

УДК 539.117.5

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

***С. Чулли, К. Помпониу,
И. Сабба-Штефэнеску***
Институт атомной физики, Бухарест

В обзоре рассмотрены математические аспекты стабильности и оптимизации аналитического продолжения адронных амплитуд рассеяния.

In the review article the mathematical aspects are considered on stability and optimization of the analytic continuation of the hadron scattering amplitudes

ВВЕДЕНИЕ

Обычное впечатление, которое получают все, кто глубже вникает в теорию элементарных частиц, это общая нечеткость, множество неубедительных моделей и параметризаций и отсутствие решающих результатов, которые позволили бы однозначно выбрать нужную теорию. Другими словами, отсутствуют явные «эффекты», присущие классической физике или физике твердого тела. Многие физики отмечали с горечью этот факт, который породил у Вейскопфа язвительную фразу, что никогда еще столь много людей не сделали столь мало*.

Но можно придерживаться и более оптимистического взгляда, а именно, что этот застой вызван не неспособностью человеческого разума, а напротив, тем, что наука уже продвинута в такую далекую зону «разреженной причинности», где, возможно, придется создавать совершенно новые понятия и методы исследования. Действительно, все мы согласны с тем, что исследование стало очень косвенным, и это порождает некоторые далеко нетривиальные математические проблемы: в отличие от классических эффек-

* Здесь Вейскопф перефразировал известные слова Паули, который, говоря о золотом периоде (1920—1940 гг.) новой физики, сказал, что никогда еще столь много людей не сделали столь много.

тов, где цепочка причина — следствие коротка и лежит обособленно *, в современной теории часто встречаются задачи, некорректные в смысле Адамара, возникающие при решении обратных задач. Их физическая сущность требует, чтобы малые изменения (в смысле разрешающей способности измерительной аппаратуры) причины вызвали только небольшие изменения следствия — это и есть корректность по Адамару. В косвенном же исследовании, каким оно является в теории элементарных частиц, нередко пытаются получить информацию о причине, рассматривая следствие. При этом даже если прямая задача поставлена корректно, т. е. оператор A , который связывает причины c со следствием e , непрерывен:

$$e = Ac, \quad (1)$$

и даже если оператор обратной задачи A^{-1} существует и является единственным, то отсюда еще далеко не следует непрерывность A^{-1} , т. е. корректность обратной задачи. Очевидно, что добавление дополнительной информации r , например, такой, которая сужает множество, где ищется решение, до компактного **, может сделать и обратную задачу корректной по Адамару ***. Так как это можно сделать многими способами, возникает актуальная проблема выбора таких стабилизирующих условий, которые наиболее непосредственно связаны с экспериментом.

Как это будет ясно из настоящего обзора, до сих пор использовались такие условия, которые были уже в нашем распоряжении (аналитичность, граница Фруассара, положительность и т. п.). Однако, по нашему мнению, в будущем важным направлением физики станет отыскание оптимальных стабилизирующих условий.

Существует следующий, не менее важный, этап в задачах оптимизации: если стабилизирующий параметр выбран и стабильность качественно обеспечена, то предстоит выбрать из всех процедур, дающих идентичный результат в случае точных данных, т. е. тавтологических, ту, которая наименее чувствительна к погрешностям или к неточному знанию исходных данных. Оптимизация с помощью тавтологических процедур может носить:

а) абсолютный характер, когда рассматриваются все возможные тавтологические процедуры. В этом случае результатом будет

* В том смысле, что связь причина — следствие особенно стабильна (см. ниже) в прямом и обратном направлениях.

** См. приложение.

*** Компактные множества функций хорошо изучены в математике, и для них существует целый ряд признаков, которые значительно облегчают их распознавание. Например, в пространстве непрерывных на сегменте функций известна теорема Арцелла (см., например, работу [1]), утверждающая, что замкнутое множество непрерывных на $[0, 2\pi]$ -функций является компактным, если, и только если эти функции равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

центр (в смысле нормы для измерения погрешности) множества «допустимых результатов», совместимых с выбранным стабилизирующим условием;

б) относительный характер, если оптимизация относится к определенному классу тавтологических процедур.

Чтобы проиллюстрировать последнюю альтернативу, приведем в дальнейшем примеры из дисперсионных соотношений и уравнений N/D . В этом обзоре будут рассмотрены преимущественно некорректные задачи, связанные с аналитическим продолжением в физике элементарных частиц.

В физике элементарных частиц существуют две области, где проявляются нестабильные задачи: 1) определение потенциала уравнения Шредингера по экспериментальным фазам рассеяния и 2) нахождение амплитуды рассеяния по данным в ограниченной области энергии или переданного импульса. Первая область рассматривалась в работах, ставших уже классическими, так что в этом обзоре будем рассматривать только вторую область. Интересно отметить, что изучение неустойчивости аналитических продолжений важно не только для феноменологических целей (например, при вычислении значений амплитуды при высоких энергиях, исходя из данных при низких энергиях), но также для каждой динамической схемы, использующей в той или иной степени понятие аналитичности амплитуды рассеяния. Такой пример будет обсуждаться ниже.

Возвращаясь к уравнению (1), отметим, что в нашем случае оператор A — оператор, проектирующий значения аналитической функции на кривую из ее области аналитичности. Оператор A будет, конечно, непрерывным, так как он линеен и ограничен. Так как известно, что аналитическая функция определяется однозначно ее значениями на произвольно малой кривой из ее области аналитичности, существует единственный оператор A^{-1} восстановления функции по ее значениям на данной кривой. Тем не менее легко показать, что A^{-1} не является непрерывным, так как он не ограничен.

В этой работе будем рассматривать три типа стабилизирующих условий: 1) гёлдеровскую непрерывность, 2) ограниченность и 3) положительность в зависимости от конкретного вида задач.

1. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ АМПЛИТУДЫ НА РАЗРЕЗ

Вычисление значений амплитуды на разрезе по ее значениям или на другом разрезе, или внутри ее области аналитичности имеет важное практическое значение для физики элементарных частиц. Экстраполяция с разреза на разрез важна, например, когда известны данные (и «коридор ошибок») при невысоких энергиях и ищутся оценки амплитуды при более высоких энергиях, или

для кросс-процесса, или, наконец, на нефизическом разрезе. Более простая задача экстраполяции — с внутренних точек на границу — служит нахождению оценок для спектральной функции, используя измерения в физической области косинуса угла рассеяния, которая, как известно, лежит целиком внутри области аналитичности амплитуды. Подобное приложение задачи экстраполяции с внутренних точек на границу встречается и в случае определения значений форм-фактора в его времениподобной области при известных его значениях в пространственно подобной области.

Конечно, математически экстраполяция на разрез труднее, чем экстраполяция с разреза внутрь области аналитичности, и может было бы лучше начать с последней задачи, но результатов, полученных для первой задачи, меньше и поэтому их изложение проще. Впрочем, именно эта задача была впервые изучена.

Во всех задачах экстраполяции на разрез устойчивость обеспечена условиями гладкости типа гёдлеровской непрерывности:

$$|f^{(p)}(z) - f^{(p)}(z')| \leq c |z - z'|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2)$$

Здесь p — наибольший порядок производной, для которой условие (2) имеет еще место *.

Множество ограниченных функций, удовлетворяющих (2), очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Арцелла и, следовательно, компактно, и, таким образом, стабильность обеспечена (см. приложение). Тем не менее, так как нас интересует фактическое вычисление погрешности, покажем в явном виде стабильность метода в каждом конкретном случае.

Здесь в отличие от задач экстраполяции с разреза внутрь области аналитичности, рассмотренных ниже, оптимизация погрешностей будет носить лишь асимптотический характер.

Полиномиальная экстраполяция с внутренних точек на разрез

Полиномы максимальной сходимости и оптимальное конформное отображение [3, 4]. Хорошо известно, что скорость сходимости степенного ряда существенно зависит от положения точки, вокруг которой производится разложение, и точки, в которой вычисляется сумма ряда по отношению к особенностям функции, представляемой в виде ряда. Но в большинстве проблем разложение идет не вокруг точки, а вокруг целой кривой Γ_1 , где задана амплитуда, так что степенной ряд теряет свое значение, и необходимо обра-

* Такие условия можно найти в теории пороговых явлений. Чтобы их улучшить, можно умножать амплитуду на известные функции, сглаживающие ее поведение у первых порогов, которое, как известно, хуже.

таться к теории полиномов максимальной сходимости (ПМС). Одна из важных теорем этой теории, доказанная во многих учебниках (см., например, [5]), следующая:

Теорема.

Пусть Γ_1 — простая, односвязная, открытая дуга и $\zeta(z)$ — конформное отображение, переводящее Γ_1 на единичный круг и оставляющее на месте бесконечно удаленную точку (рис. 1). Если R — расстояние от начала координат $\zeta = 0$ до первой особенности амплитуды $f(z)$ в ζ -плоскости, то существует класс полиномов

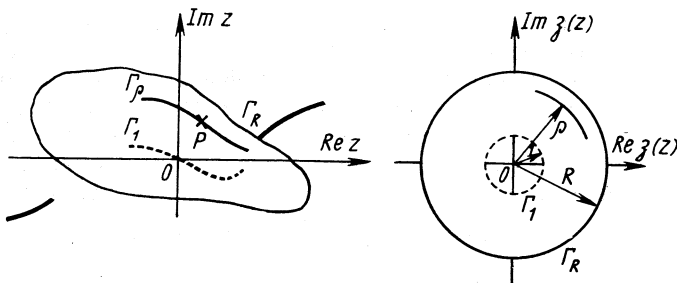


Рис. 1. Полиномы максимальной сходимости на Γ_1 : вспомогательное преобразование $\zeta(z)$.

максимальной сходимости * $P_n(z)$, такой, что для каждого $R' < R$ и для каждого z , такого, что $|\zeta(z)| \leq R' < R$, имеет место

$$|f(z) - P_n(z)| \leq M (|\zeta(z)|/R')^n, \quad (3)$$

но для $R' > R$ такие полиномы не существуют.

В частности, если p -я производная функции $f(z)$ удовлетворяет на разрезе гёлдеровскому условию типа (2), то можно показать, что существует класс полиномов, для которых, при всех z ($1 \leq |\zeta(z)| \leq R$) (даже на разрезе) имеет место соотношение

$$|f(z) - P_{j,n}(z)| \leq \eta_n (|\zeta(z)|/R)^n, \quad (4)$$

где $\eta_n = \text{const } \ln n/n^{p+\alpha}$.

Как обычно, положения сингулярностей амплитуды предполагаются известными из кинематики реакции. Тогда выгодно оставить полиномы от переменного z и выбрать то конформное отображение $W(z)$, при котором ПМС имеют максимальную скорость сходимости. Чтобы найти это конформное отображение, докажем следующую лемму.

* Надо обратить внимание на тот факт, что термин «полином максимальной сходимости» связан с асимптотическим поведением остатка, заданного соотношением (3). Этот класс довольно широк и в него входят [5] кроме полиномов чебышевской аппроксимации функции $f(z)$, $T_{fn}(z)$, которые по определению дают самую хорошую аппроксимацию, также полиномы Чезара $S_{fn}(z)$, представляющие лучшую аппроксимацию $f(z)$ по норме L^2 .

Лемма.

Пусть $W_a(z)$ и $W_b(z)$ конформно отображают соответственно области D_a и D_b ($D_a \subset D_b$) (рис. 2 и 3) на кольца радиусов 1, R_a и 1, R_b соответственно, так, чтобы физическая область Γ_1 , которая, впрочем, не является разрезом, каждый раз попадала на единичную окружность. Если ближайшая особенность амплитуды лежит на обеих границах Γ_a и Γ_b областей D_a и D_b соответственно, тогда разности в точке P между амплитудой $f(z)$ и n -м полиномом максимальной сходимости P_n , построенным из положительных и отрицательных * степеней W_a и W_b , будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} \text{const } \eta_n (|W_a(z_p)|/R_a)^n; \\ \text{const } \eta_n (|W_b(z_p)|/R_b)^n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Лемма утверждает, что ПМС переменного $W_b(z)$ сходятся к амплитуде быстрее, чем ПМС переменного $W_a(z)$, а именно, что

$$|W_b(z_p)|/R_b \leq |W_a(z_p)|/R_a. \quad (6)$$

Для доказательства воспользуемся принципом Гретча (см. приложение В в работе [4]), утверждающим, что если $D_a \subset D_b$, то $R_a \leq R_b$. (Это кажется почти очевидным, но доказательство требует довольно тонких рассуждений.) Введем теперь в z -плоскость следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} O_a(z) &\equiv \ln \{ |W_a(z)|/R_a \}; \\ O_b(z) &\equiv \ln \{ |W_b(z)|/R_b \}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Так как (см. рис. 3) $W_{a,b}(z)$ не обращается в нуль в области D_a , то $\ln W_{a,b}(z)$ — голоморфные функции в D_a , и, следовательно,

* Так как физическая область Γ_1 , которая была переведена на единичную окружность, не является разрезом и область аналитичности стала двусвязной, придется использовать ряды Лорана вместо рядов Тейлора. Полиномом P_n будем называть полиномиальную форму n -й степени в переменных $W_{a,b}$ и $1/W_{a,b}$. В плоскости переменного $(W_{a,b} + 1/W_{a,b})/2\Gamma_1$ это отрезок $[-1, 1]$. Надо заметить, что вспомогательное преобразование $\mathfrak{z}(z)$, использованное для получения (4), обладает по определению свойством

$$\mathfrak{z}((W_{a,b} + 1/W_{a,b})/2) = W_{a,b}.$$

Из этого с очевидностью следует, что полиномы максимальной сходимости переменного $(W_{a,b} + 1/W_{a,b})/2$ (на отрезке $[-1, 1]$) сходятся с остатком, даваемым (5).

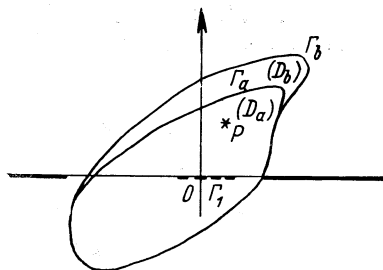


Рис. 2. Области D_a и D_b в z -плоскости.

$O_a(z)$ и $O_b(z)$ в (7) — гармонические в D_a . Покажем, что

$$O_b(z) \leq O_a(z), \quad z \in D_a. \quad (8)$$

что влечет автоматически (6).

Пусть $D'_a (D'_b)$ — область, полученная из $D_a (D_b)$, если рассматривать Γ_1 как разрез. Покажем, что (8) имеет место во всей области D'_a . Так как W_a и W_b отображают Γ_1 на единичную окружность, на части границы D'_a , Γ_1 имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} O_a(z) &= -\ln R_a, \\ O_b(z) &= -\ln R_b, \end{aligned} \right\} \quad z \in \Gamma_1 \quad (9)$$

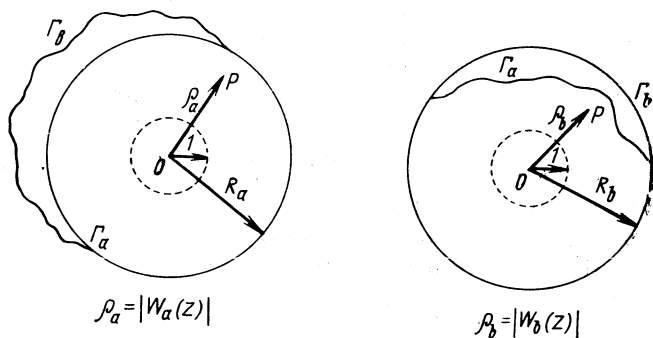


Рис. 3. $W_a(z)$ -плоскость и $W_b(z)$ -плоскость.

так что по принципу Грётча ($R_a \leq R_b$)

$$O_b(z) \leq O_a(z), \quad z \in \Gamma_1. \quad (10)$$

На оставшейся части границы Γ_a по определению конформного отображения $W_a(z)$ имеем

$$|W_a(z)|_{z \in \Gamma_a} = R_a,$$

так что

$$O_a(z)|_{z \in \Gamma_a} = 0. \quad (11)$$

Кривая Γ_a содержится в замыкании \bar{D}'_b области D'_b . На границе D'_b $O_b(z)$ равно или нулю (на Γ_b по определению конформного отображения $W_a(z)$), или отрицательной величине — на Γ_1 [см. (9)], так что по основному свойству гармонических функций

$$O_b(z)|_{z \in \Gamma_a \subset \bar{D}'_b} \leq 0 \quad (12)$$

выражения (11) и (12) дают

$$O_b(z) \leq O_a(z), \quad z \in \Gamma_a \quad (13)$$

и (10) вместе с (13) доказывает (8) на всей границе $\Gamma_1 + \Gamma_a$ области D'_a и по свойству гармонических функций это имеет место всюду в D'_a . Тем самым доказали (6).

Теперь ясно, что оптимальное конформное отображение $W(z)$ — это то, которое переводит всю область аналитичности амплитуды на каноническую область (в нашем случае на кольцо), а лучшие полиномы аппроксимации — это полиномы максимальной сходимости переменного $W(z)$. Следовательно, полезно включить в это каноническое кольцо части также со второго риманова листа амплитуды [2]. Но когда ничего неизвестно о положениях особенностей на втором листе, мы вынуждены ограничиваться отображением физического листа.

Явный вид оптимального конформного отображения. В качестве примера приведем здесь вид оптимального отображения,

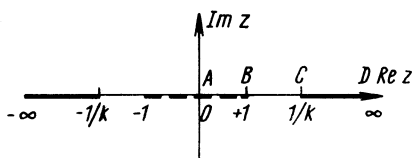


Рис. 4. z -Плоскость.

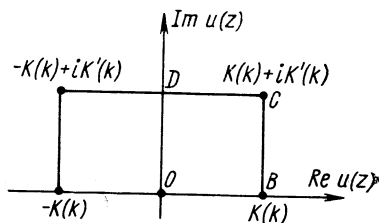


Рис. 5. $u(z)$ -Плоскость; $u(z) = \int_0^z dt / \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$.

когда разрезы лежат между $-\infty$, $-1/k$ и $1/k$, ∞ ($k < 1$), а физическая область Γ_1 , где находятся данные, лежит на отрезке $[-1, 1]$. Введем вспомогательную функцию

$$u(z) \equiv \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{14}$$

где корень взят с положительным знаком на верхней части Γ_1 . Если z проходит через точки A, B, C, D (рис. 4) при движении вдоль верхнего берега действительной оси в z -плоскости, то $u(z)$ описывает контур, изображенный на рис. 5, а именно, когда $0 \leq z \leq 1$, $u(z)$ растет, так как подынтегральное выражение положительно.

