

УДК 539.14

СВОЙСТВА ЛЕГЧАЙШИХ ЯДЕР И ПРОБЛЕМА НУКЛОН-НУКЛОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

*А. И. Базь, В. Ф. Демин,
М. В. Жуков*

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова, Москва

Дается обзор современного состояния теории легчайших ядер в дискретном и непрерывном спектрах с точки зрения проблемы нуклон-нуклонных потенциалов. Описываются модели нуклон-нуклонных потенциалов, определяемых из двухнуклонных данных. Обсуждаются ограничения, накладываемые на нуклон-нуклонные потенциалы, данными по свойствам малонуклонных систем. Приводится описание некоторых методов решения многонуклонного уравнения Шредингера.

The present-day status of the theory of lightest nuclei in the discrete and continuous spectra is reviewed from the point of view of the nucleon-nucleon potential problem. Models of the nucleon-nucleon potentials extracted from two-nucleon data are described. The restrictions imposed on the nucleon-nucleon potentials by the data on the few-nucleon system properties are discussed. Some methods of solving the many-nucleon Schroedinger equation are described.

ВВЕДЕНИЕ

Еще в начале 60-х годов почти каждая задача трех и большего числа сильно взаимодействующих частиц в квантовой механике считалась практически не решаемой из-за математических трудностей, поэтому и не возникало вопроса о том, чтобы попытаться вычислять свойства ядер и ядерных реакций непосредственно из многонуклонного уравнения Шредингера без введения всяких моделей. За прошедшее десятилетие произошли радикальные перемены, были разработаны методы решения задачи о нескольких сильно взаимодействующих частицах, проведено большое число теоретических исследований и численных расчетов.

Впервые задача о свойствах систем трех нуклонов была решена в 1956 г. К. А. Тер-Мартirosяном и Г. В. Скорняковым [1] в приближении точечного нуклон-нуклонного взаимодействия (нуклоны взаимодействуют друг с другом, только когда расстояние между ними равно нулю). Это приближение не было безобидным; неко-

торые результаты, полученные с его помощью, оказались физически бессмысленными. Способ выделения «физических» решений был дан Г. С. Даниловым [2].

В 1958 г. Л. Д. Фаддеевым [3] были получены и исследованы удобные и лишённые неоднозначностей уравнения задачи трех тел (уравнения Фаддеева). Эти уравнения легли в основу многих численных исследований свойств трехнуклонной системы, приведенных за последнее десятилетие. Много важных результатов в этом направлении было впервые получено В. Ф. Харченко [4]. В 1967 г. подход Л. Д. Фаддеева был обобщен О. А. Якубовским [5] на случай n частиц ($n > 3$); полученные им уравнения, описывающие систему n частиц, иногда называют уравнениями Якубовского. Эти уравнения, однако, оказались слишком громоздкими, и ими пока почти не пользуются.

В 1964 г. Ю. А. Симонов и А. М. Бадалян [6], а также независимо Зикендрат [7] начали разрабатывать новый подход к много-телым задачам — метод K -гармоник или, как часто называют, метод гиперсферических функций. В качестве первого приложения метода Ю. А. Симонов, А. М. Бадалян и др. [8] приближенно вычислили энергию связи и волновую функцию ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ для некоторых простейших потенциалов. Далее этот метод интенсивно развивался, и сейчас он является, пожалуй, наиболее удобным для решения задач о свойствах систем нескольких частиц с сильным взаимодействием.

Появление расчетных методов, позволяющих с любой наперед заданной точностью решать уравнение Шредингера для нескольких нуклонов, приводит к тому, что жизненным и актуальным становится следующий, на первый взгляд, чисто академический, вопрос: возможно ли, хотя бы в принципе, решать все основные задачи нерелятивистской ядерной физики без привлечения моделей, а исходя непосредственно из многонуклонного уравнения Шредингера (МУШ) с заданным нуклон-нуклонным (NN) взаимодействием? Ставить этот вопрос заставляют несколько соображений. Во-первых, взаимодействие между двумя свободными нуклонами можно описывать с помощью потенциала V только в нерелятивистском пределе; в общем случае NN -взаимодействие не является потенциальным и приводит к рождению (виртуальному или реальному в зависимости от энергии) новых частиц (мезонов, гиперонов). В связи с этим сейчас часто обсуждается вопрос о том, что атомное ядро — не просто «мешок с нуклонами», а более сложное образование, в котором имеются и реальные мезоны, а нуклоны часть своего времени проводят как гипероны. Во-вторых, даже если ядро состоит из нуклонов, взаимодействие V между нуклонами в ядре может отличаться от «пустотного» NN -взаимодействия \bar{V} , описывающего взаимодействие двух нуклонов в пустоте. Дело в том, что NN -взаимодействие в современной теории элементарных

частиц описывается как процесс обмена различными мезонами между нуклонами. Ход этого обмена зависит от того, находятся два нуклона в пустоте или же они окружены другими нуклонами. В последнем случае окружающие нуклоны могут активно участвовать в процессе обмена, и это приведет к тому, что $V \neq \bar{V}$.

И первое и второе отмеченные выше обстоятельства непосредственно следуют из теории элементарных частиц. Теория, однако, не позволяет надежно оценить соответствующие эффекты, и общая ситуация поэтому выглядит следующим образом. Если упомянутые выше обстоятельства действительно важны, то теории ядра нельзя строить в отрыве от теории элементарных частиц. Это означает, что нерелятивистское уравнение Шредингера к ядру неприменимо, свойства ядра должны описываться какими-то более сложными уравнениями, построенными на основе уравнений поля. О безмодельной ядерной физике в данном случае пока нечего и думать.

Есть, однако, и другая возможность. В качестве рабочей гипотезы можно предполагать, что эффекты, связанные со структурой нуклонов, играют лишь малую роль в нерелятивистской ядерной физике. В этом случае все основные свойства ядер и ядерных реакций можно получить, решая многонуклонное уравнение Шредингера, в которое подставлено пустотное взаимодействие между нуклонами. Привлекательной чертой такой гипотезы, помимо логической простоты, является ее конструктивность. Гипотеза предлагает безмодельный метод расчета ядернофизических величин, а ее справедливость или несправедливость выявится в результате расчета многочисленных данных ядерной физики. Забегая вперед, отметим, что пока нет никаких указаний на несправедливость этой рабочей гипотезы.

В настоящем обзоре поставлено несколько задач. Приняв в качестве рабочей гипотезы, что безмодельную ядерную физику можно построить на основе МУШ, проанализируем результаты имеющихся сейчас расчетов свойств легчайших ядер и простых ядерных реакций.

Как будет видно из дальнейшего, одна из главных трудностей — недостаточное знание нуклон-нуклонных потенциалов. Из рассеяния нуклонов на нуклонах потенциал их взаимодействия определяется неоднозначно, и существует более десятка феноменологических потенциалов, одинаково хорошо описывающих рассеяние в интервале энергий нуклонов 0—150 *Мэв* (в с. ц. и). Рассчитанные с помощью этих наборов потенциалов свойства трех-, четырех- и т. п. нуклонных систем оказываются несколько различными. Поэтому в настоящее время основными задачами в теории малонуклонных ядерных систем являются: а) расчет тех свойств, которые слабо зависят от деталей нуклон-нуклонных потенциалов (ННП), б) использование экспериментально известных

свойств малонуклонных систем для уточнения наших представлений о виде ННП.

В данном обзоре постараемся лишь показать, какие основные физические проблемы в теории малонуклонных систем сейчас существуют, и как они решаются.

1. МОДЕЛИ НУКЛОН-НУКЛОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Общий вид нуклон-нуклонного потенциала. Из теории элементарных частиц следует, что в нерелятивистской области энергии взаимодействие между двумя нуклонами (непотенциальное), можно приближенно описать потенциалом, но точно вычислить этот потенциал теория пока не в состоянии. Единственное, что она может сказать — это каков может быть общий вид этого потенциала, и как он ведет себя на больших расстояниях между нуклонами.

Два нуклона характеризуются вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ относительного расстояния, их спинами \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 и изоспинами \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 . Из этих величин можно построить несколько независимых операторов: \hat{T} — полный изоспин; \hat{S} — полный спин; \mathbf{r} — расстояние; $\hat{\mathbf{p}}$ — относительный импульс; $\hat{\mathbf{L}}$ — относительный орбитальный момент. Исходя из общих соображений инвариантности, нетрудно построить довольно много членов разной структуры, которые могут входить в потенциал:

а) центральные потенциалы:

$$\hat{V}^c = \sum_{S, T=0, 1} \hat{V}_{2S+1, 2T+1}^c = \sum_{S, T=0, 1} V_{2S+1, 2T+1}^c(r) P^S P^T, \quad (1)$$

где $P^S (P^T)$ — оператор проектирования на состояние пары частиц со спином S (изоспином T):

$$P^{(S=1)} = \hat{S}^2/2, \quad P^{(S=0)} = 1 - P^{(S=1)};$$

$$P^{(T=1)} = \hat{T}^2/2, \quad P^{(T=0)} = 1 - P^{(T=1)};$$

$V_{2S+1, 2T+1}^c(r)$ — некоторые функции расстояния между нуклонами. В состоянии с заданными полным спином S и изоспином T пары нуклонов действует свой собственный центральный потенциал $V_{2S+1, 2T+1}^c(r)$;

б) спин-орбитальные потенциалы:

$$\hat{V}^{LS} = \sum_{T=0, 1} \hat{V}_{2T+1}^{LS} = \sum_{T=0, 1} V_{2T+1}^{LS}(r) (\mathbf{L}\mathbf{S}) P^T; \quad (2)$$

в) тензорные потенциалы:

$$\hat{V}^t = \sum_{T=0, 1} \hat{V}_{2T+1}^t = \sum_{T=0, 1} V_{2T+1}^t(r) [6 (\hat{\mathbf{S}}\mathbf{r}/r)^2 - 2\hat{S}^2] P^T. \quad (3)$$

У потенциалов \hat{V}^{LS} и \hat{V}^t только один индекс, так как они действуют лишь в состояниях с $S = 1$, поэтому индекс $2S + 1 = 3$ опущен;

г) \hat{L}^2 -потенциалы; иногда они задаются в виде

$$\hat{V}^{L^2} = \sum_{S, T=0, 1} \hat{V}_{2S+1, 2T+1}^{L^2} = \sum_{S, T=0, 1} V_{2S+1, 2T+1}^{L^2}(r) \hat{L}^2 P^S P^T \quad (4)$$

или

$$\hat{V}^{QLS} = \sum_{S, T=0, 1} \hat{V}_{2S+1, 2T+1}^{QLS} = \sum_{S, T=0, 1} V_{2S+1, 2T+1}^{QLS}(r) \hat{L}_{12} P^S P^T, \quad (5)$$

$$L_{12} = (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \hat{L}^2 - [(\hat{\sigma}_1 \hat{L})(\hat{\sigma}_2 \hat{L}) + (\hat{\sigma}_2 \hat{L})(\hat{\sigma}_1 \hat{L})]/2,$$

здесь $\hat{\sigma}$ — матрицы Паули;

д) p^2 -потенциалы могут содержать члены двух типов:

$$\hat{p}^2 \hat{V} + V \hat{p}^2 \quad (6a)$$

или

$$(\hat{p} \hat{\sigma}_1) \hat{V} (\hat{p} \hat{\sigma}_2) + (\hat{p} \hat{\sigma}_2) V (\hat{p} \hat{\sigma}_1), \quad (6b)$$

где потенциалы \hat{V} зависят от S и T .

В нерелятивистской теории в потенциал не могут входить более высокие степени векторов \hat{L} и \hat{p} , так как в дифференциальном уравнении Шредингера появились бы производные более высокого порядка, чем второй, и возникли бы трудности из-за увеличения количества решений и соответственно необходимость вводить дополнительные граничные условия.

Все приведенные выше потенциалы локальны в том смысле, что при подстановке их в уравнение Шредингера получаются обычные дифференциальные уравнения второго порядка. Однако имеется теоретическая возможность введения и нелокальных потенциалов $\hat{V}_{\text{нелок}}$, действие которых на волновую функцию Ψ определено как

$$\hat{V}_{\text{нелок}} \Psi = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

При введении их в уравнение Шредингера получается интегро-дифференциальное уравнение. Хотя такие потенциалы иногда и используются в расчетах, здесь их рассматривать не будем, так как пока нет никаких определенных указаний на то, что они обязательно должны вводиться в теорию.

Взаимодействие между нуклонами возникает как результат обмена одним, двумя, тремя и т. д. мезонами. При этом оказывается, что на больших расстояниях между нуклонами домини-

рующий вклад во взаимодействие дает механизм обмена одним π -мезоном. Потенциал, который возникает в результате этого механизма, вычисляется точно. Его называют ОРЕР (one pion exchange potential), и он имеет следующий вид:

$$\hat{V}^{ОРЕР} = (g^2/12) m_\pi c^2 (m_\pi/m_N) (\tau_1 \tau_2) \times \\ \times \{ (s_1 s_2)/4 + [6(\hat{S}r/r)^2 + 2\hat{S}^2] (1 + 3/x + 3/x^2) \} \exp(-x/x), \quad (7)$$

где g — константа связи πN -частицы; m_π (m_N) — масса π -мезона (нуклона); $x = \kappa r$; $\kappa = m_\pi c/\hbar$. Эта формула описывает нуклон-нуклонный потенциал на больших расстояниях между

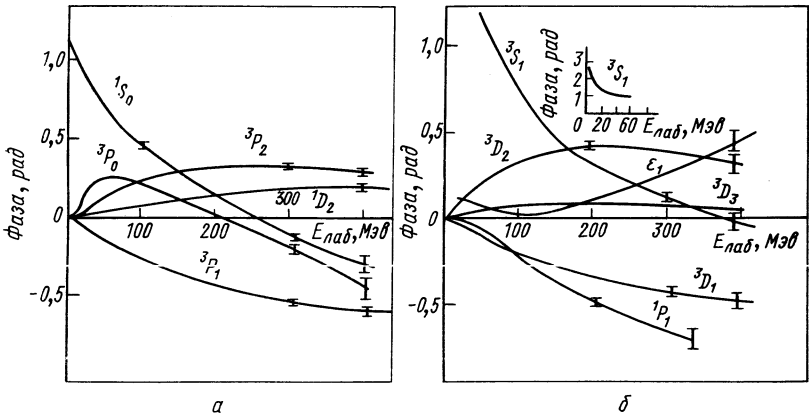


Рис. 1. Фазы NN -рассеяния [70]

нуклонами. Из нее следует, что на больших расстояниях ННП состоит только из центральных и тензорных сил. Остальные компоненты (LS -, L^2 - и p^2 -силы) имеют меньший радиус.

О попытках определить явный вид ННП. В середине и конце пятидесятих годов, когда были пущены первые большие ускорители протонов на несколько сот мегаэлектронвольт, многие надеялись, что подробное изучение рассеяния нуклона на нуклоне в широком интервале энергий позволит полностью и однозначно определить ННП. Эта надежда основывалась на теореме [73], гласящей, что если фаза рассеяния известна при всех энергиях, то потенциал, входящий в уравнение Шредингера, можно однозначно восстановить с помощью определенной математической процедуры. Одной из важных задач того времени стали тщательное изучение NN -рассеяния и определение фаз рассеяния.

В результате огромных усилий больших коллективов фазы pp - и pn -рассеяния были определены в интервале энергии от нуля до ~ 200 Мэв (в с. ц. и). В качестве примера на рис. 1 приведены

значения нескольких фаз δ_{LS}^i с их экспериментальными погрешностями по последним данным. Найти потенциал из этих данных, однако, не удалось в основном потому, что обратная задача теории рассеяния (восстановление потенциала по фазам) оказалась неустойчивой: для определения потенциала требовалось точно знать фазы. Даже малой неопределенности в их значениях было достаточно, чтобы привести к огромным погрешностям в вычисляемых по фазам потенциалах. Кроме того, начиная с энергий, где становится возможным рождение π -мезонов, задача NN -рассеяния становилась непотенциальной, а это не учитывалось при решении обратной задачи.

Проиллюстрируем положение дел с помощью графика (рис. 2), взятого у Ю.Е. Покровского, который исследовал степень неоднозначности потенциала, действующего в состояниях с $S = 0$, $T = 1$. Было получено двухпараметрическое семейство потенциалов, одинаково хорошо описывающих синглетные фазы. Штриховкой на рис. 2 выделены области на плоскости $(V_c W)$ (V_c — значение центральной части потенциала при $r = 0$; W — амплитуда p^2 -компоненты потенциала). Каждой точке заштрихованной области соответствует потенциал, прекрасно описывающий синглетные фазы (описание с $\chi^2 \leq 1$).

Несмотря на невозможность однозначного определения ННП из данных о NN -рассеянии, несколько качественных заключений о их свойствах сделать оказалось возможным. Во-первых, подтвердилось предположение о том, что на больших расстояниях ННП дается формулой (7). Во-вторых, энергетическая зависимость фаз при больших энергиях (150—200 $Mэв$ в с. ц. и) свидетельствовала о сильном отталкивании, возникающем между нуклонами на расстояниях $\leq 0,5$ ферми. В-третьих, оказалось, что

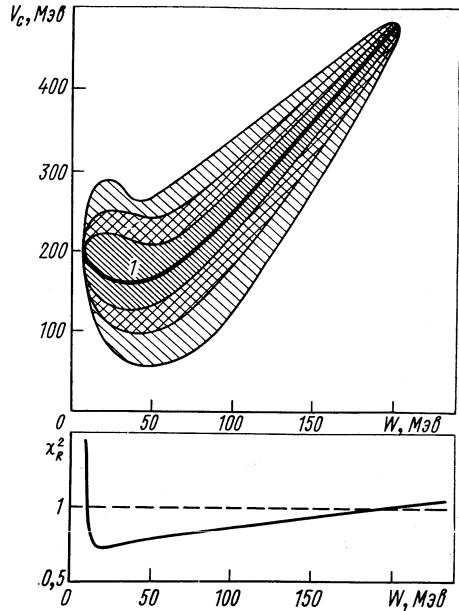


Рис. 2. Неоднозначность NN -потенциала V_{1s} , определяемого по фазам NN -рассеяния] для интервала энергии $E_{л.}$ с от 0 до 425 $Mэв$ (густая штриховка), до 330 $Mэв$ (средняя штриховка), до 210 $Mэв$ (редкая штриховка); внизу приведен χ^2_R соответствующий кривой 1

ННП имеет очень сложную структуру и кроме центральных и тензорных сил включает в себя и остальные типы взаимодействий, о которых говорилось выше.

