

УДК 539.14

## УНИТАРНОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ В РЕАКЦИЯХ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ЧАСТИЦАМИ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

*А. М. Бадалян,  
Ю. А. Симонов*

Институт теоретической  
и экспериментальной физики, Москва

В обзоре ставится задача определения амплитуды рассеяния и развала с использованием информации, следующей из аналитичности и унитарности. Записан явный вид соотношений трехчастичной унитарности, в которых выделяются члены, линейные по трехчастичной амплитуде (*FSI*-унитарность) и квадратичные. В качестве примера исследованы случаи, когда трехчастичные соотношения унитарности можно разрешить в явном виде с помощью представления Гильберта — Шмидта. Кратко обсуждаются также и другие известные в литературе методы, использующие аналитичность и унитарность в реакциях рассеяния и развала.

In the review the problem is considered how to define the amplitude of scattering and break-up using the information coming from the analyticity and unitarity. The 3-body unitarity conditions are written explicit and the terms are separated which are linear in the 3-body amplitude (*FSI*-unitarity) and quadratic in it. As an example, we investigate the cases when 3-body unitarity can be solved explicitly by the use of the Hilbert-Schmidt representation. Short discussion is given of the other methods known in literature, in which the analyticity and unitarity for the scattering and break-up amplitudes were used.

### ВВЕДЕНИЕ

В этом обзоре делается попытка обобщить существующие результаты по использованию унитарности и аналитичности в теории ядерных реакций. Для реакций с двумя частицами в начальном и конечном состояниях имеется обширная литература [1, 2]. Поэтому главный упор в обзоре сделан на те методы, которые можно перенести на случай реакций с несколькими частицами в конечном состоянии. Даже и в этом случае литература весьма обширна, и здесь сосредоточено внимание в основном на реакциях, протекающих в малонуклонных системах. Для таких систем были выполнены точные расчеты, исходя из задан-

ного нуклон-нуклонного взаимодействия, и эти расчеты можно сравнить с приближениями, в которых унитарность и аналитичность учитываются более или менее полно, и тогда становится понятным, что необходимо учитывать в первую очередь, а что менее существенно.

Главный вопрос, который исследуется в настоящем обзоре, — это как построить амплитуды рассеяния и реакций  $2 \rightarrow 2$  и амплитуды развала  $2 \rightarrow 3$ , чтобы они удовлетворяли: соотношениям унитарности для двух и трех частиц одновременно и требованиям аналитичности, т. е. имели ближайшие особенности в нужных местах и обладали бы там правильным пороговым поведением.

Аналитические свойства амплитуды  $2 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  легче всего понять на языке нерелятивистских диаграмм Фейнмана [3], которые соответствуют ряду многократного рассеяния в теории Ватсона [4]. Наиболее полно аналитические свойства изучены для реакций в системе трех частиц, где диаграммы соответствуют последовательным итерациям уравнения Фаддеева [5].

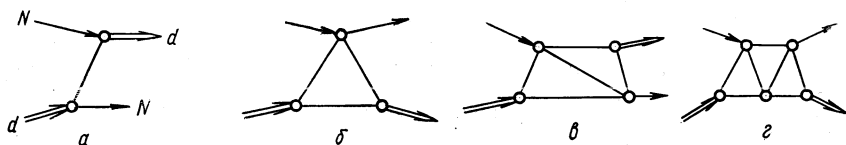


Рис. 1.

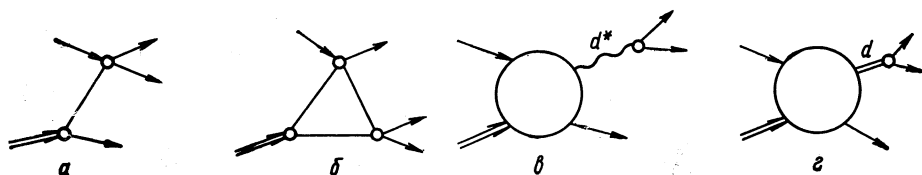


Рис. 2.

Самым важным следствием из рассмотрения нерелятивистских диаграмм является то, что новые особенности, вносимые все более сложными диаграммами, оказываются, во-первых, все более слабыми и, во-вторых, все более далекими. Этот факт служит краеугольным камнем теории прямых ядерных реакций [6], в которой для описания качественного хода амплитуды предлагается использовать одну или две наиболее простые диаграммы. Например, для реакции рассеяния и развала в системе  $n + d$  выбираются диаграммы, показанные на рис. 1, а и б, а также на рис. 2, а и б соответственно. При этом оказывается, что качественные особенности этих процессов передаются правильно, но количественное согласие в области малых энергий ( $> 40 \text{ Мэв}$ )

отсутствует. Для совсем малых энергий ( $\sim 1$  Мэв) различие в сечениях достигает двух порядков [7]. При энергиях  $\geq 100$  Мэв эти диаграммы в  $nd$ -системе дают и хорошее количественное описание. Последнее является спецификой малонуклонных систем — для реакции на тяжелом ядре учет одной диаграммы без взаимодействия в начальном и конечном состояниях даже при сколь угодно высокой энергии не дает количественно правильного результата.

Физическая причина неудовлетворительности описания с помощью простейших диаграмм довольно ясна, но различна для малонуклонных и многонуклонных систем. Для малонуклонных систем при малых энергиях существенно перерассеяние на тех же нуклонах, причем параметром (при изотропном рассеянии на каждом нуклоне) является величина  $fR^{-1}$ , где  $f$  — амплитуда рассеяния;  $R$  — расстояние между нуклонами мишени. При увеличении энергии вместе с уменьшением  $f$  возникает другой, еще более важный эффект — рассеяние идет на малые углы, и вероятность последующего рассеяния сильно уменьшается. Эти аргументы неприменимы к более тяжелым ядрам, где даже при рассеянии строго вперед частица встречает много других центров. Следовательно, в таких ядрах (грубо говоря, начиная с углерода) при малых энергиях важно и перерассеяние на одном и том же нуклоне, и рассеяние на всех остальных нуклонах, встречающихся на пути налетающей частицы. При больших энергиях (порядка нескольких сотен мегаэлектронвольт) только второй эффект существен, что и учитывается теорией Глаубера.

Существует три способа для построения амплитуды реакции, удовлетворяющей всем физическим требованиям:

1) использование феноменологического подхода и построение оптического потенциала для взаимодействия частицы с мишенью, параметры которого или чисто подгоночные, или используют теоретическую информацию;

2) динамический подход. Здесь исходим из заданного элементарного взаимодействия (нуклон-нуклонного) и решаем уравнение Шредингера или эквивалентные ему уравнения (Фаддеева, Фаддеева — Якубовского и др.) численно;

3)  $S$ -матричный подход [8]. В полной аналогии с теорией элементарных частиц будем считать, что знание особенностей амплитуды и требование унитарности позволяют построить амплитуду однозначным образом.

Ниже исследуется именно  $S$ -матричный подход. В дополнение к диаграммному методу используется унитарность и с ее помощью учитывается перерассеяние частицы на каждой из частиц мишени. Использование унитарности имеет совершенно разную специфику в следующих ситуациях: а) упругое рассеяние  $2 \rightarrow 2$ ; б) неупругое рассеяние  $2 \rightarrow 2'$ ; в) реакция  $2 \rightarrow n$ ,  $n \geq 3$ .

В случае а) унитарность даже в присутствии открытых неупругих каналов учитывается весьма просто: легко написать общий вид амплитуды, удовлетворяющей двухчастичной унитарности или для парциальных волн, или в представлении прицельных параметров, или в виде оптической теоремы для дисперсионных соотношений вперед и т. д. В случае б) имеем многоканальную двухчастичную задачу, которая обобщает формальное решение для случая а), вводя матрицу амплитуд, как это делается в теории  $R$ -матрицы в ядерных реакциях [1].

Некоторая специфика в случае б) возникает при использовании диаграммного подхода или приближения однократного неупругого взаимодействия [4]. Здесь, если вероятность неупругого взаимодействия много меньше вероятности упругого (пример — дифракционное возбуждение уровней ядер), достаточно бывает унитаризовать только начальное и конечное взаимодействия, рассматривая их как упругие взаимодействия. Это можно сделать как в рамках метода DWBA [9], так и в рамках  $S$ -матричной теории [10]. Если считать для реакции  $a + A \rightarrow b + B$  известными амплитуды упругого рассеяния  $a + A$  и  $b + B$  (или оптический потенциал, соответствующий этим каналам), то можно записать общий вид амплитуды этой неупругой реакции, унитарной по начальному и (или) конечному взаимодействиям [11].

Наконец, случай в) реакции  $2 \rightarrow n$ ,  $n \geq 3$  представляет наибольшие трудности. В настоящем обзоре ограничимся  $n = 3$ , имея в виду реакцию развала  $n + d \rightarrow n + n + p$  как первое конкретное приложение. Но будем формулировать задачу общим образом, так что результаты можно легко перенести на любые реакции вида  $2 \rightarrow 3$ . Главная трудность здесь заключается в том, чтобы удовлетворить одновременно и трехчастичным соотношениям унитарности (СУ), и двухчастичным. В последнее время развивались различные методы, позволяющие учесть СУ для двух и трех частиц. Первый метод был предложен в работах [7, 12—15], и его проверили для реакций  $nd \rightarrow nd$  и  $nd \rightarrow npp$  сравнением с точными расчетами уравнения Фаддеева. Вначале был исследован вопрос, насколько важен учет трехчастичных промежуточных состояний в соотношении унитарности для обеих реакций. Ответ получился несколько неожиданным. Оказалось, что уже упругая унитаризация двух простейших диаграмм на рис. 1, а, б и 2, а, б для этих реакций, т. е. учет только промежуточных  $nd$ -состояний, в основном снимает сильное расхождение между точным результатом и вкладом диаграмм, о котором говорилось выше [7, 12]. Это означает, что для неупругой реакции  $nd \rightarrow npp$  важно учесть взаимодействие в начальном состоянии и в первом приближении пренебречь перерассеянием в состоянии трех конечных несвязанных частиц. Окончательно метод предлагает точный учет СУ, однако весьма громоздким образом [13, 15].

Другой способ построения унитарных и аналитических амплитуд был предложен в работах [16, 17] и основан на представлении Гильберта — Шмидта [ПГШ]. Его достоинство состоит в том, что амплитуды  $2 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  представляются в виде ряда членов; каждый из которых отвечает реальному, виртуальному полюсу или резонансу по полной энергии, а вычеты сепарабилизируются по начальным и конечным импульсам. Тогда в процессе построения унитарной амплитуды знаменатель выражается через вычеты (вершинные функции), подобно тому как это имеет место в УРА-приближении для двух частиц [18]. Можно сказать, что данный метод при ограничении одним членом есть УРА-приближение для трех частиц; но при учете всех членов ряда ПГШ получаем точный результат.

Здесь будет исследована сходимости ряда ПГШ и проиллюстрирована численными примерами (она оказывается весьма быстрой). Предлагаемый метод также наиболее естествен для описания резонансных состояний, в частности трехчастичных резонансных состояний.

В процессе построения унитарной трехчастичной амплитуды в любом подходе возникает проблема учета взаимодействия в конечном состоянии пары частиц (член  $FSI$  в трехчастичном СУ). Данная проблема сводится к решению однородного интегрального уравнения, которое можно решить точно в предельных случаях. Этот вопрос также подробно обсуждается в настоящем обзоре. В данном обзоре не будем касаться обобщения метода на четырехчастичные состояния, где он был недавно с успехом использован [19]. По той же причине не будем касаться здесь релятивистского обобщения ПГШ.

Подытоживая сказанное выше, отметим, что использование трехчастичных СУ в рамках схемы аналитичности и унитарности еще только начинается. Однако уже сейчас они позволяют с хорошей точностью описывать трехчастичные процессы и открывают большие возможности для детальной разработки количественной теории ядерных реакций с тремя и более частицами в конечном состоянии, а также теории трехчастичных резонансов, амплитуд трехчастичных и многочастичных распадов.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ПРОЦЕССОВ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ЧАСТИЦАМИ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

Аналитические свойства амплитуд  $A(2 \rightarrow 2)$ ,  $B(2 \rightarrow 3)$  и  $C(3 \rightarrow 3)$  определяются аналитическими свойствами графиков Фейнмана (нерелятивистских или релятивистских), соответствующих данным процессам, т. е. особенностями диаграмм по всем независимым кинематическим переменным. Кроме того, могут

возникать особенности полной суммы графиков: полюса по полной энергии, отвечающие связанным состояниям и резонансам. Предположим (хотя это и не было никем до сих пор доказано), что указанные выше особенности исчерпывают все возможности.

Тогда возникает простая качественная картина, объясняющая вид экспериментальных угловых и энергетических распределений. Эта картина является основой диаграммной теории прямых ядерных реакций [6, 20]. Наиболее четко связь особенностей простейших графиков с видом угловых и энергетических распределений была количественно прослежена в процессах  $nd$ -рассеяния и развала; в дальнейшем при обсуждении будем иметь в виду главным образом эти процессы.

Для  $nd$ -рассеяния амплитуда  $A$  ( $2 \rightarrow 2$ ) зависит от двух переменных: энергии  $E$  и косинуса угла рассеяния  $x$ . Как функция энергии (при фиксированном  $x$ )  $A$  обладает в физической области только пороговой особенностью, связанной с открывающимся каналом  $2 \rightarrow 3$  при  $E_{ц.и} = \varepsilon$ , которая имеет характер  $(E - \varepsilon)^2 \ln(E - \varepsilon)$  и поэтому практически не проявляется в энергетическом ходе полных и дифференциальных сечений [21]. Этой особенностью обладают все графики на рис. 1, кроме рис. 1, а.

Другая ситуация для зависимости от угла: ближайшая особенность по  $x$  (полюсная) происходит от диаграммы на рис. 1, а и находится при

$$x = x_0 \equiv -5/4 - (3/4)(\varepsilon/E), \quad (1)$$

т. е. достаточно близко к физической области. Отсюда видно, что угловое распределение должно иметь пик назад и что значение этого пика должно возрастать с увеличением энергии. Оба эти факта подтверждаются на опыте (рис. 3 и 4, данные взяты из обзора [21]).

В противоположность рис. 1, а диаграмма, изображенная на рис. 1, б, имеет особенность по  $x$  ближе к другому краю физической области:

$$x = x_1 = 2x_0^2 - 1 \equiv 17/8 + (15/4)(\varepsilon/E) + (9/8)(\varepsilon^2/E^2). \quad (2)$$

Влияние этой особенности должно приводить к пику вперед в угловом распределении. Кроме того, поскольку особенность (2) отодвинута дальше от физической области, чем (1), пик вперед должен иметь более пологий характер. И действительно, как видно из рис. 3 и 4, а также из многих других данных [21], пик вперед и пик назад являются самыми существенными характеристиками угловых распределений в широком спектре энергий — от десятых долей до нескольких сотен мегаэлектронвольт.

Зная особенности диаграмм, приведенных на рис. 1, а и б, можно найти особенности всех остальных более сложных диаграмм, используя так называемый «блочный метод» исследования

особенностей, предложенный в работе [22]. Оказывается, что все диаграммы с четным числом вершин имеют особенности слева от  $x = -1$ , а диаграммы с нечетным числом вершин, подобные рис. 1, б, имеют особенности справа от  $x = 1$ , причем положение особенностей сдвигается в сторону от физической области при увеличении порядка диаграммы, а характер сингулярности ослабевает. Это последнее утверждение находится в согласии с более

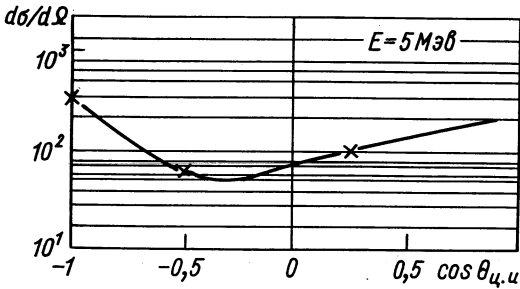


Рис. 3.

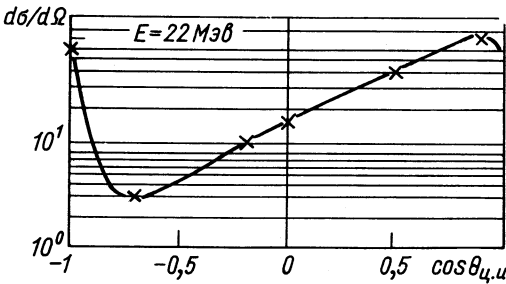
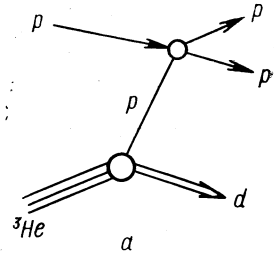


Рис. 4.

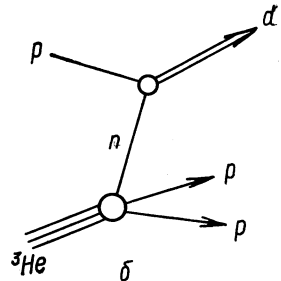


Рис. 5.

общим утверждением, что при увеличении порядка диаграммы сингулярность по всем переменным становится менее выраженной [5].

