbf{k}_j, t) \} | 0 \rangle = \langle 0 | N [a_i^\dagger(\mathbf{k}_i, t) a_j(\mathbf{k}_j, t)] | 0 \rangle + \delta(i, j) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j) g_i(t_0, t_1), \quad (10)$$

где

$$g_i(t_0, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int dE_i \exp\{-iE_i(t_1 - t_0)\} (E_i - E_{k_i} + i\tau)^{-1}$$

есть спаривание или свертка операторов рождения и уничтожения частицы типа i с импульсом \mathbf{k}_i и энергией E_i . Введение формализма вторичного квантования позволяет представить матричные элементы оператора рассеяния T в виде графиков, точно иллюстрирующих процесс взаимодействия частиц в заданной системе.

Вычисление матричных элементов оператора рассеяния

Матричные элементы оператора рассеяния T , заданного в виде ряда разложения по порядку взаимодействия в четырехмерной теории возмущений (4), содержат интегралы по времени от операторов взаимодействия (5). Техника вычисления этих интегралов известна (см., например, [19]), однако важно привести некоторые

примеры вычисления интегралов в матричном элементе второго порядка для случая рассеяния в системе N различных частиц. Эти примеры помогут ввести обозначения, которые будут встречаться в дальнейшем.

Итак, рассмотрим интеграл вида

$$\langle i | J | f \rangle = \langle i | \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \{V_a(t_1) V_b(t_2)\}, \quad (11)$$

где $\langle f |$ и $| i \rangle$ — конечное и начальное сечение системы N различных свободных частиц; $V_a(t_1)$ и $V_b(t_2)$ — операторы двухчастичного взаимодействия.

Проведем вычисление интеграла (11) для трех следующих произведений операторов двухчастичного взаимодействия:

а. Пусть $V_a(t_2) = V_{ij}(t_1)$ и $V_b(t_2) = V_{ij}(t_2)$, тогда интеграл (11) имеет вид

$$\langle i | J_a | f \rangle = \langle i | \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \{V_{ij}(t_1) V_{ij}(t_2)\}. \quad (12)$$

В дальнейшем символически будем обозначать интеграл (12) в виде $J_a = V_{ij} c V_{ij}$. Здесь c означает такое произведение операторов, что матричный элемент этого произведения

$$\begin{aligned} \langle i | J_a | f \rangle &= \frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon'_i d\mathbf{k}'_i V_{ij}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}) g_i(\varepsilon'_i, \varepsilon_{k'_i}) \times \\ &\times g_j(E - \varepsilon_i; \varepsilon_{k_j}) V_{ij}(\mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{k}_{ij}^{(1)}) \delta(\mathbf{p}_{ij} - \mathbf{p}'_{ij}) \delta(\mathbf{p}'_{ij} - \mathbf{p}_{ij}^{(1)}) \times \\ &\times \delta(\varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_j} - \varepsilon_{k_{1i}} - \varepsilon_{k_{1j}}) \delta(\varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_j} - \varepsilon_{k'_i} - \varepsilon_{k'_j}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_i(\varepsilon'_i, \varepsilon_{k'_i}) &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{k'_i} + i\tau)^{-1}; \\ \mathbf{k}_{ij}^{(1)} &= (\mathbf{k}_{1i} - \mathbf{k}_{1j}); \quad \mathbf{k}_{ij} = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j); \quad \mathbf{k}'_{ij} = (\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}'_j); \\ \mathbf{p}_{ij}^{(1)} &= (\mathbf{k}_{1i} + \mathbf{k}_{1j}); \quad \mathbf{p}_{ij} = (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j); \quad \mathbf{p}'_{ij} = (\mathbf{k}'_i + \mathbf{k}'_j); \end{aligned}$$

$E_{ij} = \varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_j}$; E_{ij} — полная энергия системы двух частиц i и j .

б. Пусть $V_a(t_1) = V_{ij}(t_1)$ и $V_b(t_2) = V_{im}(t_2)$, тогда интеграл (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle i | J_\delta | f \rangle &= \langle i | \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \{V_{ij}(t_1) V_{im}(t_2)\}; \\ J_\delta &= \frac{1}{2} V_{ij} c V_{im} + V_{im} c V_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так же, как и в предыдущем случае, символ c означает такое произведение операторов, что матричный элемент этого произведения

$$\langle i | \frac{1}{2} V_{ij} c V_{im} | f \rangle = \frac{1}{2} V_{ij} ((\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}{}^{(1)}) g_i (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{k_{1j}}, \varepsilon_{k_i'}) \times$$

$$\times V(\mathbf{k}'_{im}, \mathbf{k}_{im}^{(1)}) \delta(\mathbf{p}_{ij} - \mathbf{p}'_i) \delta(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'_{ij}{}^{(1)}) \delta(\varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_j} + \varepsilon_{k_m} - \varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k_{1j}} - \varepsilon_{k_{1m}}),$$

где

$$\mathbf{k}'_{ij}{}^{(1)} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{1j}; \quad \mathbf{k}'_i = (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{1j}); \quad \mathbf{k}'_{im} = \mathbf{k}'_i - \mathbf{k}_m;$$

$$\mathbf{k}_{im}^{(1)} = \mathbf{k}_{1i} - \mathbf{k}_{1m}; \quad \mathbf{p}'_i = \mathbf{k}_{1i} + \mathbf{k}_{1j}, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{k}'_i + \mathbf{k}_m, \quad \mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{k}_{1i} + \mathbf{k}_{1m};$$

E_{ij} — энергия системы частиц i и j .

в. Если операторы $V_a(t_1)$ и $V_b(t_2)$ относятся к различным частицам, т. е. $V_a(t_1) = V_{ij}(t_1)$, $V_b(t_2) = V_{mn}(t_2)$, то интеграл (11)

$$\left. \begin{aligned} \langle i | J_b | f \rangle &= \langle i | \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \{ V_{ij}(t_1) V_{mn}(t_2) \} | f \rangle; \\ J_b &= \frac{1}{2} V_{ij} \otimes V_{mn} + \frac{1}{2} V_{mn} \otimes V_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где символ \otimes означает такое произведение оператора, что матричный элемент оператора J_b

$$\langle i | J_b | f \rangle = 2\pi^2 V_{ij}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}{}^{(1)}) V_{mn}(\mathbf{k}_{mn} - \mathbf{k}_{mn}^{(1)}) \delta(\mathbf{p}_{ij} - \mathbf{p}'_{ij}{}^{(1)}) \times$$

$$\times \delta(\mathbf{p}_{mn} - \mathbf{p}_{mn}^{(1)}) \delta(\varepsilon_{k_i} + \varepsilon_{k_j} - \varepsilon_{k_{1i}} - \varepsilon_{k_{1j}}) \delta(\varepsilon_{k_n} + \varepsilon_{k_m} - \varepsilon_{k_{1n}} - \varepsilon_{k_{1m}}),$$

где $\mathbf{k}_{mn} = \mathbf{k}_m - \mathbf{k}_n$; $\mathbf{k}_{mn}^{(1)} = \mathbf{k}_{1m} - \mathbf{k}_{1n}$;

$$\mathbf{p}_{mn} = \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_n; \quad \mathbf{p}_{mn}^{(1)} = \mathbf{k}_{1m} + \mathbf{k}_{1n}.$$

Основные теоремы формализма метода суммирования диаграмм

В методе суммирования диаграмм используются некоторые важные свойства перегруппировки ряда (4) для оператора рассеяния T в системе N -частиц. Эти свойства отражены в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть $V_1(t)$ — оператор взаимодействия частиц в системе — представлен в виде суммы:

$$V_1(t) = \sum_a^{n_1} V_a(t), \quad (15)$$

где $V_a(t)$ — некоторая сумма парных операторов взаимодействия, являющаяся частью полного оператора взаимодействия

частиц системы. Слагаемые $V_a(t)$ удовлетворяют следующим условиям: одни и те же частицы могут участвовать во взаимодействиях, включенных в разные $V_a(t)$; разные $V_a(t)$ не имеют одинаковых операторов парного взаимодействия.

Тогда оператор рассеяния $T^{(1)}$ в системе частиц, взаимодействие которых задано оператором $V_1(t)$, является суммой вида

$$T^{(1)} = \sum_a^{n_1} T_a, \quad (16)$$

и для определения T_a имеется система уравнений:

$$T_a = t_a + t_{ac} \sum_{c \neq a}^{n_1} T_c, \quad (17)$$

где t_a — оператор рассеяния частиц, взаимодействие которых задано оператором $V_a(t)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (4) для оператора рассеяния. Подставим в него оператор $V_1(t)$, определенный в виде (15):

$$T^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \left\{ \sum_a^{n_1} V_a(t_1) \dots \sum_a^{n_1} V_a(t_n) \right\}. \quad (18)$$

Раскрыв произведения сумм в подынтегральной функции (18), получим бесконечный ряд:

$$\begin{aligned} T^{(1)} = & \sum_a^{n_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_a(t_1) \dots V_a(t_n) \} \right] + \\ & + \left(\sum_a^{n_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_a(t_1) \dots V_a(t_n) \} \right] \right) \times \\ & \times c \left(\sum_{b \neq a}^{n_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_b(t_1) \dots V_b(t_n) \} \right] \right) + \\ & + \left(\sum_a^{n_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_a(t_1) \dots V_a(t_n) \} \right] \right) \times \\ & \times c \left(\sum_{b \neq a}^{n_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_b(t_1) \dots V_b(t_n) \} \right] \right) \times \\ & \times c \left(\sum_{c \neq b}^n \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{ V_c(t_1) \dots V_c(t_n) \} \right] \right) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим t_a оператор рассеяния N -частиц, взаимодействие которых определено оператором $V_a(t)$. Тогда для оператора t_a справедливо представление

$$t_a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_a(t_1) \dots V_a(t_n)\}. \quad (20)$$

Имея это в виду, перепишем ряд (19):

$$T^{(1)} = \sum_a^{n_1} t_a + \sum_a^{n_1} t_a c \sum_{b \neq a}^{n_1} t_b + \sum_a^{n_1} t_a c \sum_{b \neq a}^{n_1} t_b c \sum_{c \neq b}^{n_1} t_c + \dots \quad (21)$$

Очевидно, ряд (21) можно представить суммой рядов:

$$T^{(1)} = \sum_a^{n_1} T_a, \quad (22)$$

где

$$T_a = t_a + t_a c \sum_{b \neq a}^{n_1} t_b + t_a c \sum_{b \neq a}^{n_1} t_b c \sum_{c \neq b}^{n_1} t_c + \dots \quad (23)$$

Ряд (23) можно свернуть в уравнение:

$$T_a = t_a + t_a c \sum_{b \neq a}^{n_1} T_b. \quad (24)$$

Теорема 2. Пусть $V_2(t)$ — оператор взаимодействия N -частиц в системе есть сумма операторов:

$$V_2(t) = \sum_i^{n_2} V_i(t), \quad (25)$$

где $V_i(t)$ — некоторая сумма операторов парного взаимодействия; операторы $V_i(t)$ описывают взаимодействие частиц в независимых n_2 -подсистемах, образованных из N -частиц.