Все это выяснилось, когда ННП стали определять методом проб и погрешностей: для ННП выбирается определенный функциональный вид с достаточным количеством варьируемых параметров, которые потом определяются из условия наилучшего совпадения рассчитанных для этих потенциалов фаз с экспериментальными. Расчеты такого типа очень трудоемки и требуют мощных ЭВМ. Тем не менее сейчас уже имеется несколько десятков работ различных авторов на эту тему и соответствующее количество довольно сильно отличающихся друг от друга различных наборов ННП, более или менее одинаково хорошо описывающих экспериментальные значения фаз. Сводка наиболее широко известных наборов ННП приводится ниже. Напоминаем, что мы заранее ограничивались предположением, что ННП — локальные, и поэтому не упоминаем о работах, где искались нелокальные ННП. Это ограничение делается только из соображений простоты. Если будущее покажет, что с помощью локальных ННП нельзя будет описать всю совокупность экспериментальных данных, то в дополнение к локальным членам в ННП придется добавлять и нелокальные.

Характеристики некоторых наборов ННП. При определении параметров ННП из условия наилучшего согласия с экспериментальными значениями фаз рассеяния $\delta^{(\alpha)}$ и параметров смешивания $\epsilon^{(\alpha)}$ (α — квантовые числа) речь идет о наилучшем согласии в среднем: если, например, исходят из требования наилучшего согласия расчетных $\delta_{\text{теор}}^{(\alpha)}(E_i)$ и экспериментальных $\delta_{\text{эксп}}^{(\alpha)}(E_i)$ фаз при N_α значениях энергии E_i , то параметры находятся из условия минимальности функционала

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \left(\frac{\delta_{\text{теор}}^{(\alpha)}(E_i) - \delta_{\text{эксп}}^{(\alpha)}(E_i)}{\Delta \delta_{\text{эксп}}^{(\alpha)}(E_i)} \right)^2, \quad (8)$$

где $N = \sum_{\alpha} N_{\alpha}$; $\Delta \delta_{\text{эксп}}^{(\alpha)}$ — экспериментальная погрешность в измеренной фазе. Чем меньше достигнутое при минимизации значение, тем лучше этот набор ННП согласуется с заложенными в расчет значениями экспериментальных величин. Кроме величины $\chi_{\text{мин}}^2$ качество данного набора ННП определяется еще и тем, насколько хорошо он воспроизводит свойства дейтона и значения триплетных и синглетных длин рассеяния a_t , a_s и эффективных радиусов r_{0t} и r_{0s} .

Впервые тщательно подобранные наборы ННП, полученные описанным выше способом, появились в 1962 г. Это так называе-

мые потенциалы Хамады — Джонсона (НД) [9] и йельский потенциал (Y) [10]. Оба эти ННП включают в себя центральную, тензорную, LS - и L^2 -компоненты. Отталкивание между нуклонами на малых расстояниях в обоих случаях описывалось введением «жесткой сердцевинки» (при $r < r_c$ потенциал стремится к $+\infty$, где $r_c = 0,4852\hbar/(m_{\pi}c)$ и $0,35\hbar/(m_{\pi}c)$ для первого и второго ННП). В дальнейшем от введения «жесткой» сердцевинки отказались, и во всех ННП, появившихся после 1962 г., отталкивание более «мягкое».

Начиная со второй половины 60-х годов непрерывно появляются все новые и новые наборы ННП: потенциал Рида (RSC) [11] в 1968 г., потенциал Бресселя — Кермана — Рубена (BKR) [12] в 1969 г., потенциал Гогни — Пайерса — Турейла (GPT) [13] в 1970 г., потенциал Эйкемейера — Хаккенброха (EH) [14] в 1971 г., несколько вариантов потенциалов Турейла — Спрунга (SSC_A, SSC_B, SSC_C) [15] в 1973 г. и т. д. Все эти потенциалы имеют сложную структуру и содержат центральную, тензорную, LS - и L^2 -компоненты.

Все эти наборы ННП более или менее одинаково хороши с точки зрения описания свойств двухнуклонной системы. Это можно видеть из табл. 1, где для каждого из перечисленных выше потенциалов приведены получаемые для них значения $\chi_{\text{мин}}^2$ и низкоэнергетических параметров $a_{s,t}$, $r_{os,t}$, энергии связи дейтона E_d , его квадрупольного момента Q_d , примеси D -волны в дейтоне P_D .

Хотя общая структура перечисленных выше потенциалов одинакова, величины и радиальные зависимости отличаются друг от друга довольно сильно. Это видно из рис. 3, на котором изображены V_{31}^c , V_{13}^c , V_{11}^c , V_{33}^c , V_1^t , V_1^{LS} -компоненты потенциалов для некоторых из перечисленных выше наборов ННП.

Одновременно с феноменологическими ННП в литературе стали появляться ННП несколько другого типа — так называемые потенциалы однобозонного обмена (ОБЕР). При построении этих потенциалов исходят из предположения, что взаимодействие между нуклонами можно адекватно описать, суммируя лишь простейшие одномезонные диаграммы, но и учитывая обмен не только π -мезонами, но и другими, более тяжелыми η -, ω -, ρ -... мезонами. Варьируемыми параметрами в этом случае являются количество учитываемых мезонов, массы вводимых гипотетических мезонов и, отчасти, константы мезон-нуклонной связи.

Потенциалы типа ОБЕР имеют тот же общий вид, что и описанные выше феноменологические ННП, т. е. включают в себя центральные, тензорные и LS -компоненты. Единственное отличие — это то, что вместо L^2 -членов они содержат p -квадратичные.

Предложено несколько вариантов ОБЕР: потенциал Брайана — Скотта (BS) [16], потенциал Скотти — Вонга (SW) [17], потенциал Ингбера — Потензы (IP) [18], потенциал Уеда — Грина

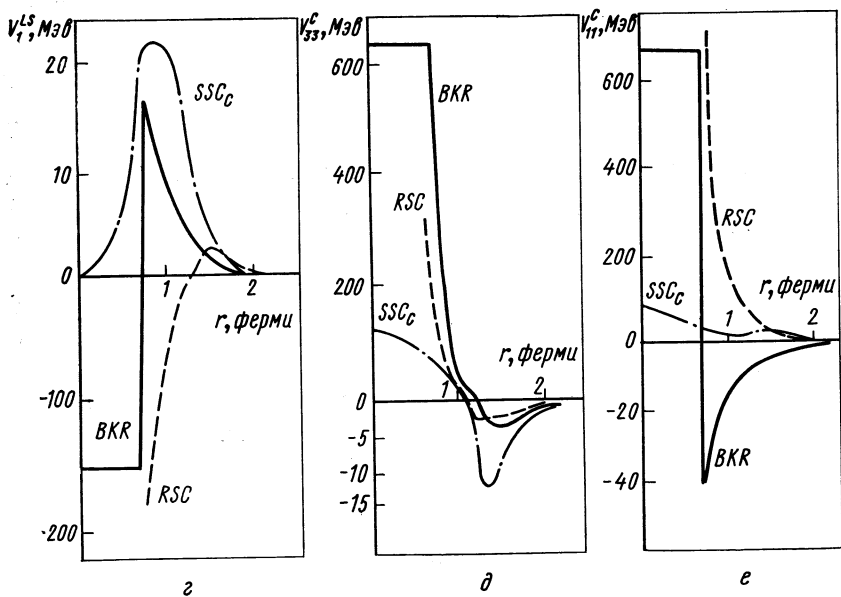
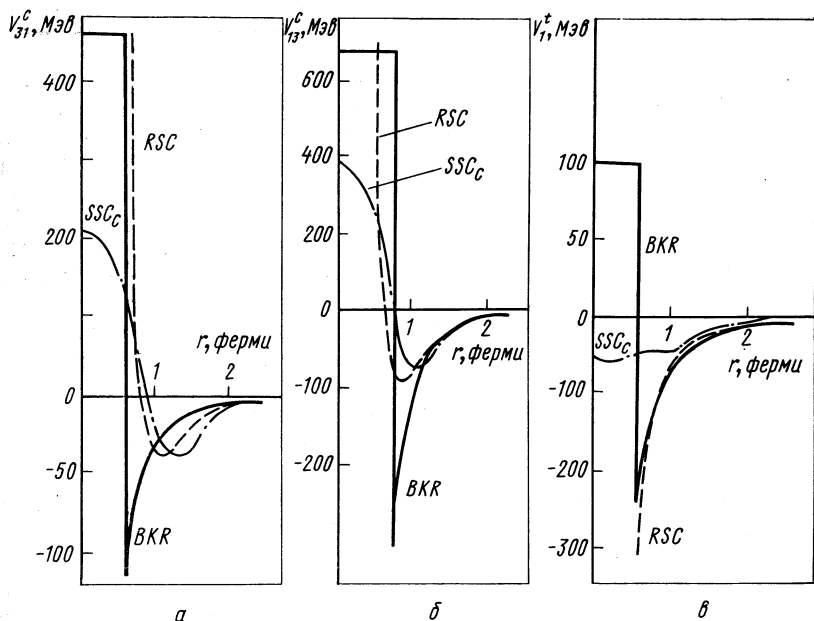


Рис. 3. Зависимость NN -потенциалов Рида (RSC), Бресселя — Кермана — Рубена (BKR) и потенциала со сверхмягким кором (SSC_C) (см. табл. 1) от радиуса

Таблица 1
 Некоторые свойства двухнулонной системы, рассчитанные с реалистическими N/N -потенциалами

Потенциал	$\chi_{\text{мин}}^2$	$\sigma_{\text{пр}}^2$, ферми	$\sigma_{\text{с}}^2$, ферми	$r_{\text{пр}}^2$, ферми	$r_{\text{ос}}^2$, ферми	$r_{\text{пр}}^2$, ферми	$r_{\text{ос}}^2$, ферми	a_t , ферми	r_t , ферми	$ E_d $, Мэв	Q_d , ферми ²	P_D , %
HJ [9]	4	—	-17,0	—	2,83	—	2,83	—	—	2,269	0,285	6,97
RSC [11]	2	-7,78	-17,1	2,72	2,80	5,39	2,80	5,39	1,72	2,2246	0,2796	6,47
BKR [12]	2	-7,825	-23,7	—	—	5,44	—	5,44	—	2,224	0,291	6,53
GPT [13]	8,4	—	-22,12	—	2,83	5,24	2,83	5,24	1,93	2,6	0,271	3,8
EH [14]	—	-7,79	-17,14	2,84	2,91	5,37	2,91	5,37	1,71	2,226	0,273	6,215
SSCA [15]	≤ 3	-7,82	—	2,71	—	5,50	—	5,50	1,85	2,224	0,262	4,43
SSCB [15]	≤ 3	-7,82	—	2,71	—	5,50	—	5,50	1,86	2,228	0,262	4,25
SSC _C [15]	≤ 2	-7,82	—	2,71	—	5,48	—	5,48	1,83	2,224	0,279	5,45
BS [16]	10,8	—	-23,3	—	2,62	5,45	2,62	5,45	1,65	2,1	—	—
SW [17]	2,2	-7,7	-23,74	—	—	5,4	—	5,4	—	—	—	—
IP [18]	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,2245	0,289	5,5
Эксперимент	—	-7,82 \pm $\pm 0,01$	-23,715 \pm $\pm 0,015$	2,80 \pm $\pm 0,01$	2,73 \pm $\pm 0,03$	5,41 \pm $\pm 0,01$	2,75 \pm $\pm 0,004$	2,2246 \pm $\pm 0,0005$	0,2796	—	—	3,9

[74]. Качество описания двухнуклонных данных с помощью этих потенциалов примерно такое же, как и в случае чисто феноменологических ННП (см. последние строки табл. 1).

Некоторые выводы и возникающие в связи с ними вопросы. Выводы. Можно утверждать, что из существующих сейчас данных о свойствах системы двух нуклонов при нерелятивистских энергиях невозможно сколько-нибудь однозначно определить потенциал взаимодействия между нуклонами. При этом речь идет лишь о взаимодействии нуклонов в состояниях с $L \leq 3 \div 4$, так как более высокие парциальные волны при нерелятивистских энергиях фактически не существуют, а для учета их влияния можно пользоваться асимптотической частью потенциала $V^{\text{ОРЕР}}$ [см. формулу (7)].

Анализ экспериментальных данных позволяет установить лишь общие свойства ННП: а) структура его сложна (кроме центральных и тензорных присутствуют также и LS - и L^2 - или p^2 -компонент потенциала); б) на малых расстояниях он должен приводить к сильному отталкиванию; в) на больших расстояниях он должен переходить в $V^{\text{ОРЕР}}$ [см. формулу (7)].

Вопросы. Сделанные выводы немедленно наводят на вопросы:

1) можно ли, оставаясь в области нерелятивистских энергий, где, и только где взаимодействие между нуклонами можно описать потенциалом, определить этот потенциал однозначно?

2) можно ли сейчас, когда известен только качественный вид ННП, надеяться на успех такой микроскопической теории ядра, когда свойства ядерных состояний и амплитуды ядерных реакций рассчитываются без модели, а исходя непосредственно из многонуклонного уравнения Шредингера, куда входят ННП?

Оба вопроса связаны друг с другом. Действительно, класс допустимых ННП будет делаться несколько уже с уточнением экспериментальных значений фаз NN -рассеяния. Но окончательно разрешить неоднозначность ННП таким образом не удастся, так как для однозначности ННП требуется знание фаз в бесконечном интервале энергии, тогда как мы ограничены нерелятивистскими энергиями. Следовательно, кроме данных о NN -рассеянии необходимо привлекать такие данные о свойствах ядер и ядерных реакций, где условие нерелятивизма выполняется. И здесь вплотную подходим ко второму вопросу. Если свойства ядер зависят только от амплитуды NN -рассеяния на массовой поверхности, но не зависят от конкретного вида ННП, то однозначно определить его будет нельзя, но микроскопическая теория ядра может быть построена на основе многонуклонного уравнения Шредингера (в него можно будет подставить любой разумный ННП). Если же конкретный вид ННП важен, то расчет свойств ядер и реакций и сравнение их с экспериментом и дают те допол-

нительные условия, которые нужны для однозначного определения ННП.

Каково реальное положение, начало проясняться только сейчас, и для понимания вырисовывающейся картины следует более подробно остановиться на результатах имеющихся сейчас расчетов свойств легчайших ядер и простейших ядерных реакций.

2. РАСЧЕТЫ СВОЙСТВ ЛЕГЧАЙШИХ ЯДЕР (${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$)

Теоретическому исследованию ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ посвящено большое количество работ. Задача о связанном состоянии трех нуклонов решается при различных предположениях о виде ННП и с помощью различных методов:

- а) решением уравнений Фаддеева;
- б) применением прямой вариационной процедуры;
- в) разложением трехнуклонной волновой функции Ψ (1, 2, 3) в ряд по полному набору каких-нибудь трехтельных функций и решению секулярного уравнения, получающегося при этом из уравнения Шредингера трехнуклонной системы.

Не будем говорить здесь о методах решения (см. приложение 1). Отметим лишь, что наиболее надежные результаты получают последним из методов, когда в качестве полного набора использовался базис гиперсферических функций (K -гармоник) и гиперрадиальных функций.

Энергии связи и волновые функции ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. У этих ядер $J^P = 1/2^+$ и их волновую функцию можно записать в виде четырех слагаемых:

$$\Psi(1, 2, 3) = \Psi_S + \Psi_{S'} + \Psi_P + \Psi_D, \quad (9)$$

где Ψ_S и $\Psi_{S'}$ отвечают значениям полного орбитального момента L и полного спина S , равным 0 и $1/2$ соответственно. Эти два члена отличаются друг от друга свойствами симметрии координатной части волновой функции: Ψ_S полностью симметрична по перестановкам координат r_i трех нуклонов, а $\Psi_{S'}$ (так называемая функция смешанной симметрии) — нет.

Третье и четвертое слагаемые в (9) отвечают за примесь P - и D -состояний к волновой функции ($L = 1$, $S = 3/2$, $1/2$ и $L = 2$, $S = 3/2$ соответственно). Помимо самой волновой функции Ψ (1, 2, 3) обычно рассчитываются энергия связи E_T ядра ${}^3\text{H}$, кулоновская энергия $E_{\text{кул}}$ в ядре ${}^3\text{He}$, среднеквадратические радиусы R_T и $R_{3\text{He}}$ ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. Основные результаты сведены в несколько таблиц.

В табл. 2 собраны расчеты для различных видов ННП и приводятся глобальные характеристики волновой функции ядра ${}^3\text{H}$ — значения $P(S')$ -, $P(P)$ - и $P(D)$ -вклада в нормировочный интеграл S' -, P - и D -состояний трехнуклонной системы.