Заметим, и это будет показано далее, что существование пика назад неизбежно приводит к пику вперед в силу соотношения унитарности. Другой способ понять это утверждение — рассмотрение соотношения унитарности как механизма итерации, который воспроизводит диаграмму рис. 1, б при подстановке в качестве первого приближения диаграммы на рис. 1, а и т. д. Все сказанное выше сохраняет свою силу для процессов рассеяния на более сложных объектах, чем дейтон: положение особенностей (1) и (2) сдвигается, но общая качественная картина сохраняется, причем по-прежнему диаграмма полюсного типа приводит к пику назад, а треугольная диаграмма — к пику вперед.

Перейдем теперь к процессам развала ( $2 \rightarrow 3$ ). По угловым распределениям эти реакции исследовались в двух ситуациях: когда две из трех конечных частиц находятся в области сильного взаимодействия из-за эффекта Мигдала — Ватсона (пик взаимодействия в конечном состоянии — *FSI*-пик) и когда по всему энергетическому спектру производится интегрирование. В первом случае ситуация подобна рассмотренной выше для упругого рассеяния, так как две частицы в *FSI*-пике можно рассматривать как одну (дейтон или синглетный дейтон  $d^*$  для  $np$ -системы и  $d^*$  для  $pp$ -системы). Диаграммы на рис. 2, *a* и *б* указывают на присутствие особенностей вблизи направления вперед и назад, которые проявляются и на эксперименте в реакции развала  $d(np) 2n$  при энергиях 14, 46 и 50 *Мэв* (см. рис. 10 из работы [23]). При интегрировании по всему спектру конечных частиц пики сглаживаются, так как вклад диаграмм на рис. 2, *a* и *б* не является выделенным среди других и, кроме того, положение особенностей в указанных диаграммах сдвигается при изменении энергии конечной пары частиц.

Для более сложных систем количество полюсных диаграмм может возрастать, что приводит к изменению углового распределения. Например, в реакции  ${}^3\text{He}(p, d) 2p$  возможны две полюсные диаграммы (рис. 5, *a* и *б*), которые приводят к особенностям по косинусу угла между начальным протоном и конечным дейтоном в разных областях: рис. 5, *a* дает особенность вблизи  $x = -1$ , тогда как рис. 5, *б* дает полюсную особенность вблизи  $x = 1$ . Вторая особенность проявляется на эксперименте в форме резкого пика (см. рис. 6 из работы [23]).

Полное число кинематических переменных у амплитуды  $B(2 \rightarrow 3)$  равно пяти. В частности, можно выбрать полную энергию, энергию пары из трех конечных частиц (таких переменных всего две) и две переменные типа переданного импульса или соответственного угла рассеяния между начальной частицей и одной конечной частицей. Выше уже говорилось об угловых распределениях, которые изучены наиболее интенсивно, а именно, когда пара конечных частиц находится в *FSI*-пике, т. е. когда реакция  $2 \rightarrow 3$  по своим аналитическим и кинематическим свойствам практически не отличается от реакции  $2 \rightarrow 2$ . Особенности, проявляющиеся в энергетических зависимостях, обусловлены диаграммами на рис. 2, *a*, *в* и *г* (рис. 2, *б* — частный случай рис. 2, *в* и *г*).

Первая из них приводит к пику при малой энергии конечной частицы — спектатора (пик квазисвободного рассеяния — *QFS*-пик), а две другие — к *FSI*-пику. Большинство экспериментальных усилий раньше и сейчас направлены на исследование этих областей. К сожалению, особенности по другим переменным, а также более сложные особенности, связывающие несколько



переменных между собой и отвечающие более сложным диаграммам, практически не изучались в эксперименте по ядерным реакциям (см., например, обзор [20]).

В теоретическом аспекте особенности наиболее простых (и потому самых сингулярных) диаграмм используются обычно в двух планах. Во-первых, важную информацию можно получить из дисперсионных соотношений вперед, так как мнимая часть на правом разрезе в этом случае выражается с помощью оптической теоремы через полное сечение. Спецификой обменной диаграммы (см. рис. 1, а) является то, что для направления вперед она имеет по энергии полюс в точке:

$$E_{\text{п. и}} = -\varepsilon/3, \quad (3)$$

где  $E_{\text{п. и}} = (3/4)(p^2/m)$ , или можно воспользоваться также переменной  $z = E_{\text{п. и}} - \varepsilon$ . Другие особенности, например, соответствующие диаграмме рис. 1, в, расположены гораздо дальше и имеют более слабый характер. Поэтому можно использовать дисперсионное соотношение вперед, чтобы связать экспериментально известные величины сечения, длины рассеяния и вычет в полюсе (3), выражающийся через дейтонные вершины.

Второй способ использования диаграмм и их особенностей — это переход к парциальным волнам. Поскольку соотношение унитарности в таком случае квадратично и диагонализуются, то наиболее распространенный метод решения дисперсионных уравнений состоит в применении  $N/D$ -приближения [24]. В этом методе важно знать все ближайшие особенности парциальных амплитуд. Как и обычно, последние состоят из особенностей по энергии исходных диаграмм, которые никак не меняются, а также из особенностей, происходящих в результате особенностей полной амплитуды как функции угла (переход особенностей из  $u$ - и  $t$ -канала в особенности парциальных амплитуд в  $S$ -канале). Конкретно для  $nd$ -рассеяния получаем левый разрез с точками ветвления, отвечающими различным диаграммам. Например, диаграмма (см. рис. 1, а) дает логарифмическую точку ветвления при  $z = z_1 = -4\varepsilon/3$ , где  $z = E_{\text{п. и}} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — энергия связи дейтона. Следующая по сложности диаграмма на рис. 1, б приводит к точке ветвления при  $z_2 = -4\varepsilon$ .

Кроме особенностей в ряду диаграмм многократного рассеяния (см. рис. 1) необходимо рассмотреть также диаграммы, включающие обмен  $\pi$ -мезонами (рис. 6 и 7). Первая из них приводит к особенностям типа  $(z - z_3)^{3/2}$ , где  $z_3 = -3m_\pi^2/4M - \varepsilon \approx -8,1\varepsilon$ . Диаграмма на рис. 7 имеет аномальную и обычную особенность.

Первая из них расположена при  $z_4 = -m_\pi^2/3M - (2m_\pi/3)\sqrt{\varepsilon/M} - 4\varepsilon/3 \approx -7,2\varepsilon$  и имеет характер  $(z - z_4) \ln(z - z_4)$ , а вторая

расположена значительно дальше\*. Итак, мы видим, что наиболее важные по близости расположения и по характеру сингулярности — особенности простейшей диаграммы рис. 1, а; это дает основание использовать ее как основной динамический механизм в самых различных подходах.

Обсуждавшееся выше соответствие картины углового распределения особенностям простейших диаграмм является сугубо

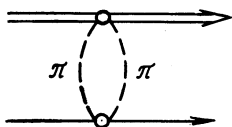


Рис. 6.

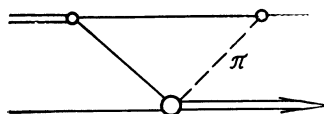


Рис. 7.

качественным. Попытка использовать эти диаграммы для количественного описания процессов рассеяния и развала приводит к резкому противоречию с экспериментом (за исключением области высоких энергий,  $E \gtrsim 100 \text{ МэВ}$ ). Причина расхождения становится более понятной, если попытаться подставить первые диаграммы в соотношение унитарности. Оказывается, СУ нарушаются при этом весьма сильно (левая и правая части СУ могут различаться на порядок при малых энергиях). Поэтому, желательно, на основе простейших диаграмм построить приближенную амплитуду, удовлетворяющую СУ, что должно приводить к лучшему согласию с экспериментом. Такие подходы обсудим в разд. 3.

## 2. СООТНОШЕНИЯ УНИТАРНОСТИ

Во введении уже говорилось о том, как важно при малых энергиях учитывать точно или приближенно трехчастичные СУ, и обсуждались различные схемы, посвященные их исследованию. Здесь остановимся на выводе СУ для трехчастичных амплитуд, описывающих три тождественные частицы. В этом случае можно отказаться от рассмотрения детализированных амплитуд типа  $M_{\alpha\beta}$  [5], соотношения унитарности для которых исследовались в работе [13], и ввести только одну функцию  $w$ , которая определяет все физические амплитуды рассеяния, развала и  $3 \rightarrow 3$  [25]. Существенно, что эти соотношения будут записаны не в операторной форме, а в виде уравнений и, следовательно, легко будет записать СУ для парциальных амплитуд.

Известно, что трехчастичная  $T$ -матрица в общем случае определяется девятью функциями  $M_{\alpha\beta}$  [5]:

$$T(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z), \quad (4)$$

\* При  $z = z_5 = -4\epsilon/3 - m_\pi/3 - m_\pi^2/6M \approx -23\epsilon$ .

где  $\alpha, \beta$  — входной и выходной каналы; они задаются нумерацией частиц;  $M_{\alpha\beta}$  содержат в себе несвязанные графики, которые не входят в сечения физических процессов и должны быть вычтены:

$$M_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} T_{\alpha}(z). \quad (5)$$

Для тождественных частиц, как бесспиновых, так и для частиц со спином, физические амплитуды можно выразить через две функции:

$$\left. \begin{aligned} W^{(1)}(z) &\equiv W_{\alpha\alpha}(z); \\ W^{(2)}(z) &\equiv W_{\alpha\beta}(z), \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Учтем теперь, что для тождественных частиц наблюдаемую на эксперименте амплитуду необходимо усреднить по всем возможным начальным и конечным нумерациям частиц. Тогда получим [25], что сечения процессов определяются симметризованной амплитудой:

$$w = W^{(1)} + 2W^{(2)}. \quad (7)$$

Из уравнения для  $W_{\alpha\beta}$  [5] можно получить уравнение для функции  $w(\mathbf{k}\mathbf{p}; \mathbf{k}'\mathbf{p}'; z)$ . Здесь  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  — импульсы пары взаимодействующих частиц и третьей частицы в начальном состоянии и  $\mathbf{k}', \mathbf{p}'$  — соответственно в конечном состоянии. Причем  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  связаны с импульсами отдельных частиц обычным образом [5].

Дальше будем всюду для простоты предполагать, что относительный момент  $l$  пары взаимодействующих частиц вначале и конце равен нулю, а момент  $L$  третьей частицы произволен. Такое ограничение  $l = 0$  не является жестким, так как известно, что при решении уравнения Фаддеева даже с реалистическими потенциалами обычно бывает достаточно ограничиться двумя парциальными волнами с  $l = 0$  и 2. Нетрудно вывести [25], что  $w(\mathbf{k}\mathbf{p}, \mathbf{k}'\mathbf{p}', z)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &w(\mathbf{k}\mathbf{p}, \mathbf{k}'\mathbf{p}'; z) = \\ &= - \frac{2mt(k, |\mathbf{p}/2 + \mathbf{p}'|; z - 3p^2/4m) t(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'/2|, k'; z - 3p'^2/4m)}{p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' + p'^2 - mz} - \\ &- 2m \int d\mathbf{p}_1 \frac{t(k, |\mathbf{p}/2 + \mathbf{p}_1|; z - 3p^2/4m) w(|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1/2|, \mathbf{p}_1; \mathbf{k}'\mathbf{p}'; z)}{p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}_1 + p_1^2 - mz}. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь  $m$  — масса частицы;  $t(k, k', z)$  — двухчастичная  $t$ -матрица.

Отсюда непосредственно получаем СУ для амплитуды  $w$ , которые запишем на энергетической поверхности, т. е. когда выполняется условие  $z = k^2/m + 3p^2/4m = k'^2/m + 3p'^2/4m$ . Скачок амплитуды  $w$  удобно представить в виде суммы пяти членов,

каждый из которых имеет простой физический смысл, о чем речь пойдет ниже:

$$\begin{aligned} \Delta w &= w(z_1) - w(z_2) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5; \\ z_1 &= E + i\delta; \quad z_2 = E - i\delta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2\pi i m t(k, |\mathbf{p}/2 + \mathbf{p}'|; z_1 - 3p^2/4m) \times \\ &\times t(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'/2| k'; z_2 - 3p'^2/4m) \delta(p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' + p'^2 - mz); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_{2d} + \Delta_{2n}; \\ \Delta_{2d} &= -2\pi i m \int d\mathbf{q} t(k, q; z_1 - 3p^2/4m) \times \\ &\times w(q\mathbf{p}, k' \mathbf{p}'; z_2) \delta(q^2 + 3p^2/4 - mz); \\ \Delta_{2n} &= -4\pi i m \int d\mathbf{p}_1 t(k, |\mathbf{p}/2 + \mathbf{p}_1|, z_1 - 3p^2/4m) \times \\ &\times w(|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1/2|, \mathbf{p}_1; k', \mathbf{p}'; z_2) \delta(p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}_1 + p_1^2 - mz); \\ \Delta_3 &= \Delta_{3d} + \Delta_{3n}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3d} &= -2\pi i m \int d\mathbf{q} w(k\mathbf{p}, q\mathbf{p}_1; z_1) \times \\ &\times t(q, k'; z_2 - 3p'^2/4m) \delta(q^2 + 3p'^2/4 - mz); \\ \Delta_{3n} &= -4\pi i m \int d\mathbf{p}_1 w(k\mathbf{p}, |\mathbf{p}_1/2 + \mathbf{p}'|, \mathbf{p}_1; z_1) \times \\ &\times t(|\mathbf{p}'/2 + \mathbf{p}_1|, k'; z_2 - 3p'^2/4m) \delta(p'^2 + \mathbf{p}'\mathbf{p}_1 + p_1^2 - mz); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \Delta_{4d} + \Delta_{4n}; \\ \Delta_{4d} &= -2\pi i m \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p}_1 w(k\mathbf{p}, q\mathbf{p}_1; z_1) w(q\mathbf{p}_1, k' \mathbf{p}'; z_2) \times \\ &\times \delta(q^2 + 3p_1^2/4 - mz); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{4n} &= -4\pi i m \int \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 w(k\mathbf{p}; |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1/2|, \mathbf{p}_1; z_1) \times \\ &\times w(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2/2|, \mathbf{p}_2; k' \mathbf{p}'; z_2) \delta(p_1^2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + p_2^2 - mz); \end{aligned}$$

$$\Delta_5 = -2\pi i m \int d\mathbf{p}_1 \tilde{B}(k\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; z_1) B(\mathbf{p}_1, k' \mathbf{p}'; z_2) \delta(3p_1^2/4 - \alpha^2 - mz); \quad (14)$$

$\alpha$  — волновой вектор дейтона:  $\alpha^2 = m\varepsilon$ ;  $\varepsilon$  — энергия связи дейтона. В (14) входят амплитуда развала  $B$  и амплитуда процесса  $3 \rightarrow 2\tilde{B}$ , которые связаны с  $w$  с помощью соотношений (16) и (17).

Соотношениям унитарности (10) — (14) можно дать простое графическое представление, по существу аналогичное [13]. Гра-

фики, соответствующие всем скачкам  $\Delta_1 - \Delta_5$ , приведены на рис. 8—12. Перечеркнутые линии на графиках означают, что вместо пропагаторов необходимо подставлять соответствующие

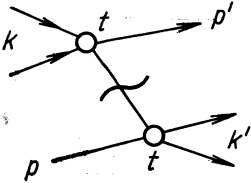


Рис. 8.

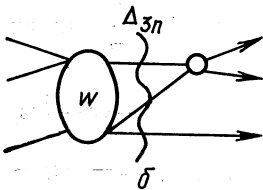
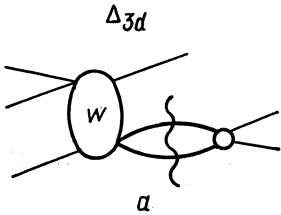
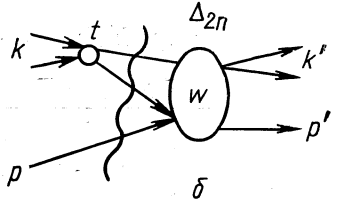
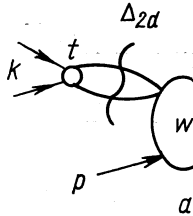


Рис. 10.

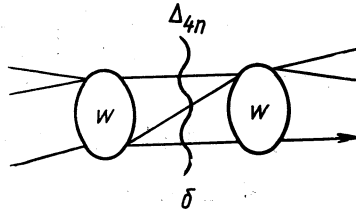
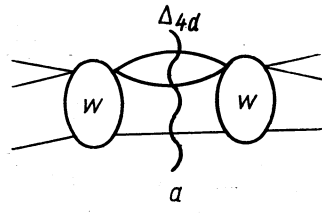


Рис. 11.

$\delta$ -функции. Легко увидеть, что  $\Delta_1$  — неоднородный член соотношения унитарности. Назовем связанную с ним особенность динамической. Особенности  $\Delta_{2d}$ ,  $\Delta_{2n}$  и  $\Delta_{3d}$ ,  $\Delta_{3n}$  происходят от взаимодействия в начальном и конечном состояниях, и, как видно из (11) и (12), все эти члены являются линейными по  $w$ . Назовем их особенностями *FSI*-типа. Наконец, последние три члена:  $\Delta_{4d}$ ,  $\Delta_{4n}$ ,  $\Delta_5$  квадратичны по  $w$  и дают обычные унитарные особенности по  $z$ , начинающиеся с  $z = 0$  для  $\Delta_{4d}$ ,  $\Delta_{4n}$  (трехчастичный унитарный разрез) и с  $z = -\varepsilon$  для  $\Delta_5$ , что отвечает двухчастичному унитарному разрезу.