Тогда оператор $T^{(2)}$ рассеяния частиц, взаимодействие которых задано оператором вида (25), есть сумма:

$$T^{(2)} = \sum_i^{n_2} t_i + \sum_{i < j}^{n_2} t_i \otimes t_j + \sum_{i < j < k}^{n_2} t_i \otimes t_j \otimes t_k + \dots \\ \dots + t_1 \otimes t_2 \otimes t_3 \otimes \dots \otimes t_{n_2}, \quad (26)$$

где t_i — оператор рассеяния частиц, взаимодействие которых задано оператором $V_i(t)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (4) для оператора T . Подставим в него оператор $V_2(t)$, определенный в виде (25):

$$T^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \left\{ \sum_i^{n_2} V_i(t_1) \dots \sum_i^{n_2} V_i(t_n) \right\}. \tag{27}$$

Раскрыв произведение сумм подынтегральной функции в (27), получим сумму вида

$$\begin{aligned} T^{(2)} = & \left(\sum_i^{n_2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_i(t_1) \dots V_i(t_n)\} \right] \right) + \\ & + \left(\sum_{i < j}^{n_2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_i(t_1) \dots V_i(t_n)\} \right] \otimes \right. \\ & \otimes \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_j(t_1) \dots V_j(t_n)\} \right] \Big) + \dots \\ & \dots + \left(\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_1(t_1) \dots V_1(t_n)\} \right] \otimes \right. \\ & \otimes \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_2(t_1) \dots V_2(t_n)\} \right] \otimes \dots \\ & \dots \otimes \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_{n_2}(t_1) \dots V_{n_2}(t_n)\} \right] \Big). \end{aligned} \tag{28}$$

Определим оператор t_i в виде ряда

$$t_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_i(t_1) \dots V_i(t_n)\}. \tag{29}$$

Тогда сумму в правой части (28) можно записать в виде

$$T^{(2)} = \sum_i^{n_2} t_i + \sum_{i < j}^{n_2} t_i \otimes t_j + \dots + t_1 \otimes t_2 \otimes t_3 \otimes \dots t_{n_2}. \tag{30}$$

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД РАССЕЙНИЯ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Перейдем к исследованию систем трех и четырех попарно взаимодействующих частиц. Будем считать, что задача о рассеянии частиц решена, если для амплитуд переходов заданной системы из всех возможных асимптотических состояний получена система интегральных уравнений. В методе суммирования диаграмм предлагается указанные уравнения находить на основе перестройки и последующего суммирования ряда (4) для оператора рассеяния частиц в системе.

Общие правила преобразования ряда (4) в систему уравнений для операторов, матричные элементы которых являются искомыми амплитудами, состоят в следующем:

1) сначала в элементах ряда (4) проводится выделение и суммирование рядов, отвечающих операторам рассеяния двух частиц с определенными индексами. В результате этого действия ряд (4) разбивается на несколько рядов, каждый из которых соответствует некоторому оператору рассеяния. Эти операторы определяют переход из состояний, в которых частицы распределены в независимые системы двух взаимодействующих тел. Будем называть такие операторы вспомогательными. Ряды, соответствующие вспомогательным операторам, на основании теоремы 1 и 2 можно свернуть в систему уравнений, которые будем также называть вспомогательными;

2) на втором этапе вспомогательные операторы рассеяния классифицируются по принадлежности к таким типам операторов, матричные элементы которых есть амплитуды переходов из всех возможных асимптотических состояний системы или из всех возможных каналов. Такие операторы будем называть операторами каналов. Для операторов каналов можно построить систему уравнений на основе вспомогательных уравнений.

Уравнения для операторов рассеяния трех попарно взаимодействующих частиц

Покажем, как можно рассмотреть задачу о рассеянии трех тел на основе операторного формализма метода суммирования диаграмм. В предположении, что существуют только двухчастичные силы, оператор взаимодействия трех частиц $V(t)$ имеет вид

$$V_{123}(t) = V_{12}(t) + V_{23}(t) + V_{13}(t). \quad (31)$$

Для решения задачи требуется представить оператор T_{123} в виде суммы операторов каналов и далее получить систему уравнений для операторов каналов по схеме, изложенной выше. Следуя правилам алгебры метода суммирования диаграмм, проведем в элементах ряда (4) для оператора рассеяния трех частиц

суммирование бесконечных рядов, отвечающих операторам рассеяния каждой из трех пар частиц (12), (23) и (31).

Рассмотрим структуру оператора взаимодействия $V_{123}(t)$. В случае задачи трех тел в определенный момент времени может взаимодействовать только одна пара частиц. Значит, каждое из слагаемых оператора $V_{123}(t)$ в (31) характеризует некоторое состояние системы, когда взаимодействие включено только между частицами, объединенными в независимые пары в фиксированный момент времени.

Отсюда, как следует из теоремы 1, оператор T_{123} амплитуды рассеяния трех частиц должен быть суммой трех операторов:

$$T_{123} = T_{12} + T_{23} + T_{13}. \quad (32)$$

Матричный элемент каждого из операторов T_{12} , T_{23} и T_{31} отвечает амплитуде перехода из состояния, когда взаимодействует только одна пара частиц. Следовательно, эти операторы являются вспомогательными.

По теореме 1 для определения вспомогательных операторов T_{12} , T_{23} и T_{31} существует система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T_{12} &= t_{12} + t_{12}c [T_{13} + T_{23}]; \\ T_{23} &= t_{23} + t_{23}c [T_{12} + T_{13}]; \\ T_{13} &= t_{13} + t_{13}c [T_{12} + T_{23}]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Здесь t_{12} , t_{23} , t_{31} — операторы рассеяния двух частиц.

В задаче трех тел операторы T_{12} , T_{23} , T_{31} оказываются операторами каналов. Поэтому система уравнений (33) есть искомая система уравнений для операторов каналов.

Если ввести операторы, матричные элементы которых являются амплитудами перехода из одного двухчастичного канала реакции с тремя телами в другой, то вместо трех операторов T_{12} , T_{23} , T_{31} будем иметь девять операторов: $T_{12, 12}$, $T_{12, 23}$, $T_{12, 31}$, $T_{23, 12}$, $T_{23, 23}$, $T_{23, 31}$, $T_{31, 12}$, $T_{31, 23}$, $T_{31, 31}$.

Для определения этих девяти операторов на основе уравнений (33) можно записать систему девяти уравнений. Для упрощения записи обозначим символом α или β некоторую пару частиц, взаимодействующих в начальном или конечном состоянии. Очевидно, α и β могут принимать значения (12), (23) или (31). Тогда девять операторов, определенных выше, обозначим символом $T_{\alpha, \beta}$, а систему уравнений для их определения запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha, \alpha} &= t_{\alpha} + t_{\alpha}c \sum_{\gamma \neq \alpha} T_{\gamma, \alpha}; \\ T_{\alpha, \beta} &= t_{\alpha}c \sum_{\gamma \neq \alpha} T_{\gamma, \beta}, \\ \beta &\neq \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Если на основе уравнений (34) записать интегральные уравнения для ядер операторов $T_{\alpha, \alpha}$ и $T_{\alpha, \beta}$ и проинтегрировать по энергии промежуточных частиц, то получим систему связанных уравнений, эквивалентную уравнениям Фаддеева [2]. Это понятно, так как в случае задачи трех тел, когда в определенный момент времени возможно взаимодействие только одной пары частиц, описание свободного движения частиц функцией Грина всей системы или произведением функций Грина отдельных частиц не приводит к разным результатам, как это имеет место в задачах с участием четырех и более частиц.

Задача четырех тел.

Уравнения для вспомогательных амплитуд

Рассмотрим теперь систему, состоящую из четырех разных попарно взаимодействующих частиц. Оператор взаимодействия этой системы есть сумма вида

$$V_{1234}(t) = V_{12}(t) + V_{13}(t) + V_{14}(t) + V_{23}(t) + V_{24}(t) + V_{34}(t). \quad (35)$$

Требуется найти систему интегральных уравнений для операторов каналов. Следуя правилам алгебры метода суммирования диаграмм, сначала необходимо в элементах ряда для оператора T , подставив V_{1234} вида (35), просуммировать все возможные бесконечные ряды, отвечающие операторам рассеяния двух частиц.

Поскольку в системе четырех частиц одновременно могут существовать две независимые пары частиц, взаимодействующих внутри каждой пары, то следует суммировать параллельно два бесконечных ряда, отвечающих операторам рассеяния двух частиц с фиксированными индексами.

Оператор взаимодействия системы четырех частиц в состоянии, когда частицы объединены в две независимые пары, например (12) и (34), имеет вид

$$V_{12, 34}(t) = V_{12}(t) + V_{34}(t). \quad (36)$$

Если сделать циклическую перестановку частиц, то легко можно видеть, что для системы четырех попарно взаимодействующих частиц могут быть еще два подобных состояния, и операторы взаимодействия частиц в этих состояниях имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} V_{13, 24}(t) &= V_{13}(t) + V_{24}(t); \\ V_{14, 23}(t) &= V_{14}(t) + V_{32}(t). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Следовательно, оператор взаимодействия $V_{1234}(t)$ разбивается на сумму трех слагаемых:

$$V_{1234}(t) = V_{12, 34}(t) + V_{13, 24}(t) + V_{14, 23}(t). \quad (38)$$

Отсюда по теореме 1 оператор рассеяния четырех частиц T можно записать в виде суммы трех операторов:

$$T = T_{12, 34} + T_{13, 24} + T_{14, 23} \quad (39)$$

или

$$T = \sum_{ij, i'j'} T_{ij, i'j'}, \quad (40)$$

где индексы $ij, i'j'$, очевидно, принимают значения 12,34; 13,24 и 14,23.

Для определения операторов $T_{ij, i'j'}$, как это следует из теоремы 1, можно записать систему уравнений вида

$$T_{ij, i'j'} = t_{ij, i'j'} + t_{ij, i'j'} c \sum_{\substack{mn, m'n' \\ mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} T_{mn, m'n'} \quad (41)$$

(индексы $mn, m'n'$ могут принимать значения 12,34; 13,24 и 14,23). В уравнении (41) оператор $t_{ij, i'j'}$ отвечает амплитуде рассеяния четырех частиц при условии, что их взаимодействие задано оператором $V_{ij, i'j'}$ вида $V_{ij, i'j'}(t) = V_{ij}(t) + V_{i'j'}(t)$. Значит, по теореме 2 оператор $t_{ij, i'j'}$ можно записать с помощью операторов рассеяния двух частиц t_{ij} и $t_{i'j'}$ по формуле

$$t_{ij, i'j'} = t_{ij} t_{i'j'} + t_{ij} \otimes t_{i'j'}. \quad (42)$$

Тогда уравнение (41) для оператора $T_{ij, i'j'}$ можно переписать в следующем виде:

$$T_{ij, i'j'} = (t_{ij} + t_{i'j'} + t_{ij} \otimes t_{i'j'}) + (t_{ij} + t_{i'j'} + t_{ij} \otimes t_{i'j'}) c \sum_{\substack{mn, m'n' \\ mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} T_{mn, m'n'}. \quad (43)$$

Рассмотрим свободный член этого уравнения. Два слагаемых в нем t_{ij} и $t_{i'j'}$ — операторы рассеяния четырех частиц в случае, когда включено взаимодействие лишь одной пары частиц ij или $i'j'$. Слагаемое $(t_{ij} \otimes t_{i'j'})$ — оператор рассеяния четырех частиц, когда одновременно частицы взаимодействуют в двух независимых парах. Другими словами, операторы t_{ij} или $t_{i'j'}$ и оператор $t_{ij} \otimes t_{i'j'}$ определяют два принципиально различных процесса рассеяния четырех частиц. Поэтому вместо оператора $T_{ij, i'j'}$ вводится два оператора рассеяния четырех частиц T_{ij} и $T_{ij, i'j'}$, матричные элементы которых отвечают амплитудам перехода системы четырех частиц из состояния, когда взаимодействует только одна пара частиц или две независимые пары частиц соответственно. Вновь введенные операторы будем называть вспомогательными операторами.