Таблица 2

Свойства ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ с реалистическими NN -потенциалами

$ E^3\text{H} $, Мэв	$r_{ch}^3\text{H}$, ферми	$r_{ch}^3\text{He}$, ферми	$P({}^3\text{H})$, %			$E_{кул}$, Мэв	Метод	Литера- тура
			S'	P	D			
RSC								
6,5*	1,85	—	0,52	Нет	8,92	—	ОБ	[19] (в)
6,5	—	—	1,8	Нет	8,1	0,633*	УФ	[20] (б, г)
6,80	1,77	—	1,05	0,08	9,1	—	ГФ	[21] (д)
6,85	1,77	1,90	1,00	0,07	9,1	0,663*	ГФ	[21] (а)
6,7	—	1,96	1,68	Нет	8,6	—	УФ	[22] (б)
6,8±22*	—	—	—	—	—	—	ГФ	[23] (а)
7,0	1,65	1,9	1,8	Нет	9,0	0,575	УФ	[24] (б)
7,75±0,5	—	—	~1	—	9,5	—	ВМ	[25] (а)
HJ								
6,5±2	1,85	1,90	1,8	0,03	9,0	0,547	ВМ	[26, 27] (а,е)
6,7	—	—	0,36	Нет	13,9	—	ВМ	[28] (а)
6,0	—	—	—	Нет	7,9	—	ОВМ	[29] (а,е)
BKR								
6,2±2	1,87	2,09	1,4	Нет	7,8	—	УФ	[30] (б,г)
6,34	1,76	1,96	1,46	Нет	7,95	—	УФ	[31] (б,г)
6,2	1,82	1,97	0,50	0,05	8,8	—	ГФ	[21] (а)
SSC _A								
7,64	1,64	1,85	1,5	Нет	6,5	0,61	УФ	[24] (б)
7,47	1,78	1,94	1,0	0,04	6,4	0,633*	ГФ	[21] (д)
SSC _B								
7,71	1,62	1,82	1,4	Нет	6,3	0,62	УФ	[24] (б)
7,64	1,78	1,96	1,1	0,03	6,2	0,623*	ГФ	[21] (а)
EH								
7,5	—	—	1,2	0,05	9,0	0,683*	ГФ	[32] (д)
GPT								
8,25	1,69	1,84	1,17	Нет	4,07	—	УФ	[31] (б, г)
8,61	—	—	0,8	0,02	5,0	0,663*	УФ	[32] (а)
Эксперимент								
8,48	$1,70 \pm 0,05$	$1,87 \pm 0,05$	< 4	—	$5-10$	$0,764$	—	—

*) Экстраполированное значение от 6,3 Мэв.

**) Экстраполированное значение от 6,26 Мэв.

***) Точечные нуклоны.

Примечания:

- а) все члены NN -потенциала учтены;
 б) учитывалось только 1S_0 , 3S_1 — 3D_1 , NN -взаимодействие;
 в) полный потенциал + потенциал однопи-мезонного обмена в 3D_3 -состоянии;
 г) пренебрегалось D -волной третьей частицы относительно с.д.и первых двух;
 д) нечетные потенциалы не учитывались;
 е) слегка модифицированная версия потенциала HJ.
 Некоторые результаты работ [21, 32] уточнены из-за увеличения ГФ базиса.

Наибольшее количество расчетов проведено с потенциалом Рида (RSC). Как видно из табл. 2, у различных авторов, работавших с этим потенциалом, получаются несколько разные результаты. Отчасти это связано с различными упрощениями и приближениями, вводимыми в вычислительную процедуру; при этом возникают неконтролируемые погрешности. Такова ситуация с результатом Хэнелла и Дэлвса для энергии связи ядра ${}^3\text{H}$ $E_T = 7,75 \pm 0,5$ Мэв, который не подтверждается другими расчетами. Как показывает сравнение результатов различных авторов, средняя (по авторам) погрешность вычисления волновой функции составляет несколько процентов: вес D -состояния ($\sim 9\%$) у всех авторов получается почти одним и тем же, тогда как в весе S' -состояния ($\sim 1\%$), который на порядок меньше, имеются большие расхождения. Рассматривая собранные в таблице результаты, нельзя не обратить внимания на следующее:

а) для всех типов реалистических ННП энергия связи ядра ${}^3\text{H}$ оказывается с погрешностью $\pm 0,8$ Мэв одинаковой и близкой к экспериментальному значению (меньшей его на 1—2 Мэв);

б) среднеквадратические радиусы также получаются при вполне удовлетворительном согласии с экспериментом;

в) рассчитанная в предположении зарядовой инвариантности ННП кулоновская энергия двух протонов в ${}^3\text{He}$ оказывается примерно на 100 кэв меньшей экспериментального значения и не зависящей от вида NN -потенциалов.

При сравнении расчетных значений энергии связи E_T с экспериментальными следует помнить, что она является разностью $E_T = |\bar{V}| - \bar{T}$ больших по абсолютной величине потенциальной ($|\bar{V}| \sim 50$ Мэв) и кинетической ($\bar{T} \sim 40$ Мэв) энергий. Неопределенность в этих значениях порядка 1 Мэв приводит к неопределенности в энергии связи порядка 1—2 Мэв. Таким образом, поправка в волновую функцию в 1—2% достаточна, чтобы объяснить расхождение расчетных значений E_T и экспериментального ($|E_{T(\text{эксп})}| \approx 8,48$ Мэв). Можно думать, что эта поправка связана с небольшим эффектом непотенциальности NN -взаимодействия или многочастичных сил.

Из пунктов а), б) следует, что основные свойства ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ оказываются почти не зависящими от конкретного вида ННП, так как они хорошо описывают двухнуклонные данные. Этот вывод становится особенно очевидным, если рассмотреть вклады различных частей гамильтониана в E_T . В табл. 3 приведены соответствующие значения для потенциалов GPT и ЕН. Вклады членов разного типа в E_T для этих потенциалов сильно отличаются друг от друга, но в конечном результате, сложив все вклады, получим практически одно и то же. Другими словами, при вычислении свойств ядра ${}^3\text{H}$ с помощью различных ННП важен не кон-

Таблица 3

Усредненные значения кинетической энергии T и компонент NN -потенциала для ${}^3\text{H}$ ($\psi_{L=1}=0$) и ${}^4\text{He}$

$(\Psi \dots \Psi)$	${}^3\text{H}$		${}^4\text{He}$	
	GPT	ЕН	GPT	ЕН
T	29,48	42,97	57,64	77,95
$V_{31}^c + V_{13}^c$	-27,90	-22,85	-66,74	-58,00
V_1^t	-9,61	-24,53	-17,20	-40,67
$V_{31}^{(LS)^2} + V_{11}^{(LS)^2}$	-0,31	—	-0,46	—
V_1^{LS}	-0,18	-2,78	-0,25	-2,80
$V_{33}^c + V_{11}^c$	0,02	0,08	0,11	0,42
V_3^t	-0,1	-0,20	-0,34	-0,36
$V_{33}^{(LS)^2} + V_{13}^{(LS)^2}$	0,02	—	0,06	—
V_3^{LS}	0,07	0,02	0,40	0,44
E	8,57	7,28	-26,76	-23,03

кретный вид последних, а то общее, что у них есть. Общим свойством ННП является их способность одинаково хорошо описывать двухнуклонные данные при не слишком высоких энергиях. Еще одно подтверждение сделанного выше вывода получим, если сравним друг с другом доминирующие компоненты волновых функций Ψ_S , вычисленные для этих потенциалов. В качестве численной меры сравнения удобно ввести величину «перекрытия» β :

$$\beta^{(1,2)} \equiv \langle \Psi_S^{(1)}, \bar{\Psi}_S^{(2)} \rangle \equiv \int \Psi_S^{(1)} \bar{\Psi}_S^{(2)} dV / \int |\Psi_S^{(1)}|^2 dV. \quad (10)$$

Отличие β от единицы указывает, насколько отличаются друг от друга волновые функции, вычисленные с разными ННП. Некоторые значения приведены в табл. 4, откуда видно, что полные волновые функции и их отдельные компоненты близки друг к другу. Различие составляет несколько процентов, т. е. и волновая функция ядра оказывается слабо зависящей от конкретного вида ННП. Тем более удивительным кажется, что разность энергий связи ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, которая обычно трактуется как среднее значение энергии кулоновского взаимодействия $E_{\text{кул}}$ двух протонов в ${}^3\text{He}$, оказывается меньшей экспериментального значения. Это получается во всех случаях, когда для расчета используются зарядово-инвариантные ядерные силы. Такое расхождение между

расчетом и экспериментом указывает на присутствие в ННП зарядово-неинвариантных членов. Теоретические оценки таких членов [33] дают правильный порядок величины эффекта.

Выше говорилось о расчетах, проведенных относительно недавно с реалистическими ННП. В более ранних работах (см., например, работу [8]) использовались простейшие потенциалы (центральные потенциалы прямоугольной, экспоненциальной или юкавовской формы), дающие правильные значения длин NN -рассеяния. Из этих потенциалов только прямоугольный достаточно хорошо воспроизводит экспериментальные данные. Все остальные приводят к слишком сильной связи трех и в особенности четырех нуклонов. Поэтому отмеченную выше слабую зависимость свойств ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ от конкретного вида ННП не следует понимать слишком буквально. Зависимость действительно слабая, если ННП реалистические, т. е. воспроизводят фазы NN -рассеяния в достаточно широком интервале энергий (для этого требуется эффективное отталкивание на малых расстояниях). В случае потенциалов экспоненциальной, юкавовской или гауссовой форм, наоборот, при уменьшении расстояния между нуклонами притяжение возрастает. В результате в трех-, а тем более в четырех- и т. п. нуклонных системах возникает более сильная связь, чем это следует из опыта. Для потенциала прямоугольной формы такое явление еще не слишком сильно выражено. Энергия связи получается лишь на 1—2 $M\text{эв}$ больше эксперимента, а волновая функция ядра ${}^3\text{H}$ оказывается близкой (с погрешностью 10%) к вычисленной с помощью реалистических потенциалов.

Таблица 4
Перекрытие симметричных компонент волновых функций (%)

Потенциал	SW	RSC	BKR	SSC _B	SSC _A
SW	100	—	—	—	—
RSC	85	100	—	—	—
BKR	87	97	100	—	—
SSC _B	91	93	94	100	—
SSC _A	91	93	94	98	100

Примечание: SW — простой потенциал прямоугольной формы.

Электрические форм-факторы ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. Общее заключение о слабой зависимости волновой функции ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ от вида ННП подтверждается и данными об электрических форм-факторах $F_e(q)$, описывающих рассеяние электронов на ядре и определяемых как

$$F_e(q) = \int \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \rho_e(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где $\rho_e(\mathbf{r})$ — плотность заряда в ядре. Экспериментально $F_e(q)$ хорошо известен для ядра ${}^3\text{He}$ и плохо — для ${}^3\text{H}$. Поэтому ниже

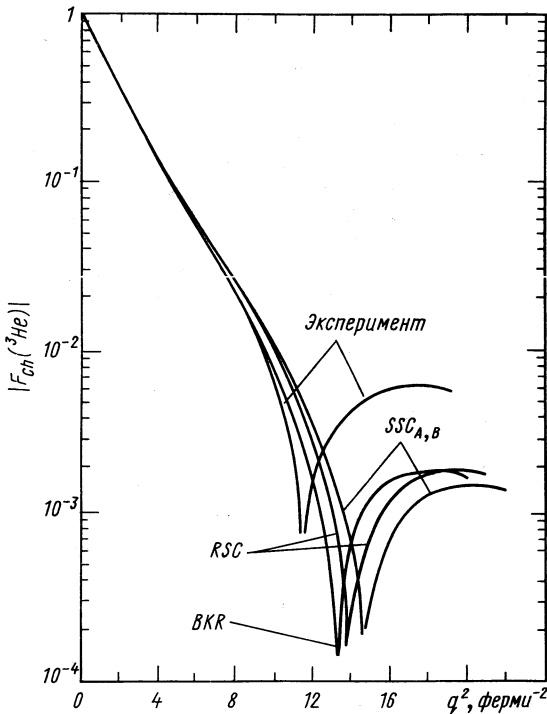


Рис. 4. Электрической форм-фактор ${}^3\text{He}$ для NN -потенциалов BKR , RSC , $SSC_{A,B}$. Экспериментальные точки из работы [35]

будет говориться только о ${}^3\text{He}$. Экспериментальные данные и теоретические значения форм-факторов, рассчитанные для разных ННП, приведены на рис. 4. Надо сказать, что форм-фактор вычислялся неоднократно разными авторами. Однако результаты не всегда согласовывались друг с другом при $q^2 \gtrsim 10$ ферми $^{-2}$. На рисунке

приведены данные работы [34], являющиеся, по-видимому, наиболее точными.

Существенно, что при не слишком больших q^2 форм-фактор оказывается практически не зависящим от вида ННП и хорошо описывает эксперимент. Отличия начинают проявляться только начиная со значения $q^2 \approx 7-8$ ферми⁻², где $|F_e(q)|$ мал. Характерной чертой форм-фактора является минимум при $q^2 = 11,6$ ферми⁻². Положение минимума и дальнейший ход форм-фактора не удается описать ни при каких использованных до сих пор ННП.

Результаты различных работ, в которых вычислялись положение минимума $q_{\text{мин}}^2$ и высота последующего максимума функции $|F_e(q^2)|$, приведены в табл. 5. Не все приведенные в этой таб-

Таблица 5

Положение дифракционного минимума и значение второго максимума в $F_e(q^2)$ для реалистических потенциалов

Потенциал	³ He		³ H		Литература
	$q_{\text{мин}}^2$, ферми ⁻²	$ F_e(q_{\text{макс}}^2) \cdot 10^3$	$q_{\text{мин}}^2$, ферми ⁻²	$ F_e(q_{\text{макс}}^2) \cdot 10^3$	
HJ	12,5±0,3	1,0	13,4±0,3	1,3	[26]
RSC	13,3 *	2,0	13,7	2,0	[19]
	12,8±0,3	—	—	—	[25]
	13,8	1,9	15,0	2,5	[34]
	14,0	2,0	—	—	[24]
	15,5	0,7	—	—	[22]
	15,5	—	—	—	[31]
	17,0	—	—	—	[69]
BKR	13,2	1,9	14,6	2,4	[34]
	14,4	1,0	15,6	1,0	[30]
	14,5	—	—	—	[31]
SSC _A	14,6	1,4	15,6	1,8	[34]
	14,8	—	—	—	[24]
SSC _B	14,7	1,3	15,7	1,7	[34]
	15,0	—	—	—	[24]
SSC _C	14,4	—	—	—	[24]
Эксперимент	11,6	6,0	—	—	[35]

* Это значение получено авторами после введения некоторых поправок (частное сообщение Джексона).

лице значения представляются надежными. Общая тенденция, однако, ясна: все расчеты дают завышенное значение для $q_{\text{мин}}^2$ и предсказывают слишком малое значение последующего максимума в $|F_e(q^2)|$. Может оказаться, что поведение форм-фактора при больших значениях q^2 (значению $q^2 \sim 10$ ферми⁻² отвечают расстояния $\sim 0,3$ ферми) лежат вне рамок нерелятивистского потенциального подхода. Однако оценки значений поправок к теоретическому форм-фактору, возникающих при учете некоторых релятивистских эффектов (см. работу [75]) и возможного влияния трехчастичных сил [26], только ухудшают согласие с экспериментом. Хотя полной ясности в вопросе о форм-факторе пока нет, видно, что различные ННП приводят к результатам, отличающимся друг от друга и от эксперимента только при таких значениях q , которые соответствуют очень тонким деталям волновой функции трех нуклонов.

Расчет свойств α -частиц. Расчет четырехнуклонной задачи оказывается гораздо более сложным делом, чем в случае трех нуклонов. Сейчас опубликовано лишь несколько работ, в которых свойства ядра ${}^4\text{He}$ рассчитывались для реалистических ННП. Некоторые из результатов приведены в табл. 6. Имеющихся дан-

Таблица 6
Свойства ${}^4\text{He}$ с реалистическими NN -потенциалами

Потенциал	$ E , Mэв$	$P, \%$		Метод	Литература
		S'	D		
EH GPT	23,04	0,2	9,5	ГФ	[32] (а)
	26,76	0,1	6,0		ГФ
	26,64	—	—	Фаддеев—Бракнер— Хартри—Фок	[71]
SSC _A	25,2	—	—		[72]
	RSC	20,8	—		—
HJ	19,0	—	—		ОВМ

(а) — см. примечание к табл. 2.

ных слишком мало, чтобы делать какие-либо определенные заключения. По-видимому, энергия связи $E_{{}^4\text{He}}$ более чувствительна к виду ННП, чем это было в случае трехнуклонных ядер (см. табл. 6).

Выводы. Приведенные в этой главе данные многочисленных расчетов показывают, что основные свойства ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и в меньшей степени ${}^4\text{He}$ слабо зависят от конкретного вида ННП, так как последний хорошо описывает двухнуклонные данные. В первую очередь, эта слабая зависимость от ННП относится к волновой функции ядер, которая с погрешностью в несколько процентов оказывается одинаковой для всех использовавшихся

ННП. Несколько более чувствительной оказывается энергия связи E_T , $E_{\text{зне}}$, являющаяся разностью двух больших значений — кинетической и взятой с обратным знаком потенциальной энергии.

С формальной точки зрения слабая зависимость свойств ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ от конкретного вида ННП означает, что определяющим является поведение двухнуклонной амплитуды рассеяния на массовой поверхности. От поведения этой амплитуды при нефизических значениях импульсов основные свойства легчайших ядер, как оказывается, зависят слабо.

С одной стороны, этот факт весьма приятен, так как из него следует, что волновые функции легчайших ядер могут сейчас вычисляться с погрешностью в несколько процентов. С другой стороны, этот факт означает, что из известных основных свойств легчайших ядер нельзя извлечь много дополнительной информации о виде ННП. Так, единственное новое свойство ННП, которое надежно выявилось в результате расчетов, — это присутствие зарядово-неинвариантных членов в потенциале взаимодействия между нуклонами.