Когда $1 \leq z \leq 1/k$, $u(z)$ можно представить как

$$u(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Здесь первое слагаемое — положительное число, равное $K(k)$ полному эллиптическому интегралу, а второе слагаемое — чисто

мнимое число, так как подынтегральное выражение — чисто мнимое в указанной области изменения t .

Когда $1/k \leq z$, то $u(z)$ представляется суммой из трех слагаемых, т. е.

$$u(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \\ + \int_{1/k}^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

где последнее слагаемое — отрицательное число, так как в этой области изменения t корень отрицателен.

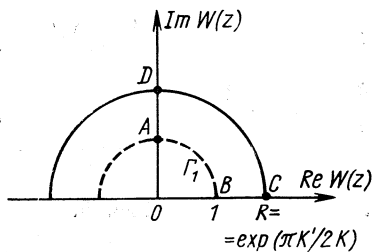


Рис. 6. $W(z)$ -плоскость; $W(z) = i \exp[-i\pi u(z)/2k]$.

Таким образом, при помощи преобразования (14) верхняя полуплоскость отображается на прямоугольник (см. рис. 5). Далее, если определить преобразование

$$W(z) \equiv i \exp(-i\pi u(z)/2K), \quad (15)$$

прямоугольник на рис. 5 преобразуется в полукольцо (рис. 6), где

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv \exp(\pi K'/2K); \\ K &\equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \\ K' &\equiv \frac{1}{i} \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Прежде чем закончить этот подраздел, заметим, что, если $f^*(z)$ — действительная функция *, т. е.

$$f^*(z) = f(z^*), \quad (17)$$

* Звездочка обозначает комплексно сопряженную величину.

тогда имеют место соотношения *:

$$f(W) = f^*(W) \tag{18}$$

и

$$f(W) = f(1/W), \tag{19}$$

т.е. $f(W)$ разлагается в следующий ряд:

$$f(W) = c_0 + c_1(W + 1/W) + c_2(W^2 + 1/W^2) + \dots, \tag{20}$$

где c_0, c_1, c_2, \dots — действительные числа. Соотношение (18) следует из (17), если использовать принцип отражения Шварца для отрезка $[1, 1/k]$ действительной оси (см. рис. 4). Так как отрезок $[-1, 1]$ при W -преобразованиях переходит в единичную окружность, принцип Шварца для этой окружности дает $f^*(W) = f(1/W^*)$, что с учетом (18) приводит к (19).

Отметим, что в работе Кутковского [3] используется переменное $z = (W + 1/W)/2$.

Устойчивая экстраполяция [4]. После этих вступительных определений приступим к важной проблеме: покажем, что полином $T_{L,n}(z)$ чебышевской аппроксимации функции экспериментальных данных (в дальнейшем называемой гистограммой — $h(z)$) на отрезке Γ_1 дает стабильное представление амплитуды даже на разрезах Γ (см. рис. 4). Предположим, что на Γ_1 (физическая область) $h(z)$ аппроксимирует неизвестную амплитуду $f(z)$ согласно соотношению

$$|f(z) - h(z)| \leq \varepsilon/2, \quad z \in \Gamma_1, \tag{21}$$

где ε — известная погрешность экспериментальных данных **.

Надо подчеркнуть, что проблема стабильности полностью отлична от проблемы сходимости [4]:

полиномы $T_{h,n}(W)$ определяются требованием минимизации отклонения:

$$\sup_{\substack{W \in \Gamma_1 \\ (|W|=1)}} |h(W) - T_{h,n}(W)|, \tag{22}$$

и они вовсе не обязаны совпадать с полиномами $T_{f,n}(W)$ чебышевской аппроксимации функции $f(W)$. Если бы функция $f(W)$ была известна, они могли бы быть вычислены обычным способом, посредством минимизации отклонения

$$\sup_{\substack{W \in \Gamma_1 \\ (|W|=1)}} |f(W) - T_{f,n}(W)|. \tag{23}$$

* Для краткости запишем $f(W)$ вместо $f(z(W))$. Здесь $W(z)$ — оптимальное конформное отображение, определенное в (15).

** Для простоты рассмотрим здесь ε как постоянную величину. Используя внешние функции типа Карлемана (см. разд. 2), можно включить также случай переменной ширины коридора ошибок.

Хотя на практике $T_{f, n}(W)$, как, впрочем, и сама амплитуда $f(W)$, неизвестны, именно их существование является решающим для доказательства стабильности экстраполяции.

Так как [см. примечание к формуле (3)] $T_{f, n}$ являются в то же время полиномами максимальной сходимости, то для них выполняются соотношения:

$$|f(W) - T_{f, n}(W)| \Big|_{W \in \Gamma_1} \leq \frac{\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n} \quad (24)$$

и

$$|f(W) - T_{f, n}(W)| \Big|_{W \in \Gamma} \leq \frac{\eta_n}{3}; \quad (25)$$

$$\eta_n \equiv \text{const} \ln n/n^{p+\alpha}. \quad (26)$$

Эти оценки обусловлены тем, что оптимальное конформное отображение (15) переводит физическую область Γ_1 на единичную окружность, а границу области аналитичности — на окружность радиуса $R > 1$ [см. (16)].

Соотношения (20) и (24) вместе с неравенством треугольника дают

$$|h(W) - T_{f, n}(W)| \Big|_{W \in \Gamma_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (27)$$

Так как по определению $T_{h, n}(W)$ — полиномы наилучшего приближения на Γ_1 [см. (22)], то для них тем более

$$|h(W) - T_{h, n}(W)| \Big|_{W \in \Gamma_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta_n}{2} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (28)$$

Чтобы получить это неравенство, необходимо существование полиномов чебышевской аппроксимации $T_{f, n}(W)$ для амплитуды $f(W)$; дальнейшие выкладки непосредственно следуют из принципа максимума модуля в теории аналитических функций.

Из соотношений (27) и (28) с учетом того, что по определению $|W| = 1$ на Γ_1 , следует неравенство

$$\left| \frac{T_{f, n}(W) - T_{h, n}(W)}{W^n} \right| \Big|_{\Gamma_1} < \varepsilon + \frac{2\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (29)$$

Поскольку $T_{f, n}$ и $T_{h, n}$ — полиномиальные формы степени n переменных W и $1/W$, то величина под знаком модуля является аналитической функцией во внешности единичного круга, так что неравенство (29) остается в силе также для $|W| = R > 1$ на окружности Γ . Таким образом, можно сразу написать

$$|T_{f, n}(W) - T_{h, n}(W)| \Big|_{\Gamma} < \varepsilon R^n + \frac{2\eta_n}{3}. \quad (30)$$

Исключая неизвестные полиномы чебышевской аппроксимации $f(W)$, $T_{f, n}(W)$ из соотношений (25) и (30), приходим к нера-

венству:

$$|f(W) - T_{h,n}(W)|_{\Gamma} < \varepsilon R^n + \eta_n \equiv E_n, \quad (31)$$

где η_n дается (26).

Рассмотрим подробнее зависимость величины E_n от n . Если (как обычно предполагается) ε невелико, то для малых значений n вклад члена εR^n в сумму E_n мал. Таким образом, E_n убывает сначала с ростом n до тех пор, пока n не достигнет какого-то критического значения n_c , а потом E_n резко (экспоненциально) возрастает. Критическое значение n_c можно приблизительно определить как

$$n_c \approx \ln \left(\frac{A(p+\alpha)}{\varepsilon \ln R} \right) / \ln(1,44^{p+\alpha} R), \quad (32)$$

в то время как соответствующая минимальная погрешность E_{nc} составляет

$$|f(W) - T_{h,n}(W)|_{\Gamma} \leq A \frac{\ln n_c}{n_c^{p+\alpha}} \left[1 + \frac{p+\alpha}{n_c \ln R} \right] \equiv E_{nc}. \quad (33)$$

Как видно из (32), n_c стремится к бесконечности, когда погрешность в начальных данных падает до нуля, и поэтому правая часть неравенства (33) стремится к нулю вместе с погрешностью, что доказывает стабильность экстраполяции.

Следует обратить особое внимание на то, что при использовании этого метода в практических вычислениях очень важно не превышать критическое значение n_c , так как в противном случае «шумы» начинают очень сильно влиять на точность результата за счет множителя R^n в (31). Это явление встречается во всех задачах стабильной экстраполяции.

Проблема стабильности по норме L^p [6]. В соотношении (22) отклонение гистограммы $h(W)$ от неизвестной аналитической амплитуды $f(W)$ понималось в смысле нормы L^∞ [предполагалось, что вероятность найти амплитуду вне заданного коридора ошибок (22) равна нулю]. Может быть, для физических проблем более целесообразно использовать в качестве коридора ошибок какое-нибудь интегральное соотношение типа нормы L^2 (или L^p), легче поддающееся вероятностной интерпретации (см. ниже):

$$\|h(W) - f(W)\|_{L^p} \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \oint_{|W|=1} |dW| |h(W) - f(W)|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (34)$$

Решим задачу стабильных экстраполяций для полиномов $S_{h,n}(W)$, наименее отклоняющихся от $h(W)$ по норме L^p ; $S_{h,n}(W)$ следовательно, определяются следующим образом:

$$\|h(W) - S_{h,n}(W)\|_{L^p} = \min. \quad (35)$$

Центральное место в доказательстве занимает опять существование полиномов $T_{f,n}(W)$ чебышевской аппроксимации амплиту-

ды, которые будут удовлетворять соотношению

$$\|f(W) - T_{f,n}(W)\|_{L^p} \leq \frac{\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (36)$$

полученному в результате интегрирования соотношения (24).

Неравенства (34) и (36) позволяют исключить неизвестную функцию $f(W)$ и написать

$$\|h(W) - T_{f,n}(W)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (37)$$

Так как по определению [см. (35)] $S_{h,n}(W)$ является самым лучшим полиномиальным приближением $h(W)$ по норме L^p , то для них и подавно будет выполняться

$$\|h(W) - S_{h,n}(W)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (38)$$

Исключая $h(W)$ из последних двух неравенств, получаем

$$\|S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)\|_{L^p} < \varepsilon + \frac{2\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}. \quad (39)$$

До сих пор все выкладки для случая нормы L^p были полностью эквивалентны выкладкам для случая L^∞ , рассмотренного выше. Но соотношение (39) в отличие от (29) не позволяет применить принцип максимума модуля, так что нам придется рассуждать следующим образом. Введем вспомогательную функцию

$$F_n(W) \equiv \frac{S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)}{W^n} \prod_i^{\leq 2n} \frac{1 - W \cdot W_i^*}{W - W_i}, \quad (40)$$

где W_i — положения нулей разности $S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)$, расположенных вне единичного круга ($|W_i| > 1$). Нули выражения $S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)$ исключили при помощи произведения типа Бляшке (с модулем, равным 1 на единичном круге) для того, чтобы $(F_n(W))^p$ продолжала бы оставаться голоморфной вне единичного круга и в случае нецелых значений p . Таким образом, по определению $(F_n(W))^p$ голоморфна вне единичного круга, и можно написать для нее представление Коши:

$$\frac{F_n^p(W)}{W} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|W'|=1} dW' \frac{F_n^p(W')}{W'(W'-W)}, \quad |W| > 1. \quad (41)$$

Тогда

$$\left| \frac{F_n^p(W)}{W} \right|_{|W|=R>1} \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|W'|=1} |dW'| \frac{|F_n^p(W')|}{|W'-W|}.$$

По определению $F_n(W)$ [см. (40)] имеем

$$\|F_n(W')\|_{|W'|=1} = \|S_{h,n}(W') - T_{f,n}(W')\|_{|W'|=1},$$

так как модуль произведения Бляшке равен единице на единичной окружности ($|W'| = 1$). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_n^p(W)}{W} \right|_{\|W\|=R>1} &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|W'|=1} |dW'| \frac{|S_{h,n}(W') - T_{f,n}(W')|^p}{|W' - W|} \leq \\ &\leq \frac{1}{R-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint_{|W'|=1} |dW'| \cdot |S_{h,n}(W') - T_{f,n}(W')|^p \equiv \\ &\equiv \frac{1}{R-1} (\|S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)\|_{L^p})^p. \end{aligned}$$

Следовательно, для модуля вспомогательной функции $F_n(W)$ получаем оценку:

$$\begin{aligned} |F_n(W)|_{\|W\|=R>1} &\leq \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/p} \|S_{h,n} - T_{f,n}\|_{L^p} < \\ &< \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/p} \left(\varepsilon + \frac{2\eta_n}{3} \cdot \frac{1}{R^n}\right), \end{aligned} \tag{42}$$

где последнее неравенство получено при помощи соотношения (39). Возвращаясь к определению $F_n(W)$, имеем

$$\begin{aligned} &(|W_i| > 1!): \\ |S_{h,n}(W) - T_{f,n}(W)|_{\|W\|=R>1} &\equiv \\ \equiv R^n |F_n(W)|_{\|W\|=R} \left| \prod_{i=1}^{\leq 2n} \frac{W - W_i}{1 - W_i^* W} \right| &\leq \\ \leq R^n |F_n(W)|_{\|W\|=R} < \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/p} \left(\varepsilon R^n + \frac{2}{3} \eta_n\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Теперь очевидно сходство между последним неравенством и неравенством (30), найденным на основе принципа максимума модуля.

Опираясь на соотношение (25)

$$|f(W) - T_{f,n}(W)|_{\|W\|=R} \leq \frac{\eta_n}{3} < \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/p} \frac{\eta_n}{3}$$

и исключая $T_{f,n}(W)$ из (43), получаем

$$|f(W) - S_{h,n}(W)|_{\|W\|=R} \leq \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/p} (\varepsilon R^n + \eta_n), \tag{44}$$

где η_n определено в (26), аналог соотношения (31), найденного при аппроксимации полиномами Чебышева. Таким образом, доказали стабильность экстраполяции на разрезы Γ с помощью полиномов наилучшего приближения по норме L^p , в частности по норме L^2 функции экспериментальных данных $h(z)$ известной в физической области.

Экстраполяция с разреза на разрез

Как было показано выше, экстраполяция амплитуды с разреза на разрез имеет большое практическое значение для физики элементарных частиц. В этом разделе приведем метод стабильной экстраполяции с разреза на разрез с помощью взвешенных дисперсионных соотношений (в.д.с.). Стабильность обеспечивается, конечно, условиями гладкости типа Гельдера и достигается в результате осциллирующего характера функции Карлемана. Чтобы

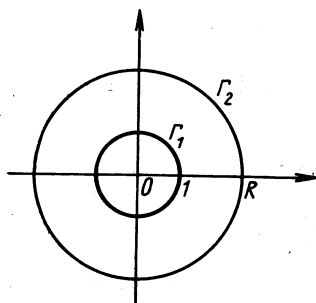


Рис. 7. Двусвязная разрезанная z -плоскость и соответствующее каноническое J -кольцо. Если $\lambda = n \ln R$, $\exp \{ \lambda [\omega(J) + i\tilde{\omega}(J)] \}$ однолистная и равна J^n .

разъяснить суть метода [7], начнем с рассмотрения примера, редко встречающегося на практике, но поддающегося непосредственно трактовке этим методом.

Двусвязная область. Рассмотрим случай, когда область аналитичности, ограниченная разрезами Γ_1 и Γ_2 , двусвязна и экспериментальные данные $h(z)$ известны повсюду на Γ_1 . Переведем опять область аналитичности преобразованием $W(z)$ [см. (2)] на кольцо радиусов $1, R$ (рис. 7). Так как теперь в отличие от случая, рассмотренного выше, Γ_1 является разрезом, уже нельзя использовать полиномы по степеням W и $1/W$, потому что их кольцо сходимости бесконечно тонкое. Можем написать представление Коши для амплитуды, умноженной на некоторую весовую функцию, которая бы выделяла значения интеграла на Γ_1 [там, где определена функция экспериментальных данных $h(W)$]. Заметим, что в формуле представления Коши для некоторой функции F , аналитичной в кольце:

$$F(W) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} dW' \frac{F(W')}{W' - W} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} dW' \frac{F(W')}{W' - W} \equiv F_-(W) + F_+(W) \quad (45)$$

первый интеграл представляет вклад отрицательных степеней в разложение Лорана для $F(W)$:

$$F_-(W) \equiv \sum_{j=-1}^{-\infty} F_j W^j. \quad (46)$$

а второй интеграл

$$F_+(W) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} F_j W^j. \quad (47)$$

— вклад положительных степеней $F(W)$. Если теперь выбрать в качестве $F(W)$ именно амплитуду, умноженную на $1/W^n$:

$$F(W) \equiv f(W)/W^n,$$

то получим

$$\begin{aligned} \frac{f(W)}{W^n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^-} dW' \frac{f(W')}{W'^n (W' - W)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^+} dW' \frac{f(W')}{W'^n (W' - W)} \equiv F_-(W) + F_+(W); \end{aligned} \quad (48)$$

$$F_-(W) \equiv \sum_{j=-1}^{-\infty} f_{j+n} W^j; \quad (49)$$

$$F_+(W) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_{j+n} W^j \equiv \frac{1}{W^n} \sum_{j=n}^{\infty} f_j W^j. \quad (50)$$

Если $f(W)$ удовлетворяет условию Гельдера типа (2), то множитель $\sum_{j=n}^{\infty} f_j W^j$ в выражении (50), представляющий остаток $R_n(W)$ ряда Лорана для части положительных степеней $f(W)$, может быть сделан сколь угодно малым, а именно [8]:

$$|R_n(W)| \equiv \left| \sum_{j=n}^{\infty} f_j W^j \right| \leq B \frac{|W|^n}{R^n} \frac{\ln n}{n^{p+\alpha}} \equiv \frac{|W|^n}{R^n} \eta_n. \quad (51)$$

Сумму (49) можно приближенно вычислить с помощью гистограммы $\check{h}(W)$, так как она содержит только интегралы по Γ_1 , т. е. если обозначить

$$\check{h}(W) \equiv \frac{W^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^-} dW' \frac{h(W')}{W'^n (W' - W)} \quad (52)$$

— экстраполяция экспериментальных данных, то для оценки на Γ_2 абсолютного значения разности $\check{h}(W) - f(W)$ получим:

$$|\check{h}(W) - f(W)|_{\Gamma_2} \leq \varepsilon R^n K(W) + \eta_n |W| = R, \quad (53)$$

где $K(W)$ — постоянная и

$$K(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|dW'|}{|W' - W|}. \quad (54)$$

Легко заметить, что правая часть (53) имеет тот же вид, что и E_n в (31), и рассуждения о сходимости почти дословно повторяют изложенное раньше: существует оптимальное значение n, n_c [см. (32)] (напомним снова, что $\check{h}(z)$ зависит существенным образом от n), такое, что правая часть (53) минимальна. Причем когда погрешность $\varepsilon \rightarrow 0$, то наименьшая погрешность E_{n_c} [см. (33)] также стремится к нулю, что и доказывает стабильность.