Если задать систему уравнений для вспомогательных операторов T_{ij} и $T_{ij, i'j'}$ в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{ij} &= t_{ij} + t_{ij}c \sum_{\substack{mn \neq ij, m'n' \neq ij \\ mn \neq i'j', m'n' \neq i'j'}} (T_{mn} + T_{m'n'} + T_{mn, m'n'}^{(1)}); \\
 T_{ij, i'j'}^{(1)} &= t_{ij} \otimes t_{i'j'} + (t_{ij} \otimes t_{i'j'}) \times \\
 \times c \sum_{\substack{mn \neq ij, m'n' \neq ij \\ mn \neq i'j', m'n' \neq i'j'}} (T_{mn} + T_{m'n'} + T_{mn, m'n'}),
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

то, имея в виду уравнение (43), можно показать, что оператор $T_{ij, i'j'} = T_{ij} + T_{i'j'} + T_{ij, i'j'}^{(1)}$.

Следовательно, оператор рассеяния T можно представить в виде суммы вспомогательных операторов: $T = \sum_{ij, i'j'} (T_{ij} + T_{i'j'} + T_{ij, i'j'}^{(1)})$, и для нахождения вспомогательных операторов получить систему уравнений (44).

Уравнения для операторов каналов рассеяния четырех частиц

В задаче четырех тел система уравнений (44) для вспомогательных операторов не является окончательной, как это было в случае задачи трех тел. Ядро уравнения для оператора T_{ij} содержит неинтегрируемые δ -функции. Чтобы решить задачу четырех тел, необходимо от вспомогательных операторов перейти к операторам каналов.

В рассматриваемой задаче операторами каналов будут такие операторы, матричные элементы которых — амплитуды переходов из трех принципиально различных асимптотических состояний: во-первых, из состояний, где имеются две независимые пары частиц (состояние первого типа); во-вторых, из состояний, где имеется система трех попарно взаимодействующих частиц и одна частица свободная (состояние второго типа), и, в-третьих, из состояний, где имеются система двух взаимодействующих частиц и две свободные частицы (состояние третьего типа). Полученные выше операторы $T_{ij, i'j'}$ оказываются операторами каналов первого типа. Следовательно, наша задача — определить операторы каналов второго и третьего типов. Для этого обратимся к операторам T_{ij} и $T_{i'j'}$. Свободный член в уравнениях (44) для этих операторов, очевидно, принадлежит операторам каналов третьего типа. Ядро уравнений для операторов T_{ij} и $T_{i'j'}$ показывает, что эти операторы должны включать также такие операторы, ма-

тричные элементы которых являются амплитудами переходов из состояний второго типа. Отсюда следует, что T_{ij} — некоторая сумма операторов каналов. Чтобы их выделить, проинтегрируем один раз уравнение (44) для T_{ij} :

$$T_{ij} = t_{ij} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{kl} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{klc} \sum_{\substack{mn \neq kl, m'n' \neq kl \\ mn \neq k'l', m'n' \neq k'l'}} (T_{mn} + T_{m'n'} + T_{mn, m'n'}^{(1)}) + t_{ijc} \sum_{\substack{mn \neq ij, m'n' \neq i'j' \\ mn \neq i'j', m'n' \neq i'j'}} T_{mn, m'n'}^{(1)}. \quad (45)$$

Покажем, что свободный член $t_{ijc} \sum_{kl \neq ij, kl \neq i'j'} t_{kl}$ и ядро в уравнении (45) являются суммой вторых итераций уравнений для операторов рассеяния трех частиц $T_{ij}(\eta_1)$ и $T_{ij}(\eta_2)$. Здесь индексы η_1 и η_2 обозначают системы трех частиц, образованные из четырех, так что обе эти системы содержат две одинаковые частицы i и j .

Действительно, оператор рассеяния трех частиц, образующих систему η_1 или η_2 , когда в начальном состоянии взаимодействуют частицы i, j , удовлетворяет уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} T_{ij}(\eta_1) &= t_{ij} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_1 \\ kl \neq ij}} T_{kl}(\eta_1); \\ T_{ij}(\eta_2) &= t_{ij} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_2 \\ kl \neq ij}} T_{kl}(\eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Проитерировуем один раз уравнения (46):

$$\left. \begin{aligned} T_{ij}(\eta_1) &= t_{ij} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_1 \\ kl \neq ij}} t_{kl} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_1 \\ kl \neq ij}} t_{klc} \sum_{\substack{mn \subset \eta_1 \\ mn \neq kl}} T_{mn}(\eta_1); \\ T_{ij}(\eta_2) &= t_{ij} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_2 \\ kl \neq ij}} t_{kl} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_2 \\ kl \neq ij}} t_{klc} \sum_{\substack{mn \subset \eta_2 \\ mn \neq kl}} T_{mn}(\eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Сравнивая свободные члены в (45) и (47), можно показать, что

$$t_{ijc} \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{kl} \equiv t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_1 \\ kl \neq ij}} t_{kl} + t_{ijc} \sum_{\substack{kl \subset \eta_2 \\ kl \neq ij}} t_{kl}.$$

Отсюда можно представить оператор T_{ij} в виде суммы трех операторов:

$$T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{\eta_1} + T_{ij}^{\eta_2}, \quad (48)$$

которые удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{ij}^{(1)} &= t_{ij} + t_{ij}c \sum_{\substack{mn \neq ij, m'n' \neq ij \\ mn \neq i'j', m'n' \neq i'j' \\ kl \subset \eta_\nu}} T_{mn, m'n'}^{(1)}; \\
 T_{ij}^{\eta_\nu} &= t_{ij}c \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{kl} + t_{ij}c \sum_{\substack{m \subset \eta_\nu \\ kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} \times \\
 &\times c \sum_{\substack{mn \neq kl, mn \neq k'l' \\ m'n' \neq kl, m'n' \neq k'l'}} (T_{mn} + T_{m'n'} + T_{mn, m'n'}),
 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

где $\nu = 1, 2$.

Уравнение для $T_{ij}^{\eta_1}$ и $T_{ij}^{\eta_2}$ можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{ij}^{\eta_1} &= \sum_{kl \subset \eta_1} M_{ij, kl}^{\eta_1} + \sum_{kl \subset \eta_1} M_{ij, kl}^{\eta_1} c \times \\
 &\times \sum_{\substack{mn \neq kl, mn \neq k'l', m'n' \neq kl, m'n' \neq k'l' \\ mn \not\subset \eta_1 \\ \mu \neq \eta_1}} (T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^\mu + T_{mn, m'n'}^{(1)}); \\
 T_{ij}^{\eta_2} &= \sum_{kl \subset \eta_2} M_{ij, kl}^{\eta_2} + \sum_{kl \subset \eta_2} M_{ij, kl}^{\eta_2} c \times \\
 &\times \sum_{\substack{mn \neq kl, mn \neq k'l', m'n' \neq kl, m'n' \neq k'l' \\ mn \not\subset \eta_2 \\ \mu \neq \eta_2}} (T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^\mu + T_{mn, m'n'}^{(1)}),
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где $M_{ij, kl}^{\eta_\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$M_{ij, kl}^{\eta_\nu} = t_{ij}c t_{kl} + t_{ij}c \sum_{\substack{mn \subset \eta_\nu \\ mn \neq ij}} M_{mn, kl}. \quad (51)$$

Таким образом, получим три типа уравнений для определения операторов каналов в системе четырех частиц:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{ij, i'j'}^{(1)} &= t_{ij} \otimes t_{i'j'} + t_{ij} \otimes t_{i'j'}c \sum_{\substack{mn \neq i'j' \\ mn \neq ij}} (T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^\mu + T_{mn, m'n'}^{(1)}); \\
 T_{ij}^{(1)} &= t_{ij} + t_{ij}c \sum_{\substack{mn \neq ij, m'n' \neq ij \\ mn \neq i'j', m'n' \neq i'j'}} T_{mn, m'n'}^{(1)}; \\
 T_{ij}^{\eta_\nu} &= \sum_{kl \subset \eta_\nu} M_{ij, kl}^{\eta_\nu} + \\
 &+ \sum_{kl \subset \eta_\nu} M_{ij, kl}^{\eta_\nu} c \sum_{\substack{mn \neq kl, mn \neq k'l' \\ m'n' \neq kl, m'n' \neq k'l' \\ mn \not\subset \eta_\nu, \mu \neq \eta_\nu}} (T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^\mu + T_{mn, m'n'}^{(1)}).
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Уравнения (52) можно привести к уравнениям с компактными ядрами, если из операторов T_{ij}^{η} , $T_{ij, i'j'}$ и $T_{ij}^{\eta\nu}$ вычесть амплитуды частично связанных процессов, т. е. вычесть операторы, являющиеся свободными членами в уравнениях.

Однако интересны не уравнения (52), а уравнения для операторов, матричные элементы которых суть амплитуды переходов из определенного начального состояния в определенное конечное состояние. Такими операторами в задаче четырех тел будут следующие:

$$T_{ij, i'j'/kl, k'l'}, T_{ij, i'j'/kl}, T_{ij, i'j'/kl\xi}, \\ T_{ij/kl, k'l'}, T_{ij/kl}, T_{ij/kl\xi}, T_{ij\eta/kl\xi}, T_{ij\eta/kl}, T_{ij\eta/kl, k'l'}.$$

Здесь начальное и конечное состояния обозначены индексами ij , $i'j'$ и kl , $k'l'$, если имеются две пары взаимодействующих частиц; индексами ij и kl — если имеется одна пара взаимодействующих частиц и две свободные; индексами $ij\eta$ и $kl\xi$ — если имеется система трех попарно взаимодействующих частиц η и ξ .

Определим указанные выше операторы так, чтобы они удовлетворили уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} T_{ij\eta/kl} &= \sum_{\kappa\xi \subset \eta} M_{ij, \kappa\xi}^{\eta} \left[\sum_{\substack{mn \subset \eta \\ mn \neq \kappa'\xi'}} \left(\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl} + T_{mn/kl} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{mn \neq \kappa\xi \\ mn \neq \kappa'\xi'}} T_{mn, m'n'/kl} \right]; \\ T_{ij, i'j'/kl} &= \\ &= t_{ij} \otimes t_{i'j'} c \left[\sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} \left(\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl} + T_{mn/kl} \right) + T_{mn, m'n'/kl} \right]; \\ T_{ij/kl} &= t_{ij} \delta(ij, kl) + t_{ij} c \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} T_{mn, m'n'/kl}; \\ T_{ij\eta/kl\xi} &= M_{ij, kl}^{\eta} \delta(\eta, \xi) + \\ &+ \sum_{\kappa\xi \subset \eta} M_{ij, \kappa\xi}^{\eta} \left[\sum_{\substack{mn \neq \kappa'\xi' \\ mn \subset \eta}} \left(\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl\xi} + T_{mn/kl\xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{mn \neq \kappa\xi \\ mn \neq \kappa'\xi'}} T_{mn, m'n'/kl\xi} \right]; \\ T_{ij, i'j'/kl\xi} &= \\ &= t_{ij} \otimes t_{i'j'} c \left[\sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} \left(\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl\xi} + T_{mn/kl\xi} \right) + T_{mn, m'n'/kl\xi} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 T_{ij/kl\xi} &= t_{ij}c \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} T_{mn, m'n'/kl\xi}; \\
 & T_{ij\eta/kl, k'l'} = \\
 &= \sum_{\kappa\xi\zeta\eta} M_{ij, \kappa\xi}^{\eta} c [\sum_{\substack{mnd\eta \\ mn \neq \kappa'\zeta'}} (\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl, k'l'} + T_{mn/kl, k'l'}) + \\
 & \quad + \sum_{\substack{mn \neq \kappa\xi \\ m'n' \neq \kappa'\zeta'}} T_{mn, m'n'/kl, k'l'}]; \\
 & T_{ij, i'j'/kl, k'l'} = t_{ij} \otimes t_{i'j'} \delta(ij, kl) + \\
 & + t_{ij} \otimes t_{i'j'} c [\sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} (\sum_{\mu} T_{mn\mu/kl, k'l'} + T_{mn/kl, k'l'}) + \\
 & \quad + T_{mn, m'n'/kl, k'l'}]; \\
 & T_{ij/kl, k'l'} = t_{ij}c \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} T_{mn, m'n'/kl, k'l'}.
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

3. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ДИАГРАММЫ И ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД РАССЕЙЯНИЯ ДВУХ, ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

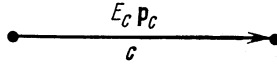
Правила чтения нерелятивистских диаграмм

Как уже обсуждалось во введении, операторный формализм, изложенный выше, был развит на основе метода графического представления матричных элементов оператора рассеяния и последующего суммирования графиков в графические уравнения.