Можно считать, что у всех ядер, более тяжелых, чем ${}^4\text{He}$, у которых есть спектр возбужденных состояний, порядок уровней и расстояние между ними должны сильно зависеть от конкретного вида ННП, в частности от относительных весов различных компонент потенциала (центральных, LS , L^2 и т. п.). Среди уровней с разными квантовыми числами можно найти такие пары уровней, у которых разность их энергий будет определяться в основном только какой-то одной компонентой ядерных сил. (Аналогично тому, как разность энергии связи ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ зависит только от кулоновского взаимодействия и зарядово-неинвариантных компонент потенциала.) Подробных расчетов свойств ядер с $A > 4$, выполненных с помощью нерелятивистских ННП, пока в литературе нет.

3. РАСЧЕТЫ АМПЛИТУД ПРОСТЕЙШИХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

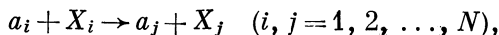
Первый успешный расчет сечения ядерной реакции, выполненный решением многонуклонного уравнения Шредингера, был опубликован в 1956 г. [1]. Реакция была очень простая (рассеяние нейтронов на дейтоне при малых энергиях), а сам расчет сильно облегчался предположением о бесконечно малом радиусе ядерных сил.

Через несколько лет этот же процесс рассчитывался с помощью уравнений Фаддеева, в начале только для нелокальных, так называемых «сепарабельных», потенциалов взаимодействия между нуклонами (их использование сильно облегчало расчет, так как в общем виде снималось одно интегрирование), а к концу 60-х годов и для нерелятивистских локальных ННП.

В то же время проводятся расчеты более сложных реакций, происходящих в системе трех, четырех, пяти и большего числа нуклонов [36—40]. Теоретической основой этих расчетов были вариационные принципы, разработанные для задач непрерывного спектра [41] (принцип Хюльстена — Кона и т. п.). Хотя в деталях методики расчетов, выполненных разными авторами, отличаются друг от друга, общий подход везде один и тот же. Основные идеи методики расчета опишем ниже. Более подробное описание некоторых методов [36, 42—45] содержится в приложениях 2, 3.

Важное практическое значение имеет исследование асимптотики волновых функций трех частиц, проделанное С. П. Меркурьевым (см. работу [76] и имеющиеся там ссылки).

Общее описание вариационных методов расчета амплитуд ядерных реакций. Пусть мы хотим рассмотреть реакции



происходящие в системе A нуклонов. Будем считать, что энергия не слишком велика, так что открыты только N бинарных каналов $a_i + X_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а остальные бинарные каналы и каналы распада на 3, 4 и т. д. частиц закрыты. Обозначим a_i и X_i пары частиц, составляющие i -й канал. Внутренние волновые функции частиц a_i и X_i считаем известными и равными φ_{i1} и φ_{i2} соответственно.

Для того чтобы рассчитать сечения реакций, необходимо решить уравнение Шредингера для рассматриваемой системы A нуклонов

$$(\hat{H} - E)\Psi = 0. \quad (12)$$

Здесь \hat{H} — полный гамильтониан, а на волновую функцию Ψ необходимо наложить обычные условия конечности при всех значениях координат нуклонов. Всего имеется N независимых решений $\Psi^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) в полном соответствии с N свободными параметрами. Этими параметрами являются амплитуды сходящихся волн в N открытых каналах.

Общий вид Ψ известен (см. приложение 2):

$$\Psi = \Psi_{\text{int}} + \Psi_{\text{ext}}. \quad (13)$$

Здесь второй член описывает относительное движение частиц в открытых каналах и его можно записать как ($i = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ext}}^{(i)} = & \hat{A} \{ F_i(R_i) \varphi_{i1} \varphi_{i2} Y_{L_i M_i}(\Omega_{R_i}) + \\ & + \sum_{j=1}^N f_{ji} G_j(R_j) \varphi_{j1} \varphi_{j2} Y_{L_j M_j}(\Omega_{R_j}) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

где F_i и G_i — функции, описывающие относительное (свободное или в кулоновском поле, если частицы заряжены) движение частиц a_i и X_i . В качестве этих функций удобно выбирать регулярное и нерегулярное решения свободного (или кулоновского) уравнения движения двух частиц, в случае свободного движения, например:

$$\left. \begin{aligned} F_i(R_i) &\sim \sin(k_i R_i - L_i \pi/2)/R_i; \\ G_i(R_i) &\sim \cos(k_i R_i - L_i \pi/2)/R_i, \end{aligned} \right\} R_i \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Здесь k_i — волновой вектор относительного движения пары $a_i + X_i$ на бесконечности; R_i — расстояние между a_i и X_i . Регулярное решение свободного (кулоновского) уравнения при $R_i \rightarrow 0$ обращается в бесконечность, и поэтому его домножают на регуляризирующий множитель, например на

$$T_L(R) = 1 - \left(\sum_{\nu=0}^{2L} \frac{(\beta R)^\nu}{\nu!} \right) \exp[-\beta R], \quad (16)$$

который равен единице везде, кроме области малых R , где он стремится к нулю так, чтобы погасить сингулярность нерегулярной функции свободного (кулоновского) движения. Волновая функция должна быть антисимметричной по перестановкам координат нуклонов. Это обеспечивается введением в (14) оператора антисимметризации \hat{A} . Матрица констант f_{ji} в общем виде не определяется и должна находиться из решения уравнений движения (см. ниже).

Относительно $\Psi_{\text{ext}}^{(i)}$ в виде (14) можно утверждать, что она (при произвольных f_{ji}) является точным решением уравнения Шредингера (2) в той (асимптотической) области конфигурационного пространства, где частицы a_i и X_i во всех каналах разошлись друг от друга за пределы действия ядерных сил*. Кроме того, $\Psi_{\text{ext}}^{(i)}$ везде конечна и удовлетворяет принципу Паули.

Когда все A нуклонов нашей системы близки друг к другу и соответственно все R_i малы, функция (14) уже не удовлетворяет уравнению Шредингера (12), так как в (14) не учтено взаимодействие между нуклонами, находящимися в разных частицах каналов. Чтобы исправить положение, в выражение для волновой функции (13) вводится дополнительный член $\Psi_{\text{int}}^{(i)}$, выбираемый так, чтобы он был отличен от нуля, только когда все A нуклонов достаточно близки друг к другу; в асимптотической области $\Psi_{\text{int}}^{(i)}$ должен достаточно быстро обращаться в нуль. Можно, например,

* В некоторых случаях в выражение для $\Psi^{(i)}$ (18) удобно вводить и члены, соответствующие закрытым каналам. Это повышает точность расчета.

задавать $\Psi_{\text{int}}^{(i)}$ в виде разложения по состояниям A нуклонов в поле гармонического осциллятора

$$\Psi_{\text{int}}^{(i)} = \sum_{\mu=1}^M C_{\mu}^{(i)} \chi_{\mu}(1, 2, \dots, A), \quad (17)$$

где $C_{\mu}^{(i)}$ — некие коэффициенты; χ_{μ} — соответствующий набор ортонормированных функций. Возможны и другие выборы.

Сконструированное описанным выше образом выражение для искомой волновой функции

$$\Psi^{(i)} = \sum_{\mu=1}^M C_{\mu}^{(i)} \chi_{\mu} + \hat{A} \left\{ F_i \varphi_{i1} \varphi_{i2} Y_{L_i M_i} + \sum_{j=1}^N f_{ji} G_j \varphi_{j1} \varphi_{j2} Y_{L_j M_j} \right\} \quad (18)$$

не является, конечно, точным решением уравнения Шредингера (12), хотя и имеет правильный общий вид. Входящие в (18) неизвестные константы C_{μ} и f_{ji} должны находиться из условия, чтобы выражение (18) было наилучшим приближением к точному решению $\Psi_{\text{exact}}^{(i)}$.

В зависимости от того, что считать «наилучшим приближением», условия оказываются разными. Но если последовательно придерживаться вариационного подхода, то для обрисованной выше схемы он приводит к следующей системе уравнений для C_{μ} и f_{ji} :

$$\left. \begin{aligned} \int d\tau \chi_{\mu_1}^* [\hat{H} - E] \Psi^{(i)} &= 0, \quad \mu_1 = 1, 2, \dots, M; \\ \int d\tau \{G_{j_1} \varphi_{j_1 1} \varphi_{j_1 2} Y_{L_{j_1} M_{j_1}}\}^* [\hat{H} - E] \Psi^{(i)} &= 0, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь подразумевается интегрирование по координатам всех нуклонов и суммирование по их спидам и изоспинам. Полное количество уравнений $(MN + N^2)$ совпадает с количеством неизвестных констант C_{μ} и f_{ji} .

Обозначим найденные из (19) константы через \bar{C}_{μ} и \bar{f}_{ji} . Эти решения можно улучшить, используя многоканальное тождество Като [46] (см. приложение 2), тогда получим улучшенное выражение для f_{ji} :

$$f_{ji} = \bar{f}_{ji} - 2 \int d\tau \Psi^{(j)} [\hat{H} - E] \Psi^{(i)} \quad (20)$$

Поправочный второй член в этом выражении часто называют вариационной поправкой. С помощью матрицы \hat{f} коэффициентов f_{ji} легко находится и \hat{S} -матрица:

$$\hat{S} = (1 + i\hat{f})(1 - i\hat{f})^{-1}. \quad (21)$$

Амплитуды различных реакций в рассматриваемой системе A нуклонов обычным образом выражаются через элементы \hat{S} -матрицы.

Выше был намечен общий путь, используемый для расчета сечений реакций, причем в наиболее простом варианте. Некоторые уточняющие детали содержатся в приложениях.

В основном тексте мы больше не будем говорить о технической стороне расчетов, посвятив главное внимание анализу полученных результатов.

Расчеты с простейшими потенциалами. В первых расчетах рассматривались наиболее простые процессы: упругое рассеяние нейтронов на дейтоне, тритоне и α -частице. Дублетная a_2 и квартетная длина a_4 nd -рассеяния рассчитывались многими авторами с помощью уравнения Фаддеева. Особо следует отметить, что ранние расчеты [4] делались, когда значения длин a_2 и a_4 не были известны из экспериментов из-за неоднозначностей фазового анализа. Расчет привел к заключению, что $a_4 \approx 6$ ферми, а a_2 — значительно меньше, в дальнейшем это подтвердилось на опыте.

Метод уравнений Фаддеева — Якубовского для числа нуклонов $A > 3$ практически не использовался. Все результаты об амплитудах реакций, возможных в системах четырех, пяти и т. д. нуклонов, о которых будем говорить дальше, получены с помощью того или иного варианта вариационного метода.

Впервые этот метод был опробован на расчете длин рассеяния a_2 и a_4 для соударения nd [36]. Результат оказался обнадеживающим, и в работах [37, 38] этим же методом были рассчитаны s -, p -фазы ($n + {}^3\text{H}$)-рассеяния (рис. 5) и p -фазы ($n + {}^4\text{He}$)-рассеяния (рис. 6). Как видно, расчет правильно воспроизводит поведение синглетной и триплетной s -фаз ($n + {}^3\text{H}$)-рассеяния и резонансное поведение p -фазы в ($n + {}^4\text{He}$)-рассеянии. Относительно взаимодействия между нуклонами в этих работах предполагалось, что оно чисто центральное и включает в себя только две компоненты — синглетный V_{1s}^c - и триплетный V_{31}^c -потенциалы [см. формулу (1)] прямоугольной формы. Параметры этих потенциалов были подобраны так, чтобы воспроизводить сечение NN -рассеяния при малых энергиях. Это предположение о виде ННП — очень грубое по крайней мере в двух отношениях: во-первых, взяты потенциалы очень простой формы, не учитывающие, в частности, отталкивание нуклонов на малых расстояниях и, во-вторых, такие важные компоненты взаимодействия, как тензорная и спин-орбитальная, положены равными нулю.

По поводу последнего обстоятельства можно думать, что оно не важно при вычислении s -фаз ($n + {}^3\text{H}$)-рассеяния. Качественный эффект LS - и тензорных сил между нуклонами — появление эффективных LS -сил во взаимодействии между нуклоном и ядром, а в s -состоянии эти силы обращаются в нуль. Однако эффектив-

ная LS -сила должна учитываться при вычислении p -фаз в $(n - {}^4\text{He})$ -рассеянии. Как известно, эти силы приобретают здесь существенное значение и проявляются в том, что фазы в состояниях с моментами $j = 3/2$ и $1/2$ ведут себя по-разному (см. рис. 6). В расчете [38], о котором говорилось выше, никаких эффективных LS -сил не возникает, и фазы $\delta_{3/2}$ и $\delta_{1/2}$ в обоих состояниях оказываются одинаковыми. При сравнении с экспериментом рассчитанная p -фаза попадает в область между экспериментальными значениями фаз $\delta_{3/2}$ и $\delta_{1/2}$ (см. рис. 6) и таким образом описывает их поведение в среднем.

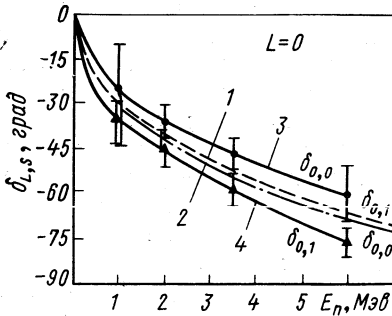


Рис. 5. Зависимость фаз $(n + {}^3\text{H})$ -рассеяния $\delta_{L,S}$ от энергии падающего нейтрона E_n для $L = 0$: 1, 2 — результаты расчета; 3, 4 — фазовый анализ эксперимента

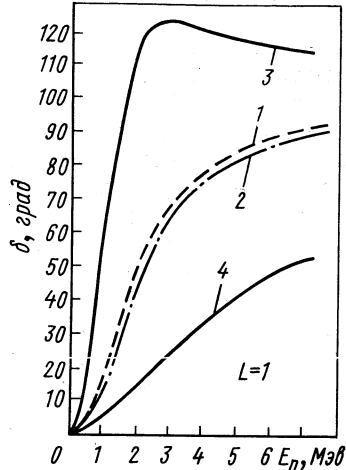


Рис. 6. Зависимость фаз $(n + {}^4\text{He})$ -рассеяния от энергии падающего нейтрона E_n для $L = 1$: 1 и 2 — результаты расчета для разных формулировок вариационного принципа; 3 — фаза для $J = 3/2$; 4 — фаза для $J = 1/2$

Что касается простой прямоугольной формы потенциалов, использованной в работах [37, 38], то это оказывается не таким уж плохим приближением, как могло бы показаться на первый взгляд. Дело в том, что в расчеты вариационного типа, о которых идет речь, потенциал взаимодействия между нуклонами входит несколькими способами. Как видно из формул (II. 33), (II. 35) приложения 3, в уравнения для определения амплитуды рассеяния ННП входит а) через внутренние волновые функции частиц [${}^3\text{H}$ в случае $(n - {}^3\text{H})$ -рассеяния и ${}^4\text{He}$ — в случае $(n - {}^4\text{He})$ -рассеяния]; б) через энергии связи этих частиц; в) через эффективный потенциал между нейтроном и ядром. Известно, что волновые функции и энергии связи легчайших ядер можно вполне удовлетворительно описать с помощью прямоугольных ННП, если

последние подобраны так, чтобы правильно описать NN -рассеяние при малых энергиях. Поэтому пункты а) и б) никакого беспокойства не вызывают. Единственная величина в уравнениях (19), куда потенциал NN -взаимодействия входит прямо — это эффективное взаимодействие между нейтроном и ядром. Но формулы, по которым это взаимодействие определяется, имеют интегральный характер: ННП в них усредняется по волновым функциям частиц и результат усреднения не слишком сильно зависит от конкретного вида ННП. Следовательно, тот факт, что грубые расчеты цитированных выше работ оказываются в хорошем качественном согласии с экспериментом, не удивительно. Этого и следовало ожидать при вариационном расчете. Единственный вопрос о том, насколько хорошо работает вариационный метод? Хотя никогда нельзя быть абсолютно уверенным в точности результатов вариационного расчета, некоторое представление о точности можно сопоставить, вычислив вариационную поправку к \hat{S} -матрице. В работах [37, 38] расчеты велись для тех энергий, где вариационная поправка была мала и, следовательно, вычисляемая функция близка к точной.

Наиболее важный качественный результат расчетов с простейшими потенциалами — выяснение того огромного значения, которое приобретает принцип Паули в динамике ядерных процессов. В некоторых состояниях относительного движения нуклона и ядра, при не слишком больших энергиях, именно принцип Паули препятствует проникновению нуклона в ядро, имитируя сильное отталкивание в этих состояниях. Например, именно такой эффект объясняет малость и отрицательность s -фазы ($n - {}^4\text{He}$)-рассеяния и отрицательный знак s -фаз в ($n - {}^3\text{H}$)-рассеянии.

Расчеты с реалистическими потенциалами. В последние годы появилась целая серия работ, в которых при расчете реакции использовались потенциалы взаимодействия между нуклонами, близкие к реалистическим. Ниже приведем основные результаты.

($n - {}^3\text{H}$)-Рассеяние [47]. Потенциал взаимодействия между нуклонами был выбран в виде суммы центрального \hat{V}^c , спин-орбитального \hat{V}^{LS} , тензорного \hat{V}^t и кулоновского потенциалов:

$$\hat{V} = \hat{V}^c + \hat{V}^{LS} + \hat{V}^t + \hat{V}_{\text{кул}}; \quad (22)$$

при этом потенциал \hat{V}^c был взят из работы [48], а \hat{V}^t и \hat{V}^{LS} — из работы [14]. То, что различные компоненты потенциала берутся из разных источников, не является, конечно, последовательным, и ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

С взаимодействием (22) были вычислены фазы nT -рассеяния для всех низших парциальных состояний вплоть до $J = 4^-$. На рис. 7 приведено сравнение рассчитанных низших фаз ${}^{28}\text{Si} + {}^{18}\text{O}$ с экспериментом. Далее вычислялось дифференциальное сечение

для нескольких энергий. Согласие расчета с экспериментальными данными видно из рис. 8.