Односвязная область. Весовая функция $1/W^n$, которая сыграла важную роль в нарушении симметрии ряда Лорана для амплитуды [см. (48)—(50)], — частный случай того, что называется весовой функцией Карлемана [7, 9], т. е. внешней функцией (аналитической и без нулей внутри области аналитичности амплитуды), которая имеет модуль, равный единице на Γ_1 , где известна функция экспериментальных данных $h(W)$, и равный $1/R^n$ на неизвестной части разреза Γ_2 . Во внутренних точках функция Карлемана $c(W)$ ослабляет влияние неизвестной части границы Γ_2 , а в результате малого модуля на Γ_2 ослабляет нежелательное влияние неизвестной части посредством своих быстрых осцилляций. Это свойство

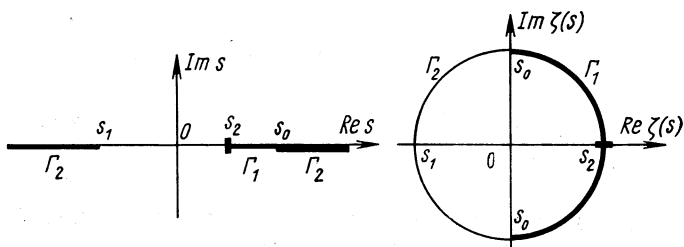


Рис. 8. Односвязная s -плоскость и соответствующая каноническая область. (Амплитуда предполагается известной на Γ_1 между s_2 и s_0).

функции Карлемана подсказывает путь решения задачи экстраполяции на разрез в физически интересном случае, когда имеются экспериментальные данные на части разреза Γ_1 и ищется оценка для амплитуды на остальной части разреза Γ_2 (при больших энергиях или для кросс-процесса разрез предполагается простирающимся до бесконечности, таким образом, область аналитичности фактически односвязная). Построим внешнюю функцию $c_0(s)$, модуль которой равен единице на Γ_1 и $e^{-\lambda}$ на Γ_2 ($\lambda > 0$):

если обозначить $\omega(s)$ гармоническую меру области (D) и $\tilde{\omega}(s)$ ей аналитически сопряженную [$\omega(s)$ — гармоническая в (D) , равная нулю на Γ_1 и единице на Γ_2], то функция Карлемана будет иметь вид:

$$c_0(s) = \exp[-\lambda(\omega(s) + i\tilde{\omega}(s))]; \quad (55)$$

$$|c_0(s)|_{\Gamma_1} = \exp[-\lambda\omega(s)]_{\Gamma_1} = 1; \quad (56)$$

$$|c_0(s)|_{\Gamma_2} = \exp[-\lambda\omega(s)]_{\Gamma_2} = \exp(-\lambda). \quad (57)$$

Чтобы в явном виде написать выражение для $c_0(s)$, удобно отобразить s -плоскость на каноническую область (единичный круг в нашем случае, так как (D) односвязна) с помощью преобразования (рис. 8):

$$\zeta(s) \equiv (1 - \sqrt{1 - u^2(z)})/u(z); \quad (58)$$

$$u(z) \equiv [(z_1 + z_2 - 2z_0)z + z_0(z_1 + z_2) - 2z_1z_2]/[(z - z_0)(z_2 - z_1)], \quad (59)$$

таким образом, чтобы область аналитичности попала внутрь единичного круга, а разрез Γ_1 — на правую половину окружности. Тогда имеем

$$\omega(s) + i\tilde{\omega}(s) = 1/2 + i/\pi \ln \frac{1+i\zeta(s)}{1-i\zeta(s)}, \quad (60)$$

т. е.

$$c_0(s) = \exp \left[-\lambda/2 - \frac{\lambda i}{\pi} \ln \frac{1+i\zeta(s)}{1-i\zeta(s)} \right]. \quad (61)$$

Так как функция $c_0(s)$ аналитична внутри круга, то можно написать интегральную формулу Коши для произведения $f(\zeta)c_0(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c_0(\zeta)} \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} d\zeta' \frac{f(\zeta') c_0(\zeta')}{\zeta' - \zeta}. \quad (62)$$

Если с помощью весовой функции Карлемана $c_0(\zeta)$ ввести снова $\check{h}(\zeta)$ экстраполяцию данных $h(\zeta)$:

$$\check{h}(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c_0(\zeta)} \int_{\Gamma_1} d\zeta' f(\zeta') \frac{c_0(\zeta')}{\zeta' - \zeta}, \quad (63)$$

то модуль разности $f(\zeta) - \check{h}(\zeta)$, вычисленной на Γ_2 , ограничен сверху величиной

$$|f(\zeta) - \check{h}(\zeta)| \leq e^{\lambda \varepsilon K(\zeta)} + e^{\lambda} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} d\zeta' \frac{f(\zeta') c_0(\zeta')}{\zeta' - \zeta} \right|, \quad (64)$$

где $K(\zeta)$ определено в (54). Можно показать [7], что для второго члена выполняется соотношение

$$e^{\lambda} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} d\zeta' \frac{f(\zeta') c_0(\zeta')}{\zeta' - \zeta} \right| \leq \eta_{\lambda} \equiv \text{const} \frac{\ln \lambda}{\lambda^{p+\alpha}}. \quad (65)$$

Таким образом, правая часть (64) имеет тот же вид, что и E_n в (31), и в силу тех же рассуждений имеет место стабильность экстраполяции.

В работе [7] доказано, что метод функции Карлемана применим и к более общим случаям (более сложные разрезы, начальные данные известны на нескольких частях Γ_1 , Γ_2 и т. д.), если использовать весовую функцию Карлемана, написанную в общем виде при помощи специфических гармонических мер [$\omega(s)$ определяется, как и выше: равна нулю на тех частях границы, где имеются экспериментальные данные, и равна единице на остальной части границы]. На практике оптимальное значение λ , как и оптимальное значение n в случае полиномиальной экстраполяции, определяется вычислением со все возрастающими значениями $\lambda(n)$. Эта процедура прекращается немного раньше, чем результаты начнут

сильно отличаться друг от друга вследствие усиления шумов ε . Этот момент можно довольно легко зафиксировать, так как $E_n \equiv \varepsilon R^n + \eta_n$ начинает очень резко возрастать, как только $n > n_c$.

2. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ С РАЗРЕЗА ВНУТРЬ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Будем здесь обсуждать проблему нахождения значений аналитической функции внутри ее области аналитичности, когда известны (приближенно) ее значения на какой-нибудь части Γ_1 границы $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. В отличие от задач, рассмотренных выше, оптимизация этой задачи доведена до конца: сначала это сделано для случая дисперсионных соотношений, затем найден абсолютный оптимум экстраполяции — значения в каждой внутренней точке z для всех функций, совместимых с заданными коридором ошибок и стабилизирующим условием

$$|f(z) - h(z)|_{\Gamma_1} \leq \varepsilon(z); \quad (66)$$

$$|f(z)|_{\Gamma_2} \leq M(z). \quad (67)$$

В случае экстраполяции внутрь для регуляризации задачи достаточно искать решение в классе функций, ограниченных данной функцией, $M(z)$ на остальных частях разреза. Здесь в качестве $M(z)$ можно выбрать, к примеру, любое асимптотическое ограничение, известное в литературе (и выведенное из общих условий аналитичности и унитарности). С математической точки зрения ограниченность данной функции полностью эквивалентна ограниченности постоянной величиной, так как в первом случае введем внешней функции типа Карлемана, определенной как

$$\left. \begin{aligned} |c(z)|_{\Gamma_1} &= \varepsilon/\varepsilon(z); \\ |c(z)|_{\Gamma_2} &= M/M(z), \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

можно написать для произведения $c(z)f(z)$ следующие неравенства, вытекающие из (66) — (68):

$$|c(z)f(z) - c(z)h(z)|_{\Gamma_1} < \varepsilon; \quad (69)$$

$$|c(z)f(z)|_{\Gamma_2} < M \quad (70)$$

(здесь ε и M — постоянные величины и их можно выбрать произвольным образом; например, ε может означать среднюю погрешность измерения).

Может быть, стоит подчеркнуть, что нам удалось ослабить условие компактности (отказом от требования гельдеровской непрерывности) ценой получения стабильности уже только для внутренних точек. В том, что для этих точек решение задачи экстраполяции действительно стабильно, нетрудно убедиться, рассуждая следующим образом.

Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две аналитические функции, удовлетворяющие условиям (69) и (70). Тогда функция

$$F(z) \equiv (f_1(z) - f_2(z))c(z) \tag{71}$$

будет, очевидно, удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} |F(z)|_{\Gamma_1} &< 2\varepsilon; \\ |F(z)|_{\Gamma_2} &< 2M. \end{aligned} \right\} \tag{72}$$

Умножая F на новую функцию типа Карлемана $c_0(z)$, определенную как [см. (55)]

$$c_0(z) \equiv \exp \left[-\ln \frac{M}{\varepsilon} (\omega(z) + i\tilde{\omega}(z)) \right], \tag{73}$$

получаем вместо (72) соотношение

$$|(c_0F)(z)|_{\Gamma_1+\Gamma_2} < 2\varepsilon \tag{74}$$

(соотношение справедливо на всей границе $\Gamma_1 + \Gamma_2$). Так как c_0F — аналитическая функция по определению, то соотношение (74) вместе с принципом максимума модуля дает $|(c_0F)(z)| < 2\varepsilon$ всюду в \bar{D} . Следовательно, разделив последнее соотношение на $c_0(z)$, даваемое (73), получим

$$|F(z)| < (2\varepsilon)^{1-\omega(z)} (2M)^{\omega(z)}, \tag{75}$$

что представляет собой результат известной теоремы Неванлинна. Поскольку $\omega(z)$ — по определению гармоническая функция в D и ее граничные значения ≤ 1 [см. (58)–(60)], то $\omega(z) < 1$ (строго меньше единицы) внутри D , так что правая часть неравенства (75) исчезает, когда ε стремится к нулю, в каждой внутренней точке области D .

Оптимальные взвешенные дисперсионные соотношения

В этом разделе будут рассмотрены вопросы оптимизации дисперсионных соотношений, используемых для вычисления амплитуды во внутренних точках, по ее граничным значениям. В самом деле, в физике обычно существует бесконечно много способов написания математически эквивалентных уравнений, логически вытекающих один из другого и имеющих в точности одни и те же решения до тех пор, пока экспериментальные данные, которые мы используем, абсолютно точны. Будем называть эти способы тавтологическими. Если же начальные данные (или способы вычислений) имеют погрешности, тавтологию можно нарушить, т.е. результаты ранее эквивалентных уравнений будут сильно отличаться друг от друга. Тогда имеет смысл искать среди всех

тавтологических подходов (уравнений) тот или те, которые дают результат наиболее близкий к истинному. Вернемся к этой задаче ниже, здесь же рассмотрим более простую задачу, а именно, оптимизацию формы записи дисперсионных соотношений по отношению к заданным гистограмме и коридору ошибок. В нашем случае под термином «точные данные» будет пониматься функция $f(z')$, которая задана на разрезе ($z' \in \Gamma_1 + \Gamma_2$) и представляет собой точные граничные значения функции $f(z)$ аналитической внутри области, ограниченной $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Как уже видели раньше [см. (62)], $f(z)$ можно найти, зная ее граничные значения $f(z')$, не только при помощи обычного интеграла Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} dz' \frac{f(z')}{z' - z}, \tag{76}$$

но также используя любую интегральную формулу типа

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{g_z(z)} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} dz' \frac{f(z') g_z(z')}{z' - z}, \tag{77}$$

где $g_z(z')$ — любая функция аналитическая внутри D по переменной z' и произвольная по переменной z . В практических задачах, где имеют дело с экспериментальными данными, известными только на конечной части разрезов, приходилось обрезать интеграл, так что результаты, даваемые соотношением (77) при разных выборах для весовой функции $g_z(z')$, получались конечно различными*, и вовсе не очевидно, что простое дисперсионное соотношение (76) является наилучшей альтернативой.

Таким образом, наша задача состоит в выборе такой $g_z(z')$, которая делает минимальной разность между фактически вычисляемым значением

$$h_g(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{g_z(z)} \int_{\Gamma_1} dz' \frac{h(z') g_z(z')}{z' - z} \tag{78}$$

и истинным (но неизвестным) значением амплитуды $f(z)$ [см. (77)]. Начнем с так называемой канонической формы задачи

$$|\tilde{f}(z') - \tilde{h}(z')|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} < \varepsilon, \tag{79}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}(z') &\equiv h(z') c(z') c_0(z') \text{ на } \Gamma_1; \\ \tilde{h}(z') &\equiv 0 \text{ на } \Gamma_2; \\ \tilde{f}(z') &\equiv f(z') c(f') c_0(z') \quad z' \in D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{aligned} \right\} \tag{80}$$

* Даже если $h(z')$ абсолютно точна на Γ_1 обрезание интеграла равносильно предположению, что $h(z') \equiv 0$ на Γ_2 , следовательно, по известной теореме единственности аналитического продолжения $h(z')$ обязана содержать неаналитические части.

Здесь $c_0(z')$ дается соотношением (73), а $c(z')$ определяется соотношениями (68). Чтобы написать $c(z')$ в явном виде, удобно опять перейти к переменному $\zeta(z)$ [см. рис. 8 и формулы (58), (59)], отображающему область (D) на единичный круг, а физическую область Γ_1 — на правую полуокружность. Так как по определению $c(z)$ не имеет нулей внутри единичного круга, очевидно, и $\ln c(z)$ будет аналитической внутри единичного круга, а ее действительная часть на окружности будет равна [см. (68)]:

$$\ln |c(z)|_{\Gamma_1} = \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon(z)} \Big|_{\Gamma_1}; \tag{81}$$

$$\ln |c(z)|_{\Gamma_2} = \ln \frac{M}{M(z)} \Big|_{\Gamma_2}.$$

Можно воспользоваться для $\ln c(z)$ формулой представления аналитической функции через ее действительную часть на границе (формула Шварца — Виллата). Тогда для самой $c(z)$ получим выражение

$$c(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz'}{z'} \cdot \frac{z'+z}{z'-z} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon(z')} \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz'}{z'} \cdot \frac{z'+z}{z'-z} \ln \frac{M}{M(z')} \right]. \tag{82}$$

Возвращаясь опять к исходной задаче нахождения наилучшей весовой функции $g_z(z')$, предположим, что из $g_z(z')$ уже выделены не только необходимые функции типа Карлемана, $c_0(z)$ и $c(z)$, но также и такая функция, связанная с яacobianом, которая вместе с ядром Коши дает ядро Пуассона, т. е.

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{g_z(z)} \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') \tilde{f}(z') g_z(z'), \tag{83}$$

где

$$\mathcal{P}(z, z') \equiv \frac{\partial G(z, z')}{\partial n}.$$

Здесь $G(z, z')$ — функция Грина области D , а $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормальному направлению. Если работать в переменной $\zeta(z)$, в которой D отображена на единичный круг, то

$$\mathcal{P}(\xi, \xi') = \frac{1 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2 - 2|\xi| \cos(\theta - \theta')}; \tag{84}$$

$$\xi = |\xi| \exp(i\theta);$$

$$\xi' = \exp(i\theta').$$

Используем два свойства ядра Пуассона: оно положительно всюду, оно позволяет построить гармоническую внутри D функцию,

обладающую заданными граничными значениями. Таким образом, так как $\tilde{f}(z')$ и $g_z(z')$ аналитичны, то их произведение также аналитично и, следовательно, гармонично внутри D , так что соотношение (83) заведомо имеет место. Пусть

$$\tilde{h}_g(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{g_z(z)} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') \tilde{h}(z') g_z(z'). \quad (85)$$

Оценим разность $\tilde{f}(z) - \tilde{h}_g(z)$ во внутренней точке z :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z) - \tilde{h}_g(z)| &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|g_z(z)|} \left| \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') [\tilde{f}(z') - \tilde{h}(z')] g_z(z') \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|g_z(z)|} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') |\tilde{f}(z') - \tilde{h}(z')| |g_z(z')| \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{|g_z(z)|} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') |g_z(z')|. \end{aligned} \quad (86)$$

Докажем теперь, что

$$\frac{1}{|g_z(z)|} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') |g_z(z')| \geq 1.$$

В самом деле, если обозначить

$$\varphi_{z_0}(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') |g_{z_0}(z')|,$$

то $\varphi_{z_0}(z)$ — гармоническая функция переменной z внутри D . Ее граничные значения суть $|g_{z_0}(z')|_{z' \in \Gamma_1 + \Gamma_2}$. Функция $|g_{z_0}(z)|$ субгармоническая $\left[\Delta |g_{z_0}(z')| \equiv \frac{|g'_{z_0}(z)|^2}{|g_{z_0}(z)|} \geq 0, \Delta — \right.$ оператор Лапласа], таким образом, $|g_{z_0}(z)| - \varphi_{z_0}(z)$ тоже субгармоническая функция, имеющая нулевые граничные значения. Тогда по основному свойству субгармонических функций: $|g_{z_0}(z)| - \varphi_{z_0}(z) \leq 0$ для каждой точки $z \in D$. Получаем, что $|g_{z_0}(z)| \leq \varphi_{z_0}(z)$ или $\varphi_{z_0}(z)/|g_{z_0}(z)| \geq 1$ для каждого значения z_0 . В частности, это неравенство верно для $z_0 = z$, т. е. $\varphi_z(z)/|g_z(z)| \geq 1$, что и требовалось доказать.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_z(z')$ — постоянная функция (прямое доказательство тривиально, а обратное основывается на принципе максимума для субгармонических функций). Таким образом доказано, что в неравенстве

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{h}_g(z)| \leq \varepsilon \frac{1}{|g_z(z)|} \cdot \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} |dz'| \mathcal{P}(z, z') |g_z(z')|$$

правая часть достигает минимума при постоянном $g_z(z')$, а тогда можно просто положить $g_z(z') \equiv 1$ [вследствие однородности выражения по отношению к $g_z(z')$]. Тем самым доказана оптимальность ядра Пуассона. Резюмируя, можно сказать, что наилучшая экстраполяция $\hat{h}(z)$ амплитуды $f(z)$ в смысле дисперсионных соотношений, которая удовлетворяет условиям (66) и (67) — это следующая:

$$\hat{h}(z) \equiv \frac{1}{c(z)c_0(z)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} |dz'| \mathcal{P}(z, z') c(z') c_0(z') h(z'), \quad (87)$$

и, как можно проверить непосредственно,

$$|f(z) - \hat{h}(z)| |c(z)| \leq \varepsilon^{1-\omega(z)} M^{\omega(z)}, \quad (88)$$

т.е. $\hat{h}(z)c(z)$ достигает границы Неванлинна. Надо заметить, что $\hat{h}(z)$ не является аналитической функцией, так как ее граничные значения, по основному свойству ядра Пуассона, суть $h(z')$, т.е. представлены функцией, заведомо неаналитической (см. сноску на с. 92). Тем не менее, как это показано в работе [9], $\hat{h}(z)$ совпадает в каждой точке z со значением наилучшего аналитического приближения амплитуды в этой точке z , которую можно найти с помощью взвешенных дисперсионных соотношений. Так как это наилучшее аналитическое приближение различно для разных точек z , то $\hat{h}(z)$ является огибающей семейства этих аналитических приближений. Таким образом, неаналитичность $\hat{h}(z)$ не является помехой при экстраполяции в изолированные точки, как, например, при вычислениях констант связи; тем не менее $\hat{h}(z)$ не является решением задачи в смысле наилучшего аналитического всюду продолжения амплитуды. Решение этой задачи будет приведено ниже.