Диаграммное представление итераций интегральных уравнений, а следовательно, и амплитуд процессов рассеяния является методом анализа многочастичных реакций в ядерной и атомной физике. Поэтому важно изложить здесь графический способ вывода интегральных уравнений для амплитуд рассеяния нескольких частиц и тем самым показать точное соответствие итерационного ряда рассматриваемых уравнений бесконечному ряду вкладов нерелятивистских графиков.

Общность метода суммирования диаграмм обуславливается едиными правилами изображения отдельных функций, составляющих матричные элементы оператора рассеяния, записанного для системы любого числа частиц. Эти правила состоят в следующем:

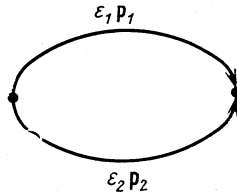
1) функции Грина $g_c(E_c, E_{p_c})$ частицы c с импульсом p_c и энергией E_c : $g_c(E_c, E_{p_c}) = i(E_c - E_{p_c} + i\tau)^{-1}$ — отвечает линия распространения:



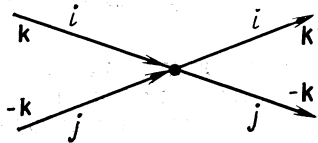
2) произведению функций Грина двух частиц, образующих систему с энергией E и импульсом p :

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\varepsilon_1}{(2\pi)} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_{p_1}) g_2(\varepsilon_2, \varepsilon_{p_2}),$$

где $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_1$ и $\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1$, ставится в соответствие петля:



3) функции $-iV_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, являющейся матричным элементом оператора V_{ij} взаимодействия двух частиц (i, j), ставится в соответствие вершина пересечения линий распространения частиц i и j :



4) при переходе от амплитуды, найденной на основе суммирования матричных элементов, к амплитуде, квадрат которой определяет дифференциальное сечение, необходимо первую умножить на коэффициент

$$\frac{-i}{2\pi} \sqrt{\frac{dE}{dk} \cdot \frac{dE}{dk_0}},$$

где E — полная энергия системы; \mathbf{k}_0 — импульс относительного движения частиц в начальном состоянии; \mathbf{k} — импульс относительного движения частицы после рассеяния;

5) в каждой вершине взаимодействия двух частиц должен выполняться закон сохранения импульса и энергии.

Графический метод получения интегральных уравнений

Метод суммирования диаграмм состоит в изображении матричных элементов ряда (4) четырехмерной теории возмущений графиками или диаграммами лестничного типа на основе правил, приведенных в предыдущем параграфе. Графическое представление матричных элементов ряда (4), определяющего оператор рассеяния, позволяет, во-первых, перестроить этот ряд в бесконечные ряды, отвечающие амплитудам каналов, т. е. амплитудам перехода из одного определенного асимптотического состояния в другое, и, во-вторых, определить типы связи графиков, следовательно, свернуть ряды в графические уравнения, на основании которых можно получить интегральные уравнения для амплитуд каналов.

Порядок перестройки ряда диаграмм четырехмерной теории возмущений следующий. Сначала ряд разбивается на несколько, в которых графики имеют определенную топологию начала и конца. Затем во вновь полученных рядах последовательно проводятся частичные суммирования графиков, в результате чего их вершины оказываются соответствующими операторам амплитуд рассеяния двух, трех, $(N - 1)$ -частиц. После такого частичного суммирования бесконечные ряды графиков суммируются в графические уравнения.

Таким методом далее будут получены уравнения для амплитуд рассеяния двух, трех и четырех частиц. Подробное вычисление матричных элементов и сопоставление их графикам четырехмерной теории возмущений проведем на примере двух тел.

Интегральное уравнение для задачи двух тел

В задаче двух тел оператор взаимодействия имеет вид

$$V_{ij}(t) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} a_i^\dagger(\mathbf{k}, t) a_j^\dagger(-\mathbf{k}, t) V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_i(\mathbf{k}', t) a_j(\mathbf{k}', t), \quad (54)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы относительного движения частиц до и после рассеяния. Наша задача — рассчитать матричные элементы ряда (4) для оператора взаимодействия вида (54) и поставить им в соответствие графики. Матричный элемент первого порядка имеет вид

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \langle a | T_1 | b \rangle; \\ T_1 &= \frac{-i}{\hbar} \int dt_1 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} a_i^\dagger(\mathbf{k}, t) a_j^\dagger(-\mathbf{k}, t) \times \\ &\quad \times V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_i(\mathbf{k}', t) a_j(-\mathbf{k}', t). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Отсюда

$$M_1 = -2\pi i V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(E_k + E_{-k} - E_{k'} - E_{-k'}). \quad (56)$$

Матричный элемент второго порядка в задаче двух тел:

$$\left. \begin{aligned}
 M_2 &= \langle a | T_2 | b \rangle; \\
 T_2 &= \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \times \\
 &\times \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{k}', \mathbf{p}'} [a_i^\dagger(\mathbf{k}, t_1) a_j^\dagger(-\mathbf{k}, t_1) V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) a_i(\mathbf{p}, t_1) a_j(-\mathbf{p}, t_1)] \times \right. \\
 &\times [a_i^\dagger(\mathbf{p}', t_2) a_j^\dagger(-\mathbf{p}', t_2) V(\mathbf{p}', \mathbf{k}') a_i(\mathbf{k}', t_2) a_j(-\mathbf{k}', t_2)] \left. \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

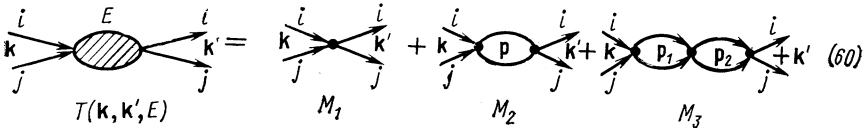
Следовательно,

$$\begin{aligned}
 M_2 &= 2\pi \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{(2\pi)} V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) V_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{k}') [\varepsilon_1 - E_p + i\tau]^{-1} \times \\
 &\times [E - \varepsilon_1 - E_{-p} + i\tau]^{-1} \delta(E_h + E_{-h} - E_{h'} - E_{-h'}) \times \\
 &\times \delta(E_{h'} + E_{-h'} - E_p - E_{-p}), \quad (58)
 \end{aligned}$$

где $E_a = E_h + E_{-h} = E$; $E_b = E_{h'} + E_{-h'} = E$. Матричный элемент третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 M_3 &= i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_2}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \times \\
 &\times \{V(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1) V(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) V(\mathbf{p}_2, \mathbf{k}') [\varepsilon_1 - E_{p_1} + i\tau]^{-1} \times \\
 &\times [E - \varepsilon_1 - E_{-p_1} + i\tau]^{-1} [\varepsilon_2 - E_{p_2} + i\tau]^{-1} [E - \varepsilon_2 - E_{-p_2} + i\tau]^{-1}\} \times \\
 &\times \delta(E - E_{p_1} - E_{-p_2}) \delta(E_{p_1} + E_{-p_1} - E_{p_2} - E_{-p_2}) \times \\
 &\times \delta(E_{p_2} + E_{-p_2} - E) \text{ и т. д.} \quad (59)
 \end{aligned}$$

Имея в виду правила чтения диаграмм, можно амплитуду рассеяния двух частиц представить в виде суммы вкладов от бесконечного числа графиков:



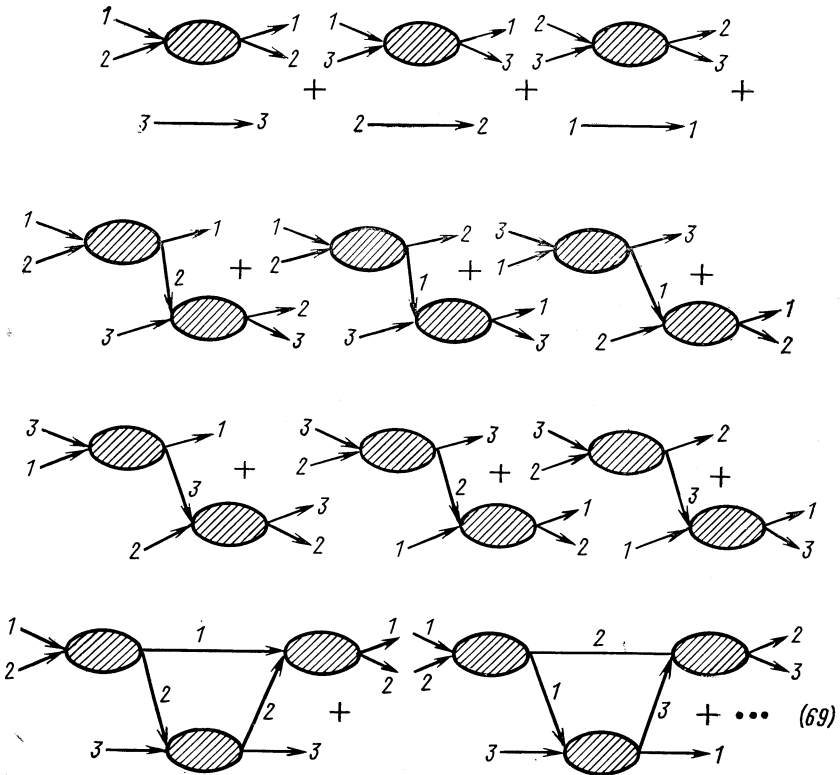
Ряд диаграмм (60) суммируется в графическое уравнение:



Матричные элементы ряда (65) можно представить на основе правил, изложенных выше, следующими графиками:

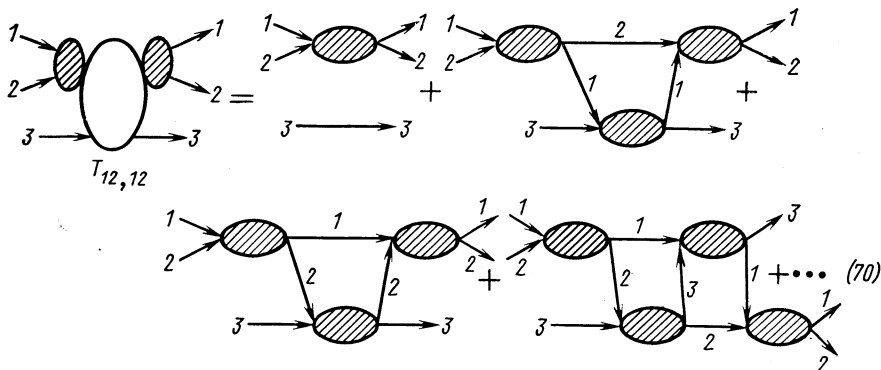
$$\begin{aligned}
 M_1 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} + \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \end{array} + \\
 M_2 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \end{array} + \\
 & + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 1 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 2 \end{array} + \\
 M_3 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} + \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \dots + \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \end{array} + \dots
 \end{array}
 \end{aligned}
 \tag{66}$$

В ряду графиков (66) можно выполнить суммирование вершин, отвечающих рассеянию двух одинаковых частиц, в результате получим диаграммы, вершины которых будут соответствовать амплитудам рассеяния двух частиц:



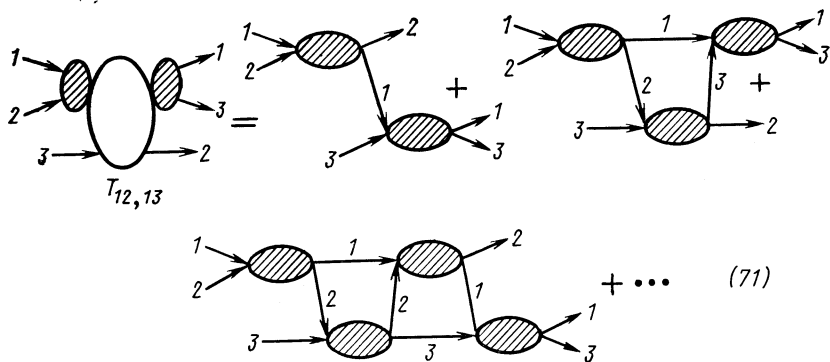
Затем графики ряда (69) можно распределить в девять рядов, в каждом из которых графики имеют одинаковую топологию начала и конца. Полученные ряды будут, очевидно, определять амплитуды каналов. Обозначим эти амплитуды символами $T_{\alpha\beta}$, где α и β — взаимодействующая пара частиц в начальном и конечном состоянии [α и β могут принимать значения (12), (23) и (31)].