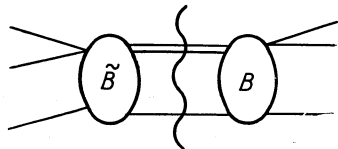


Рис. 12.

Ясно, что физическая амплитуда процесса  $3 \rightarrow 3$  определяется самой функцией  $w(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$ , а амплитуды упругого рассеяния  $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$  и развала  $B(\mathbf{p}; k'\mathbf{p}'; z)$  определяются вычетами при соответствующих дейтонных полюсах:

$$w(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z) = \frac{\varphi(k) A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) \bar{\varphi}(k')}{(z + \alpha^2/m - 3p^2/4m)(z + \alpha^2/m - 3p'^2/4m)} + \\ + \frac{\tilde{b}(k\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) \bar{\varphi}(k')}{z + \alpha^2/m - 3p'^2/4m} + \frac{\varphi(k) b(\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)}{z + \alpha^2/m - 3p^2/4m} + c(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z). \quad (15)$$

Здесь  $\varphi(k)$  — дейтонная волновая функция и  $c(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$  не содержит полюсных членов. Из (15) очевидно, что амплитуда развала и аналогично амплитуда  $3 \rightarrow 2$   $\tilde{B}(k\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$  определяются следующим образом:

$$B(\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z) = \frac{A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) \bar{\varphi}(k')}{z + \alpha^2/m - 3p'^2/4m} + b(\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z); \quad (16)$$

$$\tilde{B}(k\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = \frac{[\varphi(k) A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)]}{z + \alpha^2/m - 3p^2/4m} + \tilde{b}(k\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z). \quad (17)$$

Для амплитуды упругого рассеяния в силу закона сохранения энергии  $z = -\alpha^2/m + 3p^2/4m = -\alpha^2/m + 3p'^2/4m$ , и поэтому скачки  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  (10) — (12) обращаются в нуль. В процессе развала  $z = -\alpha^2/m + 3p^2/4m = k'^2/m + 3p'^2/4m$  и по-прежнему  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , но скачок  $\Delta_3 \neq 0$ . Для таких физических значений  $z$  получаем следующие СУ для амплитуд  $A$  и  $B$ :

$$\Delta A = -2\pi im \left\{ \int d\mathbf{p}_1 A(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; z_1) A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'; z_2) \delta(3p_1^2/4 - \alpha^2 - mz) + \right. \\ + \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p}_1 B(\mathbf{p}, \mathbf{q}\mathbf{p}_1; z_1) \tilde{B}(\mathbf{q}\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'; z_2) \delta(q^2 + 3p_1^2/4 - mz) + \\ \left. + 2 \int \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 B(\mathbf{p}; |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1/2|, \mathbf{p}_1; z_1) \times \right. \\ \left. \times \tilde{B}(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2/2|, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'; z_2) \delta(p_1^2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + p_2^2 - mz) \right\}; \quad (18)$$

$$\Delta B = -2\pi im \left\{ \int d\mathbf{q} B(\mathbf{p}, \mathbf{q}\mathbf{p}'; z_1) t(q, k'; z_2 - 3p'^2/4m) \times \right. \\ \times \delta(q^2 + 3p'^2/4 - mz) + 2 \int d\mathbf{p}_1 B(\mathbf{p}; |\mathbf{p}_1/2 + \mathbf{p}'|, \mathbf{p}_1; z_1) \times \\ \times t(|\mathbf{p}'/2 + \mathbf{p}_1|, k'; z_2 - 3p'^2/4m) \delta(p'^2 + \mathbf{p}'\mathbf{p}_1 + p_1^2 - mz) + \\ + \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p}_1 B(\mathbf{p}, \mathbf{q}\mathbf{p}_1; z_1) w(\mathbf{q}\mathbf{p}_1, k'\mathbf{p}'; z_2) \delta(q^2 + 3p_1^2/4 - mz) + \\ + 2 \int \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 B(\mathbf{p}, |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1/2|, \mathbf{p}_1, z_1) w(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2/2|, \mathbf{p}_2; k'\mathbf{p}'; z_2) \times \\ \times \delta(p_1^2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + p_2^2 - mz) + \\ \left. + \int d\mathbf{p}_1 A(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; z_1) B(\mathbf{p}_1, k'\mathbf{p}'; z_2) \delta(3p_1^2/4 - \alpha^2 - mz) \right\}. \quad (19)$$

Выше была определена амплитуда рассеяния и развала относительно к нумерации тождественных частиц. Очевидно, что для процесса рассеяния ( $nd$ -процесс) нумерацию можно зафиксировать, и поэтому она несущественна. Но амплитуды развала  $B$  и процесса  $3 \rightarrow 3$  по своему построению связаны с определенной нумерацией частиц. Следовательно, наблюдаемую на эксперименте амплитуду развала можно получить из (16) симметризацией по всем возможным конечным состояниям (для бесспиновых частиц). Так, если на эксперименте в процессе  $nd \rightarrow npr$  будем измерять направление вылета и энергию протона, т. е. его импульс  $\mathbf{p}_f$ , а две другие частицы имеют относительный импульс  $\mathbf{k}_f$ , то симметризованная амплитуда имеет вид [17]

$$B^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}_f \mathbf{p}_f; z) = \{ B(\mathbf{p}; \mathbf{k}_f \mathbf{p}_f; z) + \\ + B(\mathbf{p}; -\mathbf{k}_f/2 - 3\mathbf{p}_f/4; -\mathbf{p}_f/2 + \mathbf{k}_f; z) + \\ + B(\mathbf{p}; -\mathbf{k}_f/2 + 3\mathbf{p}_f/4; -\mathbf{p}_f/2 - \mathbf{k}_f; z) \} / 3. \quad (20)$$

С помощью такой симметризованной амплитуды соотношение унитарности для амплитуды рассеяния можно записать в более компактной форме. Удобно также вместо амплитуды  $A$  ввести обычную амплитуду рассеяния  $f$ , отличающуюся от  $A$  нормировочным множителем

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = -8\pi^2 m A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) / 3, \quad (21)$$

а также

$$g^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}_f \mathbf{p}_f; z) = -8\pi^2 m B^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}_f \mathbf{p}_f; z) / 3. \quad (22)$$

Тогда вместо (18) можно записать:

$$\text{Im } f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = \left\{ \int d\mathbf{p}_1 f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; z) f^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'; z) \delta(p_1^2 - 4\alpha^2/3 - 4mz/3) + \right. \\ \left. + 3 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{p}_1 g^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1; z) g^{s*}(\mathbf{p}'; \mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1) \delta(p_1^2 + 4k^2/3 - 4mz/3) \right\} / 2\pi. \quad (23)$$

При переходе в (18) от амплитуды  $3 \rightarrow 2 \tilde{B}$  к амплитуде  $g^{s*}$  было использовано тождество, которому удовлетворяет функция  $w(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$ :

$$w(k\mathbf{p}; k'\mathbf{p}'; z^*) = w^*(k'\mathbf{p}'; k\mathbf{p}; z). \quad (24)$$

Из СУ (23) и оптической теоремы:  $\text{Im } f(\theta = 0) = p\sigma_{tot}/4\pi$  легко находим выражения для дифференциальных и полных сечений упругого и неупругого рассеяния. Так,

$$d\sigma_{el}/d\Omega = |f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)|^2 \quad (25)$$

и

$$d\sigma_{inel}/d\mathbf{p}_f = 9k_f/4p \int_{\Omega} |g^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}_f \mathbf{p}_f; z)|^2 d\Omega_k. \quad (26)$$

Предполагается в (26), что в процессе развала регистрируется частица в направлении  $\mathbf{p}_f$  и с энергией  $\varepsilon_f = p_f^2/2m$ . Пределы интегрирования в (26) определяются кинематикой задачи. Все импульсы здесь относятся к системе центра инерции.

Вводя парциальные амплитуды  $f_L$  и  $g_L$ , находим также полные парциальные сечения:

$$\sigma_{\text{inel}}^L = \frac{36\pi^2}{p} (2L+1) \int \int d\Omega_{\kappa} dp_1 \kappa_1 p_1^2 \theta(mz - 3p^2/4) |g_L^S(p, \kappa_1 \mathbf{p}_1; z)|^2; \quad (27)$$

$$\sigma_{\text{el}}^L = 4\pi (2L+1) |f_L(p, z)|^2. \quad (28)$$

Здесь  $\kappa_1^2 = mz - 3p_1^2/4$ , а амплитуда  $g_L^S$  в действительности зависит от угла  $\widehat{\kappa_1 \mathbf{p}_1}$ .

### 3. МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ УНИТАРНОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ

Наиболее широко унитарность и аналитичность использовались при расчетах рассеяния и реакций  $2 \rightarrow 2$ . В этом случае самым естественным является метод дисперсионных соотношений (ДС), который применялся в трех разных модификациях: 1) на заданный угол; 2) по переданному импульсу или косинусу угла; 3) для парциальных волн. В основе всех методов лежит аналитичность как средство связать амплитуду в данной физической точке с ее значениями (точнее, со значениями ее мнимой части) в других областях. Вклад этих других областей входит в виде интеграла по положительным энергиям, которые в силу унитарности можно выразить через сечение или квадрат амплитуды, и в виде интеграла (или полюсного члена) по нефизической области отрицательных энергий. Последний член зависит от механизма процесса. Например, для потенциального рассеяния он определяется видом потенциала. Поэтому соответствующий нефизический разрез или полюс (левый разрез в ДС) называется динамическим разрезом в отличие от краевого разреза — унитарного. Унитарность накладывает ограничения только на правый разрез, и если они там выполнены, то амплитуда, удовлетворяющая ДС, автоматически унитарна. Динамику записываем сами, установив скачок на левом разрезе. Проследим, что при этом получается, на нескольких конкретных примерах.

По-видимому, впервые ДС были применены для ядерных процессов в работе [26] и там же ДС вперед использовались для вычисления амплитуды  $nd$ -рассеяния. Динамический разрез при этом входит только от диаграммы рис. 1, а, т. е. он сводится к полюсу в точке (3). В работе [26] подробно изложен метод ДС в применении к сложным системам и перечислены все независимые



по спине амплитуды в  $nd$ -рассеянии (их всего пять). Результативно авторы работы показали согласованность ДС вперед, в которых оставлен вклад двух полюсов (от диаграмм рис. 1, *a* и рис. 13) и правый унитарный разрез, с измеренным значением фазы  $nd$ -рассеяния при одной фиксированной энергии. Согласие получилось превосходным.

Последнее и более подробное изучение  $nd$ -процесса с помощью ДС было проведено в работе [27]. Для амплитуды, нормированной обычным образом:

$$\text{Im } f(E) = k\sigma(E)/4\pi$$

и связанной с дублетной и кватретной амплитудами соотношением при нулевой энергии:

$$f(E) = 2 \underset{E \rightarrow 0}{^4}f(E)/3 + {}^2f(E)/2,$$

было записано ДС вперед с одним вычитанием при нулевой энергии:

$$\text{Re } f(E) - f(0) = \frac{r_t E}{(E_t - E) E_t} + \frac{r_p E}{(E_p - E) E_p} + \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sigma_{nd}(k') dk'}{k'^2 - k^2}. \quad (29)$$

Отметим, что энергия здесь измеряется в системе центра инерции. Положение полюса трития, отвечающего диаграмме (см. рис. 13), дается

$$E_t = -(\varepsilon_t - \varepsilon) = -6,25 \text{ Мэв.}$$

Положение полюса в диаграмме (см. рис. 1, *a*)

$$E_p = -\varepsilon/3 = -0,74 \text{ Мэв.}$$

В формуле (29) пренебрегается вкладом всех особенностей на левом разрезе, кроме указанных. Отметим, что диаграммы,

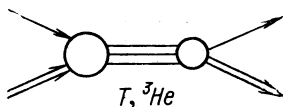


Рис. 13.

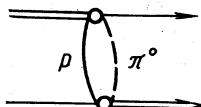


Рис. 14.

которые не воспроизводятся ДС (29), имеют весьма далекие левые особенности. Например, диаграмма рис. 14 дает особенность, лежащую при  $E \approx -70 \text{ Мэв}$ , и потому отбрасывание ее в ДС с вычитанием кажется вполне оправданным. В работе [27] процедура сводилась к подбору таких параметров  $r_t$  и  $r_p$ , которые наилучшим образом описывают эксперимент ( $\text{Re } f(E)$ ,  $f(0)$  и  $\sigma_{nd}(k)$  берутся из опыта). При этом  $r_p$  можно сравнить с изве-

стной вершиной  $d \rightarrow n + p$ , а из  $r_t$  получить вершину  $T \rightarrow d + n$ . Получилось превосходное согласие для  $r_p$  и, по-видимому, наилучшее значение для  $r_t$  [27]. Процедуру извлечения  $r_t$  можно улучшить в результате использования конформного преобразования [28], что и было сделано в работе [29]. В случае  $nd$ -рассеяния, поскольку неучтенные особенности находятся далеко, конформное преобразование по существу не меняет результатов.

Дисперсионные соотношения вперед были использованы также для других процессов рассеяния на ядерных системах (см., например, обзор [30]). Чтобы проиллюстрировать возникающие

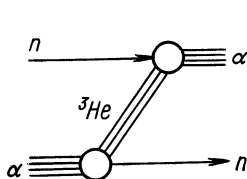


Рис. 15.

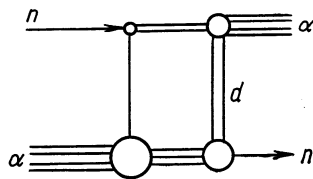


Рис. 16.

в общем случае трудности, остановимся на процессе  $n\alpha$ -рассеяния, который исследовался в работах [31]. Качественное и отчасти даже количественное согласие с экспериментальными данными по  $n\alpha$ -рассеянию здесь имеется, однако попытка независимо определить вершину  $\alpha \rightarrow {}^3\text{He} + n$  в полюсе, отвечающем диаграмме рис. 15, оказывается неудачной. Причина этого исследовалась в работе [29]. Там было показано, что в данном процессе, в отличие от  $nd$ -рассеяния, неучтенные особенности лежат близко к полюсу диаграммы рис. 15. Например, особенность диаграммы рис. 16 для направления вперед расположена при  $E_{\text{п.и.}} = -3(\epsilon_\alpha - \epsilon)/5 = -15,6 \text{ Мэв}$ , тогда как полюсная диаграмма (см. рис. 15) дает полюс при  $E_{\text{п.и.}} = -3(\epsilon_\alpha - \epsilon_{3\text{He}})/5 \approx -12,3 \text{ Мэв}$ . Поэтому понадобилась [29] более тонкая техника конформного отображения [28], чтобы извлечь данные о вершине  $\alpha \rightarrow {}^3\text{He} + n$ . Аналогичная техника применяется и в работе [32] для рассеяния  $p + {}^3\text{He}$ .

Другой способ, а именно ДС для парциальных волн, имеет существенное отличие, так как в нем не нужно закладывать экспериментальные данные. Полное сечение, входившее в ДС вперед, здесь заменяется просто соотношением унитарности для парциальной амплитуды. Динамический разрез снова определяется диаграммой с ближайшей особенностью. Для решения получающегося из ДС неоднородного нелинейного интегрального уравнения используется  $N/D$ -метод. В качестве примера успешного применения этого метода можно указать работы [33], в которых исследовался процесс  $nd$ -рассеяния.

Используя переменную  $y = E/\varepsilon$ , можно представить  $S$ -волну  $nd$ -рассеяния  $f(y) = y^{-1/2} \exp(i\delta) \sin \delta$  в виде

$$f(y) = N(y)/D(y) \quad (30)$$

с соотношением унитарности

$$\text{Im} f(y) = \sqrt{y} |f(y)|^2 \quad (31)$$

и левым разрезом, отвечающим диаграмме рис. 1, а. Вклад этой диаграммы

$$\Delta(y) = \frac{2\gamma}{y\sqrt{3}} \ln \frac{1+3y}{1+y/3}; \quad \gamma = (1 - r_{\text{eff}}/r_d)^{-1}. \quad (32)$$

Подстановка (30) в (31) и ДС дают

$$D(y) = 1 - \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} N(x) dx}{x(x-y)}; \quad N(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-3}^{-1/3} \frac{D(x) \text{Im} \Delta(x) dx}{x-y}. \quad (33)$$

Уравнения (33) можно решить аналитически с погрешностью примерно 2—3%. Таким образом, в работе [33] была получена квартетная длина  $nd$ -рассеяния в хорошем согласии с экспериментом:  $a_4 \approx 6,3$  ферми ( $a_4^{\text{exp}} = 6,17$  ферми).