Абсолютно оптимальная экстраполяция с разреза внутрь области аналитичности

Функционал $\varepsilon_0 \left[\frac{M}{\varepsilon}; h \right]$. Как было показано, взвешенные дисперсионные соотношения, которые тавтологичны между собой до тех пор, пока начальные данные точны, начинают давать различные результаты, если начальные данные известны только на части разреза и притом с погрешностями. Из всех дисперсионных соотношений взвешенное дисперсионное соотношение с ядром Пуассона (87) наименее чувствительно к экспериментальным погрешностям и неполному знанию значений амплитуды. Но взвешенные дисперсионные соотношения не исчерпывают всех тавтологических методов аналитического продолжения. Покажем

ниже, как можно найти абсолютный оптимум [10], достижимый аналитической экстраполяцией с разреза внутрь — фактически построением всего класса амплитуд, совместимых с условиями:

$$|f(z) - h(z)|_{\Gamma_1} < \varepsilon, \quad (89)$$

$$|f(z)|_{\Gamma_2} < M. \quad (90)$$

Для простоты предположим, что экспериментальные погрешности и граница M постоянны. Это не является ограничением, так как в общем случае введением подходящей функции Карлемана [см. (69), (70)] можно свести задачу с постоянным ε и M . Условия (89) и (90) можно объединить к помощи другой функции типа Карлемана c_0 , определенной соотношением (73), следовательно, будем исходить из канонического условия

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{h}(z)|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} < \varepsilon, \quad (91)$$

где

$$\tilde{f}(z) \equiv f(z) c_0(z);$$

$$\tilde{h}(z) \equiv h(z) c_0(z) \quad \text{на } \Gamma_1;$$

$$\tilde{h}(z) \equiv 0 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Уместно обратить внимание на то, что существование наилучшего приближения \tilde{h} взвешенных дисперсионных соотношений вовсе не гарантирует того, что класс аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих (91), не пустой. Нельзя забывать, что $\tilde{h}(z)$ не является аналитической; с другой стороны, когда проводилось доказательство оптимальности $\tilde{h}(z)$, предполагалось, что существуют такие функции \tilde{f} , которые удовлетворяют условию (91). То, что для достаточно малых погрешностей ε класс аналитических функций, удовлетворяющих (91), может быть пустым, можно увидеть из следующего рассуждения.

При переводе области аналитичности на единичный круг преобразованием $\zeta(z)$, $\tilde{h}(\zeta)$, определенная на границе $\Gamma_1 + \Gamma_2$, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\exp[i\theta]) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(in\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp(-in\theta) \equiv \\ &\equiv \tilde{h}_1(\exp(i\theta)) + \tilde{h}_2(\exp[i\theta]); \end{aligned} \quad (92)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \tilde{h}(\exp[i\theta]) \exp[-in\theta]. \quad (93)$$

Поскольку $\tilde{h}_1(\exp[i\theta])$ является граничным значением аналитической в единичном круге функции, она может быть легко

продолжена внутрь круга. Следовательно, если записать \tilde{f} как:

$$\tilde{f}(\zeta) \equiv \tilde{h}_1(\zeta) - \tilde{\chi}_1(\zeta), \tag{94}$$

где

$$\tilde{h}_1(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \tag{95}$$

$\tilde{\chi}_1(\zeta)$ — аналитическая в единичном круге функция, то можно переписать условие (91) в виде

$$|\tilde{\chi}_1(\exp[i\theta]) + \tilde{h}_2(\exp[i\theta])| < \varepsilon. \tag{96}$$

Но L^∞ — норма суммы $\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2$:

$$\|\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2\|_{L^\infty} \equiv \text{ess sup}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\tilde{\chi}_1(\exp[i\theta]) + \tilde{h}_2(\exp[i\theta])|^* \tag{97}$$

не может быть сколь угодно мала, так как в силу известной теоремы она во всяком случае должна быть больше, чем соответствующая L^2 -норма:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2\|_{L^\infty}^2 &\geq \|\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2\|_{L^2}^2 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} d\theta |\tilde{\chi}_1(\exp[i\theta]) + \tilde{h}_2(\exp[i\theta])|^2 = \\ &= \|\tilde{\chi}_1\|_{L^2}^2 + \|\tilde{h}_2\|_{L^2}^2 \geq \|\tilde{h}_2\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2\|_{L^\infty} \geq \|\tilde{h}_2\|_{L^2} \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}|^2 \right)^{1/2} > 0. \tag{98}$$

В последней части неравенства (98) сумма должна быть строго больше нуля, так как отрицательные коэффициенты Фурье $\tilde{h}(z)$ отличны от нуля, если только $\tilde{h}(z)$ не равно тождественно нулю на всей окружности. (Надо подчеркнуть, что неаналитичность $\tilde{h}(z)$ из-за наличия члена $\tilde{h}_2(\exp[i\theta])$ обусловлена не столько экспериментальными погрешностями $h(z)$ в физической области Γ_1 , сколько отсутствием экспериментальных данных на Γ_2). В работе [10] было найдено в явном виде наименьшее значение L^∞ -нормы для суммы $\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2$:

$$\varepsilon_0 \left[\frac{M}{\varepsilon}; h \right] \equiv \inf_{\tilde{\chi}_1 \in H^\infty} \|\tilde{\chi}_1 + \tilde{h}_2\|_{L^\infty}, \tag{99}$$

* esssup означает существенную верхнюю грань, т. е. множества меры нуль не учитываются при вычислениях верхней грани. Для наших целей эти множества не существенны по физическим причинам.

которое совпадает с наибольшим по модулю собственным значением ганкелевой матрицы [11—13]:

$$A \equiv \begin{pmatrix} c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \dots \\ c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} & \dots \\ c_{-3} & c_{-4} & c_{-5} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (100)$$

$$\varepsilon_0 [M/\varepsilon; h] = \|A\|^*. \quad (101)$$

Для $\varepsilon < \varepsilon_0$ не существует никакой аналитической функции, удовлетворяющей условию (91). Покажем ниже, что для $\varepsilon > \varepsilon_0$ решений много и для каждой внутренней точки z их значения плотно заполняют круг, центр которого $\hat{f}(\zeta)$, очевидно, представляет наилучшее возможное приближение амплитуды рассеяния. Если $\varepsilon \gg \varepsilon_0$, можно ожидать, что $\hat{f}(\zeta)$ не будет существенно отличаться от $\tilde{h}(\zeta)$, но когда $\varepsilon \sim \varepsilon_0$, разница может быть большой, и именно тогда этот метод экстраполяции является особенно ценным.

Полный ансамбль допустимых амплитуд. Задача наилучшей аналитической экстраполяции свелась к нахождению аналитической функции $\chi_1(\zeta)$, удовлетворяющей (96). Предположим, что ε_0 [см. (99)] вычислено и меньше погрешности ε , для того чтобы задача имела решение. В последующем ограничимся конечным числом членов в разложении Фурье для \tilde{h}_2^* :

$$\tilde{h}_2(\exp[i\theta]) \sim \tilde{h}_2^N(\exp[i\theta]) \equiv \sum_{n=1}^N c_{-n} \exp(-in\theta). \quad (102)$$

Обозначим $\psi_0(\exp[i\theta])$ выражение

$$\psi_0(\exp[i\theta]) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \exp(iN\theta) [\tilde{h}_2^N \exp(i\theta) + \tilde{\chi}_1(\exp[i\theta])]. \quad (103)$$

Здесь $\psi_0(\exp[i\theta])$ — граничные значения аналитической в единичном круге функции

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon} (c_{-N} + c_{-N+1}\zeta + \dots + c_{-1}\zeta^{N-1} + \zeta^N \tilde{\chi}_1(\zeta)), \quad (104)$$

а условие (96) преобразуется к виду

$$|\psi_0(\exp[i\theta])| < 1. \quad (105)$$

* На практике ряд для $\tilde{h}_2(\exp[i\theta])$ обрывают и строят A из конечного числа отрицательных коэффициентов Фурье c_n , (93), и $\|A\|$ можно вычислить при помощи формулы:

$$\|A\| = \lim_n (\text{Sp}(AA^+)^n)^{1/2n}.$$

Таким образом, нахождение всех функций $\tilde{\chi}_1$, удовлетворяющих (96), равносильно нахождению всех ψ_0 с заданными первыми N коэффициентами и модулем меньше единицы. Это — классическая задача интерполяции [14], и ее можно решить рекуррентным способом. В самом деле, введем аналитические в единичном круге функции:

$$\psi_k(\zeta) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{k,i} \zeta^i, \tag{106}$$

где $\psi_{k,i}$ — постоянные $(\psi_{0,0} = \frac{1}{\varepsilon} c_{-N} \dots \psi_{0,N-1} = \frac{1}{\varepsilon} c_{-1})$, которые определены итерационным способом

$$\psi_{k+1}(\zeta) \equiv \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\psi_k(\zeta) - \psi_{k,0}}{1 - \psi_{k,0}^* \psi_k(\zeta)}. \tag{107}$$

Заметим, что вследствие специальной формы (типа произведения Бляшке) ψ_k , условие

$$|\psi_k(\exp[i\theta])| < 1$$

приводит к

$$|\psi_{k+1}(\exp[i\theta])| < 1,$$

а так как в силу (105) $|\psi_0(\exp[i\theta])| < 1$, то на окружности все $\psi_k(\exp[i\theta])$ ($k = 0, 1, \dots, N$) имеют модуль меньше единицы. Надо заметить также, что если у $\psi_0(\zeta)$ зафиксированы первые N коэффициентов, то у $\psi_1(\zeta)$ зафиксировано уже только $N - 1$ коэффициентов, у $\psi_2(\zeta)$ — только $N - 2$ коэффициентов и т. д. Таким образом, в конце концов у $\psi_N(\zeta)$ ни один коэффициент не фиксирован заранее, т. е. $\psi_N(\zeta)$ — произвольная аналитическая в единичном круге функция, имеющая модуль меньше единицы. Следующее соотношение позволяет вычислять рекуррентным способом коэффициенты $\psi_{k,n}$:

$$\begin{aligned} \psi_{k,n} = & \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)! (\psi_{k-1,0}^*)^{\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i - 1\right)}}{k_1! \dots k_{n+1}! (1 - |\psi_{k-1,0}|^2)^{\sum_{i=1}^{n+1} k_i}} \times \\ & \times \psi_{k-1,1}^{k_1} \dots \psi_{k-1,n+1}^{k_{n+1}}, \end{aligned} \tag{108}$$

где сумма берется по всем ансамблям $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$, являющимся решениями диофантового уравнения:

$$k_1 + 2k_2 + \dots + (n+1)k_{n+1} = n+1. \tag{109}$$

Таким образом, возвращаясь к ψ_0 и соотношению (107)

$$\psi_k(\zeta) = \frac{\zeta\psi_{k+1}(\zeta) + \psi_{k,0}}{1 + \psi_{k,0}^*\zeta\psi_{k+1}(\zeta)}, \quad (110)$$

получим ψ_0 в форме произведения типа Бляшке, зависящее от произвольной аналитической в единичном круге функции с модулем меньше единицы. За дальнейшими подробностями отсылаем читателя к работе [10]. В заключение обратим внимание на то, что необходимым условием для выполнения неравенства

$$|\psi_k(\exp[i\theta])| < 1, \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

является следующее:

$$|\psi_{k,0}| < 1, \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (111)$$

В то же время соотношения (110) имеют место только при $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Центр $\hat{f}(\zeta)$ и радиус $\hat{\eta}(\zeta)$. При решении практических задач аналитической экстраполяции обычно удобнее работать с центром $\hat{f}(\zeta)$ и радиусом $\hat{\eta}(\zeta)$ круга значений всех допустимых функций в каждой внутренней точке ζ , чем со значениями всех допустимых функций для каждой точки ζ . Дробно-линейный вид формулы обращения (110) позволяет легко показать, что эти значения плотно заполняют круг. В самом деле, в соотношении (110) для каждого фиксированного значения ζ возможные значения ψ_k заполняют круг, если значения ψ_{k+1} также заполняют круг. (Так как возможные значения ψ_N произвольной аналитической функции с модулем меньше единицы действительно заполняют круг радиусом, равным единице, то на основании предыдущего рассуждения значения каждой функции ψ_k в общем случае заполняют круг с другим радиусом.) Если теперь обозначить для фиксированного значения ζ через $\gamma_k(\zeta)$ и $\eta_k(\zeta)$ центр и радиус круга, заполненного значениями $\psi_k(\zeta)$ (ζ фиксировано), т.е.

$$\begin{aligned} \psi_k(\zeta) &= \gamma_k(\zeta) + \alpha\eta_k(\zeta) \exp[i\beta]; \\ 0 &\leq \alpha \leq 1, \\ 0 &\leq \beta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (112)$$

то для $\gamma_{k-1}(\zeta)$ и $\eta_{k-1}(\zeta)$ соответственно получим:

$$\gamma_{k-1}(\zeta) = \frac{1}{\psi_{k-1,0}^*} \left\{ 1 - \frac{(1 - |\psi_{k-1,0}|^2)(1 + \psi_{k-1,0}\zeta^*\gamma_k^*(\zeta))}{|1 + \psi_{k-1,0}\zeta^*\gamma_k^*(\zeta)|^2 - |\eta_k(\zeta)\psi_{k-1,0}\zeta|^2} \right\}; \quad (113)$$

$$\eta_{k-1}(\zeta) = \frac{\eta_k(\zeta) \cdot |\zeta| \cdot (1 - |\psi_{k-1,0}|^2)}{|1 + \psi_{k-1,0}\zeta^*\gamma_k^*(\zeta)|^2 - |\eta_k(\zeta)\psi_{k-1,0}\zeta|^2}. \quad (114)$$

Отправляясь от начальных значений $\gamma_N(\zeta) = 0$, $\eta_N(\zeta) = 1$ и используя (113) и (114) рекуррентным образом, а также опреде-

ления (91), (94) и (103), находим для центра $\hat{f}(\zeta)$ круга значений допустимых функций и для его радиуса $\hat{\eta}(\zeta)$ следующие выражения:

$$\hat{f}(\zeta) \equiv \hat{\tilde{f}}(\zeta)/c_0(\zeta) \equiv \left[\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2^N - \frac{\varepsilon}{\zeta^N} \gamma_0(\zeta) \right] / c_0(\zeta), \quad (115)$$

$$\hat{\eta}(\zeta) \equiv \hat{\eta}(\zeta)/c_0(\zeta) \equiv \varepsilon \eta_0(\zeta) / |\zeta^N c_0(\zeta)| \quad (116)$$

[можно показать [10], что выражение (115) не имеет полюсов, так как $\zeta^N \tilde{h}_2^N - \varepsilon \gamma_0(\zeta) \sim \zeta^N$].

Очевидно, что, так как $\hat{f}(\zeta)$ является центром круга значений всех допустимых решений исходной задачи (89) и (90), это — наилучшее возможное приближение для

всех допустимых амплитуд (центр — это точка, максимальное расстояние которой от других точек круга минимально возможно). Конечно, как и наилучшее приближение $\hat{h}(\zeta)$, полученное с помощью взвешенных дисперсионных соотношений, $\hat{f}(\zeta)$ не является аналитической функцией. Различные аналитические приближения (но не наилучшие)

$f_{[\Psi_N]}(\zeta)$ можно построить итерационным способом, как это было показано ранее, исходя из различных ψ_N при фиксированном значении ζ . Приближение

$f_{[\Psi_N]}(\zeta)$, которое будем вычислять как $\hat{u}\hat{f}(\zeta)$, заменяя в (115) $\gamma_0(\zeta)$ на $\psi_0(\zeta)$, является функционально переменной функции ψ_N . Чтобы сравнить результаты этого

подраздела с наилучшим приближением $\hat{h}(\zeta)$ взвешенных дисперсионных соотношений, удобнее работать с величинами \hat{f} и \hat{h} без выделения функции Карлемана $c_0(\zeta)$ (рис. 9). Заметим, во-первых, что на окружности $\Gamma_1 + \Gamma_2$ имеет место соотношение:

$$\hat{f}(\exp[i\theta]) \equiv \hat{\tilde{f}}(\exp[i\theta]) \equiv \hat{h}(\exp[i\theta]); \quad (117)$$

$$\hat{\eta}(\exp[i\theta]) \equiv \varepsilon, \quad (118)$$

т. е. $\hat{\eta}(\zeta)|_{\Gamma_1} = \varepsilon$; $\hat{\eta}(\zeta)|_{\Gamma_2} = M$.