Рассмотрим следующую последовательность графиков для амплитуды $T_{12, 12}$:



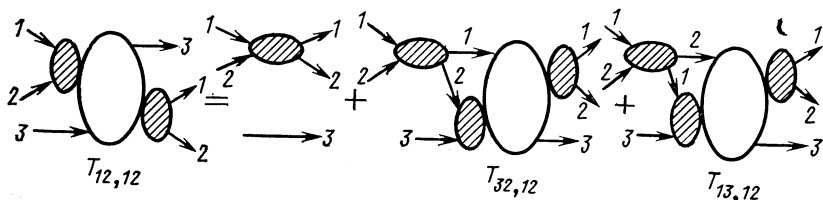
очевидно, аналогичную структуру имеют последовательности для амплитуд $T_{23, 23}$ и $T_{31, 31}$.

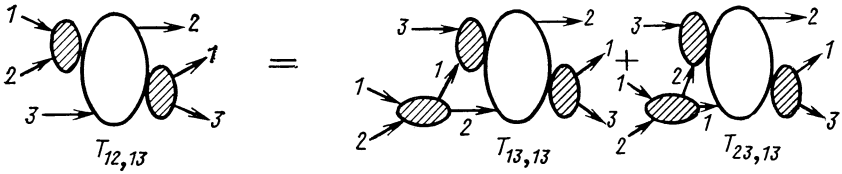
Последовательность графиков для амплитуд $T_{12, 13}$ имеет следующий вид:



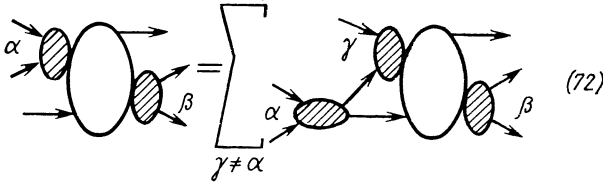
Следует заметить, что все шесть последовательностей графиков для амплитуд $T_{\alpha, \beta}$, где $\alpha \neq \beta$, имеют аналогичную структуру.

Сравнивая последовательности (70) и (71), можно провести суммирование их в уравнение следующего вида:

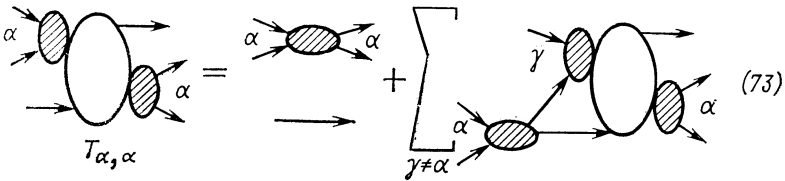




Отсюда можно записать систему из девяти уравнений, в которой шесть уравнений для случая $\alpha \neq \beta$ имеют следующий вид:



а три уравнения для случая $\alpha = \beta$ имеют вид



На основе графических уравнений (72) и (73) можно записать интегральные уравнения, если ввести следующие обозначения: $T_{ij, ij}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_l; \mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{k}'_l; E)$ — амплитуда рассеяния трех частиц; $\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}$ — импульсы относительно движения двух взаимодействующих частиц в начальном и конечном состоянии соответственно; \mathbf{k}_l и \mathbf{k}'_l — импульс третьей, свободной частицы в системе центра масс в начальном и конечном состоянии; E — энергия всей системы; $t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij})$ — амплитуда рассеяния двух частиц (ij); \mathbf{k}_{ij} и \mathbf{k}'_{ij} — импульсы относительно движения частиц i и j в начальном и конечном состоянии; ε_{ij} — энергия системы двух частиц.

Имея в виду правила чтения графиков, запишем интегральные уравнения для амплитуд $T_{ij, ij}$ и $T_{ij, ji}$:

$$\begin{aligned}
 T_{ij, ij}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_l; \mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{k}'_l, E) &= \frac{3}{4} t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij}) \sigma(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}'_l) - \\
 - 4\pi \int \frac{d\mathbf{k}''_i d\mathbf{k}''_j}{(2\pi)^6} \cdot \frac{t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}^{(1)}_{ij}, \varepsilon_{ij})}{-2\mu_{ij}\varepsilon_{ij} + (\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}''_j)^2} T_{ii, ij}(\mathbf{k}''_i, \mathbf{k}''_j; \mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{k}'_l, E) - \\
 - 4\pi \int \frac{d\mathbf{k}''_j d\mathbf{k}''_i}{(2\pi)^6} \cdot \frac{t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}^{(2)}_{ij}, \varepsilon_{ij})}{-2\mu_{ij}\varepsilon_{ij} + (\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}_i)^2} T_{lj, ij}(\mathbf{k}''_j, \mathbf{k}''_i; \mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{k}'_l, E),
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{ij, il}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_l; \mathbf{k}'_{il}, \mathbf{k}'_j; E) = \\
 & = -4\pi \int \frac{d\mathbf{k}_{li}d\mathbf{k}_j}{(2\pi)^6} \cdot \frac{t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij})}{-2\mu_{ij}\varepsilon_{ij} + (\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}_j'')^2} T_{li, li}(\mathbf{k}'_{li}, \mathbf{k}'_j; \mathbf{k}'_{li}, \mathbf{k}'_j; E) - \\
 & - 4\pi \int \frac{d\mathbf{k}_i''d\mathbf{k}_j''}{(2\pi)^6} \cdot \frac{t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij})}{-2\mu_{ij}\varepsilon_{ij} + (\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}_i'')^2} T_{lj, li}(\mathbf{k}'_{lj}, \mathbf{k}'_i; \mathbf{k}'_{li}, \mathbf{k}'_j; E), \quad (74)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{ij}^{(1)} &= (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)/2 - \mathbf{k}_j'' = -\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}_j''; \\
 \mathbf{k}_{ij}^{(2)} &= (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)/2 - \mathbf{k}_i'' = -\mathbf{k}_l/2 - \mathbf{k}_i''.
 \end{aligned}$$

Графическое представление амплитуд рассеяния в системе четырех тел

Рассмотрим систему четырех разных частиц. В предположении парных сил оператор взаимодействия этих частиц имеет вид

$$V_{1234}(t) = V_{12}(t) + V_{13}(t) + V_{14}(t) + V_{23}(t) + V_{24}(t) + V_{34}(t). \quad (75)$$

Подставив данное представление взаимодействия в ряд (4) для оператора рассеяния, получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}
 T_{1234} &= T_{1234}^{(1)} + T_{1234}^{(2)} + T_{1234}^{(3)} + \dots + T_{1234}^{(4)} + \dots; \\
 T_{1234}^{(1)} &= \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V_{1234}(t_1); \\
 T_{1234}^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P \{V_{1234}(t_1) V_{1234}(t_2)\}; \\
 &\vdots \\
 T_{1234}^{(n)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P \{V_{1234}(t_1) \dots V_{1234}(t_n)\}. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Матричным элементам оператора рассеяния частиц этой системы может быть поставлена в соответствие последовательность

графиков следующего вида:

$$\begin{aligned}
 M_1 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \quad \quad 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \xrightarrow{1} \end{array} \end{array} + \dots + \\
 M_2 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \\
 M_3 & \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \\
 & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} \end{array} + \dots \quad (76)
 \end{aligned}$$

Диаграммы (76) можно различать по топологии начала и конца. Во-первых, в начальном состоянии две частицы, например (ij) , могут взаимодействовать, а две быть свободными. Будем обозначать такое состояние символом a :

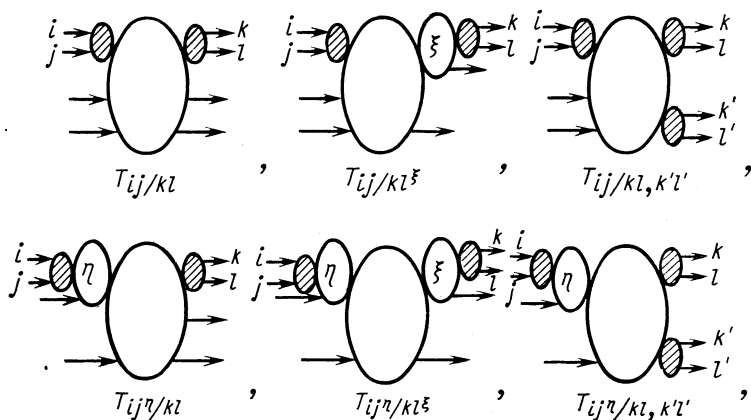
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} i \quad \quad \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad \quad \quad j \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \end{array} \right\} \quad a \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} i \quad \quad \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad \quad \quad l \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \end{array} \right\} \quad \delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} i \quad \quad \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad \quad \quad j \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \end{array} \right\} \quad \theta \quad (77)$$

Во-вторых, в начальном состоянии три частицы, взаимодействуя попарно, могут образовать подсистему (η), а четвертая частица — остаться свободной. При этом амплитуда рассеяния частиц в системе (η) представляется бесконечной суммой только связанных графиков. Будем обозначать такое состояние символом b (77). Выделим первую пару (ij) взаимодействующих частиц в подсистеме (η). Следует иметь в виду, что при разбиении всеми возможными способами четырех разных частиц на подсистемы их трех частиц и одну, пара частиц (ij) может принадлежать двум подсистемам $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$. Поэтому подсистема (77б) из трех частиц обозначена символом η_{ij}^v , где $v = 1, 2$.

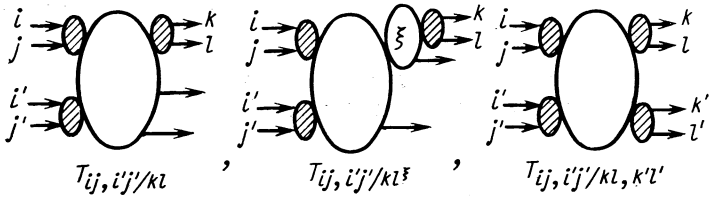
В-третьих, в начальном состоянии могут быть две независимые пары частиц (ij) и (mn) (причем $ij \neq mn$). Внутри каждой пары частицы взаимодействуют. Будем обозначать это состояние символом e (77с). То же самое относится к конечному состоянию графиков, т. е. существуют три принципиально различных конечных состояния системы четырех частиц. Будем обозначать их соответственно такими же символами со штрихами *.

Таким образом следует различать девять различных типов переходов в системе четырех частиц.