Оба метода, обсуждавшиеся выше, можно трактовать как способ итерации простейшей диаграммы рис. 1, а, с тем условием, чтобы сумма получающегося ряда удовлетворяла соотношению унитарности. В самом деле, будем итерировать ДС, взяв в первом приближении эту простейшую диаграмму. Тогда, как легко увидеть, воспроизведем весь ряд диаграмм  $nd$ -рассеяния, но с учетом только унитарного разреза  $\Delta_5$ , определенного в предыдущем разделе. Другими словами, все промежуточные состояния в системе даже в виртуальных состояниях присутствуют в  $n + d$ -виде, а не  $n + n + p$ . Для ДС вперед учитываются трехчастичные промежуточные состояния, поскольку в интеграл по правому разрезу входит  $\sigma_{\text{tot}}$ , однако здесь эта величина берется из эксперимента и замкнутая схема итерации отсутствует. Разумеется, в любых ДС, о которых говорилось выше, выбрасываются «ненормальные» графики типа рис. 7 и 14 и все их итерации. Итак, ДС осуществляют унитаризацию главной диаграммы для данного процесса, и такая приближенная унитаризация (выброшен вклад разреза  $\Delta_4$ ), дает неплохие результаты при небольшой энергии [33].

Другой способ унитаризации был рассмотрен Слоуном, Кахиллом и их сотр. Применительно к процессу рассеяния процедура унитаризации была предложена Слоуном [7] и выглядит следую-

щим образом. Выделим полюсной член из двухчастичной  $t$ -матрицы:

$$t(k, k', E) = -i\pi\phi(k)\phi(k')\delta(E + \varepsilon) + t^{(1)}. \quad (34)$$

Тогда  $t^{(1)}$  служит для определения неприводимой амплитуды  $I(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$ , не содержащей промежуточного  $nd$ -состояния (нет разреза  $\Delta_5$  в обозначениях предыдущей главы). Тогда уравнение для амплитуды  $nd$ -рассеяния  $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$  имеет вид

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = I(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) - 2i\pi \int I(\mathbf{p}, \mathbf{p}''; z) A(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'; z) \delta(3p''^2/4m - z + \varepsilon) d\mathbf{p}'' \quad (35)$$

и изображено графически на рис. 17, где крестики означают, что частицы находятся на энергетической поверхности. Уравнение

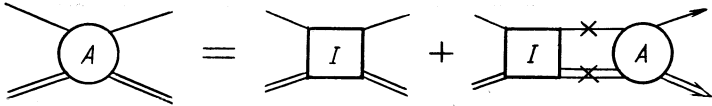


Рис. 17.

для  $I$  графически имеет вид, показанный на рис. 18 [отметим, что в (35) входит  $I$  при  $k = k' = i\alpha$ , т. е. на энергетической  $nd$ -поверхности]. На рис. 18 заштрихованный кружок означает  $t^{(1)}$ .

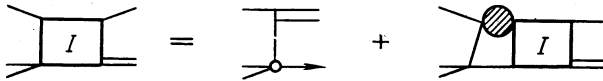


Рис. 18.

Записанные так уравнения являются точными, но столь же трудны для решения, как и точное уравнение Фаддеева. Решающий шаг состоит в выборе приближения для  $I$ , а именно выбирают-

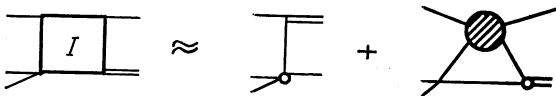


Рис. 19.

ся две первые итерации (можно взять, конечно, и больше), т. е. полюсная и треугольная диаграммы, но с  $t^{(1)}$  вместо  $t$  — как на рис. 19. Используя явно известное выражение для  $I$ , нетрудно

решить уравнение (35); для парциальных волн решение имеет вид

$$f_L = \frac{nI_L}{1 - inpI_L}; \quad n = -8\pi^2 m/3. \quad (36)$$

Сравнение приближенного и точного решений приведено на рис. 20 и 21 при энергиях  $E_{\text{лаб}} = 1,3$  и  $14,1$  Мэв соответственно. Видно, насколько приближенный учет унитарности улучшает согласие. Отметим важный факт. При малых энергиях вклад первых двух диаграмм (см. рис. 1, а и б) в рассеяние превышает точное и экспериментальное сечения во много раз: в 100 с лишним раз при  $E_{\text{лаб}} = 1,3$  Мэв и более чем в 3 раза при  $E_{\text{лаб}} = 14,1$  Мэв. В то же время, если взять те же диаграммы для  $I_L$ , а затем унитаризовать их согласно (36), то согласие с точными и экспериментальными значениями восстанавливается. Механизм этого явления ясен из (36), так как когда  $nI_L$  становится велико (и превышает некоторый предел, который можно назвать унитарным), то  $f_L$  остается ограниченным — механизм унитаризации перенормирует величину диаграмм.

Перейдем теперь к процессам развала. Кахилл и Слоун [12] предложили следующую схему аппроксимации для амплитуды развала  $B$ , изображенной на рис. 22. Отметим, что незаштрихованный кружок означает теперь полную  $t$ -матрицу, и чтобы получить  $B$ , необходимо предварительно вычислить  $A$ . Таким образом, уравнение на рис. 22 означает учет взаимодействия в начальном состоянии — многократное рассеяние нуклона на дейтоне, но это не есть метод искаженных волн в буквальном понимании, так как частицы находятся на энергетической поверхности и их взаимодействие не описывается потенциалом. На рис. 23 показан спектр протонов в  $nd$ -развале при  $\theta_L = 10^\circ$  и  $E_{n, \text{лаб}} = 14,4$  Мэв:

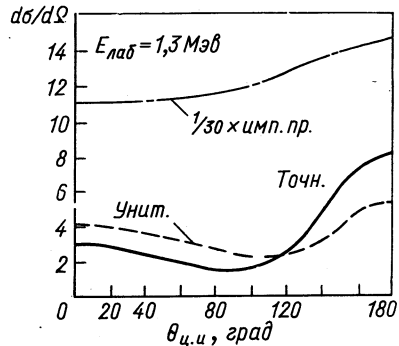


Рис. 20.

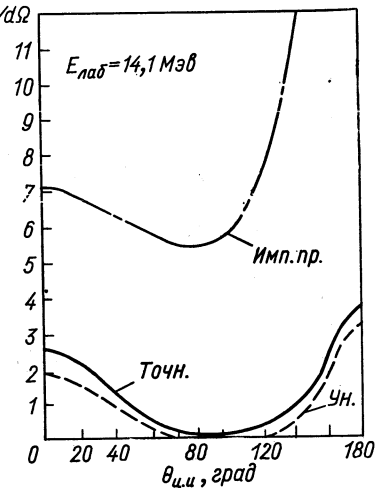


Рис. 21.

одна кривая — решение уравнения рис. 22 в том же приближении для  $I$ , что и раньше; другая кривая — точный расчет для потенциала Ямагучи с учетом спиновой зависимости.

Из рис. 23 видно, что форма спектра и  $QFS$ -пик воспроизводятся достаточно хорошо. Что касается количественного согла-

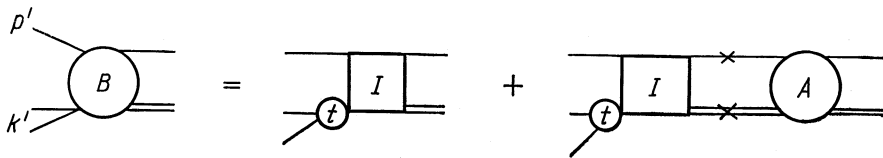


Рис. 22.

сия, то лучше всего его проиллюстрировать следующими числами. Первые три приближения для  $I$ , т. е. простейшая полюсная диаграмма, она же плюс треугольная, и сумма первых трех диаграмм дают для сечения развала соответственно 720, 1780 и 5120 мбарн.

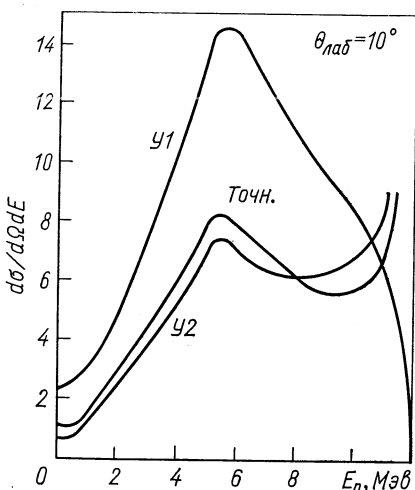


Рис. 23.

Учет упругой унитарности, согласно уравнению на рис. 22, дает с теми же приближениями для  $I$  соответственно 184, 142 и 161 мбарн. Точное значение есть 166 мбарн, что находится в прекрасном согласии с последним числом, но даже и грубейшее приближение для  $I$  (обменная диаграмма дает 184 мбарн) всего на 10% больше точного значения. Хорошее согласие получается и в области  $FSI$ -пика (см. работу [12]).

Рассмотрим, насколько точно удовлетворяются СУ в изложенном приближении и какая последовательность диаграмм

при этом воспроизводится. Прежде всего видно, что у  $A$  и  $B$  отсутствуют диаграммы, приведенные на рис. 24,  $a$  и  $b$ . Тем не менее СУ для  $A$  воспроизводится следующим образом: упругий скачок  $\Delta_5$  учитывается точно, т. е. СУ оставляет  $A$  в рамках сделанного приближения. Скачок  $\Delta_{4d}$ , отвечающий неупругому разрезу, также воспроизводится, но при этом в качестве  $B$  надо взять совокупность диаграмм в том же приближении, которое дается уравнением рис. 22. Однако здесь полностью отсутствует разрез

$\Delta_{4n}$ . Этот разрез мог бы появиться в диаграмме, показанной на рис. 25, если бы все частицы на разрезе, проведенном волнистой линией, находились на энергетической поверхности. Но это

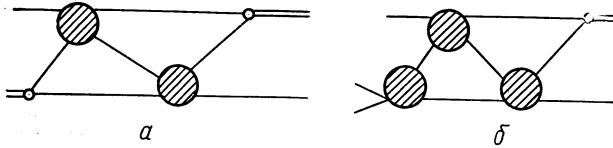


Рис. 24.

невозможно, так как дейтрон на рис. 25 уже находится на энергетической поверхности и потому не может распасться на два свободных нуклона. Все сказанное можно буквально повторить для амплитуды развала  $B$ . Таким образом, видно, что уже частичный учет требований унитарности (правильный скачок на упругом разрезе) приводит не только к качественному, но и неплохому количественному согласию с экспериментом. При этом решение уравнений рис. 17 и 22 не требует даже интеграции, так как они сводятся к алгебраическим.

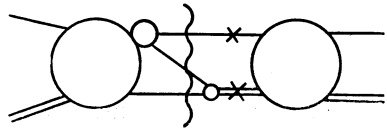


Рис. 25.

$$\text{Diagram } Q = \text{Diagram } F - i\pi \text{ Diagram } Q \text{ with cut}$$

Рис. 26.

$$\text{Diagram } N = \text{Diagram } Q - i\pi \text{ Diagram } N \text{ with cut } R - i\pi \text{ Diagram } N \text{ with cut } Q$$

Рис. 27.

$$\text{Diagram } B = \text{Diagram } N - i\pi \text{ Diagram } B \text{ with cut } t - i\pi \text{ Diagram } B \text{ with cut } N$$

Рис. 28.

$$\text{Diagram } A = \text{Diagram } N - i\pi \text{ Diagram } B \text{ with cut } N$$

Рис. 29.

Последовательная поэтапная схема построения полностью унитаризованной амплитуды была проведена в работах [13, 15]. Соответствующие уравнения графически изображены на рис. 26—

29, где по всем промежуточным состояниям проводится интегрирование с учетом законов сохранения и выведения частиц на энергетическую поверхность (последнее показано штриховой линией, пересекающей внутренние линии диаграмм). Авторы исходят из произвольно заданной функции  $F$ , которая не должна обладать разрезами  $\Delta_1 - \Delta_5$  (она может иметь левые разрезы). Тогда уравнение на рис. 26 дает амплитуду  $Q$ , которая удовлетворяет требованиям упругой двухчастичной унитарности. Заметим, что если  $F$  отождествить с  $I$ , то уравнение на рис. 26 сразу даст упругую амплитуду  $A$ , так как оно совпадает с уравнением на рис. 17. Подставив полученное  $Q$  в уравнение на рис. 27, построим амплитуду  $N$ , которая кроме правильного скачка на разрезе  $\Delta_5$  имеет также скачки  $\Delta_{4d}$  и  $\Delta_{3d}$ . Далее подставляем  $N$  в уравнение на рис. 28 и получаем уже амплитуду развала  $B$ , которая обладает теперь также правильными унитарными свойствами на скачках  $\Delta_{3n}$  и  $\Delta_{4n}$ . Упругая амплитуда получается отсюда с помощью уравнения на рис. 29. Отметим, что стоящая в уравнении на рис. 27 величина  $R$  есть двухчастичная  $R$ -матрица, связанная с  $T$ -матрицей обычным соотношением:

$$T = R - i\pi R\delta(H_0 - E)T. \quad (37)$$

Итак, изложенная схема дает нам амплитуды  $A$  и  $B$ , удовлетворяющие всем унитарным свойствам, кроме одного — не воспроизводится динамический скачок  $\Delta_1$ , так как  $F$  по выбору не должна иметь там особенности. Все остальные величины также не могут иметь разрез  $\Delta_1$ , так как содержат только более высокие итерации  $F$ . По той же причине для амплитуды  $w$  ( $3 \rightarrow 3$ ) СУ не удовлетворяется; однако это может оказаться не столь важным для  $A$  и  $B$  потому, что  $w$  входит в них только опосредствованно, через СУ.

Практически в качестве  $F$  удобно выбрать простейшую диаграмму — полюсную, но нужно исключить в ней особенность  $\Delta_1$ , для чего диаграмму надо взять в смысле главного значения. Конкретно, в работе [14] бралась диаграмма, изображенная на рис. 30, где кружочки (вершины) отвечают  $R$ -матрицам, а черта на нуклонной линии означает, что  $\delta$ -функцию следует опустить. Далее решение уравнений рис. 26—29 после разложения по парциальным волнам сводится к решению системы одномерных интегральных уравнений вместо двумерных уравнений в точном методе Фаддеева. Результаты расчетов работы [14] приведены на рис. 31 для упругого рассеяния при энергии  $14,4 \text{ Мэв}$  и сравниваются с простой унитаризацией (36) и точным расчетом для потенциала Ямагучи. Видно, что более точное выполнение СУ приводит

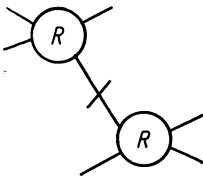


Рис. 30.

к решению системы одномерных интегральных уравнений вместо двумерных уравнений в точном методе Фаддеева. Результаты расчетов работы [14] приведены на рис. 31 для упругого рассеяния при энергии  $14,4 \text{ Мэв}$  и сравниваются с простой унитаризацией (36) и точным расчетом для потенциала Ямагучи. Видно, что более точное выполнение СУ приводит



к лучшему количественному согласию. Недостатком изложенного метода, однако, является его сложность — результат нельзя получить в аналитическом виде, а только численно, в результате последовательного решения системы уравнений. Поэтому практическая целесообразность метода, в особенности для систем более сложных, чем дейтон, вызывает сомнения. Тем не менее это первый метод, в котором трехчастичная неупругая унитарность учитывается точно (скачок  $\Delta_d$ ).

Другой метод унитаризации с помощью введения трехчастичной  $K$ -матрицы был предложен в работе [34] и использован для расчетов резонансов в системе трех тел в работе [35]. В этой работе  $K$ -матрица вводится весьма формальным образом, и можно показать, что СУ выполняются, только если  $K$ -матрица удовлетворяет точному уравнению, которое столь же сложно, как и уравнение Фаддеева. Если же для  $K$ -матрицы использовать разложение Гильберта — Шмидта и ограничиться конечным числом членов, как это сделано в работе [34], то СУ нарушаются. Другой недостаток работы [34] состоит в том, что вводимые в ней собственные значения  $\Lambda_n(E)$  не являются аналитическими функциями энергии. В этом смысле вызывает недоверие результат работы [35], где был предсказан резонанс в системе трех тел.

В следующем разделе будет предложен иной подход для построения унитаризованных амплитуд.

#### 4. МЕТОД ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА ДЛЯ ТРЕХ ЧАСТИЦ

**Метод Гильберта — Шмидта и его физическое истолкование. Пример двух частиц.** Для реакций перехода  $2 \rightarrow 2$  уже давно используется метод, называемый обычно теорией  $R$ -матрицы. В общем многоканальном случае этот метод позволяет записать феноменологически  $S$ -матрицу, удовлетворяющую следую-

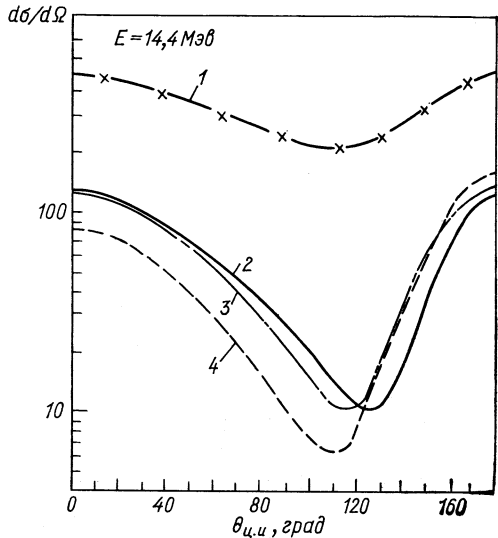


Рис. 31:

1 — импульсное приближение; 2 — точный расчет; 3 — унитаризация простейшей диаграммы; 4 — квазиунитаризация двух первых диаграмм по Слоуну.