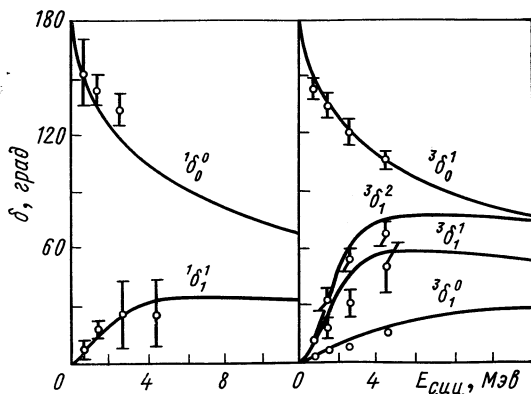


Рис. 7. Зависимость фаз $^{2S+1}\delta_L^J$ упругого ($n-^3\text{H}$) рассеяния от энергии в системе центра инерции: сплошные кривые—расчет

($p-^3\text{He}$)-Рассеяние [49]. Использовался тот же вид ННП, что и в предыдущем расчете. Так же как и в предыдущем случае, волновая функция искалась в виде суммы $\Psi_{\text{int}} + \Psi_{\text{ext}}$, где вто-

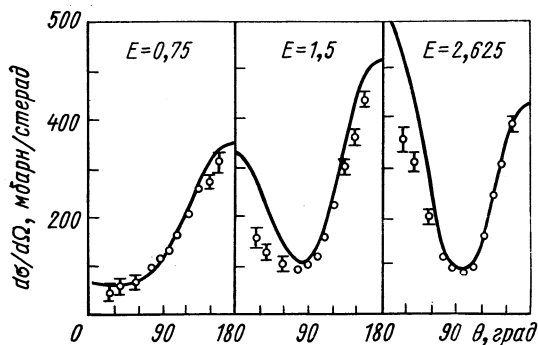


Рис. 8. Дифференциальное сечение упругого ($n-^3\text{H}$)-рассеяния для энергий $E_{\text{с.ц.и.}} = 0,75; 1,5; 2,65$ Мэв

рой член описывает канал $p-^3\text{He}$, а первый — поведение системы в той области конфигурационного пространства, где все четыре нуклона близки друг к другу и образуют нечто вроде компаунд-ядра. Рассчитывались фазы рассеяния для всех низших парциаль-

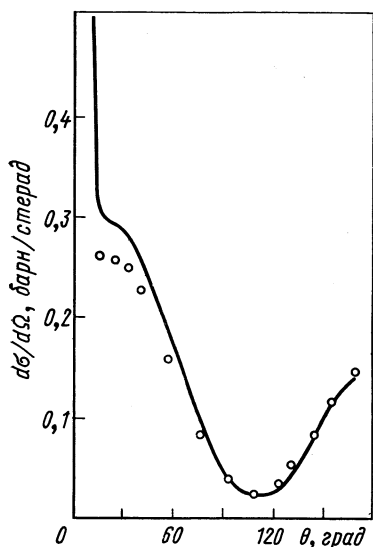


Рис. 9. Дифференциальное сечение упругого $(p-{}^3\text{He})$ -рассеяния при энергии $E_{\text{с.ц.и}} = 6,6 \text{ Мэв}$

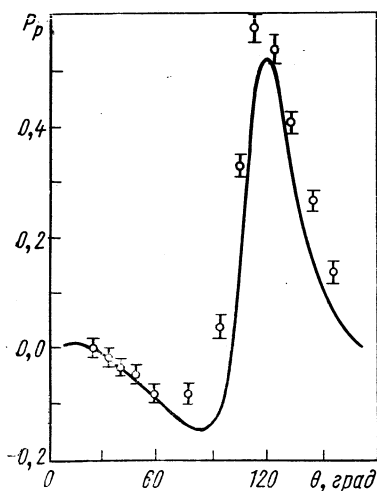


Рис. 10. Поляризация протонов (P_p) в упругом $(p-{}^3\text{He})$ -рассеянии при энергии $E_{\text{с.ц.и}} = 6,6 \text{ Мэв}$

ных состояний вплоть до $J=4^-$, дифференциальные сечения рассеяния и поляризация рассеянных протонов. Некоторые типичные результаты расчетов приведены на рис. 9, 10. Как видно, согласие расчетов с экспериментальными данными — удовлетворительное.

Фотодезинтеграция ядра ${}^4\text{He}$. Сравнение теоретических и экспериментальных фаз рассеяния, угловых распределений и поляризацій при $(n-{}^3\text{H})$ - и $(p-{}^3\text{He})$ -рассеянии служит проверкой правильности расчета асимптотической части соответствующих волновых функций. Чтобы проверить правильность расчета волновой функции «во внутренней» области, где все нуклоны близки друг к другу, необходимо использовать те физические процессы, которые в основном определяют вид волновой функции во внутренней области. Один из таких процессов — реакция фото-

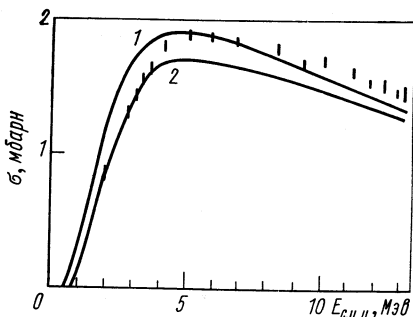


Рис. 11. Сечение фотодезинтеграции ядра ${}^4\text{He}$:

1 — для развала на $(p-{}^3\text{H})$; 2 — для развала на $(n-{}^3\text{He})$; экспериментальные данные относятся к каналу развала $p-{}^3\text{H}$

расщепления ядра ${}^4\text{He}$, ${}^4\text{He}(\gamma, n){}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}(\gamma, p)\text{T}$. Сечения этих реакций были рассчитаны в работе [50], причем использовались волновые функции ($n - {}^3\text{He}$)- и ($p - {}^3\text{H}$)-систем, вычисленные в работе [51]. Результаты расчетов приведены на рис. 11; I относится к реакции ${}^4\text{He}(\gamma, p){}^3\text{H}$, 2 — к реакции ${}^4\text{He}(\gamma, n){}^3\text{He}$. Согласие теории с экспериментом, как видим, оказалось достаточно хорошим.

Реакции $n(\alpha, \alpha)n$, $n(\alpha, T)D$, $D(T, T)D$ [40]. Взаимодействие между нуклонами было взято несколько отличным от использовавшегося при расчете ($n - {}^3\text{H}$)-рассеяния. Фактически исполь-

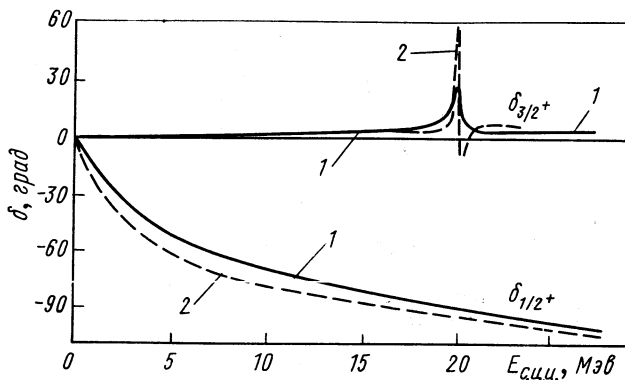


Рис. 12. Фазовые сдвиги δ_J для ($n - {}^4\text{He}$)-рассеяния:

1 — расчет; 2 — эксперимент; 2 для экспериментальной фазы $J = 3/2^+$ сдвинута к расчетному порогу образования $D^3\text{H}$

зовался метод резонирующих групп, так как в выражении для волновой функции (13) первый член Ψ_{int} полагался равным нулю. В рассматриваемом случае системы пяти нуклонов имеется два канала ($n + \alpha$) и ($D + T$). Разность масс этих каналов, вычисленная с помощью использовавшихся в расчете ННП и волновых функций частиц каналов (α , D , ${}^3\text{H}$) оказалась равной 20 Мэв (на эксперименте $17,6 \text{ Мэв}$). Рассчитывались фазы рассеяния в обоих каналах и сечение перехода из канала в канал. Согласие теории с экспериментом оказалось вполне удовлетворительным (рис. 12, 13). На рисунках показан ход рассчитанных (сплошные линии) значений фаз δ_J ($n - \alpha$)-рассеяния и соответствующих экспериментальных кривых (штриховые линии). Расчет воспроизводит резонанс p -фазы ($J = 3/2^-$), отождествляемый с основным состоянием квазистационарного ядра ${}^5\text{He}$ и резонанс d -фазы ($J = 3/2^+$), соответствующий хорошо известному «термоядерному» резонансу в сечении соударения $D + {}^3\text{H}$. Положение этих резонансов (относительно порогов ($n + \alpha$)- и ($D + {}^3\text{H}$)-каналов соот-

ветственно), и их ширины близки к экспериментальным значениям.

Важно отметить два обстоятельства:

1) резонанс с $J = 3/2^+$ в канале $D + {}^3\text{H}$ проявляется в частичном состоянии с $L = 0, S = 3/2$, а в канале $n + \alpha$ — в состоянии с $L = 2, S = 1/2$. Переход из канала в канал, таким

образом, может происходить только с изменением полного орбитального момента L и полного спина S системы пяти нуклонов. Такого типа переход может идти только за счет присутствия тензорных сил в ННП. Поэтому сравнение теории и эксперимента в области этого резонанса позволяет прямо получить дополнительную информацию о величине тензорной компоненты ННП. Для этого требуется проведение более тщательных расчетов;

2) в области энергий вблизи резонанса $J = 3/2^+$ оба канала сильно связаны (в частичном состоянии), и это вполне понятно. Но оказывается, что такую связь необходимо учитывать и при

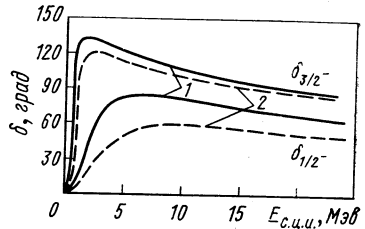


Рис 13. Фазовые сдвиги δ_J для $(n-{}^4\text{He})$ -рассеяния: 1 — расчет; 2 — эксперимент

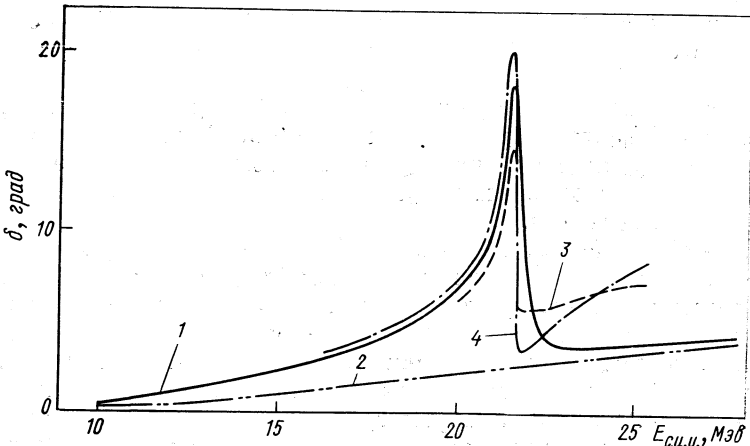


Рис. 14. Фаза упругого $(p-{}^4\text{He})$ -рассеяния с $L = 2, J = 3/2^+$: 1 — двухканальное приближение; 2 — одноканальное приближение; 3 и 4 — эксперимент; экспериментальные кривые сдвинуты к расчетному порогу

гораздо меньших энергиях. В работе [39], где в тех же предположениях, что и выше, были рассчитаны фазы $(p + \alpha)$ - и $(D + {}^3\text{He})$ -рассеяния (система, зеркальная рассматриваемой), результат

для фазы $(p + \alpha)$ -рассеяния ($L = 2, J = 3/2^+$) был сравнен с той же фазой, но вычисленной в одноканальном приближении, когда канал $D + {}^3\text{He}$ с самого начала не учитывался. Ход соответствующих кривых изображен на рис. 14 и видно, что учет второго канала существенно улучшает согласие теории с экспериментом в широкой области энергий ниже порога $(D - {}^3\text{He})$ -канала. В то же время, при более высоких энергиях влияние каналов друг на друга оказывается малым, и фазы $(D + {}^3\text{H})$ -рассеяния можно вычислять в одноканальном приближении.

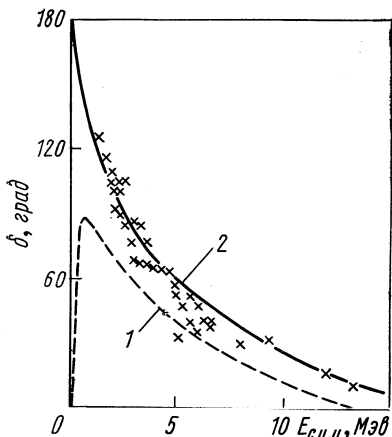


Рис. 15. Фаза упругого $(D - \alpha)$ -рассеяния с $L = 0$:

1 — без Ψ_{int} ; 2 — с учетом Ψ_{int}

$(D - \alpha)$ -Рассеяние [52]. Во взаимодействии между нуклонами пренебрегалось спин-орбитальными и тензорными компонентами, а центральная часть потенциала была взята из работы [53]. Никакие другие каналы кроме $D - \alpha$ в расчет не включались, но зато исследовалась чувствительность рассчитываемой s -фазы $(D - \alpha)$ -рассеяния к виду той части Ψ_{int} волновой функции Ψ , которая описывает поведение нуклонов внутри компаунд-ядра. Основные

результаты расчета изображены на рис. 15, где приведены фазы для случая $\Psi_{\text{int}} \equiv 0$ и для случая $\Psi_{\text{int}} \neq 0$. Видно, что введение в волновую функцию члена Ψ_{int} , описывающего поведение нуклонов на малых расстояниях, существенно улучшает согласие теории с экспериментом.

$(\alpha - \alpha)$ -Рассеяние. В работе [54] s -, d -, g -фазы рассеяния α на α рассчитывались в одноканальном ($\alpha + \alpha$) и двухканальном приближении метода резонирующих групп. В качестве второго канала брался канал $\alpha + \alpha^*$, в котором одна из α -частиц находится в возбужденном 0^+ -состоянии. Взаимодействие между нуклонами предполагалось центральным, учитывающим отталкивание на малых расстояниях. Параметры ННП были взяты из работы [48]. Рассчитанные значения фаз приведены на рис. 16. Согласие расчетов с экспериментом хорошее.

Выводы. Количество выполненных к настоящему времени работ, в которых амплитуды ядерных реакций получаются как результат решения многонуклонного уравнения Шредингера, еще не велико. Большинство из них было описано нами. Хотя материала для анализа пока еще мало, тем не менее можно сделать кое-какие предварительные выводы.

Количество выполненных к настоящему времени работ, в которых амплитуды ядерных реакций получаются как результат решения многонуклонного уравнения Шредингера, еще не велико. Большинство из них было описано нами. Хотя материала для анализа пока еще мало, тем не менее можно сделать кое-какие предварительные выводы.

1. Во всех описанных выше расчетах потенциал между нуклонами задавался в том или ином виде с самого начала и далее не варьировался. Использовалось несколько типов ННП, достаточно хорошо описывающих NN -рассеяние при малых энергиях. Во всех без исключения случаев наблюдались хорошее качественное согласие расчетов с экспериментом. По-видимому, это происходит потому, что в своих основных чертах волновая функция системы нуклонов так же, как и в случае связанных состояний,

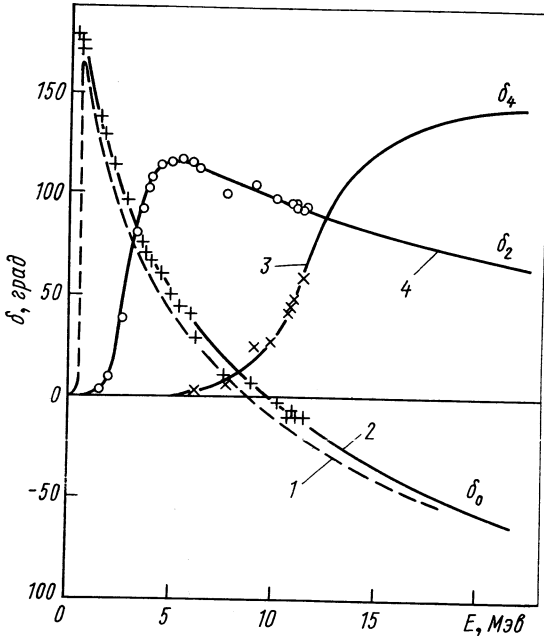


Рис. 16. Фазы δ_L упругого ($\alpha-\alpha$)-рассеяния: 1 — одноканальное приближение; 2, 3 и 4 — двухканальное приближение

сравнительно слабо зависит от характерного вида ННП, коль скоро последний согласуется с данными о NN -рассеянии. Конечно, этот вывод верен лишь до какой-то степени хотя бы потому, что амплитуды целого ряда процессов прямо зависят лишь от отдельных компонент ННП. Так, амплитуда реакции $n(\alpha, D)T$ в области резонанса с $J = 3/2^+$ зависит только от тензорной компоненты ННП, и ее нельзя вычислить, пренебрегая последней. Этот пример очень важен, так как он показывает, что имеются такие ядерные процессы, из которых можно прямо получить дополнительную информацию о различных компонентах ННП. Эта информация совершенно необходима для однозначного определения взаимодей-

ствия нерелятивистских нуклонов друг с другом. Источником информации могут служить сечения реакций $n(\alpha, D)T$, а также более тонкие детали реакций — такие, как поляризация.