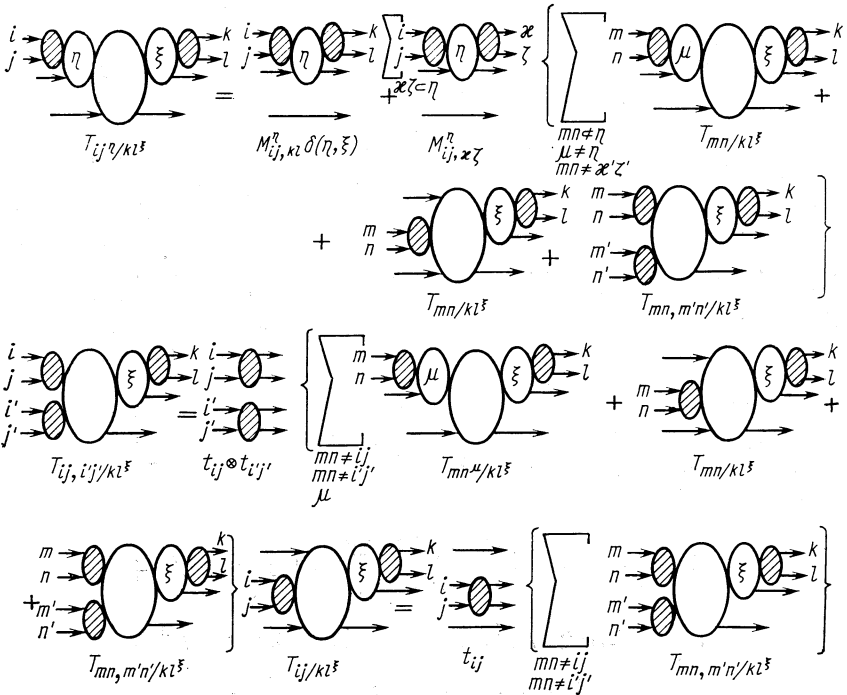
Для описания этих переходов введем следующие девять типов амплитуд:



* Очевидно, что в системе четырех разных частиц имеется 21 асимптотическое состояние системы, получающееся в результате всех возможных перестановок частиц в указанных выше трех асимптотических состояниях.



Из бесконечной последовательности графиков (76) для каждого из указанных типов амплитуд можно выделить свою бесконечную последовательность диаграмм. На основании суммирования этих последовательностей можно получить следующие графические уравнения:



Эти уравнения полностью эквивалентны уравнениям, полученным алгебраическим методом выше. В работе [20] было показано, что подобные уравнения имеют единственное физическое решение, удовлетворяющее уравнению Шредингера для аналогичной задачи.

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ В МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ ДИАГРАММ

Элементарные и сложные частицы в нерелятивистских графиках

Выше рассматривалась система нескольких нерелятивистских частиц, взаимодействующих попарно. Такие частицы называем элементарными. Было показано, что амплитуду рассеяния элементарных частиц можно представить в виде бесконечной суммы диаграмм лестничного типа, которые соответствуют матричным элементам четырехмерной теории возмущений. Базисными функциями системы рассеивающихся частиц является набор плоских волн элементарных частиц.

Для того чтобы не нарушалась полнота системы базисных функций, в нерелятивистских графиках в промежуточном состоянии в качестве виртуальных частиц могут выступать только элементарные частицы.

Кроме того, в диаграммах нерелятивистской теории возмущений вершинам, изображающим процесс взаимодействия в промежуточном состоянии виртуальных элементарных частиц, ставится в соответствие точная амплитуда рассеяния этих частиц в общем случае не на поверхности энергии. Например, вершине взаимодействия двух элементарных частиц (ij) отвечает амплитуда рассеяния этих двух частиц $t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij})$, которая является функцией импульсов относительного движения \mathbf{k}_{ij} и \mathbf{k}'_{ij} до и после рассеяния соответственно и энергии ε_{ij} относительного движения. Можно показать, что всякое другое представление вершины промежуточного рассеяния, например моделирование этой вершины сложной квазичастицей, является приближением.

Действительно, если взаимодействующие элементарные частицы могут образовать связанное состояние при $\varepsilon_{ij} = -\alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}$, то для амплитуды $t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}; \varepsilon_{ij})$ оказывается справедливым представление:

$$t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij}) = \frac{G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})G_{ij}(\mathbf{k}'_{ij})}{\varepsilon_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}} + v(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}) + \\ + \int t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{q}_{ij}, q_{ij}^2/2\mu_{ij} \pm i0)(q_{ij}^2/2\mu_{ij} - \varepsilon_{ij})^{-2} \times \\ \times t(\mathbf{k}'_{ij}, \mathbf{q}_{ij}, q_{ij}^2/2\mu_{ij} \pm i0) dq_{ij}. \quad (78)$$

Здесь функция $G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})$ связана с $\psi(\mathbf{k}_{ij})$ собственной функцией гамильтониана системы двух взаимодействующих частиц соотношением

$$\psi(\mathbf{k}_{ij}) = G_{ij}(\mathbf{k}_{ij}) / (k_{ij}^2/2\mu_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}). \quad (79)$$

Заметим, что для функции $G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})$ существует нормировка вида

$$\int G_{ij}(\mathbf{k}_{ij}) (\mathbf{k}_{ij}^2/2\mu_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij})^{-2} G_{ij}(\mathbf{k}_{ij}) d\mathbf{k}_{ij} = 1. \quad (80)$$

Далее, $v(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij})$ в (78) — фурье-образ потенциала взаимодействия двух частиц; μ_{ij} — приведенная масса этих частиц.

Представление (78) для амплитуды рассеяния $t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij})$ получено на основе анализа ее аналитических свойств. В формуле (78) слагаемое вида $G_{ij}(\mathbf{k}_{ij}) G_{ij}(\mathbf{k}'_{ij}) / (\mathbf{k}'_{ij}^2/2\mu_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij})$ является вкладом от полюса амплитуды $t(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{ij}, \varepsilon_{ij})$.

Отсюда замена точной амплитуды рассеяния частиц в промежуточном состоянии на ее полюсное приближение, которое, как видно, является амплитудой образования и последующего распада некоторой новой сложной частицы, при записи вкладов от графиков — необоснованная операция. Полюсное приближение справедливо при условии, когда энергия подсистемы элементарных частиц близка к энергии связи сложной частицы. Поскольку в виртуальном состоянии энергия подсистемы взаимодействующих элементарных частиц не фиксирована и меняется в большом интервале, выбор полюсного приближения для амплитуды рассеяния виртуальных частиц является очень условным. Отсюда следует, что введение сложной частицы, состоящей из нескольких элементарных, в промежуточное состояние требует специального обоснования.

Необходимо заметить, что рассеяние трех и более элементарных частиц, имеющих неопределенный импульс и энергию в начальном и конечном состояниях в реальном эксперименте, как правило, не встречается. Наоборот, почти всегда имеем процесс столкновения двух частиц, по меньшей мере одна из которых является сложной, и в конечном состоянии могут образоваться сложные частицы. Поэтому возникает вопрос о введении сложной частицы, но только в начальное или конечное состояние без нарушения формализма, отнесенного к базису плоских волн. Оказывается, в начальное (или конечное) состояние можно вводить сложную частицу потому, что энергию частиц, вступающих в реакцию, в том числе и относительную энергию подсистемы частиц, можно точно фиксировать. Например, относительная энергия подсистемы базисных частиц в начальном (или конечном) состоянии может быть сколько угодно близка к энергии связанного состояния. В этом случае для амплитуды рассеяния подсистем элементарных частиц оказывается вполне справедливым полюсное приближение, например в случае подсистемы из двух частиц. Это значит, что амплитуда рассеяния в основном определяется одним полюсным членом в разложении (78). Знаменатель в (78) можно истолковать как функцию Грина сложной частицы, а числитель — как произведение вершины распада на вершину образования сложной частицы.

Вершины в нерелятивистских графиках

Как было показано выше, в нерелятивистских диаграммах, отвечающих амплитуде рассеяния, в начальном и конечном состояниях в зависимости от задания каналов перехода могут стоять вершины распада (образования) сложных частиц. Для определения вершин можно получить следующее правило: вершина распада (образования) сложной частицы на составляющие ее элементарные $G(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N)$ равна квадратному корню из вычета в полюсе амплитуды рассеяния этих элементарных частиц, найденной при условии одинаковой конфигурации импульсов в начальном и конечном состояниях.

Действительно, обозначим амплитуду рассеяния N -частиц при условии одинаковой конфигурации импульсов в начальном и конечном состояниях как $T(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; E)$. Здесь \mathbf{k}_i — импульс i -й частицы, а E — энергия системы N -частиц. Если E — энергия системы частиц близка к полюсному значению E_0 , то амплитуду рассеяния можно представить в полюсном приближении:

$$\lim_{E \rightarrow E_0} T(\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; E) = G^2(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) / (E - E_0), \quad (81)$$

где $G^2(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N)$ — вершина распада или образования сложной частицы с энергией связи E_0 . Поскольку величина $\lim_{E \rightarrow E_0} T(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; E) \cdot (E - E_0)$ является вычетом в полюсе амплитуды рассеяния, вершину распада или образования сложной частицы можно определить из соотношения $G(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) = \sqrt{\lim_{E \rightarrow E_0} T(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; E) (E - E_0)}$.

Интегральные уравнения для амплитуд многочастичных реакций

Выше операторным и графическим методами были получены уравнения для определения амплитуд рассеяния двух, трех и четырех свободных частиц.

Однако интересными с точки зрения приложения, например, к задачам ядерной физики являются уравнения для амплитуд переходов в системе нескольких нерелятивистских частиц, когда в начальном состоянии элементарные частицы оказываются составными элементами двух сложных частиц или одной сложной частицы. Это относится, конечно, к амплитудам рассеяния трех и более тел. Рассмотрим, например, задачу трех разных частиц. В начальном состоянии систему трех частиц можно представить в виде двух подсистем только одним способом: две частицы объединены в сложную — C , а третья частица свободная.

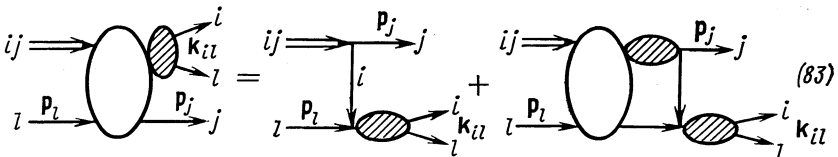
В ядерной физике таким процессом является, например, реакция взаимодействия дейтронов с нуклонами.

Можно показать, что в случае рассеяния трех частиц i, j, l амплитуда $T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E)$ перехода из состояния $\psi(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i)$, где частицы ij связаны, в состояние $\psi_0(\mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j)$, где частицы свободны, и амплитуда $T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \alpha_{il}, \mathbf{p}_j; E)$ перехода из состояния $\psi(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i)$ в состояние $\psi(\alpha_{il}, \mathbf{p}_j)$, где пара частиц ij и il связаны, определяются из соотношения

$$\left. \begin{aligned} T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E) &= \\ &= T_{ij, il}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E) \frac{[\varepsilon_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}]}{G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})}, \\ \varepsilon_{ij} &\rightarrow k_{ij}^2/2\mu_{ij} \rightarrow -\alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}; \\ T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \alpha_{il}, \mathbf{p}_j, E) &= \\ &= T_{ij, il}(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E) \frac{[\varepsilon_{ij} + \alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}][\varepsilon_{il} + \alpha_{il}^2/2\mu_{il}]}{G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})G_{il}(\mathbf{k}_{il})}; \\ \varepsilon_{ij} &\rightarrow k_{ij}^2/2\mu_{ij} \rightarrow -\alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}; \\ \varepsilon_{il} &\rightarrow k_{il}^2/2\mu_{il} \rightarrow -\alpha_{il}^2/2\mu_{il}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

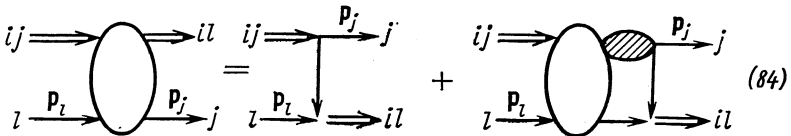
Здесь $k_{ij}^2/2\mu_{ij}$ и $\alpha_{ij}^2/2\mu_{ij}$ — энергия относительного движения пары частиц в свободном и связанном состоянии соответственно; \mathbf{p}_l — импульс частицы l ; $G_{ij}(k_{ij})$ — форм-фактор системы двух связанных частиц (ij) или вершина образования (распада) сложной частицы C на частицы (i, j).