щим требованиям: а) двухчастичная унитарность; б) правильное поведение вблизи двухчастичных порогов; в) появление резонансов, распадающихся на две частицы (подсистемы). Ниже будет изложен другой подход — метод Гильберта — Шмидта, который может рассматриваться и как феноменологический (при желании), и как динамический подход для вычисления всех характеристик исследуемого процесса, включая параметры резонансов. В последнем случае метод Гильберта — Шмидта — единственный математически последовательный метод, позволяющий определить волновую функцию резонанса. Существенно, что метод Гильберта — Шмидта позволяет описывать системы из двух, трех, четырех и т. д. подсистем, при этом описание двух частиц с помощью метода Гильберта — Шмидта затем используется для рассмотрения системы трех частиц и далее для системы четырех частиц. Дальше будет изложен метод в применении к системе трех частиц. Главным результатом и достоинством метода является то, что  $t$ -матрица на энергетической поверхности и вне ее представляется в виде суммы по дискретным состояниям — полюсам, которые отвечают виртуальным, связанным состояниям или резонансам, причем сумма эта быстро сходится.

Для двух частиц удобно для формулировки метода [36] исходить из уравнения Липпмана — Швингера:

$$(p^2/m - E) \psi(\mathbf{p}) = - \int V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \psi(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (38)$$

Вводя вершинную функцию  $a(\mathbf{p}, E) = (p^2/m - E) \psi(\mathbf{p})$ , рассмотрим совокупность решений однородного уравнения, получающегося из (38):

$$a_\nu(\mathbf{p}, E) = - \frac{1}{\mu_\nu(E)} \int \frac{V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') a_\nu(\mathbf{p}', E)}{(p'^2/m - E)} d\mathbf{p}'. \quad (39)$$

Уравнение (39) — уравнение типа Фредгольма для  $E < 0$  и, более того, ядро уравнения типа Гильберта — Шмидта. Для всех остальных  $E$  вне разреза  $E \geq 0$  решения и собственные значения  $\mu_\nu(E)$  получаются аналитическим продолжением по  $E$  из области  $E < 0$ , где множество  $\mu_\nu(E)$  дискретно и не имеет точек сгущения. Более того, совокупность  $a_\nu(\mathbf{p}, E)$  образует полную систему для разложения и действия любых операторов, которые определяются ядрами, выражающимися через ядро уравнения (39). Например, уравнение для  $t$ -матрицы имеет вид

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \int \frac{V(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') t(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'; z)}{(p''^2/m - z)} d\mathbf{p}''. \quad (40)$$

Откуда видно, что  $t$  выражается через резольвенту уравнения (39) и потому может быть разложена по  $a_\nu(\mathbf{p}, z)$ .

Запишем, как обычно, для уравнения типа Гильберта — Шмидта разложение ядра:

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = - \sum_{\nu} \mu_{\nu} a_{\nu}(\mathbf{p}, z) a_{\nu}(-\mathbf{p}', z). \quad (41)$$

Тогда

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = - \sum_{\nu} \frac{\mu_{\nu}(z)}{1-\mu_{\nu}(z)} a_{\nu}(\mathbf{p}, z) a_{\nu}(-\mathbf{p}', z). \quad (42)$$

Функции  $a_{\nu}(\mathbf{p}, z)$  удовлетворяют нормировке:

$$\int \frac{a_{\nu}(\mathbf{p}, z) a_{\nu'}(-\mathbf{p}, z)}{(p^2/m-z)} d\mathbf{p} = \delta_{\nu\nu'}. \quad (43)$$

Для центрально-симметрического потенциала удобно выделить в  $a_{\nu}(\mathbf{p}, z)$  явную зависимость от угла (соответственно из индекса ( $\nu$ )) выделяются квантовые числа  $l, m$ :

$$a_{\nu}(\mathbf{p}, z) = a_{\nu l}(p, z) Y_{lm}(\mathbf{p}/p), \quad (44)$$

и тогда для  $t_l(p, p'; z)$  получаем

$$t_l(p, p'; z) = - \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu} \frac{\mu_{\nu l}(z)}{1-\mu_{\nu l}(z)} a_{\nu l}(p, z) a_{\nu l}(p', z), \quad (45)$$

и условие нормировки для  $a_{\nu l}(p, z)$  имеет вид:

$$\int \frac{a_{\nu l}(p, z) a_{\nu' l}(p, z)}{(p^2/m-z)} p^2 dp = \delta_{\nu\nu'}. \quad (46)$$

Собственные значения Гильберта — Шмидта  $\mu_{\nu l}(z)$  зависят от  $l$ , однако в дальнейшем для простоты всюду этот индекс будет опущен. Из вещественности ядра уравнения (39) при  $E < 0$  следует, что  $\mu_{\nu}(E)$  есть вещественная аналитическая функция для эрмитова потенциала  $V$ :

$$\mu_{\nu}(z^*) = \mu_{\nu}^*(z). \quad (47)$$

Кроме того, взяв  $l$ -ю парциальную волну от уравнения (39), получаем, что [36]

$$a_{\nu l}(p, z) \sim p^l, \quad (48)$$

а также что

$$\mu_{\nu, l}^*(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{l+1/2}; \quad (49)$$

$$a_{\nu l}(p, z^*) = a_{\nu l}^*(p, z). \quad (50)$$

Из (49) видно, что удобно ввести переменную  $k = \sqrt{mz}$  и  $\mu_{\nu l}(k)$  рассматривать на всей  $k$ -плоскости, тогда  $\mu_{\nu l}(k)$  является аналитической функцией  $k$  всюду в верхней полуплоскости  $k$ .

Элементы  $S$ -матрицы можно выразить через  $\mu_{\nu l}(k)$  непосредственно [16, 36]:

$$S_l(k) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \mu_{\nu l}(-k)}{1 - \mu_{\nu l}(k)}. \quad (51)$$

Из (45) видно, что обращение  $\mu_{\nu}(z)$  в единицу при некотором отрицательном  $z$  означает полюс в  $l$ -матрице, а обращение в единицу в комплексной точке  $z = z_0 = E_0 - i\Gamma/2$  дает резонансную формулу Брейта — Вигнера. Тогда  $a_{\nu}(p, z)$  (точнее,  $\psi_{\nu}(p, z)$ ) означают соответственно волновую функцию связанного состояния и резонанса в системе двух частиц. Чтобы лучше понять физический смысл и значение полученного результата, перейдем в координатное пространство. Запишем уравнение, эквивалентное (38) и (39):

$$\left[ H_0 + \frac{1}{\mu_{\nu}(E)} V(r) \right] \psi_{\nu}(r, E) = E \psi_{\nu}(r, E). \quad (52)$$

Граничные условия следуют из однородного уравнения (39) при  $E = E + i\delta$ ,  $\delta > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\nu}(r, E) \text{ конечна в нуле;} \\ \psi_{\nu}(r, E) \rightarrow \exp(ikr)/r, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Отсюда видно, что при  $\text{Im } k > 0$  следует выбирать асимптотически убывающее и потому нормированное решение. Условие нормировки для функции  $\psi_{\nu}(r, E)$ , соответствующее (46), есть:

$$\int \psi_{\nu}(r, E) V(r) \psi_{\nu}(r, E) dr = -\mu_{\nu} \delta_{\nu\nu'}. \quad (54)$$

Для  $E < 0$  существует и обычный нормировочный интеграл, потому что  $\mu_{\nu}(E_0) = 1$  определяет связанное состояние в точке  $E_0$ , а само  $\mu_{\nu}^{-1}(E)$  показывает, во сколько раз надо углубить потенциал, чтобы возник  $\nu$ -й уровень при энергии  $E$ .

Сразу же можно установить, как быстро убывают  $\mu_{\nu}(E)$  с ростом  $\nu$ , если возьмем потенциал конечного радиуса действия и учтем, что качественно картина в таком потенциале не отличается от потенциала прямоугольной ямы, а ситуация в достаточно глубокой яме ( $\nu \rightarrow \infty$ ) не отличается от ситуации в бесконечно глубокой яме, если отсчет энергии вести от дна ямы. В такой яме радиуса  $R$  энергия  $\nu$ -го уровня дается формулой

$$E_{\nu} = \hbar^2 \pi^2 \nu^2 / (mR^2).$$

Отсюда, переходя к отсчету энергии от нуля, как обычно, получаем:

$$|V_0|/[\mu_1(E)] = |E| + \hbar^2 \pi^2 / (mR^2) \quad \text{и} \quad |V_0|/[\mu_{\nu}(E)] = |E| + \hbar^2 \pi^2 \nu^2 / (mR^2). \quad (55)$$

Из (55) легко находим:

$$\mu_\nu(E) = |V_0| / [|E| + \hbar^2 \pi^2 \nu^2 / (mR^2)]. \quad (56)$$

Таким образом: 1)  $\mu_\nu(E)$  падает как  $1/\nu^2$ ; 2) спадание при  $\nu \rightarrow \infty$  начинается при  $\nu \gg \nu_0$ , где  $\nu_0^2 \sim mR^2 |E| / (\hbar^2 \pi^2)$ , т. е. с ростом энергии оно затягивается; 3)  $\mu_\nu(E)$  при фиксированном  $\nu$  спадает с ростом  $|E|$  как  $1/|E|$ . В силу аналитичности  $\mu_\nu(E)$  это свойство должно сохраниться при стремлении  $|E| \rightarrow \infty$  вдоль любого луча. Из-за убывания  $\mu_\nu \sim 1/\nu^2$  возникает еще и убывание волновой функции  $\psi_\nu$  в силу условия нормировки (54). Тогда и вершинные функции  $a_\nu(p, E) \sim 1/\nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$  и весь ряд для  $t$ -матрицы сходится еще быстрее; последовательные члены в формуле (45) убывают как  $1/\nu^4$ . Это обстоятельство крайне важно для практических приложений метода Гильберта — Шмидта.

Перейдем к  $E > 0$ . Заметим, что асимптотическое условие (53) и нормировочное условие (54) аналитичны по энергии и их можно использовать и при  $E > 0$ , в отличие от обычного нормировочного условия:  $\int |\psi|^2 d\tau = 1$ . Поэтому для резонанса  $E = E_0 - i\Gamma/2$  можно использовать  $\psi_\nu(r, E_0)$  в качестве волновой функции резонанса. Например, сдвиг положения резонанса в результате возмущения  $V_1(r)$  выражается формулой [37]:

$$\Delta E = \int V_1(r) [\psi_\nu(r, E_0)]^2 d\tau / \int [\psi_\nu(r, E_0)]^2 d\tau. \quad (57)$$

Здесь интеграл в знаменателе (57) сходится при  $E_0 = E_0 + i\delta$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. в обычном физическом пределе.

Волновая функция  $\psi_\nu(r, E)$  определяет также средние значения операторов; например, для магнитного момента резонанса получаем:

$$\langle \mathfrak{M}_\nu \rangle = \text{Re} \frac{\int \psi_\nu(r, E) \hat{\mathfrak{M}} \psi_\nu(r, E) d\tau}{\int [\psi_\nu(r, E)]^2 d\tau}. \quad (58)$$

Знак действительной части убирает мнимую добавку, которая возникает из-за изменения ширины резонанса при включении магнитного поля.

Таким образом, резонансы могут рассматриваться здесь на равных основаниях со связанными состояниями. Для энергии  $E > 0$  граничное условие (53) предполагает, что частицы рождаются потенциалом  $V(r)/\mu_\nu(E)$ , поэтому  $\text{Im} [V(r)/\mu_\nu(E)] > 0$ . Для вещественного притягивающего потенциала  $V(r) < 0$ , отсюда следует, что  $\text{Im} \mu_\nu(E) > 0$  для  $E > 0$ . С другой стороны, если потенциал  $V(r)$  учитывает неупругое поглощение, как, например, в случае потенциала черной сферы, то  $\text{Im} V(r) < 0$ , и тогда  $\mu_\nu(E)$  ( $E > 0$ ) тем более должны иметь  $\text{Im} \mu_\nu(E) > 0$ .

Однако для комплексных потенциалов нарушается условие (47), и поэтому  $\mu_\nu(E - i\delta) = \mu_\nu(-k)$ , входящее в выражение для  $S$ -матрицы (51), может оказаться вещественным и равным единице. Тогда  $S_l(k) = 0$ , что и соответствует абсолютно поглощающей сфере. Отметим, что в случае комплексных потенциалов, для которых формы мнимой части и вещественной совпадают,  $\mu_\nu(E)$  переопределяются простым образом:  $\mu_\nu(E) = \tilde{\mu}_\nu(E) \times (\operatorname{Re} V + i \operatorname{Im} V) / \operatorname{Re} V$ , где  $\tilde{\mu}_\nu(E)$  — решение для вещественного потенциала. Различные случаи явно решаемых потенциалов для определения  $\mu_\nu(E)$  представлены в работе [38]. Если потенциал имеет бесконечную отталкивающую сердцевину, то метод видоизменяется простым образом [39]. Часть изложенных здесь вопросов более подробно изложена в работах [17, 36–38, 40].

**Представление Гильберта — Шмидта для трехчастичных амплитуд.** Для системы трех частиц, описываемой уравнением Фаддеева [5], можно также последовательно применять теорию Гильберта — Шмидта, поскольку это уравнение — уравнение типа Фредгольма. Если, как и раньше, ограничиться случаем, когда пара взаимодействующих частиц имеет относительный орбитальный момент  $l = 0$ , и для двухчастичной  $t$ -матрицы использовать разложение Гильберта — Шмидта (45), можно собственную функцию  $\chi_n(k, \mathbf{p})$  однородного уравнения Фаддеева с собственным значением  $\gamma_n(z)$  представить в виде [41]

$$\chi_n^L(k, \mathbf{p}) = \frac{m\gamma_n(z)}{2\pi} \sum_{\nu} \frac{\mu_\nu(x)}{1 - \mu_\nu(x)} a_\nu(k, x^2/m) \tilde{b}_{\nu n}^L(\mathbf{p}, z). \quad (59)$$

Здесь

$$x^2 = mz - 3p^2/4; \quad z = E + i\delta. \quad (60)$$

Для выбранного  $l = 0$  полный момент системы совпадает с моментом третьей частицы и равен  $L$ . Удобно в функции  $\tilde{b}_{\nu n}^L(\mathbf{p}, z)$  отделить угловую зависимость:

$$\tilde{b}_{\nu n}^L(\mathbf{p}, z) = Y_{LM}(\mathbf{p}/p) b_{\nu n}^L(p, z). \quad (61)$$

Тогда  $b_{\nu n}^L(p, z)$  — решения однородного уравнения Фаддеева:

$$b_{\nu n}^L(p, z) = \gamma_n(z) \sum_{\nu'} \int \mathcal{K}_{\nu\nu'}^L(p, p'; z) b_{\nu'n}^L(p', z) p'^2 dp', \quad (62)$$

где ядро уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\nu\nu'}^L(p, p'; z) = m \int \frac{d \cos \theta P_L(\cos \theta)}{(p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' + p'^2 - mz)} \frac{\mu_{\nu'}(x')}{[1 - \mu_{\nu'}(x')] } a_\nu \left( \left| \frac{\mathbf{p}}{2} + \mathbf{p}' \right|, \frac{x^2}{m} \right) \times \\ \times a_{\nu'} \left( \left| \frac{\mathbf{p}'}{2} + \mathbf{p} \right|, \frac{x'^2}{m} \right); \end{aligned} \quad (63)$$

$$\theta = \widehat{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad x'^2 = mz - 3p'^2/4.$$

Собственные функции уравнения (62) удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{\nu} \int b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu n}^L(p, z) \frac{\mu_{\nu}(z)}{1 - \mu_{\nu}(z)} p^2 dp = \delta_{nn'}, \quad (64)$$

а ядро уравнения (62) можно обычным образом разложить по собственным функциям  $b_{\nu n}^L(p, z)$ .