Для внутренних точек ($|\zeta| < 1$) $\hat{\eta}(\zeta) < 1$ и может сильно отличаться от ε , если $\varepsilon \sim \varepsilon_0$, а так как в этом случае некоторые из постоянных $\psi_{k,0}$ приближаются к единице по абсолютному значению, то соответствующие числители в рекуррентных соотношениях малы и, следовательно, $\hat{\eta}(\zeta)$ мало. Если же $\varepsilon = \varepsilon_0$, то

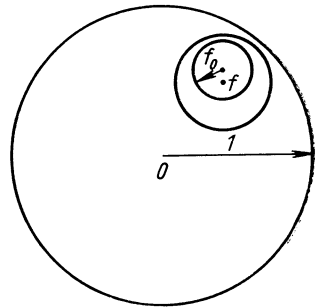


Рис. 9. Окружность $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

все $\eta_h(\zeta)$ равны тождественно нулю и остается одна единственная аналитическая амплитуда \hat{f}_0 , для которой доказано [10], что имеет место соотношение $|\hat{f}_0 - \tilde{h}|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \equiv \varepsilon_0 = \text{const}$. В этом, и только в этом случае \hat{f}_0 , очевидно, является аналитической, так как она совпадает с единственной остающейся амплитудой.

Величины ε_{00} и M_0 . Сделаем два замечания.

1. Даже если $\varepsilon > \varepsilon_0 [M/\varepsilon, \hbar]$, можно поставить задачу о нахождении такой аналитической амплитуды $f_{00}(\zeta)$, которая удовлетворяет условию (90) при заданном M и наиболее близка к данной функции h :

$$\varepsilon_{00} = \inf_{f \in F} \sup_{\zeta \in \Gamma_1} |f(\zeta) - h(\zeta)|.$$

Величину ε_{00} можно найти как решение уравнения:

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_0 [M/\varepsilon_{00}; \hbar] \quad (118a)$$

(при заданных M и h). Затем $f_{00}(\zeta)$ вычисляется как наилучшее приближение \hat{f}_0 при $\varepsilon = \varepsilon_{00}$.

2. Снова при заданных ε и \hbar можно поставить задачу о нахождении такой аналитической функции, которая удовлетворяет условию (89) и имеет наименьший модуль M_0 на Γ_2 . Для этого надо решить сначала уравнение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [M_0/\varepsilon; \hbar]$$

(при заданных ε и h), а затем необходимо снова построить аналитическую функцию методом, изложенным выше.

3. M_0 — КРИТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА

Как мы старались подчеркнуть во введении, оказывается, что многие из задач в физике элементарных частиц, решение которых сталкивается с большими трудностями, фактически некорректно поставлены в терминах современных понятий. Это обстоятельство в значительной степени влияет на возможность предсказания и осуществления осмысленных, т. е. решающих экспериментов. Тем не менее можно восстановить какую-то возможность предсказания, если наложить некоторые дополнительные внешние условия на класс, где ищется решение, и эти условия следует выбрать таким образом, чтобы сделать компактным множество возможных решений. Силу или интенсивность этого условия, которое мы назвали стабилизирующим (ограниченность, гельдеровская непрерывность), можно регулировать с помощью определенной постоянной или функции.

До сих пор в аналитических экстраполяциях были использованы в качестве стабилизирующих условий уже существующая теоретическая информация, как, например, унитарность (граница Фруассара) или возможность продолжения на второй римановый лист (гельдеровская непрерывность), но (мы осмеливаемся выдвинуть предположение) было бы весьма интересно и важно найти стабилизирующие условия, количественная характеристика которых непосредственно измерима.

Действительно, предположим, что величина M , введенная в гл. 2, измерима непосредственно; тогда было бы очень интересно измерить ее фактическое значение, так как радиус круга экстраполяции сильно зависит от M (по крайней мере, так же сильно, как зависит от расширения физической области Γ_1 , обусловленной новыми экспериментами). В самом деле, можно показать, что для заданных $h(z)$ — гистограммы — и $\varepsilon(z)$ — коридора ошибок — существует такая величина M_0 , для которой все аналитические в единичном круге функции $f(z)$ с граничными условиями на Γ_1 , удовлетворяющим требованию:

$$|f(\exp[i\theta]) - h(\exp[i\theta])|_{\Gamma_1} < \varepsilon, \quad (119)$$

имеют наибольшее значение модуля на остальной части границы Γ_2 не меньше, чем M_0 . Другими словами,

$$M_0 \equiv \inf_{f \in \{f | f - h|_{\Gamma_1} < \varepsilon\}} \sup_{\theta \in \Gamma_2} |f(\exp[i\theta])|. \quad (120)$$

Вообще $M_0 \neq 0$. Действительно, надо заметить, что если $M_0 = 0$ и если бы существовала * функция, для которой это значение достигается, то она будет равна нулю всюду в силу принципа единственности аналитического продолжения. Нулевая функция, с другой стороны, не будет вообще удовлетворять условию (119), если выбрать коридор ошибок ε достаточно узким.

Таким образом, мы доказали, что на Γ_2 существует нижняя грань $M_0(h; \varepsilon) \neq 0$ для модулей аналитических в единичном круге функций, следовательно, для $M < M_0(h; \varepsilon)$ задача аналитической экстраполяции с условием (119) не имеет решений. Другими словами, экспериментальные данные вместе с их неопределенностью ε определяют некоторое минимальное значение компактного множества, следовательно, если это множество станет еще меньше, то в нем уже нельзя будет найти решение задачи. Это критическое значение можно вычислить с помощью соответствующего алгоритма, отправляясь только от начальных данных и их погрешностей.

* Нижняя грань в (120) достигается, так как в силу условий (66) и (67) множество функций, по которым берется \inf , компактно для каждого значения M .

Проверка аналитичности

Фазовый анализ. До сих пор подчеркивалась важность стабилизирующих условий именно для предсказаний, но можно рассмотреть проблему стабильности также с другой стороны: каким образом влияют новые эксперименты, в частности расширение физической области Γ_1 , на самостабилизирующее условие. Конечно, не надо ждать непременно новых экспериментов, чтобы ответить на этот вопрос. Можем просто разделить те данные, которые у нас уже есть, на «новые» и «старые». Потом можно попытаться проверить совместимость новых данных с аналитичностью, когда добавляем их к старым данным. В соответствии с изложенным выше величина M будет характеризоваться каким-то минимальным значением M_0 , так что для $M < M_0$ данные и предсказания не будут уже согласованы с точки зрения аналитичности. Для задачи аналитической экстраполяции в норме L^∞ , подчиненной условию (119), это значение M_0 является как раз значением $M_0(h; \epsilon)$ (h содержит и данные, и предсказания).

Если придется расширить компактное множество допустимых решений за какой-то предел, который заранее известен и в который имеем основания верить, для того, чтобы согласовать данные и предсказания с требованием аналитичности, это может привести к интересным следствиям.

Таким образом, можно попытаться найти эффективное средство для решения проблемы неоднозначности фазового анализа. Так как предполагают, что амплитуда является граничным значением аналитической функции, то неудачный выбор фаз привел бы к противоречию с аналитичностью. Если вычислим M_0 для различных наборов фазовых функций, то лучшим набором можно считать тот, который не приводит к слишком большим значениям M_0 *. Проверка фазового анализа на аналитичность — мысль не новая, но, по крайней мере, до сих пор это делалось только с помощью дисперсионных соотношений. Здесь уместны некоторые пояснения. Ясно, во-первых, что для произвольно узкого коридора ошибок можно найти аналитическую функцию, проходящую внутри него, если допустить, что она может быть сколь угодно большой по абсолютной величине на остальных частях разреза (там, где вообще нет экспериментальных данных), таким образом, чтобы выполнялось дисперсионное соотношение. Если бы при этом потребовались функции слишком большого модуля, то это могло бы навести на мысль, что указанный выше набор фаз не является аналитическим. Это обстоятельство вовсе не является решающим, потому что могут существовать функции меньшего модуля, найти которые

* Надо заметить, что M_0 — пробная величина не для гладкости фазовой функции, а для ее аналитичности, что совершенно различно.

намного труднее, но которые удовлетворяют нужным дисперсионным соотношениям. С другой стороны, величина M_0 дает сразу абсолютный минимум модуля, который можно потом сразу сравнить с известным асимптотическим ограничением.

Методы нахождения полюсов. Существование критического размера для компактного множества решений позволяет проверять согласованность экспериментальных данных не только с требованием аналитичности, но также с другими свойствами, которые можно связать с аналитичностью. К примеру, мы хотим знать, согласованы ли данные вместе с коридором ошибок и условием ограниченности с существованием нуля амплитуды в точке z_0 внутри единичного круга. Такую амплитуду можно всегда представить в виде

$$f(z) = g(z) B_{z_0}(z), \tag{121}$$

где

$$B_{z_0}(z) = (z - z_0)/(1 - z_0^*z),$$

$g(z)$ — аналитическая внутри единичного круга функция. Если функция экспериментальных данных $h(z)$ согласуется с $f(z)$, имеющей нуль в z_0 , то «модифицированная функция данных» $h(z)/B_{z_0}(z)$ должна быть согласована с требованием аналитичности, т. е. с функцией $g(z)$, а также с ограниченностью на Γ_2 . Уместно заметить, что был использован множитель Бляшке $B_{z_0}(z)$ вместо простого множителя $z - z_0$, чтобы не изменять асимптотического ограничения.

Если M_0 для $h(z)/B_{z_0}(z)$ больше, чем M , то не существует никакой аналитической функции, имеющей нуль, удовлетворяющей (119) и ограниченной постоянной M на Γ_2 . Если проведем вычисление для всех z_0 в единичном круге, то можем нарисовать «карту областей», где может или не может находиться нуль амплитуды. Ясно, что в разрешенных точках, для которых $M_0(z_0) \leq M$, чем больше будет разница между M и $M_0(z_0)$, тем большим будет выбор допустимых, т. е. удовлетворяющих (119) и ограниченных M на Γ_2 , функций с нулем в z_0 .

Очевидно, что это можно интерпретировать также вероятностным образом, в смысле, что разность $M - M_0(z_0)$ измеряет вероятность нахождения нуля в z_0 (до общего нормировочного множителя). Там, где $M \leq M_0(z_0)$, эта вероятность равна нулю*.

* Может оказаться полезным взглянуть поглубже в процедуру отыскания полюсов, чтобы увидеть, что получается в предельном случае нулевых ошибок. Если $h(z)$ — граничные значения аналитической функции и коридор ошибок сужается вокруг нее, различные M_0 , которые находим для этих коридоров, монотонно возрастают и стремятся к $M(L^\infty$ — норма на остальной части разрезов), единственной аналитической функции, совпадающей на границе с $h(z)$. Таким образом, M_0 — конечная величина. Если же $h(z)$ — граничные значения неаналитической функции, то ряд из различных M_0 не может сходиться к конечной величине. В самом деле, предположим, что

Ясно, что таким же путем можно проводить розыск простых полюсов. Если амплитуда имеет простой полюс в z_0 , то можно ее представить в виде

$$f(z) = g(z)/B_{z_0}(z),$$

и точно таким же образом, как и раньше, проводить проверку на аналитичность модифицированных данных $h(z) B_{z_0}(z)$.

Конечно, если полюс в амплитуде слишком слабый, т. е. она «почти» аналитична, то для всех z_0 ожидаем получить $M_0(z_0) \leq M$, и мы не сможем ничего сказать о предполагаемом положении полюса. Это не изъян метода, а означает просто, что где бы ни находился полюс, он согласуется с экспериментальными данными. Другими словами, данные вместе с коридором ошибок не дают достаточной информации для нахождения полюса, и никакой другой метод, основанный на понятии аналитичности, не даст нам больше этого. Это положение можно сравнить со способом, каким ищутся резонансы Брейта — Вигнера. Используемые формулы содержат уже полюс и два свободных параметра, которые служат для подгонки экспериментальных данных локальным образом вне зависимости от поведения амплитуды вдали от области резонанса.

Критерий M_0 [15]

Теперь перейдем к описанию способа определения критического значения величины M для множества аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих общему условию:

$$|f(\zeta) - h(\zeta)| < \varepsilon(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_1. \quad (122)$$

Предположим, что справедливо представление

$$M(\zeta) \equiv Mxm(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_2, \quad (123)$$

а стабилизирующее условие имеет вид

$$|f(\zeta)| < M(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_2, \quad (124)$$

и мы ищем наименьшее значение M , совместимое с (122).

Он сходится к какому-то конечному пределу M . Тогда для каждого коридора ошибок шириной ε_n , $\varepsilon_n \rightarrow 0$ можно взять φ_n — аналитическую функцию наименьшего модуля M_{0n} на Γ_2 , которая все еще проходит через этот коридор. Если множество таких φ_n компактно, то можно найти сходящуюся подпоследовательность φ_{k_n} , предел которой φ аналитичен в единичном круге. По построению $\varphi(z)$ должна совпадать с $h(z)$ на всей Γ_1 , что невозможно, поскольку $h(z)$ — граничные значения неаналитической функции по предположению. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Когда ширина коридора ошибок не равна нулю, предельный переход уже невозможен, однако кривая $M_0(z_0)$ сохраняет свои существенные свойства — большие значения $M_0(z_0)$, когда $h(z)$ сильно неаналитична, и малые значения $M_0(z_0)$ в противном случае.

В физических задачах функция $m(\zeta)$ обычно известна (как, например, в случае границы Фруассара), но масштабный множитель M известен значительно хуже. Именно для него дадим границы, используя аналитичность и условие (122).

Во-первых, заметим, что множество функций $f(z)$ удовлетворяющих (122) и (123), изоморфно множеству $(fc)(z)$, подчиненному более простым условиям:

$$|(fc)(\zeta) - (hc)(\zeta)|_{\Gamma_1} < \varepsilon, \tag{125}$$

$$|(fc)(\zeta)|_{\Gamma_2} < M. \tag{126}$$

Здесь ε и M — постоянные, а внешняя функция типа Карлемана $c(\zeta)$ определяется соотношением (82). Минимальное значение M в (126) равно минимальному значению M в (123), так как внешняя функция $c(\zeta)$ зависит только от отношения $M/M(\zeta) \equiv \equiv 1/m(\zeta)$. Таким образом, можно в последующем ограничиться без потери общности постоянными ε , шириной коридора ошибок и ограничением M . Обозначая $(hc)(\zeta)$ просто $h(\zeta)$, возьмем в качестве исходных следующие условия:

$$|f(\zeta) - h(\zeta)|_{\Gamma_1} < \varepsilon \tag{127}$$

$$|f(\zeta)|_{\Gamma_2} < M. \tag{128}$$

Дальше можем снова перейти к величинам $\tilde{f}(\zeta)$ и $\tilde{h}(\zeta)$ с помощью соотношения (80) и введения функции типа Карлемана $c_0(\zeta)$, даваемой соотношением (73), и написать для этих величин условие

$$|\tilde{f}(\zeta) - \tilde{h}(\zeta)|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} < \varepsilon. \tag{129}$$

Воспользуемся теперь одной важной теоремой, приведенной в гл. 2, а именно: для заданной на всей единичной окружности функции $\tilde{h}(\exp[i\theta])$, являющейся граничным значением неаналитической функции в единичном круге, существует минимальное, отличное от нуля расстояние ε_0 (в норме L^∞) между $\tilde{h}(\exp[i\theta])$ и классом H^∞ функций, аналитических внутри единичного круга и ограниченных на окружности:

$$\varepsilon_0 \equiv \inf_{\tilde{f} \in H^\infty} \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\tilde{f}(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta])| > 0. \tag{130}$$

Это расстояние ε_0 зависит только от отрицательных коэффициентов Фурье $\tilde{h}(\exp[i\theta])$ и равно наибольшему (по модулю) собственному значению ганкелевой матрицы A [см. (100)]. Как было показано в гл. 2, если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то не существует никакой аналитической в единичном круге функции, удовлетворяющей (129). С другой стороны, если начать уменьшать M в (128), то класс функций, удовлетворяющих (127), станет сужаться. Ясно, что сузится и класс функций, удовлетворяющих (129). Другими словами,

будем ожидать, что $\varepsilon_0 [M/\varepsilon; h]$ монотонно убывающая функция от M . Таким образом, если M уменьшать, то ε_0 будет расти, и для какого-то определенного значения M , например M_0 , оно сравнится с экспериментальной погрешностью ε , т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [M_0/\varepsilon; h]. \quad (131)$$

При этом значении $\varepsilon_0 = \varepsilon$ остается только одна-единственная аналитическая функция, удовлетворяющая (129), — \hat{f}_0 . Значение M_0 , при котором выполняется (131), и является как раз критическим значением величины M *.

Для строгого доказательства предыдущего высказывания необходимо показать, что $\varepsilon_0 [M/\varepsilon; h]$ — действительно строго убывающая функция M . Это можно сделать следующим образом [16].

Пусть $M < M'$ и $\tilde{f}_M(z)$ — та функция, которая достигает нижней грани в (130) [существование $\tilde{f}_M(z)$ гарантировано компактностью множества функций, удовлетворяющих (129)]. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 [M/\varepsilon; h] &= \sup_{\theta} |\tilde{f}_M(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)| \geq \\ &\geq \sup_{\theta} \left| \frac{c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)}{c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)} \right| |\tilde{f}_M(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)| = \\ &= \sup_{\theta} \left| \frac{c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)}{c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)} \tilde{f}_M(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon) \right| \geq \\ &\geq \inf_{\tilde{f} \in H^\infty} \sup_{\theta} |\tilde{f}(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)| = \varepsilon_0 [M'/\varepsilon; h]. \quad (132) \end{aligned}$$

Первое неравенство цепочки в (132) основано на свойстве [см. (73)]:

$$\left| \frac{c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)}{c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)} \right| = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma_1; \\ M/M' < 1 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \quad (133)$$

Далее ясно, что

$$\begin{aligned} &\frac{c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)}{c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)} \tilde{h}(\exp[i\theta]; M/\varepsilon) \equiv \\ &\equiv \frac{c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)}{c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)} c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon) h(\exp[i\theta]) = \\ &= c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon) h(\exp[i\theta]) \equiv \tilde{h}(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon). \quad (134) \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно из определения нижней грани. Можно даже доказать [12], что это последнее неравенство является строгим. В самом деле, функция \tilde{f}_M , для которой достигается

* Может, конечно, случиться, что M уже равно нулю, но все еще $\varepsilon_0 < \varepsilon$; это просто означает, что условию (130) удовлетворяет также и функция, тождественно равная нулю.

нижняя грань в (130), имеет свойство

$$|\tilde{f}_M(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)|_{\Gamma_1+\Gamma_2} = \text{const}$$

на всей окружности. Так как модуль отношения $c_0(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)/c_0(\exp[i\theta]; M/\varepsilon)$ заведомо не постоянен на окружности, то

$$\tilde{f}_M(\exp[i\theta]) c(\exp[i\theta]; M'/\varepsilon)/c_0(\exp[i, \theta]; M/\varepsilon)$$

не может быть минимальной функцией, так что последнее неравенство в (132) является строгим.