2. Как уже отмечалось, взаимодействие между нуклонами входит в расчет волновой функции многонуклонной системы и разных амплитуд прямо и косвенно: прямо — через эффективное взаимодействие между частицами каналов; косвенно — через волновые функции частиц каналов и их энергии связи. Поэтому многие свойства ядерных сил можно учесть феноменологически, подставляя в уравнения экспериментальные значения масс частиц в каналах и используя при моделировании их внутренних волновых функций известные свойства частиц, такие, например, как их радиус.

Это обстоятельство весьма существенно. Дело в том, что система уравнений для нахождения волновой функции имеет особые точки, расположенные в порогах различных каналов. Поэтому, задавая положение порогов, мы тем самым задаем и правильное расположение особенностей в уравнениях, что предопределяет правильные аналитические свойства решений. Пользуясь только этими свойствами, можно получить целый ряд качественных физических результатов (характер пороговых особенностей, расположение возможных пороговых состояний и т. п.). Кроме того, правильная аналитика иногда важна и для нахождения правильных количественных результатов. Примером является d -фаза рассеяния $p - {}^4\text{He}$ (см. рис. 14).

3. Введение в волновую функцию многонуклонной системы специальных членов Ψ_{int} имеет прозрачный физический смысл. Эти члены описывают образование компаунд-ядра при соударении частиц, т. е. такую стадию процесса, когда все нуклоны близки друг к другу. С чисто формальной точки зрения введение членов Ψ_{int} обязательно. Известно, что в некоторых случаях хорошо работает метод резонирующих групп (в этом методе $\Psi_{\text{int}} \equiv 0$). Например, при $\alpha\alpha$ -рассеянии учет Ψ_{int} необходим только, начиная с энергии сталкивающихся α -частиц с энергией около 15 Мэв .

С точки зрения физики ничего удивительного здесь нет: экспериментально известно, что наряду с процессами, идущими через компаунд-ядро, существует множество так называемых «прямых процессов», когда реакция происходит «в одно касание» без образования компаунд-ядра. А как можно объяснить все это с формальной точки зрения? Исчерпывающее объяснение вряд ли существует, так как можно придумать несколько причин, по которым компаунд-ядро образуется с малой вероятностью в том или ином процессе. Одной из причин, например, может являться близость нуклонных структур в начальном и конечном состояниях. Очень

важное значение, как оказалось, приобретает принцип Паули. Требование антисимметрии волновой функции очень жесткое, если все нуклоны системы находятся близко друг к другу. Оказываются разрешенными лишь некоторые конфигурации нуклонов, и при не слишком больших энергиях и орбитальных моментах сталкивающихся частиц им, как правило, трудно проникнуть друг в друга. Возникает эффективное отталкивание между частицами канала [56], из-за которого образование компаунд-ядра становится затруднительным. Именно это и происходило в большинстве описанных выше случаев, когда хорошо «работал» метод резонирующих групп. Затрудненность образования компаунд-ядра означает, что соответствующая часть волновой функции Ψ_{int} мала, и всю функцию можно достаточно хорошо описать только своей «внешней» Ψ_{ext} частью. А это и есть основное предположение метода резонирующих групп.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре мы говорили о проблеме ННП, о методах расчета многонуклонных систем, о сравнении результатов расчетов с опытом, о значении принципа Паули и т. д. Такая многоплановость является непосредственным следствием сложности и многогранности основного вопроса о том, возможна ли безмодельная ядерная физика, достаточно хорошо согласующаяся с экспериментом, нерелятивистская теория ядра, целиком базирующаяся на уравнении Шредингера с «пустотным» взаимодействием между нуклонами. О точности такого подхода к теории ядра в настоящее время можно судить, только приняв в качестве рабочей гипотезы, что такая безмодельная теория возможна, и сравнивая следствие этой гипотезы с экспериментом. Полученные в гл. 2 и 3 данные показывают, что выполненные к настоящему времени расчеты не противоречат этой гипотезе.

Общие выводы можно сформулировать в следующем виде:

1. Само появление значительного числа работ, в которых с достаточно хорошей точностью решается многонуклонное уравнение Шредингера для систем 3, 4, 5, 6, 8 нуклонов, говорит о том, что технические трудности решения задачи нескольких тел с сильным взаимодействием не являются более непреодолимыми. Пока, правда, расчеты выполнены для легчайших ядер и простейших ядерных реакций.

2. Наибольшее количество работ посвящено расчету свойств ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. Во всех случаях, когда вычисления проводились для реалистических потенциалов сложной структуры, получены вполне удовлетворительные результаты. Волновая функция и энергия связи оказались слабо зависящими от конкретного вида ННП. Приведенные в гл. 2 оценки показывают, что точность

вычисления волновой функции составляет несколько процентов, и это несмотря на то, что пока не известен точный вид ННП. Хотя свойства ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ слабо зависят от вида ННП, расчеты позволяют получить дополнительную информацию об ННП. В частности, они определенно указывают на наличие зарядо-неинвариантных членов в ядерных силах. В то же время некоторые данные, например поведение форм-фактора при больших q^2 , нельзя объяснить в рамках потенциального подхода.

3. Проведено довольно много расчетов амплитуд простейших ядерных реакций. Несколько неожиданно оказалось, что это более простое дело, чем вычисление энергий связи ядер (последняя является малой разностью двух больших величин). Во всех без исключения случаях расчета реакций получено очень хорошее качественное согласие с данными эксперимента, хотя никаких подгоночных параметров расчетная процедура не содержит. Эти результаты пока следует рассматривать как предварительные, так как только в нескольких случаях, и то неполностью, была исследована устойчивость вычислительной процедуры относительно расширения базиса функций, на котором ищется решение много-тельного уравнения Шредингера. Выяснилось огромное значение, которое приобретает принцип Паули в кинематике и динамике ядерных реакций.

4. Сопоставление результатов различных работ, упоминавшихся в гл. 2 и 3, показывает, что наряду с многими ядерно-физическими величинами, слабо зависящими от конкретного вида ННП [например, волновая функция ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, s -фазы ($n - T$)-рассеяния и т. д.], имеется целый ряд величин и процессов, которые чувствительны к виду ННП (например, сечение реакции $p(\alpha, D){}^3\text{He}$, спектры уровней ядер и т. п.). Это позволяет получить дополнительную информацию об ННП. В настоящее время встает вопрос об однозначном определении нуклон-нуклонных потенциалов из всей совокупности ядерно-физических данных.

5. Хорошее качественное согласие результатов расчетов с экспериментом, получаемое в опубликованных до настоящего времени работах, не позволяет сейчас сделать какого-либо выбора между различными наборами ННП (в значительной мере это связано с тем, что эта задача об однозначном определении ННП пока по-прежнему не ставилась). Тем более, нет никаких указаний на то, что использование реалистических ННП приводит к каким-либо серьезным противоречиям при вычислении ядерно-физических величин. Это означает, что пока не найдено противоречий в основной гипотезе — гипотезе о том, что возможна «безмодельная ядерная физика», основанная на нерелятивистском многонуклонном уравнении Шредингера с «пустотным» взаимодействием между нуклонами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Опишем здесь кратко основные методы решения задачи на связанное состояние трех (и четырех) нуклонов. Поскольку методу уравнений Фаддеева посвящена довольно обширная литература, его описывать не будем, а сошлемся лишь, например, на работы [4, 64].

Метод осцилляторного базиса (МОБ). Волновая функция системы трех частиц как функция переменных ξ_1, ξ_2

$$\xi_1 = (r_1 - r_2) / \sqrt{2}; \quad \xi_2 = (r_1 + r_2 - 2r_3) / \sqrt{6} \quad (\text{П.1})$$

представляется в виде разложения по полному осцилляторному базису для каждой переменной ξ_1 и ξ_2 :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_i C_i \Phi_i \equiv \\ &= \sum_{n_1 l_1 n_2 l_2} \sum_{LS\alpha} C_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{LS\alpha} |n_1 l_1, n_2 l_2; LSJ, \alpha\rangle, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где L, S, J — полные орбитальный угловой, спиновый и угловой моменты системы; α — другие квантовые числа, которые характеризуют состояния; $|n_i l_i\rangle$ обозначены функции гармонического осциллятора для переменной ξ_i (n_i — главное квантовое число, l_i — орбитальный момент) [19].

Ограничиваясь в сумме по i в (П.2) некоторым конечным числом членов, подставляя волновую функцию (П.2) в уравнение Шредингера

$$(H - E)\Psi = (\hat{T} + \hat{V} - E)\Psi = 0,$$

умножая слева на базисные функции Φ_i и интегрируя (суммируя) по всем переменным, задачу сводим к решению секулярного уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i_{\text{макс}}} \{ \langle i | T + V | j \rangle - E \delta_{ij} \} C_j = 0, \quad (\text{П.3}) \\ i = 1, 2, \dots, i_{\text{макс}}, \end{aligned}$$

т. е. к решению системы линейных алгебраических уравнений на собственные функции и собственные значения.

Метод осцилляторного базиса привлекателен тем, что в нем особенно просто вычисляются матричные элементы от потенциалов парного взаимодействия: все сводится к одномерным интегралам, которые довольно просто запрограммировать для вычисления их на ЭВМ. Недосток этого метода состоит в том, что фиксированная форма базисных функций требует большого их количества для получения сходящихся результатов в случае реалистических потенциалов (порядка 400—500 см [19]). Это связано с тем, что базисные функции плохо описывают поведение волновой функции при $|\xi_i| \rightarrow 0, \infty$.

Базис (П.2) использовали Джексон и др. [19] для расчета свойств ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ с потенциалом RSC. Нанберг и др. [19а] применили несколько видоизмененный набор осцилляторных функций, с которыми они проводили исследование потенциала Рихимики и некоторых других потенциалов.

Метод гиперсферических функций (МГФ) для А-3; 4. В основе МГФ лежит разложение волновой функции

$$\Psi = \rho_1^{-3(A-4)/2} \sum_{K, \alpha} \chi_{K\alpha}(\rho) \Gamma_{K\alpha}(\Omega_n, \{\sigma_i, \tau_i\}), \quad (\text{П.4})$$

где n — число переменных в с.д.и, $n = 3A - 3$; A — число частиц; ρ — гипер-

радиус $\rho^2 = \sum_{i=1}^{A-1} \xi_i^2$, $\{\xi_i\}$ — обычным образом определяемые координаты

Якоби; $\Gamma_{K\alpha}(\Omega_n, \{\sigma_i, \tau_i\})$ — полностью антисимметричные по перестановкам частиц базисные функции, зависящие от углов Ω_n на гиперсфере $\rho = \text{const}$ и спин-изоспиновых переменных $\{\sigma_i, \tau_i\}$; K — глобальное квантовое число; для состояний с положительной четностью $K = K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}} + 2, K_{\text{мин}} + 4, \dots$; $K_{\text{мин}} = 0$ для $A = 3; 4$; для состояний с отрицательной четностью K пробегает ряд по нечетным положительным числам; α — остальные квантовые числа, куда входят полные угловой момент J и его проекция M , орбитальный и спиновый моменты L и S , изоспин T и его проекция M_T и т. д.

Для парциальных волн $\chi_{K\alpha}(\rho)$ получается система уравнений

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\kappa_K(\kappa_K + 1)}{\rho^2} \right] - E \right\} \chi_{K\alpha} + \sum_{K'\alpha'} W_{K\alpha}^{K'\alpha'}(\rho) \chi_{K'\alpha'}(\rho) = 0; \quad (\text{П.5})$$

$$W_{K\alpha}^{K'\alpha'} = \sum_{\{\sigma_i, \tau_i\}} (\Gamma_{K\alpha}, \hat{V} \Gamma_{K'\alpha'}), \quad (\text{П.6})$$

где (...) означает интегрирование по угловым переменным Ω_n ; \hat{V} — оператор взаимодействия A частиц; E — энергия системы в с. ц. и;

$$\kappa_K = K + (3A - 6)/2. \quad (\text{П.7})$$

Базисные функции $\Gamma_{K\alpha}$, антисимметричные по перестановкам любой пары частиц, образуются перемножением угловых функций $U_{K\alpha}^Y(\Omega_n)$ и спин-изоспиновых функций $\chi_{SM_S TM_T}^\gamma$ (см., например, работу [65]); здесь γ обозначает тип симметрии. Функции $U_{K\alpha}^Y(\Omega_n)$ называются гиперсферическими функциями или K -гармониками. Они образуют полную систему угловых функций.

Например, для задачи трех тел имеются такие $\Gamma_{K\alpha}^Y$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{K\alpha}^{(s)} &= [U_{KLM_L}^s X_{SM_S TM_T}^a]_{JM}; \\ \Gamma_{K\alpha}^{(a)} &= [U_{KLM_L}^a X_{SM_S TM_T}^s]_{JM}; \\ \Gamma_{K\alpha}^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [U_{KLM_L}'' X_{SM_S TM_T}' - U_{KLM_L}' X_{SM_S TM_T}'']_{JM}, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где [...]JM означает объединение L и S в полный угловой момент J с проекцией M с помощью коэффициентов Клебша — Гордана; s — симметричной; a — антисимметричной; m (" , ') — смешанной симметрии. У базисных функций $\Gamma_{K\alpha}$ для определенности поставим тип симметрии угловой функции. Подобные же функции $\Gamma_{K\alpha}^Y$ можно написать и для $A = 4$ (см. например, работы [62, 65]).

Функций $U_{KLM_L}^Y$ с заданными квантовыми числами KLM_L и типом симметрии γ несколько, они различаются индексом i :

$$U_{KLM_L}^Y; i(\Omega_n) \quad (\text{П.9})$$

(индекс L у M_L опускаем).

Для достижения полной сходимости обычно требуется учитывать в сумме (П.4) все K вплоть до 20—30 (см., например, работу [32]). Число функций $U_{KLM}; i$ с увеличением K растет линейно для $A = 3$ и пропорционально K^4 (!) для $A = 4$. Например, для $K = 14$ число гиперсферических функций с $L = 2$ (для основного состояния ${}^3\text{H}$, ${}^3,4\text{He}$ они могут быть только смешанной симметрией) равно 7 для $A = 3$ и порядка 100 (!) для $A = 4$.

Однако, как было показано Эфросом [62], гиперсферические функции $U_{KLM}; i$ с заданными квантовыми числами γ, KLM , но разными i , можно построить и упорядочить таким образом, что их вклад в волновую функцию связанного состояния системы с $A = 3; 4$ будет резко падать с возрастанием их номера, так что подавляющая их часть будет давать пренебрежимо малый вклад в задачу. Назовем этот базис физическим. Первые номера в нем имеют так называемые «потенциальные» гиперсферические функции, на выделенность которых впервые указал Фабр [63], — это такие $U_{K\alpha}$, для которых $W_{K\alpha}^{00}(\rho) \neq 0$ [см. формулу (П.6)]. Гиперсферические функции $U_{K\alpha}$, для которых $W_{K\alpha}^{00} \equiv 0$, получили название «непотенциальных».

Преобладающая роль потенциальных гиперсферических функций связана с тем обстоятельством, что волновая функция в МГФ на $\geq 90\%$ по норме состоит из основной гиперсферической функции ($K = 0$). Это свойство, как следует из всех известных до настоящего времени расчетов для $A = 3; 4$ сохраняется для любых NN -потенциалов. Остальные десять или меньше процентов распределяются среди гиперсферических функций с $K \neq 0$, причем основной вклад в эти 10% дают гиперсферические функции с $K = 2; 4$.

Для заданного $K \geq 4$ имеются всего три потенциальные гиперсферические функции (для $A = 3; 4$) — одна симметричная ($L = 0$) и две смешанной симметрии ($L = 0, 2$). Вклад непотенциальных гиперсферических функций в волновую $A = 3$ составляет $\sim 0,1\%$ (по вкладу в нормировочный интеграл) [21, 32], причем этот вклад определяется только 1—3 непотенциальными (для заданного K) гармониками, следующими за потенциальными. Чтобы достичь точности в энергии связи не хуже $0,01 \text{ Мэв}$, достаточно учесть только эти непотенциальные гармоники, причем не поднимаясь выше $K \approx 12$ ($A = 3$).

Ниже опишем особенности построения физического базиса гиперсферических функций для $A = 3$. Удобными исходными функциями для его построения являются функции с определенными орбитальными моментами по переменным ξ_1 и ξ_2 :

$$U_{KLM}^{L_1L_2}(\Omega_6) = N_K^{L_1L_2} Y_{LM}^{L_1L_2}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) (\sin \theta)^{L_1} (\cos \theta)^{L_2} \times \\ \times P_{(K-L_1-L_2)/2}^{L_1+1/2, L_2+1/2}(\cos 2\theta), \quad (\text{П.10})$$

где $N_K^{L_1L_2}$ — нормировочный множитель

$$N_K^{L_1L_2} = \left[\frac{(2K+4) \Gamma\left(\frac{K+L_1+L_2}{2} + 2\right) \left(\frac{K-L_1-L_2}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{K+L_1-L_2}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{K+L_2-L_1}{2} + \frac{3}{2}\right)} \right]^{1/2}; \quad (\text{П.11})$$

$$Y_{LM}^{L_1L_2} = \sum_{M_1+M_2=M} (L_1M_1L_2M_2 | LM) Y_{L_1M_1}(\hat{\xi}_1) Y_{L_2M_2}(\hat{\xi}_2), \quad (\text{П.12})$$

здесь (... | ...) — коэффициенты Клебша — Гордана; Y_{lm} — сферические функции; $P_n^{a,b}$ — полиномы Якоби. Гиперсферические функции $U_{KLM}; i$

с заданной симметрией образуются из функций $U_{KLM}^{L_1 L_2}$ как некоторые их линейные комбинации:

$$U_{KLM}^y; i = \sum_{L_1 L_2} C_{KL; i}^y(L_1, L_2) U_{KLM}^{L_1 L_2}. \quad (\text{П.13})$$

Суммирование в (П.13) ведется по четным L_1, L_2 для симметричных функций и функций смешанной симметрии U'' и по нечетным L_1, L_2 для антисимметричных функций и функций смешанной симметрии U' . Кроме того, $L_1 + L_2 \leq K$ и $(L_1 L_2 L)$ удовлетворяют правилу треугольника. Коэффициенты $C_{K\alpha}$, реализующие физический базис, строятся проектированием функций $U_{KLM}^{L_1 L_2}$ с низшими L_1, L_2 на пространство функций с заданной симметрией.