Существенным моментом для дальнейшего является то, что амплитуда  $3 \rightarrow 3$   $w(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$ , как можно увидеть из уравнения (8) и как показано в работах [16, 17], представляется в виде

$$\begin{aligned} w(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z) = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu\nu'} \frac{\mu_{\nu}(z) a_{\nu}(k, \kappa^2/m) \mu_{\nu'}(z') a_{\nu'}(k', \kappa'^2/m)}{[1 - \mu_{\nu}(z)][1 - \mu_{\nu'}(z')] } \times \\ \times w_{\nu\nu'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z), \end{aligned} \quad (65)$$

где функция  $w_{\nu\nu'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$  удовлетворяет неоднородному уравнению [25], ядро которого фактически совпадает с (63), и парциальная амплитуда  $w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z)$  является фактически резольвентой уравнения (62). Поэтому для нее имеет место разложение

$$w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu' n}^L(p', z)}{1 - \gamma_n(z)}. \quad (66)$$

Здесь парциальная амплитуда  $w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z)$  определяется через полную амплитуду  $w_{\nu\nu'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z)$  [выражение (65)] обычным образом:

$$w_{\nu\nu'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z) = \sum_L (2L + 1) P_L(\cos \theta) w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z). \quad (67)$$

Из формул (65), (66) и определения амплитуд рассеяния и развала легко получить представление Гильберта — Шмидта для амплитуд  $A$  и  $B$ . Для определенности будем считать, что дейтоному полюсу отвечает собственное значение  $\nu = \nu_0$ . Вблизи полюса справедливо разложение  $\mu_{\nu_0}(z) = 1 + \mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)(z + \varepsilon)$ , а функция  $\varphi(\alpha) = a_{\nu_0}(i\alpha, -\varepsilon)/\sqrt{\mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)}$  — волновая функция дейтона ( $\alpha^2 = m\varepsilon$ ) в обычной нормировке, когда  $t(k, k'; z) = \varphi(k) \varphi^*(k)/[4\pi(z + \varepsilon)] + \dots$ . В результате получаем следующие разложения Гильберта — Шмидта для парциальных амплитуд [17]:

$$A_L(p, z) = \frac{1}{4\pi\mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)} \sum_n \frac{[b_{\nu_0 n}^L(p, z)]^2}{1 - \gamma_n(z)} \quad (68)$$

и

$$B_L(p, k' p'; z) = \frac{(-1)}{\sqrt{4\pi\mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)}} \sum_n \sum_{\nu} \frac{\mu_{\nu}(k') a_{\nu}(k', k'^2/m)}{[1-\mu_{\nu}(k')] } \frac{b_{\nu_0 n}^L(p, z) b_{\nu n}^L(p', z)}{4\pi [1-\gamma_n(z)]}. \quad (69)$$

Отметим также, что неоднородный член уравнения (8), который обозначим  $w^{(0)}(k\mathbf{p}, k'\mathbf{p}'; z)$ , допускает представление в форме (65), и для его парциальной амплитуды  $w_{\nu\nu'}^{(0)L}(p, p'; z)$  имеет место разложение:

$$w_{\nu\nu'}^{(0)L}(p, p'; z) = \frac{(-1)}{4\pi} \sum_n \frac{1}{\gamma_n(z)} b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu' n}^L(p', z). \quad (70)$$

**Графическое представление и аналитические свойства ряда Гильберта — Шмидта.** Выше были представлены физические амплитуды рассеяния и развала в виде ряда Гильберта — Шмидта. Каждому члену этого ряда можно сопоставить простую диаграмму, при этом существенно, что все диаграммы будут иметь одно и то же изображение и различаться только зависимостью вершин и пропагаторов от индекса  $\nu$  и  $n$ .

Внешние линии, отвечающие наблюдаемым частицам, будем изображать сплошной линией, а наблюдаемый дейтон — в виде двух линий. Наше графическое представление будет основываться на следующих сопоставлениях:

1) двухчастичной вершине отвечает функция  $a_{\nu}(k, k^2/m)$ , и будем ее изображать полным кружком, как показано на рис. 32, а;

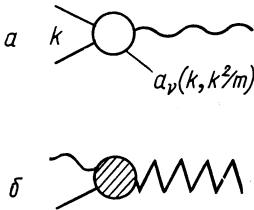


Рис. 32.

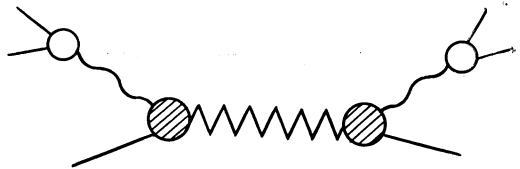


Рис. 33

2)  $\mu_{\nu}(k)/[1 - \mu_{\nu}(k)]$  приобретает значение пропагатора, и его будем изображать волнистой линией. Дальше будем говорить, что волнистой линии отвечает распространение эйгеона (eigeon) с индексом  $\nu$ ;

3) трехчастичной вершине сопоставим функцию  $b_{\nu n}^L(p, z)$  и будем изображать ее темным кружком (см. рис. 32, б). В эту вершину входят линия частицы и линия двухчастичного эйгеона и выходит ребристая линия трехчастичного эйгеона;



4) трехчастичный пропагатор принимает значения  $[1 - \gamma_n(z)]^{-1}$ , и его будем изображать ребристой линией. Эта линия отвечает распространению трехчастичного эйгеона.

Таким образом, каждому члену ряда для  $3 \rightarrow 3$  парциальной амплитуды  $w^L(kp, k'p'; z)$  будет соответствовать график, приведенный на рис. 33. Амплитуда упругого рассеяния  $A_L$  представляется в виде суммы графиков, показанных на рис. 34, а. Напомним, что дейтону отвечает собственное значение  $\nu = \nu_0$ . В качестве еще одного примера на рис. 34, б приведено также графическое представление амплитуды  $nd \rightarrow nd^*$ , где  $d^*$  означает синглетное состояние дейтона — виртуальный полюс в системе двух частиц. Будем считать, что ему отвечает собственное значение Гильберта — Шмидта с номером  $\nu = \nu_1$ . Эта амплитуда часто определяется экспериментально.

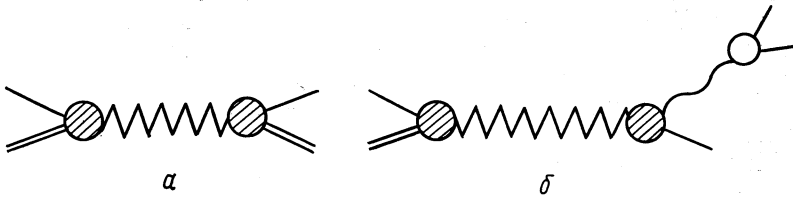


Рис. 34.

Как видно из графиков и явного выражения для амплитуды,  $w^L(kp, k'p'; z)$  представляет собой сумму по резонансам в двухчастичном канале. Положения двухчастичного и трехчастичного резонансов определяются условиями  $\mu_\nu(k) = 1$  и  $\gamma_n(z) = 1$  соответственно. Вопрос о трехчастичных резонансах подробно обсудим в разд. 6. Здесь лишь подчеркнем, что все особенности амплитуды  $w$ , за исключением динамического разреза, воспроизводятся каждым членом суммы. А именно *FSI*-разрезы возникают в (65) из-за особенностей функций  $a_{\nu'}$ ,  $\mu_{\nu'}$ , зависящих от импульсов  $k'$  и  $p'$  в конечном состоянии, а также функций  $b_{\nu n}(p', z)$ .

Упругий  $(-\epsilon, \infty)$  и трехчастичный  $(0, \infty)$  унитарные разрезы возникают только от функций  $b_{\nu n}(p, z)$  и  $\gamma_n(z)$ . Что касается динамического разреза, то ситуация здесь такая же, как при учете потенциального разреза в двухчастичной  $t$ -матрице в разложении Гильберта — Шмидта. Известно, что конечное число членов в (45) не содержит левого потенциального разреза. Однако для интересующих нас значений энергии  $E > -\epsilon$  этот разрез находится в нефизической области и  $t$ -матрица с большой точностью численно воспроизводится первыми несколькими членами. Существенно, что последовательные члены ряда убывают как  $1/\nu^4$  [17]. Точно так же в трехчастичной амплитуде рассеяния и развала динамический разрез находится в нефизической обла-

сти [25], и поэтому достаточно с хорошей точностью численно воспроизвести значения амплитуд для энергий  $E > -\varepsilon$ . Фактически уже было показано, что собственные значения  $\gamma_n(z)$  растут с номером  $n$  пропорционально  $n^2$ , и поэтому ряд Гильберта — Шмидта для трехчастичных амплитуд убывает по крайней мере как  $1/n^2$ . Это предполагает, что первые несколько членов с большой точностью численно воспроизводят трехчастичные физические характеристики.

Действительно, первые численные расчеты [42] показывают, что длина  $nd$ -рассеяния в бесспиновом случае и для квартетного состояния определяется первыми тремя членами с погрешностью не хуже 5%, а второе собственное значение  $\gamma_2^{-1}$  примерно в 5 раз меньше  $\gamma_1^{-1}$ . Ситуация, правда, ухудшается при вычислениях дублетной длины  $nd$ -рассеяния, когда для достижения той же точности понадобилось пять членов [42]. Затягивание сходимости ряда Гильберта — Шмидта в этом случае связано с малым абсолютным значением дублетной длины рассеяния, и хотя  $\gamma_2^{-1}$  примерно в 3,5 раза меньше  $\gamma_1^{-1}$ , они вносят вклад разного знака и первые два члена ряда Гильберта — Шмидта сильно сокращаются.

Хотелось бы здесь также подчеркнуть, что если по каким-то физическим причинам динамическая особенность оказывается очень важной, например при высоких энергиях  $E \gtrsim 100 \text{ Мэв}$ , то ее можно выделить в явном виде. Для этого заметим, что вся динамическая особенность находится в неоднородном члене уравнения (8), допускающем разложение Гильберта — Шмидта (70). Если в амплитуде  $w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z)$  (66) прибавим и вычтем член  $w_{\nu\nu'}^{L(0)}$ , то получим

$$w_{\nu\nu'}^L(p, p'; z) = w_{\nu\nu'}^{(0)L}(p, p'; z) + \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu'n}^L(p', z)}{\gamma_n^L(z) [1 - \gamma_n^L(z)]}. \quad (71)$$

После выделения динамической особенности сумма по  $n$  в (71) убывает быстрее, чем исходный ряд, так как содержит дополнительный множитель  $\gamma_n(z)$ , растущий пропорционально  $n^2$  для больших  $n$ .

Коротко остановимся также на основных аналитических свойствах трехчастичных собственных функций и собственных значений. В работе [41] было показано, что

$$\gamma_n(z^*) = \gamma_n^*(z); \quad b_{\nu n}^L(p, z^*) = b_{\nu n}^{L*}(p, z). \quad (72)$$

Вблизи  $p \rightarrow 0$

$$b_{\nu n}^L(p, z) \sim p^L, \quad p \rightarrow 0. \quad (73)$$

Функция  $\gamma_n(z)$  имеет характерные особенности на двухчастичном ( $z = -\varepsilon$ ) и трехчастичном ( $z = 0$ ) порогах [17]. Вблизи  $z = -\varepsilon$   $\gamma_n(z)$  имеет обычную корневую особенность (такую же, как двухчастичные собственные значения  $\mu_{\nu l}(k, E)$  вблизи  $E = 0$ ):

$$\gamma_n^L(z) \sim (z + \varepsilon)^{L+1/2}. \quad (74)$$

В точке  $z = 0$ , с которой начинается трехчастичный унитарный разрез,  $\gamma_n^L(z)$  имеет логарифмическую особенность:

$$\gamma_n^L(z) \sim z^{2+L} \ln z, \quad z \rightarrow 0. \quad (75)$$

Для трехчастичных собственных функций  $b_{\nu n}^L(p, z)$  в области значений  $z < 0$  можно установить правило сумм [16]:

$$1 = \frac{4\text{lim} p}{3\mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)} \sum_n \frac{[b_{\nu n}^L(p, z)]^2}{1 - \gamma_n(z) [\gamma_m(z^*)]^{-1}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (76)$$

которое имеет место при любом  $m$ . Разрешая систему алгебраических уравнений (76), можно получить для  $S_L$ -матрицы представление:

$$S_L = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \gamma_n^L(z_-)}{1 - \gamma_n^L(z_+)}. \quad (77)$$

Здесь  $z_+$  и  $z_-$  — значения энергии на верхнем и нижнем берегу двухчастичного разреза, начинающегося в точке  $z = -\varepsilon$ . При  $z < 0$ , согласно (72),  $\gamma_n(z_-) = \gamma_n^*(z_+)$ , и поэтому для каждого члена в (77)

$$\left| \frac{1 - \gamma_n(z_-)}{1 - \gamma_n(z_+)} \right| = 1, \quad z < 0, \quad (78)$$

т. е. представление (78) автоматически обеспечивает унитарность.

Если направить теперь двухчастичный разрез над трехчастичным, то формулу (77) можно аналитически продолжить и в область  $z > 0$ . При этом значение  $z_-$  нужно брать в точке между двумя разрезами. Тогда (77) учитывает только упругую часть скачка  $\gamma_n(z)$  и  $\gamma_n(z_-) \neq \gamma_n^*(z_+)$  для  $z > 0$ . Можно показать, что при этом  $|S_L| < 1$ .

**Соотношения унитарности в представлении Гильберта — Шмидта.** Представив трехчастичные амплитуды в виде разложения Гильберта — Шмидта, можно теперь заново переформулировать соотношения унитарности и выяснить вытекающие из них следствия. Сначала рассмотрим только унитарные разре-

зы, т. е. скачки  $\Delta_4$  и  $\Delta_5$ :  $\Delta_u = \Delta_4 + \Delta_5$ . Легко показать [17], что СУ приводится к форме:

$$\begin{aligned} & \Delta_u \sum_n \frac{b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu' n}^L(p', z)}{1 - \gamma_n^L(z)} = \\ & = -i\pi m \sum_{n, n'} \frac{b_{\nu n}^L(p, z) b_{\nu' n'}^L(p', z^*) M_{nn'}^L(z)}{[1 - \gamma_n(z)][1 - \gamma_{n'}(z^*)]}, \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} M_{nn'}^L(z) &= \frac{4p_0}{3\mu_{\nu_0}'(-\varepsilon)} b_{\nu_0 n}^L(p_0, z) b_{\nu_0 n'}^L(p_0, z^*) + \\ &+ \int_0^\infty p_1^2 dp_1 \sqrt{mz - 3p_1^2/4} f_n(p_1, z) f_{n'}(p_1, z^*) \times \\ &\times \theta(mz - 3p_1^2/4) + 2 \int \int p_1 dp_1 p_2 dp_2 f_n(p_1, z) f_{n'}(p_2, z^*) \times \\ &\times P_L\left(\frac{mz - p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_2}\right) \theta\left[1 - \frac{|mz - p_1^2 - p_2^2|}{p_1 p_2}\right]. \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь  $p_0^2 = 4(mz + m\varepsilon)/3 = 4(mz + \alpha^2)/3$ ;

$$f_n(p_i, z) = \sum_\nu \frac{\mu_\nu(\kappa_i)}{1 - \mu_\nu(\kappa_i)} a_\nu(\kappa_i, \kappa_i^2/m) b_{\nu n}(p_i, z) \quad (81)$$

и, как обычно,  $\kappa_i^2 = mz - 3p_i^2/4$ .

Что можно сказать о соотношении унитарности (79)? Ясно, что если собственные функции  $b_{\nu n}^L(p, z)$  и собственные значения  $\gamma_n^L(z)$  являются точным решением уравнения Фаддеева, то СУ должно выполняться автоматически. Тем не менее это соотношение может оказаться полезным и важным, во-первых, для выявления главных особенностей и аналитических свойств функций  $b_{\nu n}^L(p, z)$  и  $\gamma_n(z)$ , а во-вторых, для построения феноменологических функций, удовлетворяющих этим соотношениям. Далее увидим, что СУ в форме (79) устанавливает только связь между  $\gamma_n(z)$  и  $b_{\nu n}(p, z)$  и не накладывает ограничений на выбор  $b_{\nu n}(p, z)$ , если рассматривать их как некоторые феноменологические функции.

До сих пор учитывались только унитарные скачки амплитуд  $\Delta_4$  и  $\Delta_5$ . Уже обсуждалось, что амплитуда рассеяния  $A$  имеет только унитарные разрезы, но амплитуда развала  $B$  имеет, кроме того,  $FSI$ -разрез, начинающийся в точке  $z_f = 3p'^2/4m$ . Этот скачок складывается из скачков  $\Delta_{3d}$  и  $\Delta_{3n}$  (12) и накладывает

дополнительные ограничения на выбор функций  $b_{\nu n}(p, z)$ . В общем виде его можно записать так [25]:

$$\begin{aligned} \Delta_3 B^L(p, k' p'; z) = & -im4\pi^2 t(k', k'; z_2 - 3p'^2/4m) \times \\ & \times \left\{ k' B^L(p, k' p'; z_1) + \frac{1}{p'} \int dp_1^2 B^L(p, \kappa_1 p_1; z_1) \times \right. \\ & \left. \times P_L \left( \frac{mz - p_1^2 - p'^2}{p' p_1} \right) \theta \left[ 1 - \frac{|mz - p'^2 - p_1^2|}{p' p_1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (82)$$

В качестве одного из возможных способов построения феноменологических трехчастичных амплитуд, удовлетворяющих всем соотношениям унитарности, можно предложить следующий. Выберем  $b_{\nu n}^L(p, z)$  в виде

$$b_{\nu n}^L(p, z) = a_\nu(k) c_n(p, z). \quad (83)$$

Здесь  $a_\nu(k) \equiv a_\nu(k, k^2/m)$ . При такой параметризации происходит разделение индексов  $\nu$  и  $n$ , и задача существенно упрощается. Кроме того, для простоты ограничимся здесь одним собственным значением  $n = 1$ , и вместо (83) тогда будем иметь:

$$b_\nu^L(p, z) = a_\nu(k) c(p, z). \quad (84)$$

Для собственного значения  $\nu = \nu_0$ , отвечающего дейтоному полюсу  $k = i\alpha$  и функция  $a_{\nu_0}(i\alpha)$  есть число, поэтому можно считать, что  $b_{\nu_0}^L(p_0, z) = \sqrt{\mu'_{\nu_0}(-\varepsilon)} \varphi(\alpha) c(p_0, z)$ , где  $\varphi(\alpha)$  — волновая функция дейтона и  $p_0$  определяется (81). Тогда из определения трехчастичных амплитуд (68) и (69) получим для них следующие представления:

$$A_L(p_0, z) = \frac{\varphi^2(\alpha)}{4\pi} \frac{[c(p_0, z)]^2}{1 - \gamma(z)}; \quad (85)$$

$$B_L(p_0, kp; z) = t(k) \varphi(\alpha) \frac{c(p_0, z) c(p, z)}{\sqrt{4\pi} [1 - \gamma(z)]}, \quad (86)$$

где для вывода (86) использовали разложение  $t$ -матрицы (45).