Таким образом, для решения уравнения (131) можно взять какое-то произвольное значение M (довольно большое для начала),

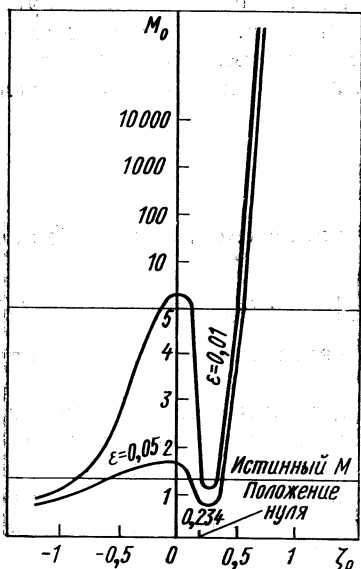


Рис. 10. Результаты поиска нуля при помощи M_0 для двух разных коридоров ошибок.

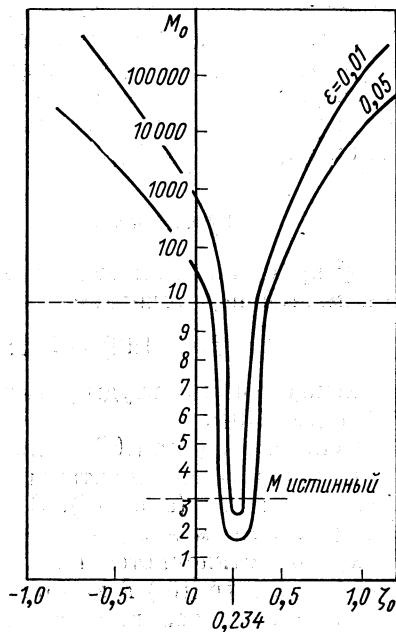


Рис. 11. Результаты поиска полюса при помощи M_0 для двух разных коридоров ошибок.

а потом, вследствие монотонной зависимости ε_0 от M , можно использовать стандартные численные методы для нахождения решения. Например, можно воспользоваться методом Ньютона. Этот метод фактически применялся для вычисления M_0 , когда проводилась проверка метода нахождения нулей. Пробная амплитуда была действительной аналитической функцией и имела нуль в известной точке. Гистограмма $h(\zeta)$ была получена с помо-

щью искусственно порожденных погрешностей, а потом было вычислено значение $M_0(\zeta_0)$ для различных значений ζ_0 , а также для различных начальных данных $h(\zeta)/B_{\zeta_0}(\zeta)$.

Результаты поиска, проведенного вдоль диаметра круга (рис. 10), указывают на присутствие крутого минимума $M_0(\zeta_0)$ вблизи положения настоящего нуля, что подтверждает предыдущее обсуждение. На рис. 10 показано также значение истинного M для нашей модельной амплитуды. Надо заметить, что как данные, так и значение M согласуются с присутствием нуля вдали от области экспериментальных данных. Именно это обстоятельство служит дополнительным доводом в пользу того, что критерий M_0 свободен от какой-либо предвзятости и способен отличить только такие явления, которые поднимаются выше уровня шумов, связанного с коридором ошибок.

В работе [11] для амплитуды, равной обратной предыдущей, исследуется вопрос о наличии полюса (рис. 11). В этом случае минимум оказался настолько крутым и узким, что не может быть никакой неопределенности в локализации полюса (в пределах малой окрестности ζ_{00}).

Критерий $M_0(L^2)$ [17]

χ^2 критерий и условие стабильности. Рассмотрим подробно, что понимается под условием

$$|f(\exp[i\theta]) - h(\exp[i\theta])|_{\Gamma_1} < \varepsilon(\exp[i\theta]) \quad (135)$$

прохождения амплитуды $f(\exp[i\theta])$ через коридор ошибок шириной $\varepsilon(\exp[i\theta])$.

Ясно, что $\varepsilon(\exp[i\theta])$ должна представлять стандартное отклонение пучка экспериментальных результатов в точке θ от их среднего значения $h(\exp[i\theta])$. С другой стороны, судя по соотношению (135), мы молчаливо предполагаем, что истинная амплитуда $f(\exp[i\theta])$ отклоняется на расстояние не более стандартного от среднего $h(\exp[i\theta])$ в каждой точке $\exp[i\theta]$. В действительности это имеет место только с какой-то вероятностью. В принципе надо было бы работать с различными коридорами ошибок, допуская для них различные вероятности, согласующиеся с гауссовым характером погрешностей в каждой точке, и рассматривая M_0 как случайную величину, зависящую от коридора ошибок*.

До сих пор никто не решил полностью эту задачу, но взамен была найдена процедура отыскания полюсов, которая хотя и не столь чувствительна, как предыдущая, но является более гибкой и, возможно, включает гауссовы погрешности подходящим образом.

* Положение осложняется еще тем, что сама $h(\exp[i\theta])$ — случайная величина.

Хорошо известно, что для гауссовых погрешностей основным критерием качества аппроксимации экспериментальных данных определенной функцией является метод χ^2 ; величина χ^2 — это сумма квадратов гауссовых случайных величин, распределение значений которой приводится во всех книгах. К примеру, если мы хотим узнать, согласуется ли данная амплитуда с функцией экспериментальных данных, вычислим

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{|f_i - h_i|^2}{\varepsilon_i^2}, \quad (136)$$

где i обозначает экспериментальные точки, и сравним полученное значение с некоторым заранее известным значением χ_0^2 . Если $\chi^2 < \chi_0^2$, то амплитуда считается хорошей аппроксимацией, если же $\chi^2 > \chi_0^2$, то амплитуда отвергается с вероятностью, находящейся в таблицах значений χ^2 -распределения с n степенями свободы.

Имея в виду это обстоятельство, интересно было бы взять в качестве коридора ошибок для амплитуды f предел выражения (136) при бесконечном увеличении номера экспериментальных точек * [18, 19].

Таким образом, будем рассматривать все аналитические в единичном круге функции f , удовлетворяющие

$$\frac{1}{L_1} \int_{\Gamma_1} d\theta \rho(\theta) \frac{|f(\exp[i\theta]) - h(\exp[i\theta])|^2}{\varepsilon^2(\theta)} \leq \chi_0^2 \quad (137)$$

(коридор ошибок в норме L^2), т. е. класс всех «гипотез», оказывающихся верными согласно данному уровню достоверности. Здесь L_1 означает полную длину кривой Γ_1 и используется для нормировки, а $\rho(\theta)$ представляет плотность экспериментальных точек для угла θ .

Надо обратить внимание на следующий факт [20]: существуют, конечно, аналитические в единичном круге функции, аппроксимирующие $h(\exp[i\theta])$ с произвольной, наперед заданной точностью в смысле наименьших квадратов (137), но можно ожидать, что они будут отличаться сколь угодно сильно друг от друга в точках, расположенных вне Γ_1 . Следовательно, снова нужно условие стабильности, которое будет выбрано подходящим образом

* Это сказано не очень строго. Во-первых, предел выражения (136), когда $n \rightarrow \infty$, не является интегралом в обычном смысле, так как класс допустимых функций слишком широк, чтобы существовал предел интегральных сумм. С другой стороны, простое написание интегрального символа подразумевает сильные ограничения для гистограммы h . Фактически интеграл (137) не удовлетворяет никакому простому распределению, когда h рассматривается как случайная величина. Распределение зависит существенным образом от класса, которому принадлежит h по предположению.

для этой конкретной задачи. Именно, можно показать, что множество функций, удовлетворяющих кроме (137) и интегральному условию ограниченности

$$\frac{1}{L_2} \int_{\Gamma_2} d\theta g(\theta) |f(\exp[i\theta])|^2 \leq \mathcal{M}^2, \tag{138}$$

является слабо компактным в гильбертовом пространстве H^2 (пространство аналитических в единичном круге функций с интегрируемым квадратом модуля на окружности). Функция $g(\theta)$ в (138) — это весовая функция, которая может отражать ту или иную конкретную физическую ситуацию. Соотношение (138) имеет место в физически интересных случаях в форме интегральной границы Фруассара или в форме других интегральных мажорант.

Критерий нахождения полюсов [17]. Теперь для того, чтобы использовать рассуждения о способах нахождения полюсов, приведенные выше, нам придется найти способ вычисления минимального значения параметра \mathcal{M}^2 (138) и \mathcal{M}_0^2 , для которых класс функций, удовлетворяющих (137) и (138), еще не пуст *.

Для этого сначала сведем задачу к задаче с постоянной шириной коридора ошибок в (137) и с постоянной (единичной) весовой функцией (138) при помощи уже известной функции типа Карлемана; ее модуль будет $\sqrt{\rho(\theta)}/\varepsilon(\theta)$ на Γ_1 и $1/\sqrt{g(\theta)}$ на Γ_2 . Это не изменяет значений \mathcal{M}^2 и χ_0^2 , но позволяет написать условия (137) и (138) в более простой форме:

$$\frac{1}{L_1} \int_{\Gamma_1} d\theta |\tilde{f}(\exp[i\theta]) - \tilde{h}(\exp[i\theta])|^2 \leq \chi_0^2; \tag{139}$$

$$\frac{1}{L_2} \int_{\Gamma_2} d\theta |\tilde{f}(\exp[i\theta])|^2 \leq M^2. \tag{140}$$

Предположим, что теперь разлагаем $\tilde{h}(\exp[i\theta])$ в ряд по полиномам $P_n(\exp[i\theta])$ ортогональным на Γ_1 :

$$\tilde{h}(\exp[i\theta]) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\exp[i\theta]) \tag{141}$$

и обрываем ряд на достаточно большом номере N , чтобы иметь хорошее приближение $\tilde{h}(\exp[i\theta])$ по норме L^2 на Γ_1 :

$$\left\| h - \sum_{n=1}^N a_n P_n(\exp[i\theta]) \right\|_{L^2}^2 \equiv \|h\|_{L^2}^2 - \sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \chi_0^2/10. \tag{142}$$

Эти конечные суммы (для различных N) аналитичны в единичном круге (на самом деле во всей конечной плоскости ζ) и дают струк-

* В общем случае M_0^2 не равно нулю, как было показано выше, принимая во внимание слабую компактность множества, подчиняющегося условиям (137) и (138).

туру сингулярностей $h(\zeta)$, когда $N \rightarrow \infty$. Те суммы

$$f_N(\zeta) \equiv \sum_{n=1}^N c_n P_n(\zeta), \tag{143}$$

которые для каждого N должны подчиняться дополнительному условию

$$\frac{1}{L_2} \int_{\Gamma_2} d\theta |f_N(\exp[i\theta])|^2 < \mathcal{M}^2, \tag{144}$$

вероятно, останутся аналитическими также в пределе $N \rightarrow \infty$, и, таким образом, по мере того как N растет, они исчерпают множество всех аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих (140) [17].

Напишем теперь условия (139) и (140) в конечномерной форме, используя обрезанные выражения (141) и (143). Тогда условия, которым должны удовлетворять коэффициенты, будут:

$$\sum_{i=1}^N (c_i - a_i)^2 \leq \chi_N^2 = \chi_0^2 - \chi_0^2/10; \tag{145}$$

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij} c_i c_j \leq \mathcal{M}^2, \tag{146}$$

где

$$A_{ij} \equiv \frac{1}{L_2} \int_{\Gamma_2} d\theta P_i^*(\exp[i\theta]) P_j(\exp[i\theta]).$$

Заметим, что A_{ij} не зависят от конкретного вида гистограммы h , а только от геометрии ансамбля в N -мерном пространстве значений коэффициентов c_i . Неравенство (145) — это шар с центром в $\{a_i\}$ и радиусом χ_N , в то время как условие стабильности (140), преобразованное теперь к виду (146) — это внутренность эллипсоида* с центром в начале координат (рис. 12). Геометрически очевидно, что если χ_N^2 достаточно мало, чтобы эллипсоид не содержал шара, то можно найти такое значение \mathcal{M}^2 , которое сделает эллипсоид касательным к шару (см. рис. 11). Это значение, которое обозначим \mathcal{M}_{0N}^2 , представляет минимальное значение \mathcal{M}^2 , ниже которого не существует полиномов до N -ой степени включительно, удовлетворяющих условию (145) (и ограниченных постоянной $\mathcal{M} < \mathcal{M}_{0N}$). Теперь точность аппроксимации $h(\exp[i\theta])$ полиномами $P_n(\exp[i\theta])$ возрастает с увеличением N , и можно ожидать, что ряд значений \mathcal{M}_{0N} будет стремиться к величине \mathcal{M}_0 исходной задачи. Ясно, что ряд \mathcal{M}_{0N} — монотонно убывающий, так как члены ряда суть нижние грани возрастающих, вложенных друг в друга множеств. Ясно также, что ряд

* Поскольку условие (140), из которого следует (146), является положительно определенным.

ограничен снизу нулем, так что он фактически сходится. То, что пределом ряда действительно является \mathcal{M}_0 , строго доказано в работе [17].

Фактическое вычисление \mathcal{M}_{0N} (условие касания) — простая задача на экстремум со связью, которую можно решить методом множителей Лагранжа. Это значение равно минимальному значению квадратичной формы (146) для c_i , лежащих на сфере (145)*.

Прежде чем перейти к вычислениям, удобно ввести новые полиномы, ортогональные на Γ_1 и на Γ_2 (такие полиномы существуют

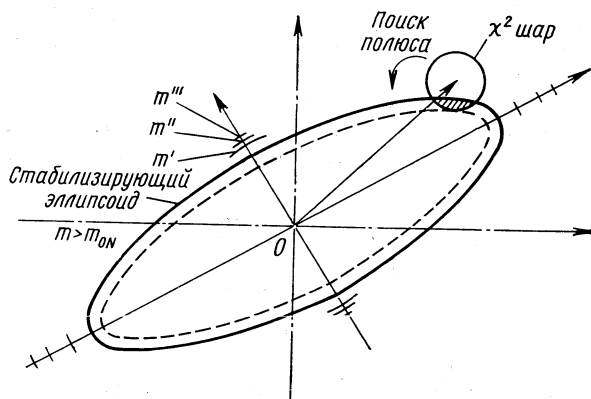


Рис. 12. Поиск полюса при помощи m_0 :

m -гиперэллипсоиды становятся касательными к χ^2 -гиперсфере в N -мерном линейном пространстве, когда $m = m_{0N}$. Заштрихованная область показывает разрешенные амплитуды согласно (137) и (138).

для каждого конечного N), и преобразовать условия (145) и (146) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N (c_i - a_i)^2 \leq \chi_N^2; \quad (147)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i c_i'^2 \leq \mathcal{M}^2. \quad (148)$$

Заметим, что коэффициенты λ_i определяются только коэффициентами A_{ij} , которые можно вычислить раз и навсегда, так как они не зависят от гистограммы h . Далее строят функцию Лагранжа

$$L(c') \equiv \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i'^2 + \mu \left(\sum_{i=1}^N (c_i - a_i)^2 - \chi_N^2 \right) \quad (149)$$

* Свойство выпуклости выражений (145) и (146) гарантирует то, что минимум находится именно на сфере, а не внутри шара.

и действуют обычным образом, приравнивая частные производные к нулю, получают алгебраическое уравнение для μ , которое, оказывается, имеет только один положительный корень. Это и есть то значение μ , которое нам необходимо, так как для случая минимума множитель Лагранжа в (149) положителен.

Для нахождения полюсов поступают следующим образом: выбирают достаточно большое значение N (уже при $N \sim 30$ наблюдаются определенные явления) и находят раз и навсегда для всех точек z_0 соответствующий набор ортогональных многочленов. Потом для каждой точки z_0 используют обрезанное представление для модифицированной функции экспериментальных данных в терминах определенных ортогональных многочленов, а затем решают простое алгебраическое уравнение. Эта процедура может оказаться выгоднее, чем вычисление M_0 из уравнения (132).

Результаты и геометрическая интерпретация. Рассмотренный выше метод нахождения полюсов был применен к той же модельной амплитуде, что и метод M_0 , и полученные результаты представлены на рис. 13. Минимум здесь уже не так резко выделен; это является следствием того факта, что использованное множество функций было выбрано шире, чем соответствующее множество, использованное для вычисления M_0 .

Было бы интересным повнимательнее рассмотреть геометрическую картину, когда ищут полюса и N остается конечным. Умножение функции экспериментальных данных h в каждой точке ζ_0 на множитель Бляшке $B_{\zeta_0}(\zeta)$ изменяет ее коэффициенты разложения по ортогональным многочленам, другими словами, изменяет положение центра шара. С другой стороны, за счет единичного модуля Бляшке — множителя на окружности — эллипсоид стабильности не меняет свой «радиус» M . Таким образом, поиск полюса — это движение шара вокруг эллипсоида и изменение объема их пересечения при каждом значении ζ_0 . Ясно, что именно в таком пересечении находятся допустимые амплитуды и, наоборот, каждая точка $\{c_i\}$ из этого пересечения представляет амплитуду, согласующуюся с условиями (145) и (146). Таким

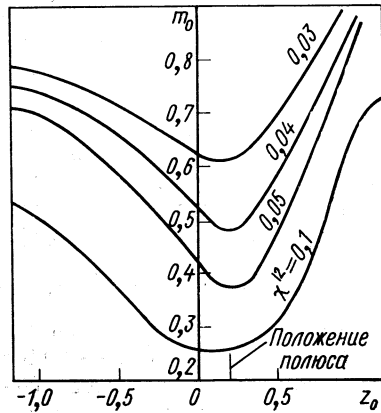


Рис. 13. Зависимость m_0 от z_0 для разных коридоров ошибок согласно критерию наименьших квадратов при $N = 27$.

Если предполагается, что амплитуды имеют полюс, то наиболее вероятное его положение совпадает с истинным положением при $z_0 = 0,234$.

образом, вероятностная интерпретация, предложенная выше для разности $\mathcal{M} - \mathcal{M}_0(\xi_0)$, здесь лучше обоснована.

Поиск полюсов с помощью критерия M_0^2 имеет также преимущество при рассмотрении различных погрешностей для действительной и мнимой частей амплитуды [17, 21] *.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Было рассмотрено уже несколько возможных приложений критерия M_0 . Основной идеей была проверка совместимости некоторых данных или гипотез с требованием аналитичности вычисления сначала M_0 и последующего сравнения его значения с уже имеющимся ограничением, полученным с помощью специфических гипотез и аналитичности.