Например,

$$U_{KLM(L_1 L_2)}^s = P_r^s [U_{KLM}^{L_1 L_2}] = \sum_{L_1' L_2'} C_{KL(L_1 L_2)}^s(L_1' L_2') U_{KLM}^{L_1' L_2'}. \quad (\text{П.14})$$

Для таких функций $L \leq 1$, поэтому $L_2 = L_1$ (и оба четные). Если строить и ортонормировать последовательно функции с $L_1 L_2 = (00), (22), (44)$ и т. д., то окажется, что в гиперсферическую функцию $U_{K00(00)}^s$ (она и есть потенциальная гиперсферическая функция) войдут $L_1' L_2' = (00), (22), (44)$ и т. д., в функцию $U_{K00(22)}^s$ войдут $L_1' L_2' = (22), (44)$ и т. д., в функцию $U_{K00(44)}^s$ — $L_1' L_2' = (44)$ и т. д. Для гиперсферической функции $U_{K1M}^s(L_1 L_2)$ возможны только $L_1 L_2 \geq 2$, поэтому среди них нет потенциальных.

В силу антисимметрии функций $\chi_{K\alpha}$ вычисление матричных элементов от $\hat{V} = \sum_{i < j} \hat{V}_{ij}$ в (П.6) можно свести к матричному элементу от $\hat{V}_{12} = \hat{V}_{12}(\xi_1)$.

Как хорошо известно, двухнуклонное взаимодействие в ядерной физике существенно только в состояниях пар частиц с низшими L_1 , вклад остальных L_1 экспоненциально мал. По этой причине происходит резкое убывание вклада гиперсферической функции с возрастанием $L_1 L_2$: $U_{K00(00)}^s, U_{K00(22)}^s, U_{K00(44)}^s$ и т. д., причем настолько резкое, что уже вкладом функции $U_{K00(44)}^s$ можно пренебречь (это непосредственно продемонстрировано расчетом [21]), а функция $U_{K00(22)}^s$ лежит на границе точности ($\Delta E \approx 0,01 \text{ МэВ}$). Может возникнуть аналогичная ситуация с гиперсферической функцией другого типа симметрии и (или) другими L . Подробности о технике построения физического базиса для $A = 3$ можно найти в работах [62, 66].

Для решения системы уравнений (П.5) применяются два различных метода: 1) прямое численное решение системы дифференциальных уравнений оно применялось в первых расчетах по МГФ (см., например, работу [8]) и в работах [67]; 2) разложение функций $\chi_{K\alpha}(\rho)$ по некоторому полному набору гиперрадиальных функций на отрезке $(0, \infty)$:

$$\chi_{K\alpha}(\rho) = \sum_n C_n^{K\alpha} R_n(\rho), \quad (\text{П.15})$$

где

$$R_n(\rho) = N (B\rho)^{s/2} \exp(-B\rho/2) L_n^s(B\rho) \quad (\text{П.16})$$

(см. работы [32, 68]); L_n^s — полином Лагерра; N — нормировочный коэффициент; B и s — некоторые параметры, которые подбираются таким образом, чтобы улучшить сходимость по n . Подставляя разложение (П.15) в уравне-

ние (П.5) и ограничиваясь конечным числом членов в (П.15) и (П.4), сводим задачу к решению секулярного уравнения типа (П.3).

Как следует из расчетов [21, 32], полное количество базисных функций (гиперсферические плюс гиперрадиальные) для реалистических потенциалов, требуемое для достижения практической сходимости, равно 200—250 (ср. с 400—500 для МОБ).

Вариационный метод (ВМ). Это один из давних испытанных методов атомной и ядерной физики, с успехом применявшийся в течение ряда последних лет к ядерной задаче трех тел. Большой вклад в данном направлении сделали Делвз с сотр. [25—27], поэтому при описании ВМ будем следовать их работам.

В ВМ выбирают следующую систему координат: $X_i = |r_j - r_k|$; $i, j, k = 123, 231, 312$ и три угла Эйлера (α, β, γ) , определяющих ориентацию треугольника (X_1, X_2, X_3) в пространстве. Полная волновая функция системы трех нуклонов записывается в виде суммы

$$\Psi_{JM}^T = \sum_{\alpha} \mathcal{Y}_{JL\alpha}(\alpha, \beta, \gamma, \{\sigma^{(i)}\}, \{\tau^{(i)}\}) R_{\alpha}(X_1, X_2, X_3), \quad (\text{П.17})$$

где JM — полный угловой момент и его проекция; T — изотоп-спин; $\{\sigma^{(i)}\} \{\tau^{(i)}\}$ — совокупность спин-изоспиновых переменных; α — остальные квантовые числа, куда входят L, S , тип симметрии и др. Функция $\mathcal{Y}_{JL\alpha}$ имеет заданный вид, а функция R_{α} считается неизвестной. Она выбирается в форме

$$R_{\alpha}(X_1, X_2, X_3) = \sum_{m_1+m_2+m_3 \leq Q_{\alpha}} C_{\alpha}^{m_1 m_2 m_3} h_{\alpha}^{m_1 m_2 m_3}(X_1, X_2, X_3), \quad (\text{П.18})$$

где $\{m_i\}$ — целые неотрицательные числа; $h_{\alpha}^{m_1 m_2 m_3}(X_1, X_2, X_3)$ — соответствующим образом симметризованная функция, которая, например, в работе Хамберстона и Хеннелла [27] при расчете свойств трития с потенциалом НД выбиралась в форме

$$\begin{cases} X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3} \prod_{i=1}^3 \exp(-\beta X_i) (1 - r_c/X_i)^p, & X \geq r_c; \\ 0, & X < r_c. \end{cases} \quad (\text{П.19})$$

здесь β и p — нелинейные параметры; r_c — радиус твердого ядра; Q_{α} — число включаемых базисных функций. Задача предварительно решается вариацией по нелинейным параметрам с неполным набором линейных параметров. Затем найденные таким образом нелинейные параметры фиксируются и производится вариация по всему набору линейных параметров $\{C_{\alpha}^{m_1 m_2 m_3}\}$.

Достоинство прямого ВМ состоит в том, что в его рамках довольно легко правильно описывать асимптотическое поведение волновых функций и сильные парные корреляции на малых расстояниях. К настоящему времени только этим методом получены удовлетворительные результаты для потенциалов с твердым ядром.

К его недостаткам следует отнести необходимость вычисления трехкратных интегралов и использования неортогонального базиса, что усложняет вычисление и оценку погрешностей. Переход к задаче четырех тел в этом методе чрезвычайно сложен, и пока никто не попытался этого сделать.

Недавно Акайши и др. [29] предложили упрощенный вариант ВМ, который они назвали обобщенным вариационным методом. В нем соединены идеи вариационного метода и теории матрицы реакции. Преимущество этого метода — возможность применения к задачам с $A > 3$. Недостаток — приближенность и невозможность оценить погрешности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Опишем здесь вариационный принцип Хюльтена — Кона для многоканальных двухфрагментных ядерных реакций. Далее остановимся на вариационных подходах, базирующихся на методе гиперсферических функций и на методе резонирующих групп.

Если открыты только двухфрагментные каналы, то точная волновая функция системы из A нуклонов (Ψ) при полной энергии $E < 0$ имеет достаточно простую структуру. Ψ -функция переходит в функцию свободного движения кластеров вне области порядка радиуса действия ядерных сил, т. е. во внешней области конфигурационного пространства. Внутри этой области друг с другом взаимодействуют все нуклоны и структура Ψ -функции непрерывного спектра близка к структуре волновой функции компактного связанного состояния системы нуклонов.

В соответствии со сказанным выше Ψ -функцию представим в виде

$$\Psi = \Psi_{\text{int}} + \Psi_{\text{ext}}. \quad (\text{П.20})$$

Определение Ψ_{int} и Ψ_{ext} смотри выше. Следует особо отметить, что в (П.20) не производится явной сшивки Ψ_{int} и Ψ_{ext} на какой-либо границе в конфигурационном пространстве.

Пусть Ψ_i^{exact} — точные решения уравнения Шредингера, задаваемые в канале с номером n^* асимптотиками:

$$\Psi_i^{\text{exact}} \xrightarrow{R_n \rightarrow \infty} \hat{A} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_n}{\hbar^2 k_n}} [\delta_{ni} \sin(k_n R_n - L\pi/2) + f_{ni}^{\text{exact}} \cos(k_n R_n - L\pi/2)] \varphi_n \right\}, \quad (\text{П.21})$$

где \hat{A} — оператор антисимметризации; δ_{ni} — символ Кронекера; R_n — расстояние между центрами инерции пары фрагментов канала n ; k_n — волновое число канала; φ_n — поверхностные функции с заданным полным моментом, орбитальным моментом L и спином канала, которые определены в работе [57, гл. III, формула (2.25)]; μ_n — приведенная масса канала; f_{ni}^{exact} — матричный элемент обобщенной матрицы столкновений (или K -матрицы). Выражение (П.21) написано для случая отсутствия кулоновского взаимодействия в канале n ; при наличии последнего к аргументам \sin и \cos необходимо добавить кулоновскую фазу.

Пусть найдены некоторые пробные Ψ_i , являющиеся приближениями к Ψ_i^{exact} и имеющие те же асимптотики (П.21), но с приближенными f_{ni} . Образум функционалы Хюльтена — Кона:

$$\Gamma_{ji}(\Psi_j, \Psi_i) = f_{ji} + I(\Psi_j, \Psi_i), \quad (\text{П.22})$$

где

$$I(\varphi, \Psi) = 2 \int d\tau (\varphi, [\hat{H} - E] \Psi). \quad (\text{П.23})$$

* Номер n обозначает вид фрагментов и все квантовые числа канала (спин канала, орбитальный момент, полный момент). Состояния, отличающиеся квантовыми числами, образуют различные каналы. Все же состояния, отличающиеся только перестановкой частиц между кластерами, считаем принадлежащими одному каналу

Варьируя (П.22) на $\Psi_i^{\text{exact}}, \Psi_j^{\text{exact}}$, получаем соотношения:

$$\Delta \Gamma_{ji} = \delta f_{ji} + I(\Psi_j^{\text{exact}}, \delta \Psi_i) + I(\delta \Psi_j, \delta \Psi_i); \quad (\text{П.24})$$

$$\delta f_{ji} + I(\Psi_j^{\text{exact}}, \delta \Psi_i) = 0, \quad (\text{П.25})$$

где $\delta \Psi_\Lambda = \Psi_\Lambda - \Psi_\Lambda^{\text{exact}}$, т. е. мы пришли к тождествам Като для величин (П.22)

$$\Gamma_{ji} - f_{ji}^{\text{exact}} = I(\delta \Psi_j, \delta \Psi_i). \quad (\text{П.26})$$

Эта функция показывает, что величины Γ_{ji} (П.22) стационарны по отношению к малым отклонениям от истинных Ψ -функций. Поэтому Γ_{ji} являются лучшими приближениями к f_{ji}^{exact} , чем первоначальные f_{ji} , и последние члены в (П.22) называются вариационными поправками к f_{ji} .

Приближенная \hat{S} -матрица выражается через матрицу $\hat{\Gamma}$ согласно равенству

$$\hat{S} = (1 + i\hat{\Gamma})(1 - i\hat{\Gamma})^{-1}. \quad (\text{П.27})$$

Точная \hat{S} -матрица выражается аналогичной формулой f_{ji}^{exact} . Из унитарности и симметрии точной \hat{S} -матрицы следует симметрия $f_{ji}^{\text{exact}} = f_{ij}^{\text{exact}}$. Приближенные амплитуды f_{ji} , содержащиеся в пробных функциях Ψ_i , получаются несимметричными. Однако при их уточнении по формулам (П.22) одновременно со стационарностью достигается симметрия

$$\Gamma_{ji}(\Psi_j, \Psi_i) = \Gamma_{ij}(\Psi_i, \Psi_j). \quad (\text{П.28})$$

Это эквивалентно утверждению, что для приближенной \hat{S} -матрицы (П.27) условия унитарности выполняются точно.

Для доказательства (П.28) следует только отметить, что оператор $(\hat{H} - E)$ является эрмитовым в классе функций $\delta \Psi_j$ (имеющих в асимптотике каждого канала только члены типа \cos), поэтому

$$I(\delta \Psi_i, \delta \Psi_j) = I(\delta \Psi_j, \delta \Psi_i), \quad (\text{П.29})$$

что вместе с условиями симметрии f_{ji}^{exact} приводит к (П.28).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Метод гиперсферических функций или метод K -гармоник, который в настоящей работе применялся для расчета свойств связанных состояний, оказывается весьма удобным и для расчета волновых функций непрерывного спектра, исходя из вариационного принципа. Если в волновой функции непрерывного спектра выделить в явном виде асимптотические (неубывающие) члены (Ψ_{ext}), то остальную часть Ψ -функции (Ψ_{int}) можно разложить в быстро сходящийся ряд по угловым гармоникам. Такой метод был разработан в работах [42, 43] и применялся для расчета упругого рассеяния нейтронов на ядрах D , ^3H , ^4He [36—38]. Приведем основные формулы этого подхода.

Пусть при данной энергии E открыто N двухфрагментных каналов. N линейно независимых решений уравнения Шредингера будем искать в следующем виде:

$$\Psi_i = \sum_{\substack{K < K_0 \\ \alpha < \alpha_0}} \chi_{K\alpha}(\rho) \Gamma_{K\alpha}(\Omega) + \hat{A}[\Phi_i^{(1)}] + \sum_{j=1}^N f_{ji}(\rho) \hat{A}[\Phi_j^{(2)}], \quad (\text{П.30})$$

где $\Gamma_{K\alpha}(\Omega)$ — гиперсферическая гармоника степени K ; ρ — переменная метода K -гармоник; $\Phi_j^{(1), (2)} = U_{Lj}^{(1), (2)}(R_j) \cdot \Phi_{nj}$, где Φ_n определены в (П.21). Функции $U_L^{(1), (2)}(R)$ нормированы следующим условием (при отсутствии кулоновского взаимодействия):

$$\left. \begin{aligned} U_{Ln}^{(1), (2)} \xrightarrow{R_n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu_n}{\hbar^2 k_n}} \left(\frac{\sin}{\cos} \right) (k_n R_n - L\pi/2); \\ U_{Ln}^{(1), (2)} \sim R_n^{L+1}, \text{ при } R_n \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.31})$$

Такие функции можно строить различными способами. Один из способов заключается в том, что в качестве функций $U^{(1), (2)}$ берутся регулярная и нерегулярная в нуле цилиндрические функции (или кулоновские функции) и нерегулярная в нуле функция регуляризуется с помощью множителя $T_L(R)$, который содержит некоторые параметры и обладает свойствами $T_L(R) \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$ и $T_L(R) \sim R^{2L+1}$ при $R \rightarrow 0$. Этот множитель, например, в работах [49—51] выбирается в виде

$$T_L(R) = 1 - \left(\sum_{\nu=0}^{2L} \frac{(\beta R)^\nu}{\nu!} \right) \exp[-\beta R]. \quad (\text{П.32})$$

Другой способ, предложенный в работе [43], предлагает генерировать с $U_L^{(1), (2)}$ свойствами, как решения уравнения

$$\left[-\frac{d^2}{dR^2} + \frac{L(L+1)}{R^2} + \beta_n^{(1), (2)} \bar{V}_n(R) - k_n^2 \right] U_{Ln}^{(1), (2)}(R) = 0.$$

Здесь \bar{V} — короткодействующий эффективный потенциал. Изменяя константу $\beta^{(1), (2)}$ получаем оба решения (П.31) *. При таком определении U имеем очень простое выражение для действия оператора $(\hat{H} - E)$ на $\Phi^{(1), (2)}$:

$$(\hat{H} - E) \Phi^{(1), (2)} = \left[\hat{V}_{n; p, g} - \frac{\hbar^2}{2\mu_n} \beta_n^{(1), (2)} \bar{V}_n \right] \Phi^{(1), (2)}, \quad (\text{П.33})$$

где $\hat{V}_{n; p, g}$ — входящее в \hat{H} -взаимодействие между определенными фрагментами p и g , содержащимися в Φ_n ; μ_n — приведенная масса в канале n .

Искомые величинами в волновой функции Ψ_i (П.30) являются $\chi_{K\alpha}(\rho)$ и амплитудные функции $f_{ji}(\rho)$. Функция $\chi_{K\alpha}(\rho)$ затухает за пределами внутренней области, а $f_{ji}(\rho)$ описывает образование в реакции фрагментов определенного вида и выходят на константы $f_{ji}(\infty) = f_{ji}$ — амплитуды реакции. Заметим, что в большинстве работ f_{ji} берутся просто константами, тогда как введение переменной ρ не усложняет существенно получающиеся уравнения, так как ρ симметрична относительно перестановки нуклонов и поэтому выносится из-под оператора \hat{A} , но делает пробную функцию Ψ_i (П.30) более гибкой.