Если иметь в виду обозначения функции $G_{ij}(\mathbf{k}_{ij})$ графиком, имеющим смысл вершины распада связанной частицы на две составляющие



$$T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E)$$

то амплитуды $T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \mathbf{k}_{il}, \mathbf{p}_j; E)$ и $T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \alpha_{il}, \mathbf{p}_j; E)$ можно представить в форме бесконечных рядов графиков, суммируемых в следующие уравнения:



$$T_{ij, il}(\alpha_{ij}, \mathbf{p}_i; \alpha_{il}, \mathbf{p}_j; E)$$

**Частные решения интегральных уравнений]
метода суммирования диаграмм для анализа
многочастичных ядерных реакций**

Покажем теперь, как интегральные уравнения метода суммирования диаграмм можно использовать в ядерной физике для анализа дифференциальных сечений реакций.

Представим многочастичную ядерную реакцию как процесс рассеяния n -частиц. Пусть в начальном состоянии частицы распределены в две подсистемы, каждая из которых представляет собой связанную систему. В конечном состоянии частицы можно распределить в m -подсистем, и m принимает значение от 2 до n . Амплитуда перехода системы частиц в конечное состояние с числом подсистем m , где $n \geq m > 2$, является суммой амплитуд, которые соответствуют переходам в различные возможные каналы конечного состояния*. Для определения слагаемых амплитуд существует система связанных интегральных уравнений. Однако при $m < n$ для нахождения слагаемых амплитуд следует решить систему уравнений для случая $m = n$. Известно, что численное решение интегральных уравнений теории рассеяния для случая $n > 2$ представляет собой трудную математическую задачу, поэтому интересно найти частные решения этих уравнений в аналитическом виде. В методе суммирования диаграмм интегральное уравнение для слагаемой амплитуды, как правило, имеет следующую структуру:

$$T_k(m) = T_k^0(m) + \sum_i T_i(n) CK_{ik}(m). \quad (85)$$

В этом схематическом изображении уравнения приняты следующие обозначения: $T_k(m)$ — слагаемая амплитуда из набора амплитуд для определенного m ; $T_i(n)$ — слагаемая амплитуда из набора при $m = n$; $T_k^0(m)$ — свободный член уравнения; $\sum_i T_i(n) CK_{ik}(m)$ — интегральный член уравнения; $K_{ik}(m)$ — ядро уравнения; C — произведение функций Грина всех n -частиц.

Проитерировуем один раз это уравнение:

$$T_k(m) = T_k^0(m) + \sum_i T_i^0(n) CK_{ik}(m) + \sum_{ij} T_j(n) CK_{ji}(n) CK_{ik}(m).$$

Будем искать амплитуду $T_k(m)$ в виде суммы

$$T_k(m) = T_k^{(1)}(m) + T_k^{(2)}(m),$$

где

$$T_k^{(1)}(m) = T_k^0(m) + \sum_i T_i^0(n) CK_{ik}(m),$$

* Если $m = 2$, имеется всего одна амплитуда перехода.

а для определения $T_k^{(2)}(m)$ может быть записано уравнение, которое схематически представляется в виде

$$T_k^{(2)}(m) = \sum_{ij} T_j^0(n) CK_{ji}(n) CK_{ik}(n) + \\ + \sum_{i\bar{j}\bar{k}} T_{\bar{k}}^0(n) CK_{\bar{k}j}(n) CK_{ji}(n) CK_{ik}(m) + \\ + \sum_{ij} T_j^{(2)}(n) CK_{ji}(n) CK_{ik}(m).$$

Поясним смысл этого решения на конкретном примере. В случае задачи трех тел ($m = n = 3$) первые слагаемые свободного члена соответствуют вкладу от графика с двумя замкнутыми контурами, а второе — вкладу от графика с тремя замкнутыми контурами. Амплитуде $T_k^{(1)}(m)$ соответствует сумма вкладов от диаграммы полюсного типа и диаграмм с одним замкнутым контуром. Эти вклады можно достаточно просто вычислить в некоторых случаях в аналитическом виде. В работе [14] было показано, что сумма вкладов от полюсного графика и квадратного эквивалентна амплитуде импульсного приближения; таким образом, $T_k^{(1)}(m)$ имеет ясный физический смысл. Аналогичная ситуация возникает и в случае реакций, сводящихся к задачам четырех и более тел. Функция $T_k^{(1)}(m)$, как правило, оказывается эквивалентной амплитуде импульсного приближения.

При определении $T_k^{(2)}(m)$ следует рассматривать два случая:

1) начальная энергия велика, т. е. величина первичного импульса \mathbf{k}_0 в системе центра масс много больше величины вероятных импульсов \mathbf{p}_0 частиц в начальных подсистемах, и рассеяние частиц с большим относительным импульсом в промежуточном состоянии можно рассматривать как свободное, идущее преимущественно вперед — назад в узком конусе. В этом случае итерационный ряд уравнений для $T_k^{(2)}(m)$ сходится [21] и функция $T_k^{(2)}(m)$ может быть представлена суммой первых итераций.

2) рассмотрим теперь случай небольших энергий. Очевидно, при таких условиях члены итерационного ряда уравнения для $T_k^{(2)}(m)$ параметра малости не имеют, и представление функции $T_k^{(2)}(m)$ несколькими итерациями не имеет смысла.

Однако имеется возможность найти амплитуду $T_k^{(2)}(m)$ в параметризованном виде, изучая соответствующее уравнение.

Так же, как и амплитуда рассматриваемого перехода, амплитуда $T_k^{(2)}(m)$ является сложной функцией, зависящей от полной энергии системы и $(3m - 4)$ переменных, характеризующих величины и направления импульсов образующихся m -частиц.

При изучении многочастичных процессов обычно интересуются зависимостью дифференциальных сечений, или амплитуд переходов, от угла или энергии одной из частиц в конечном состоянии.

Поэтому оказывается вполне достаточным представить $T_k^{(2)}(m)$ с точностью до постоянной величины в виде функции от заданной переменной.

Рассеяние нуклонов на дейтонах

Как пример предложенного метода анализа амплитуд многочастичных ядерных реакций рассмотрим процесс распада дейтона под действием нуклонов.

В предположении двухчастичных сил амплитуда $T(N + d \rightarrow 3N)$ такой реакции есть сумма амплитуд, отвечающих взаимодействию каждой пары нуклонов (1,2), (1,3), (2,3) в конечном состоянии:

$$T(N + d \rightarrow 3N) = T_{12} + T_{23} + T_{31}. \quad (86)$$

Каждую из этих трех слагаемых амплитуд T_{ij} можно определить на основе интегрального уравнения (83), решение которого будем искать в виде суммы двух функций: $T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)}$. Здесь $T_{ij}^{(1)}$ — сумма свободных членов проинтегрированного один раз уравнения для T_{ij} . Графически $T_{ij}^{(1)}$ изображается суммой полюсной и квадратной диаграмм. Следует отметить, что сумма $T_{12}^{(1)} + T_{23}^{(1)} + T_{31}^{(1)}$ соответствует амплитуде реакции $N + d \rightarrow 3N$, вычисленной в импульсном приближении. Рассмотрим методы определения функций $T_{ij}^{(2)}$.

При высокой энергии, когда начальный импульс k_0 значительно больше импульса нуклонов в дейтоне и когда выполняется предположение о том, что рассеяние нуклонов в промежуточном состоянии идет как свободное, итерационный ряд уравнения для $T_{ij}^{(2)}$ быстро сходится. Параметром сходимости является величина $(\beta/k_0)^2$ [21], где β — параметр хьюлтеновской волновой функции дейтона. Тогда $T_{ij}^{(2)}$ может быть представлена первыми итерациями.

При небольших энергиях амплитуду $T_{ij}^{(2)}$ следует искать в параметризованном виде как функцию определенного переменного.

Рассмотрим, например, зависимость амплитуды (86) реакции распада дейтона под действием нуклонов от энергии $E_{12} = f_{12}^2/m$ относительного движения двух нуклонов (1, 2) в области их резонансного взаимодействия, т. е. в области, где E_{12} близка к нулю. Пусть начальная энергия значительно больше энергии связи нуклонов в дейтоне ($E_0 = k_0^2/2m \gg \alpha^2/m$), но E_0 меньше U_0 — глубины потенциала взаимодействия двух нуклонов.

При указанных предположениях амплитуду T_{12} , учитывающую взаимодействие нуклонов (1,2) в конечном состоянии, можно факторизовать:

$$T_{12} = a_{NN}(f_{12}) [A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)}],$$

где $a_{NN}(f_{12})$ — амплитуда рассеяния частиц (1,2) при $f_{12} \approx 0$. Имея это в виду, представим амплитуду реакции $N + d \rightarrow 3N$ как сумму:

$$T(N + d \rightarrow 3N) = a_{NN}(f_{12}) [A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)}] + [T_{13}^{(1)} + T_{13}^{(2)}] + [T_{23}^{(1)} + T_{23}^{(2)}].$$

Если ϑ — угол вылета нуклона 3, не участвующего во взаимодействии, фиксирован, то при условии ($f_{12} \approx 0$) поправки к амплитудам $A_{12}^{(1)}$, $T_{13}^{(1)}$, $T_{23}^{(1)}$ оказываются постоянными с точностью до членов порядка $(f_{12}/k_0)^2$. В этом случае амплитуда $T(N + d \rightarrow 3N)$ имеет вид

$$T(N + d \rightarrow 3N) = a_{NN}(f_{12}) [A_{12}^{(1)} + C_1] + [T_{23}^{(1)} + C_2] + [T_{31}^{(1)} + C_3].$$

Поскольку амплитуда $a_{NN}(f_{12})$, как функция f_{12} , находится в области своего резонансного значения, то членами $C_2 [a_{NN}(f_{12})]^{-1}$ и $C_3 [a_{NN}(f_{12})]^{-1}$ можно пренебречь, и для $T(N + d \rightarrow 3N)$ получим

$$T(N + d \rightarrow 3N) = a_{NN}(f_{12}) [F_1 + C_1], \quad (87)$$

где функция

$$F_1 = A_{12}^{(1)} + \frac{T_{23}^{(1)} + T_{31}^{(1)}}{a_{NN}(f_{12})} \quad (88)$$

может быть вычислена. Поведение F_1 , как функции f_{12} , в области $f_{12} \approx 0$ существенным образом зависит от значения фиксированного угла вылета нуклона 3. Здесь можно рассмотреть два предельных случая:

1. Угол $\vartheta_3 \approx 180^\circ$, т. е. \mathbf{q}_3 — импульс, передаваемый нуклону 3, имеет максимальное значение $|\mathbf{q}_3| = |\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_3|/2 \approx k_0$. При этих условиях функция F_1 с точностью до членов порядка $(f_{12}/k_0)^2$ оказывается постоянной величиной. Поэтому поведение амплитуды реакции $N + d \rightarrow 3N$ как функции f_{12} определяется только резонансным множителем $a_{NN}(f_{12})$:

$$T(N + d \rightarrow 3N) = \text{const } a_{12}(f_{12}). \quad (89)$$

Этот результат подтверждается анализом ряда экспериментальных данных (рис. 1).