$\pi - N$ -рассеяние вперед и кроссинг-симметрия. Первым применением критерия M_0 была проверка согласованности между экспериментальными данными для $\pi - N$ -рассеяния вперед и общепризнанными гипотезами аналитичности и кроссинг-симметрии [22]. Чтобы проиллюстрировать сущность метода, рассмотрим амплитуду зарядово-обменной реакции $\pi - N$ -рассеяния вперед:

$$F^-(\omega) = A^-(\omega) + \omega B^-(\omega) = (F_{\pi-p} - F_{\pi+p})/2, \quad (150)$$

где ω — энергия пиона в лабораторной системе отсчета в единицах пионной массы; $F^-(\omega)$ — действительная аналитическая функция в ω -плоскости с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ за исключением борновского полюса-нейтрона. Кроме того, в силу кроссинг-симметрии между каналами s и u

$$F^-(\omega) = -F^-(-\omega). \quad (151)$$

Так как $F^-(\omega)$ оказалась антисимметричной, то она должна иметь нуль в начале координат, а ее значения на левом разрезе можно прямо определить по измеренным значениям на правом разрезе. Предположим теперь, что мы забыли обо всем этом и что нам известны только значения амплитуды на правом разрезе в форме функции данных $h(\omega)$. Тогда с помощью неоднократно используемого нами рассуждения можно показать, что для согласования $h(\omega)$ с нулем $F^-(\omega)$ при $\omega = 0$ нужно, чтобы модифицированная функция данных $h(\omega)/B_{\omega_0}(\omega)$ приводила к большим значениям M_0 , когда ω_0 далеко от нуля, и к малым значениям M_0 в окрестности точки $\omega_0 = 0$. Кроме того, в силу кроссинг-симметрии между правым и левым разрезами мы ожидаем, что в окрестности $\omega = 0$ M_0 будет ниже настоящего M ; M_{phys} — максимальное значе-

* Для ознакомления с задачей экстраполяции с различными погрешностями отсылаем читателя к работе С. С. Росса [21], который первым рассматривал этот вопрос.

ние модуля на Γ_1 . На Γ_2 максимум модуля должен быть по крайней мере таким же большим, как M_{phys}^* . Так что опять получаем график $M_0(\omega_0)$.

Между порогом и энергией 1100 Мэв функция данных была взята из известных параметризаций типа эффективного радиуса, в области энергий 1100 и 2200 Мэв — была построена из имеющихся фаз и параметров неупругости, а для энергии выше 2200 Мэв мнимая часть была определена с помощью данных по полному сечению рассеяния, действительная же часть — из измерений кулоновской интерференции [23].

Метод оказался очень чувствительным по отношению к выбираемой ширине $\varepsilon(\omega)$ коридора ошибок. Обычное стандартное отклонение оказалось слишком сильным ограничением, и величина M_0 не могла быть ниже значения M_{phys} в точке $\omega_0 = 0$. Все-таки, выбирая различные оценки для $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon(\omega) = \sum_l \left\{ \left| \frac{\partial F_l}{\partial \delta_l} \right| |\Delta \delta_l| + \left| \frac{\partial F}{\partial \eta_l} \right| |\Delta \eta_l| \right\}, \quad (152)$$

здесь δ_l — фазы; η_l — соответствующие параметры неупругости, получаем графики (рис. 14), которые в самом деле указывают на резкое падение значений M_0 вокруг точки $\omega = 0$, и соответствующее значение M_0 оказывается меньше, чем M_{phys} .

Правила сумм при конечных энергиях (FESR). В настоящее время разрабатывается другое приложение [24] — так называемые абсолютно оптимальные правила сумм при конечных энергиях, FESR — это просто требование, чтобы данные при высоких энергиях (параметризация Редже) являлись бы аналитическим продолжением данных при низких энергиях (область резонансов). Предположим, что поведение при больших энергиях дается двумя полюсами Редже:

$$A(z) \sim c_1 R_1(z) + c_2 R_2(z),$$

* Γ_2 в этом случае состоит из дальнейшей области правого разреза вместе со всем левым разрезом.

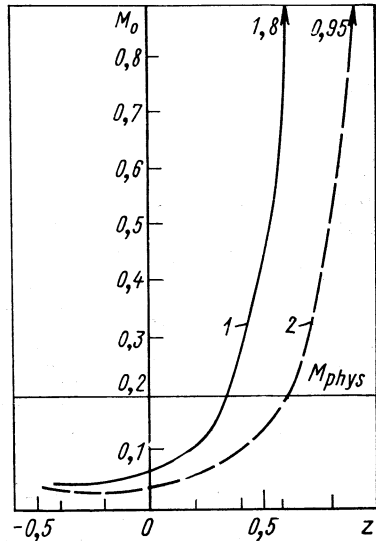


Рис. 14. Применение критерия M_0 к πN -рассеянию:

$$1 - \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}; \quad 2 - \varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_I.$$

где c_1 и c_2 — константы связи траекторий Редже; $R_1(z)$ и $R_2(z)$ — соответствующие редже-члены; при средних энергиях предположим существование такой постоянной M , при которой

$$|A(z)| < M, \quad (153)$$

в то время как при низких энергиях

$$|A(z) - \text{резонансы}(z)| < \varepsilon(z). \quad (154)$$

Тогда, используя критерий M_0 , можно поставить два вопроса: 1) какое минимальное значение M в области средних энергий совместимо с требованиями аналитичности, с данной резонансной частью, шириной $\varepsilon(z)$ коридора ошибок, и данным редже-поведением при высоких энергиях и 2) рассматривать второй полюс Редже как погрешность в процедуре аппроксимации данных одним полюсом Редже, а потом найти наименьшее значение константы связи c_2 , совместимое с условиями (153) и (154).

Другим исследователям [25] удалось, используя не этот оптимальный подход, а простые взвешенные дисперсионные соотношения, уменьшить пределы погрешностей в подгонке Редже. Отметим, что указанный выше метод называется абсолютно оптимальным, так как никакой другой метод не сможет дать более правильных ограничений на используемые параметры, если исходить только из требования аналитичности.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИНАМИЧЕСКИМ СХЕМАМ

Тавтология и оптимизация уравнений N/D [26]

Уравнения N/D . Одна из важных задач физики элементарных частиц — это построение парциальной амплитуды по данным на левом разрезе (эквивалент потенциала сил), удовлетворяющей условию унитарности на правом разрезе:

$$\text{Im } a_l(s) = \rho(s) |a_l(s)|^2, \quad (155)$$

где $\rho(s)$ — положительный кинематический множитель. Это делается обычно с помощью уравнений N/D , которые, как известно, позволяют найти амплитуду во всей комплексной плоскости с разрезом по ее скачку на левом разрезе. На практике*, однако, отсутствие информации о дальнейшей области левого разреза может привести к тому, что два решения, порожденные потенциалами равными до какого-то отрицательного значения s , которое может быть достаточно велико, отличаются сколько угодно друг от друга во внутренних точках области (из-за различных функций,

* Недавно в связи с работами Аткинсона [27] по бутстрапу вновь возник интерес к уравнениям N/D с полными начальными данными на левом разрезе как к промежуточной ступени в такой программе.

которые можно задавать произвольным образом на дальней области левого разреза).

Для стабилизации задачи необходимо два условия: 1) будем использовать незаслуженно игнорируемую информацию о действительной части амплитуды на левом разрезе; в самом деле, в релятивистских задачах, в отличие от задач потенциального рассеяния обе части амплитуды — действительная и мнимая — определены с погрешностями. Это — результат экстраполяции из физической области кроссинг-процесса. Следовательно, в дальнейшем будем предполагать, что действительная часть известна, и таким образом

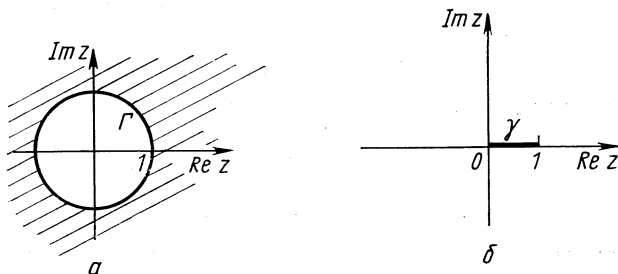


Рис. 15. Область голоморфности для $N(z)$ (а) и $D(z)$ (б).

получим большую свободу в обращении с дисперсионными соотношениями; 2) будем предполагать ограниченность амплитуды на дальней области левого разреза, которая сделает задачу стабильной*.

С помощью конформного отображения перейдем к более удобной для дальнейшего области — круг с разрезом от нуля до единицы; при этом левый разрез переходит на окружность, а правый — на разрез от нуля до единицы (рис. 15).

Теперь надо учесть некоторые специфические особенности. Необходимо в явном виде выделить z^l -пороговое поведение для l -й парциальной амплитуды, и, кроме того, предположим, что в исходной переменной s величина $a_l(s)$ стремится к нулю, как $1/s$ при больших значениях s , или, что то же самое, при $z \rightarrow 1$. Таким образом, определяем «приведенную» парциальную амплитуду

$$A_l(z) \equiv a_l(z)/[z^l(1-z)^2]. \tag{156}$$

Начальные данные для наших уравнений содержатся в «приведенной» функции данных $\mathcal{A}_l(z)$, следовательно, амплитуда $A_l(z)$

* На правом разрезе условием стабильности является унитарность. Стабильность экстраполяции на разрез обеспечивается подразумеваемой гельдеровской непрерывностью $N(z)$ и $D(z)$.

подчиняется условию

$$|A_l(z) - \mathcal{A}_l(z)|_{\Gamma_1} < \varepsilon(z) \quad (157)$$

на Γ_1 (часть левого разреза), где $\mathcal{A}_l(z)$ известна и

$$|A_l(z)|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} < M, \quad (158)$$

на остальной части $\Gamma \setminus \Gamma_1$ левого разреза. Как это делалось много раз до сих пор, условия (157) и (158) можно преобразовать в одно условие для всей Γ с помощью известной функции типа Карлемана. Обозначая снова соответствующие произведения $A_l(z)$ и \mathcal{A}_l на функцию Карлемана $\tilde{A}_l(z)$ и $\tilde{\mathcal{A}}_l(z)$ перепишем (157) и (158) в виде:

$$|\tilde{A}_l(z) - \tilde{\mathcal{A}}_l(z)|_{\Gamma} < \varepsilon. \quad (159)$$

Условие унитарности (155) переходит в следующее:

$$\operatorname{Im} \tilde{A}_l(z) = \tilde{\rho}_l^1(z) |\tilde{A}_l(z)|^2, \quad (160)$$

где

$$\tilde{\rho}_l^1(z) \equiv z^l (1-z)^2 \rho(z)/c(z) = 2z^l (1-z')^2 \sqrt{z}/(1+z)^*. \quad (161)$$

Забудем теперь на время о погрешностях и напишем уравнения N/D для $\tilde{A}_l(z)$ в этой специальной области. Можно легко доказать [26], что любую мероморфную в разрезанном единичном круге функцию $\tilde{A}_l(z)$ можно представить в форме:

$$\tilde{A}_l(z) = N(z)/D(z), \quad (162)$$

где $N(z)$ голоморфна во всем единичном круге; $D(z)$ голоморфна во всей z -плоскости с разрезом между 0 и 1, за исключением полюсов (полюса KDD), которые выберем лежащими на действительной оси. $D(z)$ нормирована таким образом, что $D(\infty) = 1$. Предположим пока, что D не имеет полюсов. Напишем дисперсионные соотношения для $N(z)$ и $D(z)$:

$$N(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z''|=1} dz'' \frac{\tilde{A}_l(z'') D(z'')}{z'' - z'}; \quad (163)$$

$$D(z) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\operatorname{Im} D(z')}{z' - z} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l^1(z') N(z')}{z' - z}, \quad (164)$$

где во втором равенстве для $D(z)$ было использовано условие унитарности: $\operatorname{Im} D = -\tilde{\rho}_l^1 N$. Подставляя (163) в (164), получаем интегральное уравнение для $D(z)$:

$$D(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z''|=1} dz'' \tilde{A}_l(z'') G_z(z'') D(z''), \quad (165)$$

* Последнее равенство верно для рассеяния одинаковых бесспиновых частиц единичной массы.

где

$$G_z(z'') \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{(z' - z)(z' - z'')} . \quad (166)$$

Если на окружности задано $\tilde{A}_l(z'')$, то из (165) можно найти $D(z)$ на окружности.

Нетривиальные тавтологии. При абсолютно точных данных решение уравнения (165) дает такое $D(z)$, что выполняется соотношение: $\tilde{A}_l(z'') D(z'') = N(z'')$ в соответствии с методом вывода уравнения (165), т.е. $\tilde{A}_l(z'') D(z'')$ — граничные значения аналитической в единичном круге функции. Это в свою очередь означает, что если добавить к $G_z(z'')$ в (165) функцию $F_z(z'')$ голоморфную по z'' во всем единичном круге (и произвольной зависимости от z), то решение останется тем же. В самом деле, в силу теоремы Коши добавочный член обратится в нуль после интегрирования, следовательно, (165) не изменится.

Это замечание напоминает рассуждения об оптимизации дисперсионных соотношений. Там тоже мы имели дело с дисперсионным соотношением, которое оставалось верным, пока данные обладали каким-то вполне определенным свойством (в разд. 2 требовалось, чтобы данные являлись граничными значениями аналитической функции; здесь же они должны быть граничными значениями мероморфных и унитарных амплитуд *). Оказалось, что существует бесконечно много строго эквивалентных способов, которые дают одни и те же результаты в случае точных данных, но которые при неточных данных могли давать результаты, произвольно отличные друг от друга.

Таким образом, здесь будем искать то тавтологическое уравнение [ту функцию $F_z(z'')$], которое наименее чувствительно к экспериментальным погрешностям.

Важными для нас оказываются только те тавтологии, которые нарушаются неточностями в начальных данных. Те же из них, которые фактически остаются эквивалентными, несмотря на неточность данных, не представляют никакого интереса для оптимизации такого рода и рассматриваться не будут. К числу последних относится, например, выбор точки вычитания в уравнении для $D(z)$, как показано в работе [26]. Нетривиальные тавтологии же исчерпаны всеми функциями $F_z(z'')$ (голоморфными по z'' в единичном круге и произвольно зависящими от z).

Оптимальная тавтология. Теперь обратимся к явному построению оптимальной тавтологии, следовательно, возвращаемся к случаю постоянных погрешностей, т.е. условию (159). Потребуем,

* И нужного класса КДД с правильными вычетами.

чтобы функция $\mathcal{D}(z)$, полученная с помощью $\tilde{\mathcal{A}}_l(z)$, была наиболее близка к истинной функции $D(z)$, найденной с помощью $\tilde{A}_l(z)$. По крайней мере вдали от собственных значений это имеет место, если ядра точного и приближенного уравнений

$$D(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' \tilde{A}_l(z'') G_z(z'') D(z'') \equiv 1 + \oint dz'' K_z(z'') D(z''); \quad (167)$$

$$\mathcal{D}(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' \tilde{\mathcal{A}}_l(z'') G_z(z'') D(z'') \equiv 1 + \oint dz'' \mathcal{K}_z(z'') \mathcal{D}(z'') \quad (168)$$

наиболее близки друг к другу. Для того чтобы выразить количественно сказанное выше, введем в рассмотрение пространства Банаха $C(\Gamma)$ комплекснозначные функции, непрерывные на границе Γ . В этом пространстве норма элемента D

$$\|D\|_c \equiv \sup_{z \in \Gamma} |D(z)|. \quad (169)$$

Тогда можно доказать [26], что норма интегрального оператора $K_z(z'') : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ дается выражением

$$\|K\|_c \equiv \sup_{z \in \Gamma} \oint_{|z''|=1} |dz''| |K_z(z'')|, \quad (170)$$

так что норма разности ядер будет следующая:

$$\|K - \mathcal{K}\|_c = \sup_{\substack{z \in \Gamma \\ (|z|=1)}} \frac{1}{2\pi} \oint |dz''| |\tilde{A}_l(z'') - \tilde{\mathcal{A}}_l(z'')| |G_z(z'') + F_z(z'')|. \quad (171)$$

Впрочем, так как истинная амплитуда $\tilde{A}_l(z'')$ неизвестна, нам придется считаться с наихудшим случаем и взять в качестве объекта минимизации верхнюю грань правой части (171) по отношению ко всем аналитическим и унитарным амплитудам, согласованным с коридором ошибок (159), т. е.

$$\sup_{\tilde{A}_l} \|K - \mathcal{K}\|_c \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \sup_{z \in \Gamma} \oint dz'' |G_z(z'') + F_z(z'')|. \quad (172)$$

Это выражение показывает, что задача выбора оптимальной тавтологии эквивалентна задаче нахождения:

$$\inf_F \sup_{z \in \Gamma} \|G_z + F_z\|_{L^1} \equiv \inf_F \sup_{z \in \Gamma} \frac{1}{2\pi} \oint |dz''| |G_z(z'') + F_z(z'')|. \quad (173)$$

Этот минимум не может быть равен нулю, так как это означало бы $G_z(z'') = -F_{0z}(z'')$ на всей окружности. Это невозможно из определения: $F_{0z}(z'')$ аналитична в единичном круге, в то время как $G_z(z'')$ имеет там разрез от 0 до 1.

Обычно экстремальные задачи типа (173), т.е. задачи нахождения наилучшего аналитического приближения по какой-то норме

Однако прежде чем использовать принцип дуальности, покажем, что:

$$m^0 \equiv \inf_F \sup_{z \in \Gamma} \|G_z + F_z\|_{L^1} = \sup_{z \in \Gamma} \inf_F \|G_z + F_z\|_{L^1}. \quad (175)$$

Это далеко не тривиальное равенство доказано в работе [26].