В этом приближении СУ (79) сводится к неоднородной задаче Гильберта и устанавливает прямую связь между собственным значением  $\gamma(z)$  и выбором функции  $c(p, z)$  [17]:

$$1 - \gamma(z) = \frac{1}{Q(z)} \left\{ \frac{m}{2} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{M_{11}(z') dz'}{z' - z} + P(z) \right\}. \quad (87)$$

Здесь  $P(z)$  — произвольная функция, не имеющая особенностей на том же контуре, что и  $\gamma(z)$ ;  $M_{11}$  определяется формулой (80), где мы должны оставить только одно собственное значение и ис-

пользовать параметризацию (84);  $Q(z)$  — функция, определяемая следующим образом:

$$c(p, x + i\delta) = Q(x) c(p, x - i\delta). \quad (88)$$

Соотношение унитарности (87) в принципе допускает выбор  $c(p, z)$  в виде константы, однако дополнительное условие (82) на  $FSI$ -разреze исключает эту возможность, так как накладывает определенные ограничения на выбор  $c(p, z)$ , а именно, из (82) следует, что

$$\Delta_3 c(p, z) = -\frac{im4\pi^2}{p} \int dp_1^2 t(\kappa_1, \kappa_1; z_1 - 3p_1^2/m) c(p_1, z_1) \times \\ \times P_L \left( \frac{mz - p^2 - p_1^2}{pp_1} \right) \theta \left[ 1 - \frac{|mz - p_1^2 - p^2|}{pp_1} \right]. \quad (89)$$

Выбрав функции  $c(p, z)$  и  $\gamma(z)$ , которые удовлетворяют соотношениям (80), (87) и (89), построим тем самым трехчастичные амплитуды со всеми разрезами, кроме динамического. В следующем разделе рассмотрим подробно решение СУ на  $FSI$ -разреze. Существенно, что можно найти решения, для которых  $c(p, z)$  и соответственно  $b(p, z)$  не имеют скачка на разрезах  $\Delta_4$  и  $\Delta_5$  и поэтому связь между  $\gamma(z)$  и  $c(p, z)$  остается как в (87) и (80).

## 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

Начнем с рассмотрения СУ для взаимодействия в конечном состоянии. Если ограничиться одной парциальной волной для взаимодействующей пары ( $l = 0$ ), всегда можно представить  $B_L$  в следующем виде:

$$B_L(p, k' p'; z) = t(k', k'; z - 3p'^2/4m) c_L(p, k', p'; z). \quad (90)$$

Подставляя это выражение в СУ (82), получаем для  $c_L$  в точности такое же выражение для скачка  $\Delta_3$ , какое уже было записано в (89) для  $c(p', z)$ . Поскольку величина  $p$  не затрагивается СУ, а  $k'$  и  $p'$  связаны законом сохранения энергии, то можно без ограничения общности рассмотреть уравнение (89).

Заметим, что представление (90) уже выделяет в явном виде эффект Мигдала — Ватсона, который описывается первым множителем. Второй множитель также содержит зависимость от  $k'$ , которая искажает эффект Мигдала — Ватсона. Ниже будет в явном виде получена эта зависимость, которая по физическому смыслу описывает влияние третьей частицы на взаимодействие пары. Вторая причина искажения эффекта Мигдала — Ватсона для тождественных частиц более тривиальна и возникает из-за симметризации амплитуды  $B_L$  в экспериментально наблюдаемом сечении в соответствии с формулой (21).

Удобно рассматривать скачок  $\Delta_3$ , вводя переменные  $\kappa^2 \equiv k'^2$  и  $z$  вместо  $p'$ ,  $z$ . Тогда  $FSI$ -разрез начинается от  $\kappa^2 = 0$  и не зависит от  $z$ . Заметим, что в нашем рассмотрении  $p'$  всюду было действительным числом. Поэтому  $\kappa^2$  и  $z$  имеют одинаковую мнимую добавку, и выражение для  $FSI$ -скачка можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & c_L(\kappa_+^2, z_+) - c_L(\kappa_-^2, z_-) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{mz - \kappa^2}} \int_{(\kappa - \sqrt{3}(mz - \kappa^2))^{2/4}}^{(\kappa + \sqrt{3}(mz - \kappa^2))^{2/4}} \frac{d\kappa_1^2}{\kappa_1} [\exp[2i\delta(\kappa_1)] - 1] \times \\ & \times P_L\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa^2 - 5mz/4}{\sqrt{(mz - \kappa^2)(mz - \kappa_1^2)}}\right) c_L(\kappa_+^2, z_+). \end{aligned} \quad (91)$$

Здесь введен параметр  $\lambda = 1$  для трех тождественных частиц и  $\lambda = -1/2$  для квартетного состояния трех нуклонов.

Заметим, что стоящий слева в (91) скачок не является аналитической функцией  $\kappa^2$  (в смысле разности значений аналитической функции над и под разрезом), так как энергетический аргумент  $z$  различен в первом и втором членах слева. В то же время именно  $c_L(\kappa_+^2, z_+)$  определяет физическое значение амплитуды, входящей в экспериментальное сечение. Вместо скачка (91) удобно рассмотреть другой скачок, только по переменной  $\kappa^2$  при фиксированном  $z$ , и ввести переменную  $\kappa$ . Тогда вместо уравнения (91) имеем:

$$\begin{aligned} & c_L(\kappa, z_+) - c_L(-\kappa, z_+) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{mz - \kappa^2}} \int_{[\sqrt{3}(mz - \kappa^2) - \kappa]/2}^{[\sqrt{3}(mz - \kappa^2) + \kappa]/2} d\kappa_1 [\exp[2i\delta_0(\kappa_1)] - 1] \times \\ & \times P_L\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa^2 - 5mz/4}{\sqrt{(mz - \kappa^2)(mz - \kappa_1^2)}}\right) c_L(\kappa_1, z_+). \end{aligned} \quad (92)$$

Различие между правыми частями (91) и (92) возникает при  $\kappa^2 \geq 3mz/4$ , когда нижний предел в (92) становится отрицательным, что в переменной  $\kappa^2$  означало бы положение контура интегрирования, показанное на рис. 35 пунктирной линией. Контур интегрирования в уравнении (91) отмечен там же штриховкой. Таким образом, скачки в уравнениях (91) и (92) означают разный способ обхода особенности, положение которой зависит сразу и от  $\kappa^2$ , и от  $z$ . Происхождение этой особенности и ее положение можно найти из рис. 36, на котором изображена одна из диаграмм, соответствующая уравнениям (91) и (92). Пунктирная линия означает замену соответствующего пропагатора  $\delta$ -функцией. Диаграмма на рис. 36 обладает треугольной аномальной особенностью, возникающей при  $\kappa^2 \geq 3mz/4$ ,  $z > 0$ . Существенно,

что треугольные аномальные особенности возникают лишь при условии  $\text{Im } \kappa^2, \text{Im } z < 0$  [43, 44]; поэтому функции  $c_L(\kappa_+^2, z_+)$  и  $c_L(\kappa_-^2, z_-)$  не обладают ими, а  $c_L(-\kappa, z_+) \equiv c_L(\kappa^2, z_+)$  обладает. Соответственно этому и решение  $c_L(-\kappa, z_+)$  обращается в бесконечность как  $(mz - \kappa^2)^{-1/2}$  при  $\kappa \rightarrow -\sqrt{mz}$ , но нас это

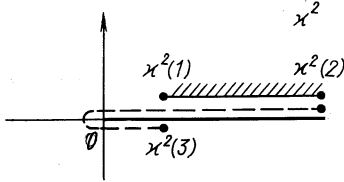


Рис. 35.

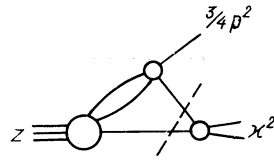


Рис. 36.

не должно волновать, потому что нас интересует лишь конечный продукт — физическая амплитуда  $c_L(\kappa_+^2, z_+)$ , которая такими особенностями не обладает.

Уравнение (92) представляет собой однородное интегральное уравнение для функции  $c_L(\kappa, z)$ , которое можно решить в явном виде в нескольких наиболее интересных случаях. Входящую в (92) амплитуду двухчастичного рассеяния при малых энергиях можно записать в виде

$$f_0(\kappa) = \{\exp [2i\delta_0(\kappa)] - 1\} / (2i\kappa) \approx 1 / (\alpha - i\kappa), \tag{93}$$

где  $\alpha = -1/a$ ;  $a$  — длина рассеяния. Наиболее характерные и интересные черты взаимодействия в конечном состоянии возникают, когда длина рассеяния велика, т. е.  $a r_0 \ll 1$ , где  $r_0$  — радиус взаимодействия, так что вид амплитуды (93) справедлив в достаточно широкой области  $\kappa r_0 \ll 1$ . При подстановке (93) в уравнение (92) возникают два предельных случая. Поскольку эффективные значения  $\kappa \sim \sqrt{mz}$  [как видно из пределов интеграла в (92)], то эти случаи таковы: 1)  $\sqrt{mz} \gg |\alpha|$ ; 2)  $\sqrt{mz} \ll |\alpha|$ . Рассмотрим вначале первый случай и пренебрежем  $\alpha$  в (93) по сравнению с  $i\kappa$ . Тогда, вводя обозначения

$$x = \kappa / \sqrt{mz}; \quad \psi(x, z) = \sqrt{mz - \kappa^2} c_0(\kappa, z), \tag{94}$$

получаем следующее уравнение для  $\psi$ , если для простоты полагаем  $L = 0$ :

$$\psi(x, z) - \psi(-x, z) = -\frac{8}{\sqrt{3}} \lambda \int_{[\sqrt{3(1-x^2)}-x]/2}^{[\sqrt{3(1-x^2)}+x]/2} dx_1 \frac{\psi(x_1, z)}{\sqrt{1-x_1^2}}. \tag{95}$$

Решение (95) ищем в виде

$$\psi(x, z) = \exp(b \arcsin x) - D \exp(-b \arcsin x). \tag{96}$$



Из условия конечности  $c(\kappa, z)$  при  $\kappa = \sqrt{mz}$  получаем, что  $D = \exp(b\pi)$ , а подставляя затем решение (96) в уравнение (95), находим условие на параметр  $b$ :

$$ch b\pi/2 = (8\lambda/\sqrt{3}b) \operatorname{sh} b\pi/6. \quad (97)$$

Условие (97) совпадает с соответствующим условием для корней в работе [45]. Это неудивительно, так как уравнение (95) может быть получено из уравнения Скорнякова — Тер-Мартirosяна [46], записанного в работе [45] в приближении  $\sqrt{mz} \gg \alpha$ . В самом деле, оно получается взятием скачка по переменной  $p_1$  в уравнении (1) работы [45]. Поэтому и решение (96) отвечает решению уравнения Скорнякова — Тер-Мартirosяна в первом предельном случае  $\sqrt{mz} \gg \alpha$ , исследованном в работах [47, 48].

Заметим, что уравнение (95) определяет только зависимость от переменной  $\kappa$  (точнее,  $x = \kappa/\sqrt{mz}$ ) и никак не определяет зависимость от  $z$  и начального импульса  $p$  в амплитуде развала  $B_L(p, k'p'; z)$ . Это вполне естественно, так как СУ не определяют однозначно амплитуду, в отличие от динамических уравнений, и, следовательно, чтобы найти амплитуду, необходимо дополнительно задать аналитические свойства на ближайших особенностях, как об этом говорилось выше.

Случай  $L \neq 0$  можно изучить тем же способом, как в работе [45], и решение снова записывается в явном виде. Не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Отметим, что уравнение (97) имеет корень  $b \sim 1$  и поэтому в функции  $\psi$  переменная  $\kappa$  меняется на расстояниях порядка  $\sqrt{mz} \gg |\alpha|$ , тогда как первый член в (90) — «чистый эффект» Мигдала — Ватсона — меняется существенно на расстояниях  $\kappa \sim |\alpha|$ . Следовательно, при условии (1)  $\sqrt{mz} \gg \alpha$  точный учет  $FSI$  мало искажает простую формулу Мигдала — Ватсона. К тому же и искажения в результате симметризации для тождественных частиц при этом условии мало существенны.

Перейдем теперь к случаю малых энергий, когда выполняется условие (2)  $\sqrt{mz} \ll \alpha$ . Вместо (95) имеем теперь уравнение

$$\begin{aligned} & \psi(x, z) - \psi(-x, z) = \\ & = \frac{8i\lambda}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{mz}}{\alpha} \int_{[\sqrt{3}(1-x^2)-x]/2}^{[\sqrt{3}(1-x^2)+x]/2} \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \psi(x_1, z). \end{aligned} \quad (98)$$

Из-за малого множителя перед интегралом в (98) можно решать это уравнение итерациями:

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) + \frac{\sqrt{mz}}{\alpha} \psi_1(x, z) + \dots \quad (99)$$

При малых  $z$  функцию  $\psi$ , которая зависит аналитическим образом от  $\kappa$  и  $z$  в окрестности  $\kappa = 0$  и  $z = 0$ , можно разложить в ряд по этим аргументам и оставить в  $\psi_0$  лишь постоянный член. Тогда (98) определяет  $\psi_1$  через  $\psi_0$  с точностью до членов порядка  $\kappa^2/\alpha^2$ :

$$\psi(x, z) = \psi_0(0, 0) \left( 1 + 8i\lambda \frac{\sqrt{mz}}{\alpha} x \right) + \dots \quad (100)$$

Проделанная процедура по существу есть простейший вариант того разложения, которое использовалось в работах [49, 50]. Практическая цель такого разложения — восстановление из экспериментальных данных величины  $\alpha$ , пропорциональной длине рассеяния: например в случае реакций  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  или распадов  $K \rightarrow 3\pi$  — извлечение длины  $\pi\pi$ -рассеяния. Уравнение (98) совместно с (90) показывает принципиальную возможность такого извлечения, так как неизвестная величина  $\psi_0$  входит общим множителем. Однако, как замечено в работах [49, 50], для тождественных частиц модуль квадрата выражения (100), входящего в сечение, содержит  $\kappa^2/\alpha^2$ , а не  $\kappa/\alpha$ . Такого же типа члены возникают в сечении и вероятности распада от разложения  $\psi(\kappa, z)$  по степеням  $z$ , так как  $z \sim \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{23}^2$ , но коэффициент при  $z$  неизвестен. Поэтому для тождественных частиц данная процедура извлечения длин рассеяния не проходит, однако для нетождественных частиц в сечении могут возникать и линейные по  $\kappa/\alpha$  члены [49]. В упомянутых выше работах кроме довольно тривиального случая  $\sqrt{mz}/|\alpha| \ll 1$  и эквивалентного ему случая  $\sqrt{mz}/|\alpha_{ik}| \ll 1$  для трех нетождественных частиц был исследован также случай, когда для двух пар частиц выполняется это условие, а для одной из пар не выполняется:  $\sqrt{mz}/\alpha_{12} \gtrsim 1$ . При этом в амплитуде удерживались члены первого порядка по  $\sqrt{mz}/|\alpha_{ik}| \sim \sqrt{mz} r_0$  и любого порядка по отношению  $\sqrt{mz}/|\alpha_{12}|$ . Эти же результаты легко воспроизводятся в настоящем формализме. Вместо уравнения (91) для нетождественных частиц имеем систему трех уравнений для амплитуд  $C_L^{(ik)}$ , содержащих в ядрах величины  $t^{(ik)}$ . Поэтому решение сводится к итерации этой системы с оставлением членов, пропорциональных  $t^{(23)} \sim r_0$  и  $t^{(13)} \sim r_0$ . Однако уравнение (91) дает в принципе возможность получить решения и в общем случае, когда резонируют все три пары.

## 6. ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Рассмотрим систему трех частиц, взаимодействующих так, что хотя бы две пары из трех образуют двухчастичный резонанс. Для тождественных частиц, которые в основном рассматриваются здесь, резонанс должен присутствовать в каждой из трех пар.

Возникает вопрос, может ли в такой системе возникнуть трех-частичный резонанс (или связанное состояние) и какова будет аналитическая структура трехчастичной амплитуды. Дальше будет показано, что с помощью СУ, выведенных в разд. 3, можно достаточно полно ответить на данный вопрос и определить условия, при которых возникает резонанс или какая-либо структура в системе трех частиц.