2. Угол $\vartheta_3 \approx 0$, т. е. передаваемый импульс \mathbf{q}_3 очень мал: $|\mathbf{q}_3| = |\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}|/2 \approx 0$. В этом случае функция F_1 (88) сама оказывается сильно зависящей от f_{12} , и, следовательно, амплитуда реакции $T(N + d \rightarrow 3N)$, найденная на основе частного решения интегральных уравнений

$$T(N + d \rightarrow 3N) \approx a_{NN}(f_{12}) [F_1 + C], \quad (90)$$

отличается от амплитуды $A_{\text{имп}}(N + d \rightarrow 3N)$, рассчитанной в импульсном приближении:

$$A_{\text{имп}}(N + d \rightarrow 3N) = a_{NN}(f_{12}) F_1,$$

на функцию $a_{NN}(f_{12}) \cdot C$.

На рис. 2, а приведены экспериментально измеренные спектры протонов из реакции $p + d \rightarrow n + p_1 + p_2$ в области $f_{\text{пр}} \approx 0$ [24], и кривые, рассчитанные на основе представления амплитуды

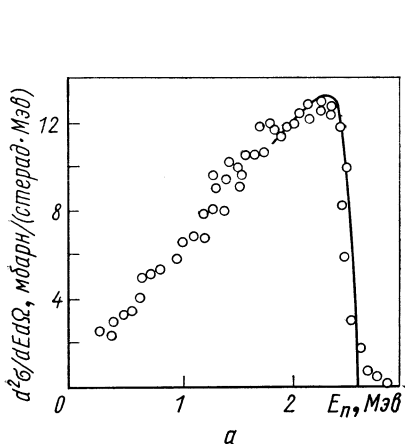
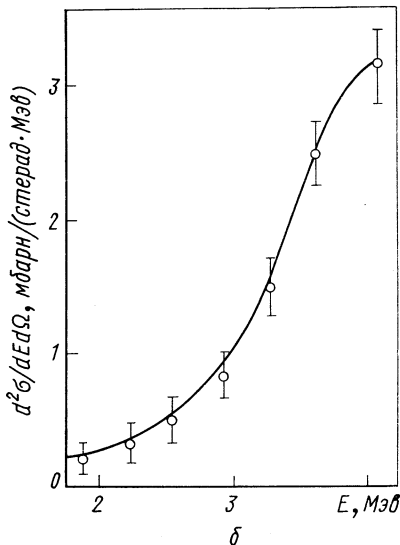


Рис. 1. Энергетические спектры нейтронов из реакции $n(d, p) 2n$:

а — при энергии падающих дейтронов 1,86 Мэв [23]; б — нейтронов 14,0 Мэв [13]. Кривые рассчитаны в приближении Мигдала — Ватсона.



реакции в виде (90). Из рисунка видно, что подбором постоянной величины C в формуле (90) удается получить хорошее согласие с экспериментальными данными. Далее, эта параметризованная формула для амплитуды $N + d \rightarrow 3N$ реакции была использована в анализе экспериментальных спектров протонов из реакции $n + d \rightarrow n_1 + n_2 + p$ при $f_{n_1 n_2} \approx 0$ и $q_p \ll f_{n_1 n_2}$ для получения длины рассеяния нейтрона на нейтроне (см. рис. 2, б). Было показано, что только при значении длины рассеяния a_{NN} в области от $19f$ до $24f$ расчетные кривые можно согласовать с экспериментальными данными подбором постоянной C в формуле (90).

Интересно заметить, что функция $a_{NN}(f_{NN}) F_1$, являясь суммой вкладов от первых двух итераций уравнений для T_{12} , T_{23} и T_{31} , в случае рассматриваемой конфигурации частиц и начальной энергии реакции $E_0 \ll U_0$ содержит амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния фактически на поверхности энергии. Величина C в формуле (90) является суммой решений интегральных уравнений

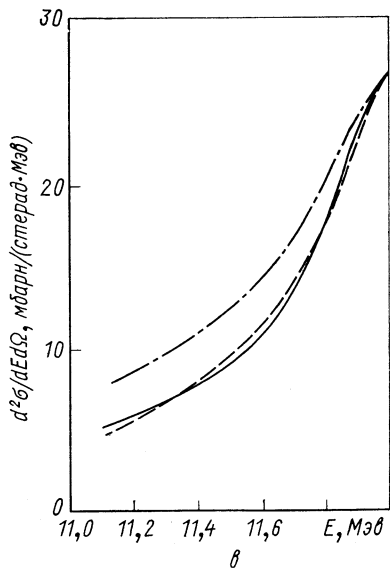
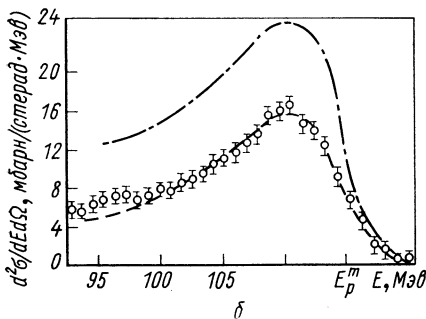
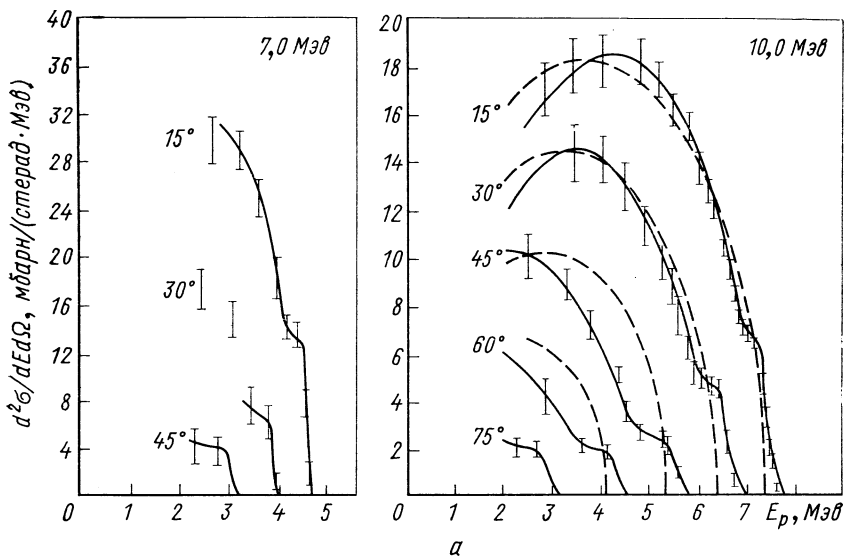


Рис. 2. Энергетические спектры протонов:

а — из реакции $p(d, n)2p$ при энергии 7 и 10 Мэв падающих протонов для различных углов вылета [24]. Сплошные кривые рассчитаны в настоящей работе; пунктирные — в предположении равновероятного распределения в фазовом пространстве; б — из реакции $n(d, p)2n$ при энергии 13,9 Мэв падающих нейтронов для угла 4° [13]. Пунктирная кривая рассчитана в настоящей работе; точки и пунктир — расчет в импульсном приближении; в — из реакции $n(d, p)2n$ при энергии 14 Мэв падающих нейтронов для угла 4° . Пунктир и точки — экспериментальная кривая; сплошная кривая рассчитана в работе [25]; пунктирная кривая рассчитана в настоящей работе.

для амплитуды $A_{12}^{(2)}$, и, следовательно, существенным образом зависит от характера парных потенциалов. Отсюда абсолютная величина и поведение дифференциального сечения образования нуклонов Z в области верхней границы при условии $q_3 \approx 0$, найденное на основе численного решения интегральных уравнений, оказываются сильно зависящими от выбора характера двунуклонных потенциалов. Подтверждение этого можно найти в сравнительном анализе экспериментально измеренного спектра протонов из реакции $n + d \rightarrow n_1 + n_2 + p$ и рассчитанного на основе точного решения интегральных уравнений, записанных в приближении сепарабельного нуклон-нуклонного потенциала [25]. Как видно из рис. 2, в, оба этих спектра можно воспроизвести подбором величины C в представлении (90) для амплитуды реакции $N + d \rightarrow 3N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скорняков В. Г., Тер-Мартirosян К. А. ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 775.
2. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459; «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1963, т. 69, с. 3.
3. Якубовский О. Я. «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 1312.
4. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 2412; Nucl. Phys., 1965, v. 69, p. 278; Nucl. Phys. A, 1967, v. 90, p. 625.
5. Mitra A. N. e.a. Phys. Rev., B, 1965, v. 140, p. 1336; Weyers J. Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1236; Allesandrini V. A. J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 215; Mishima N., Takahashi V. Progr. Theor. Phys., 1966, v. 35, p. 440.
6. Newton R. G. J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 851.
7. Omnes R. Phys. Rev. B, 1968, v. 165, p. 1265.
8. Weinberg S. Phys. Rev. B, 1964, v. 133, p. 232; Sugar R., Blankenbecker R. Phys. Rev. B, 1964, v. 136, p. 472; Rosenberg L. Phys. Rev. B, 1965, v. 140, p. 217; Van Winter C. Kgl. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1964, 2, No. 8; 1965, 2, No. 10.
9. Federbush P. Phys. Rev., 1966, v. 148, p. 1554; Newton R. G. Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1502.
10. Паздерекий В. А., Файнберг В. Я. Препринт ФИ АН СССР. Рассеяние сложных частиц. 1966.
11. Grassberger P., Sandhas W. Nucl. Phys., 1967, v. 132, p. 181.
12. Sitenko A. G., Kharchenko V. F. Nucl. Phys., 1963, v. 49, p. 15; Харченко В. Ф. УФЖ, 1962, т. 7, с. 573 и 582; Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W. Preprint 2-48, Universität, Bonn, 1968.
13. Войтовецкий В. К., Корсунский И. Л., Пажин Ю. Ф. ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1612; Nucl. Phys., 1965, т. 69, с. 513. Чернухин Ю. И., Шувалов Р. С. «Ядерная физика», 1966, т. 4, с. 272; Kühn В. e.a. Preprint ZFK-150, Rossendorf, 1968; Москалев Я. Ф. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 1156.
14. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 214; Nucl. Phys., 1964, v. 54, p. 278.
15. Комаров В. В., Попова А. М. «Вест. МГУ, сер. физ.», 1963, № 5, с. 18; 1964, № 6, с. 48; Komarov V. V. Phys. Lett., 1964, v. 13, p. 163; Proc. Phys. Soc. (Lond.), 1965, v. 85, p. 867; Попова А. М. Вопросы физики элементарных частиц. Ереван, Нор-Амберд, 1963; «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 34; Nucl. Phys., 1966, v. 82, p. 209.
16. Комаров В. В. В сб. «Тезисы Всесоюзного совещания по ядерной спектроскопии, Ереван, 1969», Л., «Наука», 1970; Komarov V. V. The Graph

- Summation Method for Multiparticle Nuclear Reactions, Invited talk, Int. Conf. Few Particle Problems in the Nuclear Interactions, Los-Angeles, 1972.
17. Комаров В. В., Попова А. М. «Ядерная физика», 1969, т. 1089, с. 10; «Вест. МГУ, сер. физ.», 1969, № 3, с. 34.
 18. Komarov V. V., Popova A. M. Phys. Lett., B, 1969, v. 28, p. 476.
 19. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
 20. Обуховский И. Т. Диссертация. МГУ, 1969.
 21. Гайворонская Т. В., Попова А. М. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1973, т. 37, с. 1120.
 22. Slobodrian R. J., Conzett H. E., Resmini F. G. Phys. Lett. B, 1968, v. 27, p. 405.
 23. Vlasov N. A. e.a. Int. Conf. on Nucl. Phys. Paris, 1958.
 24. Комаров В. В. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1970, т. 34, с. 1691.
 25. Cahill R. Thesis Univ. New South Wales, Australia, 1970.