Теперь обратимся снова к правой части (174). Так как скачок $G_z(z'')$ на разрезе суть $\tilde{\rho}_l(z'')/(z''-z')$, интеграл можно легко вычислить:

$$\begin{aligned} m^0 &\equiv \sup_{z \in \Gamma} \inf_F \|G_z + F_z\|_{L^1} = \sup_{z \in \Gamma} \sup_{h \in H^\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \oint dz'' h_z(z'') G(z'') \right| = \\ &= \sup_{z \in \Gamma} \sup_{\substack{h \in H^\infty \\ \|h\| \leq 1}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z'') h_z(z')}{z' - z} \right| \leq \\ &\leq \sup_{z \in \Gamma} \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{|z' - z|} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{1 - z'}. \end{aligned} \quad (176)$$

Существенным для всего доказательства является то обстоятельство, что верхняя граница для m^0 в (176), т. е. $(1/\pi) \times \int_0^1 dz' \tilde{\rho}_l(z')/(1-z')$, действительно достигается для какого-то значения z на Γ , именно для $z = 1$. В самом деле по определению:

$$\begin{aligned} \sup_z \inf_F \|G_z + F_z\|_{L^1} &\equiv m^0 \geq [\inf_F \|G_z + F_z\|_{L^1}]_{z=1} = \\ &= \left\{ \sup_{\substack{h \in H^\infty \\ \|h\| \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \oint dz'' h_z(z'') G_z(z'') \right| \right\}_{z=1} = \\ &= \sup_{\substack{h \in H^\infty \\ \|h\| \leq 1}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z') h_1(z')}{1 - z'} \right|. \end{aligned} \quad (177)$$

Но последнее выражение ограничено величиной

$$(1/\pi) \int_0^1 dz' \tilde{\rho}_l(z')/(1-z')$$

и достигает ее для $h_1(z') \equiv 1$. Таким образом, получаем

$$m^0 \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{1 - z'},$$

которое вместе с (182) дает

$$m^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{1-z'}. \quad (178)$$

Теперь можно найти оптимальное F , соответствующее этому значению $z = 1$. Выпишем то, что нам удалось доказать [здесь $F_0(z'')$ обозначает оптимальную функцию]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint |G_{z=1}(z'') + F_0(z'')| dz'' = \\ & = m_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{1-z'} \equiv \frac{1}{2\pi} \left| \oint dz'' G_{z=1}(z'') \right|. \end{aligned} \quad (179)$$

Но так как $F_0(z'')$ голоморфна в единичном круге, то ее интеграл Коши равен нулю, следовательно:

$$\left| \oint dz'' G_{z=1}(z'') \right| = \left| \oint dz'' [G_{z=1}(z'') + F_0(z'')] \right|. \quad (180)$$

Равенство между левой частью (179) и правой частью (180) возможно тогда и только тогда, когда $z'' [F_0(z'') + G_{z=1}(z'')]$ имеет постоянную фазу на всей окружности. Это позволяет определить оптимальную функцию $F_0(z'')$, и можно сразу написать оптимальное ядро для точки $z = 1$:

$$\begin{aligned} z'' [G_{z=1}(z'') + F_0(z'')] &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{(z'-1)(z'-z'')} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{(z'-1)z''(z'-1/z'')} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{z'-1} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz' \frac{\tilde{\rho}_l(z')}{1-z'} \mathcal{P}(z''; z'). \end{aligned} \quad (181)$$

Здесь $\mathcal{P}(z''; z')$ обозначает ядро Пуассона для единичного круга, которое уже было использовано выше [см. (84)]. Для $z \neq 1$ можно показать, что та же функция $F_0(z'')$, служащая для построения ядра Пуассона, достигает границы m^0 [26], следовательно, оптимальность ядра Пуассона доказана для всех точек z на окружности.

Таким образом, приходим к замечательному выводу, что тавтологическое интегральное уравнение, имеющее наиболее стабиль-

ное решение по отношению к погрешности:

$$\mathcal{D}(z) = 1 - \frac{1}{2\pi^2 i} \oint \frac{dz''}{z''} \mathcal{D}(z'') \mathcal{A}_l(z'') c_0(z'') \times \\ \times \int_0^1 dz' \frac{\rho_l(z') \mathcal{P}(z'', z')}{c_0(z')(z' - z)}, \quad (182)$$

т.е. это уравнение получается из дисперсионных соотношений (163) для $N(z)$, если использовать взвешенное ядро Пуассона вместо ядра Коши. Таким образом, ядро Пуассона возникает опять в совершенно другом свете.

Полюса КДЦ и параметры неупругости [29]

Построение амплитуды. Если $\mathcal{D}(z)$ получено на окружности, можно использовать интегральное уравнение (182) как формулу для представления $\mathcal{D}(z)$ во всей плоскости с разрезом от 0 до 1. Соответствующее $\hat{\mathcal{N}}(z)$ находим с помощью оптимальной экстраполяции с ядром Пуассона, исходя из его граничных значений $\hat{\mathcal{A}}_l(z) \mathcal{D}(z)$, где $\mathcal{D}(z)$ — решение уравнения (182). Важно отметить, что полученное таким образом $\hat{\mathcal{N}}(z)$ не является аналитичным, следовательно, наилучшая аппроксимация амплитуды $\hat{A}_l(z)$, граничные значения которой суть $\mathcal{A}_l(z)$ (из-за наличия ядра Пуассона), тоже не является аналитичной:

$$\hat{\mathcal{N}}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c_0(z)} \oint_{\Gamma} \frac{dz'}{z'} \mathcal{P}(z''; z) (\mathcal{A}_l c_0 \mathcal{D})(z''). \quad (183)$$

Хотя $\hat{\mathcal{N}}(z)$ — наилучшая аппроксимация с точки зрения дисперсионных соотношений, в каждой внутренней точке желательно иметь аналитическую экстраполяцию амплитуды \hat{A}_l , имеющую в качестве знаменателя дроби \hat{N}/D решение уравнения (182). Это можно сделать аналитическим продолжением $\hat{N}(z)$ с действительной оси [29]:

$$\check{\mathcal{N}}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c_0(z)} \oint dz'' \frac{1 - z^2}{1 - zz''} \cdot \frac{\mathcal{A}_l(z'') c_0(z'') D(z'')}{z'' - z}. \quad (184)$$

Можно проверить непосредственно, что на унитарном разрезе значения $\check{\mathcal{N}}(z)$ совпадают со значениями $\hat{\mathcal{N}}(z)$. При отсутствии погрешностей $\hat{\mathcal{A}}_l(z) \equiv \tilde{A}_l(z)$ и $\check{\mathcal{N}}(z) \equiv \tilde{N}(z)$. Тем не менее требование аналитичности экстраполяции амплитуды приводит к тому, что ее граничные значения отличаются от исходной функции $\tilde{A}_l(z)$ на Γ_1 . (Здесь мы уже не имеем дела с ядром Пуассона.) На самом деле, это не должно слишком беспокоить нас, поскольку

может оказаться полезным в качестве критерия правильного выбора вычетов полюсов КДД.

«Острова» полюсов КДД. В самом деле, добавлением достаточного числа полюсов КДД к свободному члену в (182) возможно удастся добиться, чтобы аналитическая амплитуда $\tilde{A}_l(z)$ проходила через коридор ошибок (159). Таким образом, в отличие от обычного метода N/D , подробно рассмотренного в работе [30], где полюса КДД являются истинной неопределенностью, в нашем случае действительная часть амплитуды служит обратной связью и в тоже время средством для исключения некоторых неопределенных амплитуд. Ясно, что будем отбрасывать те амплитуды, которые не согласуются с условием на коридор ошибок (159). Заметим, что в предельном случае нулевых погрешностей неопределенность КДД исчезает полностью, так как построенная амплитуда может совпадать с функцией данных на окружности, если, и только если как номер, так и вычеты КДД полюсов угаданы точно*.

В случае конечных погрешностей можно найти так называемые «острова» для вычетов КДД полюсов. В самом деле, предполагая, что КДД полюса находятся на действительной оси вне единичного круга, можно представить соответствующее $\mathcal{D}(z)$ в виде линейной суперпозиции:

$$\mathcal{D}(z) = \sum_{i=1}^N g_i \mathcal{D}_i(z), \tag{185}$$

где g_i — вычеты КДД полюсов; $\mathcal{D}_i(z)$ — решения уравнения (182) со свободным членом, замененным на $1/(z - a_i)$. Тогда условие прохождения через коридор ошибок будет ограничивать набор возможных g_i следующим образом:

$$|\Delta(g_1, \dots, g_N; \tilde{z})| \equiv \left| c(z) \frac{\sum_{i=1}^N g_i \check{\mathcal{N}}_i(z)}{\sum_{i=1}^N g_i \mathcal{D}_i(z)} - c(z) \mathcal{A}_l(z) \right|_{\Gamma} =$$

$$= \left| \frac{\sum_{i=1}^N g_i [(\mathcal{A}_l c \mathcal{D}_i)_-(z) - (\mathcal{A}_l c \mathcal{D}_i)_-(1/z)]}{\sum_{i=1}^N g_i \mathcal{D}_i(z)} \right|_{\Gamma} \leq \varepsilon. \tag{186}$$

Символ $(...)_-$ обозначает часть отрицательных фурье-частот в разложении величины в скобках.

* Этого и следовало ожидать. Если будем использовать полные начальные данные (как действительную, так и мнимую часть) на левом разрезе и если погрешностей нет, то амплитуда полностью определена во всей разрезанной плоскости, следовательно, она должна иметь правильные вычеты.

В общем случае находят минимальный номер n_{\min} КДД полюсов, совместимых с (186). Когда $n > n_{\min}$, можно показать [29], что «острова» значений g_i становятся бесконечными (переходят в «материки»). Когда ищется набор $\{g_i\}$, который минимизирует левую часть (186), то надо учесть, что ее нельзя делать слишком малой. В самом деле, вспоминая рассмотрение величин ε_0 и M_0 выше, можно показать, что наименьшее расстояние от данной неаналитической функции $\tilde{\varphi}_l \equiv 1 + 2i \tilde{\rho}_l \tilde{\mathcal{A}}_l$, полученное с помощью аналитических и унитарных функций (S -матриц), — это решение ε_{00} уравнения:

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_0 [1/\varepsilon_{00}; \tilde{\varphi}_l]. \quad (187)$$

Сравнение уравнений (118а) и (187) поможет уяснить смысл величины ε_{00} . Уравнение (187) — это именно то условие, которому должно удовлетворять ε_{00} , чтобы соответствующее M_0 было равно единице (унитарная S -матрица).

Если при минимизации $|\Delta(g; z)|$ приходим к таким величинам g_i , что соответствующая матрица \tilde{S}_l отличается от исходной $\tilde{\varphi}_l$ меньше, чем на ε_{00} , то прозрачные состояния обязательно будут находиться на физическом листе.

Другие вопросы, связанные с собственными значениями интегральных операторов и с начальными связанными состояниями, а также их связь с КДД полюсами рассмотрены подробно в работе [29].

Параметры неупругости. Включение неупругостей в схему оптимизации требует определенной осторожности, когда используется параметризация Фруассара [31]. Это связано с тем, что внешнюю функцию, которая используется для включения параметра неупругости $\eta_l(\theta)$ в S -матрицу, надо выбрать таким образом, чтобы не нарушать ни нужного порогового поведения для l -й парциальной амплитуды, ни условия на коридор ошибок (159). Это можно сделать, если использовать свободу выбора значений амплитуды на той части левого разреза, где амплитуда неизвестна. Приведем здесь лишь результат, за доказательством отсылая читателя к работе [29]:

$$c_F(\zeta) = \exp \left\{ -\frac{W^l(\zeta)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\exp(i\theta) + \zeta}{\exp(i\theta) - \zeta} \ln \frac{\eta_l(\theta)}{W^l(\exp[i\theta])} \right\}, \quad (188)$$

где

$$W(\zeta) \equiv \frac{-1 + \sqrt{\frac{2(1+\zeta)^2}{1+\zeta^2} + s_M}}{4+s_M}; \quad (189)$$

$$1 + \sqrt{\frac{2(1+\zeta)^2}{1+\zeta^2} + s_M} / (4+s_M)$$

s_M — начало неизвестной части левого разреза в s -плоскости.

Внешняя функция определена в ζ -плоскости (см. рис. 8) с унитарным разрезом на правой полуокружности. Параметр $\eta_l(\theta)$ в (188) равен единице вне области неупругости. После введения $c_F(\zeta)$ можно решать уравнения N/D , как раньше для амплитуды, полученной из Sc_F , которая удовлетворяет обычному условию унитарности (155).

Ту же самую процедуру оптимизации можно использовать при решении матричных уравнений N/D [32]. Надо только позаботиться о правильном определении внешней функции, которая делает постоянной ширину коридора ошибок. Это построение подробно описано в работе [29].

Оптимальные унитарные парциальные амплитуды

Метод N/D , даже использованный оптимальным образом, как было показано в предыдущем разделе, все еще страдает недостатком, состоящим в том, что аналитичность получающейся амплитуды можно проверить только по окончании вычислений и почти невозможно контролировать особенности, которые могут при этом возникать. Также ограничения на вычеты полюсов КДД получают а posteriori и должны быть связаны с ограничениями типа ϵ_0 . Представляется интересным тогда дать построение S -матрицы для s -волны, свободное от предыдущих недостатков, как непосредственное приложение методов, развитых в разд. 2.

Потребуем

$$|S(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon, \quad \zeta \text{ на } \Gamma; \tag{190}$$

$$|S(\zeta)| = 1, \quad \zeta \text{ на } \gamma \tag{191}$$

(см. рис. 8). Коэффициенты неупругости и переменную ширину коридора ошибок можно включить с помощью соответствующих внешних функций.

Теперь легко видеть, как унитарность входит в нашу схему. Выше было показано, что для данного коридора ошибок, шириной ϵ на Γ , существует в классе всех аналитических функций, проходящих через этот коридор, функция с наименьшим максимальным значением модуля M_0 на правой полуокружности и более того, что модуль этой функции постоянен на правой полуокружности γ (и равен, конечно, M_0).

Вспомним, что M_0 — это решение уравнения (131). Таким образом, если экстремальная функция оказалась унитарной на γ (до постоянного множителя M_0), ограничим ϵ таким образом, чтобы соответствующий M_0 был равен единице. Так мы найдем, что наименьшее расстояние от данной функции $\varphi(\zeta)$ до унитар-

ной, аналитической S -матрицы суть решение уравнения

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_0 [1/\varepsilon_{00}; \varphi]. \quad (192)$$

Экстремальную функцию, соответствующую этому значению, можно потом найти шаг за шагом методом, изложенным в разд. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $A : F \rightarrow G$ — непрерывный, обратимый оператор и пусть F — компактное множество.

Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{g_n\} \subset G$ $g_n \rightarrow g \in G$. Так как A обратим, то существует оператор A^{-1} ; $G \rightarrow F$; пусть $f_n = A^{-1}g_n$.

Наша цель показать, что $\{f_n\}$ сходится к $A^{-1}g$. В силу того что множество F компактно, в $\{f_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_{h_n}\}$: $f_{h_n} \rightarrow f$, так как A — непрерывный оператор, то и ряд Af_{h_n} сходится к Af . Но $Af_{h_n} \equiv g_{h_n}$, а $\{g_n\}$ сходится к g , тогда каждая подпоследовательность $\{g_{h_n}\}$ будет сходиться к тому же пределу g : $g_{h_n} \rightarrow g$, и так как $Af = g$, то $f = A^{-1}g$. Если предел подпоследовательности $\{f_{h_n}\}$ оказался не зависящим от ее конкретного выбора, то $\{f_n\}$ также сходится, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
2. Ciulli I., Ciulli S., Fischer J. Nuovo cimento, 1962, v. 23, p. 1128.
3. Cutkosky R. Z., Deo B. B. Phys. Rev. Lett., 1968, v. 22, p. 1272.
4. Ciulli S. Nuovo cimento, 1968, v. 61, p. 787.
5. Walsh S. K. Interpolation and Approximation by Rational Functions. Amer. Math. Soc. Providence RI, 1956.
6. Ciulli S. Nuovo cimento, 1969, v. 62, p. 301.
7. Ciulli S., Nenciu G. Cut to cut Extrapolation, Lund Conference (June 1969); Comm. Math. Phys., 1972, v. 26, p. 237.
8. Zygmund A., Trigonometric Series, v. 1, ch. 2, theorem 10.8 Cambridge Univ. Press., 1959.
9. Ciulli S., Fischer J. Nucl. Phys., B, 1970, v. 24, p. 537.
10. Ciulli S., Nenciu G. Optimal Analytic Extrapolation. Coll. on Th. Phys. Prague 1970; J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1675.
11. Foias C., Nagy B. Sz. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris., 1968, v. 266, p. 493. Harmonic Analysis of Hilbert Spaces. North. Holland Publ. Amsterdam, 1970.
12. Nehari Z. Ann Math., 1957, v. 65, p. 153.
13. Адамян М., Аров Д. З., Крейн М. Г. «Функциональный анализ и его прил.», 1968, т. 2, (4), 1 1968, т. 2, (1), 1.
14. Schur I., Neine J. Angew Math., 1917, v. 147, p. 205.
15. Caprini I. e.a. Phys. Rev. D, 1972, v. 5, p. 1658.
16. Ciulli S., Nenciu G. Nuovo cimento A, 1972, v. 8, p. 735.
17. Sabba-Stefanescu I. Nucl. Phys. B, 1973, v. 56, p. 287.
18. Cutkosky R. E. Ann. Phys., 1969, v. 54, p. 110.
19. Pišust J., Presnajder P. Nuovo cimento A, 1971, v. 3, p. 603.
20. Diendoné J. Calcul Infinitesimal. Hermann, Paris. 1968, p. 319.
21. Ross G. G. Nucl. Phys. B, 1971, v. 31, p. 113.

22. Caprini I. *Nuovo cimento*, 1972, v. 5, p. 443.
23. Pilkuhn H. *Springer Tracts in Mod. Phys.*, 1970, v. 55, p. 239; Donnachie A., Kinsop R. G., Lovelace C. CERN preprint Th. 838, 1967, Foley K. J. *Phys. Rev.*, 1969, v. 181, p. 1775.
24. Caprini I., *Nuovo cimento, A*, 1974, v. 21, p. 236.
25. Elve Kjaer F., Pietarinen E. *Nucl. Phys. B*, 1972, v. 45, p. 621.
26. Ciulli S. e.a. *Phys. Rev., D*, 1973, v. 8, p. 455.
27. Atkinson D. e.a. *Phys. Rev. D*, 1972, v. 6, p. 2966.
28. Luenberger D. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley and Sons, 1969, Ch. 5.
29. Ciulli S. e.a. *Nucl. Phys. B*, 1974, v. 71, p. 269.
30. Lyth D. H. J. *Math. Phys.*, 1970, v. 11, p. 2646.
31. Froissart M. *Nuovo cimento*, 1961, v. 22, p. 191.
32. Bjorken J. D. *Phys. Rev. Lett.*, 1960, v. 44, p. 473.