Будем исходить из СУ (9) — (14) для амплитуды  $w$  и определим чисто формально амплитуду  $C_L$ , которую дальше будем называть амплитудой резонанс-частицы

$$w(kp; k'p'; z) = \sum_L (2L+1) P_L(\cos \theta_{pp'}) t(k) C_L(p, p', z) t(k'). \quad (101)$$

Из (9) — (14) для амплитуды  $C_L$  тогда легко получить СУ, которые имеют ту же структуру, но где отсутствуют члены  $\Delta_{2d}$ ,  $\Delta_{3d}$ . Член  $\Delta_5$  также опустим, считая, что связанные состояния в системе двух частиц отсутствуют. Как уже отмечалось, скачки  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  физически связаны с эффектом *FSI*, поэтому математически они в точности равны скачкам амплитуды  $C_L$  по переменным  $p, p'$  или, точнее, переменным  $\sigma = k^2/m, \sigma' = k'^2/m$  (последние удобнее, так как точки ветвления по  $\sigma$  и  $\sigma'$  не зависят от  $z$ ). Итак, для амплитуды  $C_L(\sigma, \sigma'; z)$  получаем следующее выражение для скачка по переменной  $z$

$$\Delta_z C_L(\sigma, \sigma', z) = J_1 + J_4 + J_5, \quad (102)$$

где

$$J_1 = -\frac{2\pi m i}{pp'} P_L[x(p, p')] \theta[1 - |x(p, p')|]; \quad (103)$$

$$J_4 = -\frac{32}{3} im^2 \pi^3 \int d\sigma_1 k_1(\sigma_1) |t(k_1)|^2 C_L(\sigma, \sigma_1 + i\delta, z + i\delta) \times \\ \times C_L(\sigma_1 - i\delta, \sigma', z - i\delta); \quad (104)$$

$$J_5 = -\frac{128}{9} im^3 \pi^3 \iint d\sigma_1 d\sigma_2 C_L(\sigma, \sigma_1 + i\delta, z + i\delta) \times \\ \times C_L(\sigma_2 - i\delta, \sigma', z - i\delta) t(k_1) t^*(k_2) \times \\ \times P_L[x(p_1, p_2)] \theta[1 - |x(p_1, p_2)|]. \quad (105)$$

Здесь всюду учитывается закон сохранения энергии

$$z = k^2/m + 3p^2/(4m) = \sigma + 3p^2/(4m) = \\ = k'^2/m + 3p'^2/(4m) = \sigma' + 3p'^2/(4m)$$

и введено обозначение

$$x(p, q) = (mz - p^2 - q^2)/(pq). \quad (106)$$

В нашей постановке задачи двухчастичная  $t$ -матрица дается формулой Брейт — Вигнера:

$$t(k) = \Gamma / [4\pi^2 m k (k^2/m - \varepsilon + i\Gamma/2)], \quad (107)$$

где  $\Gamma$  — полная ширина;  $\varepsilon$  — энергия возбуждения резонанса. Тогда можно показать, что член  $J_5$  мал по сравнению с  $J_4$ , а именно  $J_5/J_4 \ll \Gamma/z$ .

В интересующей нас ситуации трехчастичный резонанс должен распадаться на двухчастичный резонанс и третью частицу — состояния, присутствующие в  $J_4$ , а не на три некоррелированные частицы, которые дают главный вклад в  $J_5$ . Этим физически обосновывается законность отбрасывания члена  $J_5$  по сравнению с  $J_4$ .

Отметим также два важных фактора, которые обычно игнорируются в литературе (см. [51—54] и упоминаемые там ссылки). Во-первых,  $C_L(\sigma, \sigma', z)$  имеет особенности и соответствующие скачки по  $\sigma$  и  $\sigma'$  и надо различать, на каком берегу разреза в  $\sigma, \sigma'$  плоскостях берется значение функции. Во-вторых, только для функции  $C_L(\sigma - i\delta, \sigma' + i\delta; z)$  СУ (104) содержат те же функции в правой части СУ, что и в левой, т. е. образуют замкнутую систему уравнений. В (104) с точностью до членов порядка  $\Gamma^2/z^2$  можно вынести функцию  $C_L$  в точке полюса  $\sigma_1 = \varepsilon$ . Тогда, выполняя интегрирование с оставшейся частью подынтегрального выражения, получаем (мы полагаем также  $\sigma = \sigma' = \varepsilon$  и обозначаем  $C_L(\varepsilon - i\delta, \varepsilon + i\delta, z) \equiv C_L(z)$ ):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_z C_L(z) &= \frac{2\pi m i}{p_R^2} P_L[x(p_R, p_R)] \times \theta[1 - |x(p_R, p_R)|] - \\ &- \frac{4}{3} \cdot \frac{i\Gamma p_R}{\sqrt{m\varepsilon}} \theta(z - \varepsilon) C_L(z + i\delta) C_L(z - i\delta); \quad p_R^2 = 4m(z - \varepsilon)/3. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Уравнение (108) очень похоже на двухчастичное СУ, а первый член приобретает значение динамического (обычно левого) разреза. Удобно перейти к безразмерной переменной  $y = (z - \varepsilon)/\varepsilon$  и с помощью очевидной замены ввести вместо  $C_L$  новую функцию  $M(y)$ , для которой СУ принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta M(y) &= 2i\xi(y) \theta(y - y_1) \theta(y_2 - y) + \\ &+ 2i\theta(y) \sqrt{y} M(y - i\delta) M(y + i\delta). \end{aligned} \quad (109)$$

Вывод соотношения (109) можно аналогичным образом провести для релятивистских частиц; приведем значения всех параметров в (109) для такого релятивистского случая, когда три бесспиновые частицы имеют массы  $\mu, \mu, m$ ; масса двухчастичного резонанса в системе  $\mu + m$  есть  $\mu + m + \varepsilon$ , а квадрат полной энер-

гии трех частиц есть  $S$ , как показано на рис. 37. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} y &= [S - (m + 2\mu + \varepsilon)^2] / [2\varepsilon(m + 2\mu + \varepsilon)]; \\ \xi(y) &= \pi \Gamma \zeta P_L(u_0) / 4\varepsilon y; \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

где

$$\zeta = \frac{(m + \mu + \varepsilon)^3 [2\mu(m + \mu + \varepsilon) + \varepsilon(m + 2\mu + \varepsilon)y]^{-1/2}}{\sqrt{(2m + 2\mu + \varepsilon)(m + \varepsilon/2)(\mu + \varepsilon/2)(2\mu + m + \varepsilon)}}; \quad (111)$$

$$y_1 = \frac{2m + \varepsilon}{2(m + 2\mu + \varepsilon)} \leq 1; \quad y_2 = \frac{(m + 2\mu + \varepsilon)(2m + \varepsilon)}{2m^2} \geq 1. \quad (112)$$

Значение  $u_0$  определяется энергией  $y$  и есть косинус угла рассеяния в диаграмме на рис. 37 в точке полюса. Параметр  $\zeta$  зависит от масс и энергии и всюду больше единицы.

Уравнение (109) можно решить, если как в обычном  $N/D$ -методе представим амплитуду в виде

$$M(y) = N(y)/D(y). \quad (113)$$

и потребуем, чтобы скачок  $\xi(y)$  давался функцией  $N(y)$ . Однако в отличие от обычной процедуры [33] здесь особенности  $D(y)$  и  $N(y)$  не разделены никаким промежутком. Из (109) и (113) получаем

$$N(y) = \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy'}{y' - y} \xi(y') D(y'); \quad (114)$$

$$D(y) = 1 - \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy'}{y' - y} \cdot \frac{N(y')}{\sqrt{y'}}, \quad (115)$$

где знак «—» означает, что берется значение функции на нижнем берегу разреза. Подставляя (114) в (115), можно получить точное решение в следующем виде:

$$D(y) = \exp \left\{ -\frac{\sqrt{y}}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{x'(x' + \sqrt{y})} \ln g(x') \right\}, \quad (116)$$

где  $x = \sqrt{y}$ ;

$$g(x) = 1 - 4x\xi(x^2); \quad (117)$$

для  $L = 1$  решение (116) необходимо умножить на

$$P(x) = \left( 1 + \frac{\sqrt{y}}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{x'^2} \ln g(x') \right). \quad (118)$$

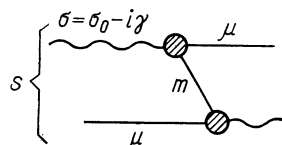


Рис. 37.;

Отметим, что полученное решение отвечает суммированию диаграмм лестничного типа, изображенных на рис. 38. Поскольку пока пренебрегали левыми разрезами, наше решение являлось точным значением суммы диаграмм в предельном случае  $\varepsilon \ll m, \mu$ ,



Рис. 38.

когда левые разрезы уходят на  $-\infty$ . В общем случае учет левых разрезов не меняет аналитических свойств полученного решения.

Основные свойства данного решения следующие:

1) на физическом листе, т. е. где  $\sqrt{y} > 0$ , отсутствуют особенности Пайерлса в знаменателе амплитуды резонанс-частица. Этот вывод находится в противоречии с результатами работ [51—54]. Можно показать, что ошибка этих работ состоит в неправильном относительном расположении динамического и унитарного разрезов;

2) для  $L = 0$  на физическом листе отсутствуют полюса, отвечающие трехчастичным резонансам и связанным состояниям резонанса и частицы. Однако, в случае достаточно сильного притяжения ( $\xi > 0$ ), когда  $g(x) < 0$  на отрезке  $[x_3, x_4]$  в амплитуде  $M(y)$  возникает корневое ветвление, приводящее к пику, именно

$$|M(y)|^2 = \left| \sqrt{\frac{x_3(x_4 + \sqrt{y})}{x_4(x_3 + \sqrt{y})}} \right|^{\pm 2}; \quad (119)$$

3) для  $L = 1$  кроме описанной выше корневой особенности, могут возникать полюса за счет нулей множителя (118). В случае притяжения  $\xi > 0$  возникает полюс типа связанного состояния ( $y < 0$ ), когда  $g(x)$  всюду положительно. При еще более сильном притяжении, когда  $g(x)$  обращается в нуль, полюс уходит в комплексную плоскость и приобретает добавочную ширину.

Рассмотрим приложения описанного формализма. Они возможны в молекулярной, атомной, ядерной физике, а также в физике элементарных частиц. Обсудим только два примера. Если в ядерной системе, состоящей из трех частей (три кластера или остов плюс два нуклона), резонанс возникает в двухчастичных системах, то при достаточно большом  $\xi \sim \Gamma\zeta/\varepsilon$  возникает трехчастичный резонанс или особенность типа (119). Расчеты показывают, что уровень  $2^+ \text{ } ^8\text{Be}$  (две  $\alpha$ -частицы) может продуцировать систему трех резонансов  $J^P = 1^-, 2^-, 3^-$  в системе трех  $\alpha$ -частиц (ядро  $^{12}\text{C}$ ). Однако наиболее благоприятным является случай ядра-остова плюс два нуклона, так как  $\zeta$  в (111), а следовательно,

и  $\xi$  пропорционально отношению масс ядра-остова и нуклона. Этот механизм может приводить к появлению уровней ядра совершенно особой природы.

В области элементарных частиц нами была исследована система  $\Delta N$  с различными квантовыми числами. Было найдено, что в состояниях  $J^P$ ,  $T = 1^+$ ,  $2$  и  $2^+$ ,  $1$  возникает особенность типа (119), причем отношение  $x_4/x_4 \approx 3$ , так что пик (или провал, здесь возможны два решения) превышает фон в три раза и развивается на ширине  $\Delta E \sim 150$  Мэв вблизи порога  $\Delta N$  образования. При  $L = 1$  в  $\Delta N$ -системе возникает резонанс, масса которого определяется уравнением (118).

Он имеет квантовые числа  $J^P = 0^-$ ,  $T = 2$  и энергию примерно на 350 Мэв выше удвоенной массы нуклона, его ширина  $\geq 70$  Мэв. Система  $\Delta N$  рассматривалась раньше другими методами [55, 56]. Гейл и Дакк [55] использовали уравнение Фаддеева и нашли в релятивистской кинематике резонанс  $0^-$  с  $T = 2$  при энергии, в точности совпадающей с нашим расчетом. Они также отметили притяжение в состояниях  $1^+$  с  $T = 2$  и  $2^+$  с  $T = 1$ , в которых у нас возникают корневые ветвления. Связанные состояния в их численных расчетах отсутствуют в согласии с нашими выводами. Приведенные выше примеры показывают простоту расчетов и эффективность метода, изложенного в настоящем разделе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
3. Блохинцев Л. Д., Долинский Э. И., Попов В. С. ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 1636; 1962, т. 43, с. 1914.
4. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. Пер. с англ. М., «Мир», 1966, с. 57.
5. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459; «Тр. Матем. ин-та», 1963, т. 69, с. 1.
6. Шапиро И. С. Теория прямых ядерных реакций. М., Госатомиздат, 1963.
7. Sloan I. H. Phys. Rev., 1968, v. 165, p. 1587.
8. Чью Дж. Аналитическая теория S-матрицы. Пер. с англ. М., «Мир», 1968, с. [4], гл. 11.
10. Frazer W. R., Fulco J. R. Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, p. 365.
11. Барышников А. Г. и др. «Письма ЖЭТФ», 1972, т. 16, с. 414.
12. Cahill R. T., Sloan I. H. Nucl. Phys. A, 1972, v. 194, p. 589.
13. Cahill R. T. Nucl. Phys. A, 1972, v. 194, p. 599.
14. Tandy R., Cahill R., McCarthy. Phys. Lett. B, 1972, v. 41, p. 241.
15. Kowalski K. L. Phys. Rev. D, 1972, v. 5, p. 395.
16. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. Теория двух- и трехчастичных резонансов. Лекция летней школы МИФИ, 1973.
17. Simonov Yu. A., Badalyan A. M. Preprint ITEP-89, 1973.
18. Lovelace C. Phys. Rev. B, 1964, v. 135, p. 122. Harms E., Levinger J.S. Phys. Rev. Lett. B, 1969, v. 30, p. 449.

19. Narodetsky I. M., Galpern E. S., Lyakhovitsky V. N. Phys. Lett. B, 1973, v. 46, p. 51.
20. Кольбасов В. М. Проблемы современной ядерной физики. М., «Наука», 1971, 391.
21. Seagrave J. D. In: Three-body Problem. McKee and P. M. Rolph, Amsterdam — London, 1970, p. 41.
22. Рудик А. П., Симонов Ю. А. ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 10.
23. Slaus I. In: Three-body Problem. McKee and P. M. Rolph, Amsterdam — London, 1970, p. 337.
24. Chew G. F., Mandelstam S. Phys. Rev., 1960, v. 119, p. 467.
25. Badalyan A. M., Simonov Yu. A. Preprint ИТЭР-61, 1973.
26. Blankenbecler R., Goldberger M., Halpern F. Nucl. Phys., 1959, v. 12, p. 629.
27. Locher M. Nucl. Phys. B, 1970, v. 23, p. 116.
28. Cutcosky R. E., Deo B. V. Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1859.
29. Kisslinger R. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 505.
30. Ericson T., Locher M. Nucl. Phys. A, 1970, v. 148, p. 1.
31. Ericson T., Formanek, Locher M. Phys. Lett. B, 1967, v. 26, p. 91; Ericson T., Locher M. Phys. Lett. B, 1968, v. 27, p. 576.
32. Kisslinger R. Preprint MIT, 1973.
33. Barton G., Phillips A. C. Nucl. Phys. A, 1969, v. 132, p. 97; Avishai Y., Ebenhöf W., Rinat-Reiner A. S. Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 341; Bower M. Ann. Phys., 1972, v. 73, p. 372.
34. Sasakawa T. Nucl. Phys. A, 1972, v. 186, p. 417.
35. Sasakawa T. Paper presented to the Los-Angeles Conference, 1972.
36. Weinberg S. Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 440.
37. Манаенков С. И. ТМФ, 1972, т. 12, с. 397.
38. Народецкий И. М. «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 1086.
39. Fuda M. Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1134; Народецки И. М. «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 61.
40. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. УФН, 1971, т. 103, с. 469.
41. Badalyan A. M., Simonov Yu. A. Preprint ИТЭР-966, 1972.
42. Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н., Народецкий И. М. Препринт ИТЭФ 927, 1972; «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 707.
43. Blankenbecler R., Nambu Y. Nuovo cimento, 1960, v. 18, p. 595.
44. Симонов Ю. А. ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2263.
45. Белоозеров Н. Н. «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 552.
46. Скорняков Г. В., Тер-Мартirosян К. А. ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 775.
47. Данилов Г. С. ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 498; ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1424.
48. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1850.
49. Грибов В. Н. ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 553; 1961, т. 41, с. 1221.
50. Анисович В. В., Ансельм А. А., Грибов В. Н. ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 224.
51. Aitchison I. J., Krupa D. Nucl. Phys. A, 1972, v. 182, p. 449.
52. Peierls R. F. Phys. Rev. Lett., 1961, v. 6, p. 641.
53. Mandelstam S. e.a. Ann. Phys, 1962, v. 18, p. 198.
54. Brayshaw D. D., Peierls R. F. Phys. Rev., 1968, v. 177, p. 2539.
55. Gale W. A., Duck J. M. Nucl. Phys. B, 1968, v. 8, p. 109.
56. Кондратюк Л. А., Шапиро И. С. «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 401.