Уравнения для определения неизвестных величин $\chi_{K\alpha}$ и f_{ji} получаем из требования стационарности функционала Γ_{ji} (П.22) на классе функций Ψ_i

* В подходах, когда амплитудная функция $f_{ji}(\rho)$ зависит от переменной ρ , возможны и другие выборы функций U (см., например, работу [58]).

(П.30), это равносильно требованию $I(\delta\Psi_j, \Psi_i)$ для всех i, j или в явном виде получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\Gamma_{K\alpha}, [\hat{H} - E] \Psi_i) &= 0, & K \leq K_0, \alpha \leq \alpha_0; \\ (\Phi_j^{(2)}, [\hat{H} - E] \Psi_i) &= 0, & j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.34})$$

Под (...) подразумеваем интегрирование по угловым переменным Ω на гиперсфере и суммирование по спин-изоспиновым переменным.

Выпишем систему (П.34) более подробно:

$$\left. \begin{aligned} & \hat{L}_{K, \rho} \chi_{K\alpha}(\rho) + \sum_{p=1}^N \left[(\Gamma_{K\alpha}, \Phi_p^{(2)}) \hat{L}_\rho f_{pi}(\rho) + \right. \\ & + 2 (\Gamma_{K\alpha}, \Phi_p^{(2)'}) \frac{df_{pi}(\rho)}{d\rho} - \frac{2m}{\hbar^2} (\Gamma_{K\alpha}, [\hat{H} - E] \Phi_p^{(2)}) f_{pi}(\rho) \left. \right] - \\ & - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K' \leq K_0, \alpha} (\Gamma_{K\alpha} \hat{V} \Gamma_{K'\alpha'}) \chi_{K'\alpha'}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} (\Gamma_{K\alpha}, [\hat{H} - E] \Phi_i^{(1)}); \\ & \sum_{K' \leq K_0, \alpha} \left[(\Gamma_{K'\alpha'} \Phi_j^{(2)}) \hat{L}_{K', \rho} \chi_{K'\alpha'}(\rho) + \sum_{p=1}^N [(\Phi_j^{(2)} \hat{A} \Phi_p^{(2)}) \hat{L}_\rho f_{pi}(\rho) + \right. \\ & + 2 (\Phi_j^{(2)} \hat{A} \Phi_p^{(2)'}) \frac{df_{pi}}{d\rho} - \frac{2m}{\hbar^2} (\Phi_j^{(2)}, \hat{A} [\hat{H} - E] \Phi_p^{(2)}) f_{pi}(\rho) \left. \right] - \\ & - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{K' \leq K_0 \alpha} (\Phi_j^{(2)} \hat{V} \Gamma_{K'\alpha'}) \chi_{K'\alpha'}(\rho) = \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} (\Phi_j^{(2)}, \hat{A} [\hat{H} - E] \Phi_i^{(1)}), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.35})$$

где $\hat{L}_\rho = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{3A-4}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho}$; $\hat{L}_{K, \rho} = \hat{L}_\rho - \frac{K(K+3A-5)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} |E|$;

$\Phi_p^{(2)'} = \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_p^{(2)}$; m — масса нуклона. Все коэффициенты этих уравнений зависят в явном виде от энергии относительного движения частиц в данном канале $E_{\text{отн}}^{(i)} = |E - \varepsilon_1^{(i)} - \varepsilon_2^{(i)}|$, где $\varepsilon_{1,2}^{(i)}$ — энергии связи кластеров в i -канале. Действие оператора $(\hat{H} - E) \Phi^{(i)}$ можно представить, используя (П.33) в виде некоторого эффективного потенциала взаимодействия частиц в данном канале. Соответствующие коэффициенты в уравнениях (П.35) получаются (П.33) затем усреднением этого эффективного взаимодействия по волновым функциям частиц. Такая система уравнений должна решаться с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \chi(\rho) < \infty; & f_{ji}(\rho) < \infty, & \text{при } \rho \rightarrow 0; \\ \chi(\rho) \rightarrow 0; & f_{ji}(\rho) \rightarrow \text{const}, & \text{при } \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.36})$$

Можно показать [43], что указанная система дифференциальных уравнений (или алгебраическо-дифференциальных уравнений, если f_{ji} постоянны) имеет при заданных граничных условиях (П.36) единственное решение при каждой фиксированной энергии E .

В заключение отметим одно важное обстоятельство. Коллективная переменная ρ метода K -гармоник оказывается единственной инвариантной относительно перестановок нуклонов переменной, на языке которой удобно проводить разбиение конфигурационного пространства на внутреннюю и внешнюю области. При использовании этого свойства ρ в работах [58, 59] разработан общий подход, в равной степени пригодный для описания как связанных состояний, так и различных ядерных реакций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Хорошо известный метод резонирующих групп [60, 61] в своей обычной формулировке приводит к интегро-дифференциальным уравнениям достаточно сложного вида. Из-за трудности решения систем интегро-дифференциальных уравнений от нескольких переменных этот метод применялся только для расчетов упругого рассеяния ядер.

Начиная с 1969 г. появляются работы западногерманской группы физиков, в которых метод резонирующих групп был обобщен и на случай реакции, так называемый Refined Cluster Function Representation (RCFR) [44, 45]. В этом подходе волновая функция непрерывного спектра ищется в виде

$$\Psi_{\kappa} = \hat{\Lambda} \left\{ \sum_{p=1}^N \varphi_{pL} \chi_{pL}^{\kappa}(R_p) \right\}, \quad (\text{П.37})$$

где φ_{pL} — поверхностная функция, определенная в (П.24); $\chi_{pL}^{\kappa}(R_p)$ — функция относительного движения данной пары кластеров в методе резонирующих групп. В работах [44, 45] $\chi(R)$ представляется в виде

$$\chi_{pL}^{\kappa}(R) = \delta_{\kappa, p} F_L(R) + f_{\kappa p} G_L^R(R) + \sum_m b_{pm}^{\kappa} H_{pm}(R). \quad (\text{П.38})$$

Здесь $F_L(R)$ — регулярная кулоновская функция; $G_L^h(R)$ — регуляризованная в нуле с помощью (П.32) нерегулярная кулоновская функция; $H_{pm}(R)$ — набор быстро затухающих на бесконечности вспомогательных функций, в частности осцилляторные функции.

В (П.38) неизвестными величинами являются амплитуды реакций $f_{\kappa p}$ и коэффициенты b_{pm}^{κ} . При таком выборе χ_{pL}^{κ} внутренней части полной волновой функции Ψ_{int} (П.20) соответствует φ_{pL} , умноженная на последний член в (П.38), остальные члены в Ψ_{κ} (П.37) определяют Ψ_{ext} . Выбирая Ψ_{κ} в виде (П.37) и подставляя ее в формулировку вариационного принципа (П.22), получаем для определения неизвестных коэффициентов f_{ij} , и b_{im}^j систему неоднородных алгебраических уравнений, аналогичную системе (П.34).

В работе [55] проводилось сравнение обычного метода резонирующих групп, когда неизвестной считается вся $\chi(R)$, и RCFR-метода на примере упругого $n\alpha$ - и $\alpha\alpha$ -рассеяния. На рис. 17 представлены результаты расчета фазы $\delta_{L=0}$ для $n\alpha$ -рассеяния. На этом рисунке кривая 1 показывает результаты по методу резонирующих групп, 2 — результаты расчета по RCFR-методу с учетом шести осцилляторных функций $H_m(R)$. Отметим, что кривая 3, где внутренняя часть волновой функции представлялась 16 осцилляторными членами, практически не отличается от кривой 1. Таким образом, при достаточно большом количестве функций H_m результаты обоих методов оказываются, как и следовало ожидать, близкими.

Авторы RCFR-метода в своих расчетах в основном используют реалистический NN -потенциал с большими корами, с тензорными и LS -силами, подогнанный по фазам NN -рассеяния до 350 Мэв [14, 48]. Использование такого сложного реалистического потенциала приводит к необходимости делать некоторые приближения при вычислении матричных элементов [50].

В RCFR-методе при построении волновой функции кластеров используются функции с максимальной пространственной симметрией. Как видно из результатов настоящего обзора, вклад других компонент в полную волновую функцию легчайших ядер пренебрежимо мал, чего, однако, нельзя сказать про вклад этих компонент в полную энергию связи. Поэтому при расчете волновых функций кластеров используется только центральная часть NN -потенциала, отдельно подогнанная по фазам до 350 Мэв [48], и пренебрегается тензорными и LS -силами и перенормировкой центральной части потенциала в присутствии тензорных и LS -компонент. Тензорные и LS -взаимодействия, взятые из работы [14], учитываются только во взаимодействии между кластерами.

С учетом сказанного выше полу-чаются следующие значения энергий связи легчайших ядер: $\epsilon_{св}({}^3\text{He}) = 3,9$; $\epsilon_{св}({}^3\text{H}) = 4,6$; $\epsilon_{св}({}^4\text{He}) = 21,5 \text{ Мэв}$.

Так как значения энергий связи ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ оказались заниженными по сравнению с экспериментальными значениями, то и расчетные пороги образования этих фрагментов в реакциях окажутся отличными от экспериментальных. Поэтому при сравнении с экспериментом рассчитанных величин (в RCFR-методе) шкала энергий в некоторых случаях сдвигается так, чтобы рассчитанный и экспериментальный пороги совпадали.

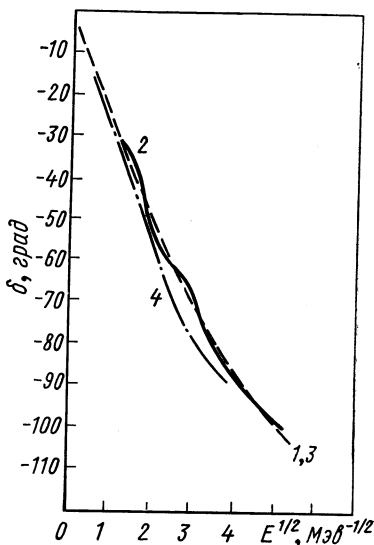


Рис. 17. Фаза упругого $n^4\text{He}$ -рассеяния ($\delta_{L=0}$), рассчитанная по методу резонирующих групп (1) и по RCFR-методу (2, 3): экспериментальная фаза показана кривой 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скорняков Г. В., Тер-Мартirosян К. А. ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 775.
2. Данилов Г. С. ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 498; 1962, т. 43, с. 1424; 1962, т. 42, с. 10.
3. Фаддеев Л. Д. «Труды Мат. ин-та АН СССР», 1963, т. 69; ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459.
4. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. УФН, 1971, т. 103, с. 469; Харченко В. Ф. Докторская диссертация. ИТФ, Киев, 1971.
5. Якубовский О. А. «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 1312.
6. Бадалиян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 1032; Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 630.
7. Zickendraht W. Ann. Phys., 1965, v. 35, p. 18.

8. Бадалян А. М. и др. «Ядерная физика», 1967, т. 6, с. 473; Бадалян А. М., Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 313; Симонов Ю. А., Бадалян А. М. «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 88.
9. Hamada T., Johnston I. D. Nucl. Phys., 1962, v. 34, p. 382.
10. Lassa K. E. e.a. Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 881.
11. Reid R. V. Jr. Ann. Phys., 1968, v. 50, p. 411.
12. Bressel C. N., Kerman A. K., Rouben B. Nucl. Phys. A, 1969, v. 124, p. 624.
13. Gogny D., Pires P., de Tourreil R. Phys. Lett. B, 1970, v. 32, p. 591.
14. Eikemeier H., Hackenbroich H. H. Nucl. Phys. A, 1971, v. 169, p. 407.
15. Sprung D. W. L., de Tourreil R. Nucl. Phys. A, 1973, v. 201, p. 193.
16. Bryan R., Scott B. L. Phys. Rev., 1964, v. 135, p. 434; 1967, v. 164, p. 1215; 1969, v. 177, p. 1435.
17. Scotti A., Wong D. Y. Phys. Rev., 1965, v. 138, p. 145.
18. Ingber L., Potenza R. M. Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1250; Phys. Rev. C, 1970, v. 1, p. 112.
19. Jackson A. D., Lande A., Sauer P. U. Nucl. Phys. A, 1970, v. 156, p. 1; Phys. Lett. B, 1971, v. 35, p. 365; Yang S. N., Jackson A. D. Phys. Lett. B, 1971, v. 36, p. 1.
- 19a. Nunberg P., Proserpi D., Pace E. Phys. Lett. B, 1972, v. 40, p. 329; Lett. Nuovo cimento, 1972, v. 15, p. 327.
20. Malfliet R. A., Tjon J. A. Ann. Phys. (N.Y.), 1970, v. 61, p. 425.
21. Demin V. F., Pokrovsky Yu. E. Phys. Lett. B, 1973, v. 47, p. 394.
22. Harper E. P., Kim Y. E., Tubis A. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1533.
23. Bruinsma J., van Wageningen R. Phys. Lett. B, 1973, v. 44, p. 221.
24. Gignoux G., Laverne A. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 436; Nucl. Phys. A, 1973, v. 203, p. 597.
25. Hennell M. A., Delves L. M., Phys. Lett. B, 1972, v. 40, p. 20.
26. Delves L. M., Hennell M. A. Nucl. Phys. A, 1971, v. 168, p. 347.
27. Humberston J. W., Hennell M. A. Phys. Lett. B, 1970, v. 31, p. 423.
28. Chi-yu-Hy. Phys. Rev. C, 1971, v. 3, p. 2151.
29. Akaishi Y. e.a. Binding energy of triton and α -particle with meson-theoretical potentials. The report on the International Conference on Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, Los Angeles, 1972.
30. Malfliet R. A., Tjon J. A. Phys. Lett. B, 1971, v. 35, p. 487.
31. Benayoun J. J., Gignoux G. Nucl. Phys. A, 1972, v. 190, p. 419; Lett. Nuovo cimento, 1972, v. 5, p. 313.
32. Demin V. F., Pokrovsky Yu. E., Efros V. D. Phys. Lett. B, 1973, v. 33, p. 227.
33. Gignoux G., Laverne A. $^3\text{He} - ^3\text{H}$ energy difference and isospin impurities. The report to the International Conference on Few Particle Problems in the Nuclear Interaction. Los Angeles, 1972.
34. Demin V. F. e.a. Phys. Lett. B, 1974, v. 49, p. 217.
35. McCarthy J. S. e.a. Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 884.
36. Захарьев Б. Н., Пуустовалов В. В., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 406.
37. Пермяков В. П. и др. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 567.
38. Efros V. D., Zhukov M. V. Phys. Lett. B, 1971, v. 37, p. 18.
39. Heiss P., Hackenbroich H. H. Phys. Lett. B, 1969, v. 30, p. 373.
40. Heiss P., Hackenbroich H. H. Z. Phys., 1970, Bd. 231, S. 230.
41. Демков Ю. Н. Вариационные принципы в теории столкновений. М., Физматгиз, 1958.
42. Эфрос В. Д. Препринт ИАЭ-1633, 1968; препринт ИАЭ-1879, 1969.
43. Жуков М. В., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 577.
44. Hackenbroich H. H., Heiss P. Z. Phys., 1970, Bd. 231, S. 225.
45. Hackenbroich H. H., Heiss P. Z. Phys., 1970, Bd. 235, S. 422.
46. Rosenberg L., Spruch L. Phys. Rev., 1962, v. 125, p. 1407.
47. Hackenbroich H. H., Heiss P. Z. Phys., 1971, Bd. 242, S. 352.

48. Eikemeier H., Hackenbroich H. H. Z. Phys., 1966, Bd. 195, S. 412.
49. Heiss P., Hackenbroich H. H. Nucl. Phys. A, 1972, v. 182, p. 522.
50. Hackenbroich H. H. Preprint «Variational Calculations of Reactions Involving Light Nuclei». Inst. Theor. Phys., Köln, 1972.
51. Heiss P., Hackenbroich H. H. Nucl. Phys. A, 1973, v. 202, p. 353.
52. Jacobs H., Wildermuth K., Wurster E. J. Phys. Lett. B, 1969, v. 29, p. 455.
53. Schmid E., Wildermuth K. Nucl. Phys., 1961, v. 26, p. 463.
54. Le-Chi-Niem, Heiss P., Hackenbroich H. H. Z. Phys., 1971, Bd. 244, S. 346.
55. Federsel H. e.a. Phys. Lett. B, 1970, v. 33, p. 140.
56. Базь А. И. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 14, с. 607.
57. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
58. Базь А. И., Жуков М. В. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 60.
59. Базь А. И., Жуков М. В. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 958.
60. Wheeler J. A. Phys. Rev., 1937, v. 32, p. 1083.
61. Tomson R. D., Tang V. C. Nucl. Phys. A, 1968, v. 106, p. 591.
62. Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 226.
63. Fabre de la Ripelle M. Report IPNO/TH 157, Orsay, 1969.
64. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
65. Эфрос В. Д. Препринт ИАЭ-1879, 1969.
66. Смородинский Я. А., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 210.
67. Ballot J. L., Beiner M., Fabre de la Ripelle M. IPNO/TH-72-29, 1972; Beiner M., Fabre de la Ripelle M. Lett. Nuovo cimento, 1971, v. 1, p. 584.
68. Erens G., Visschers J. L., van Wageningen R. Ann. Phys., 1971, v. 67, p. 461.
69. Tjon J. A., Gibson B. F., O'Connell J. S. Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 540.
70. Ситенко А. Г., Тартаковский В. К. Лекции по теории ядра. М., Атомиздат, 1972.
71. Zabolitzky J. G. Частное сообщение.
72. Zabolitzky J. G. Preprint, RUB TP II/82, February, 1974.
73. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, с. 557; «Изв. АН СССР», 1951, т. 15, с. 309.
74. Ueda T., Green A. E. S. Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1304.
75. Friar J. L. Ann. Phys. (to be published).
76. Меркурьев С. П. «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 447; препринт LPTHE 74/1, Orsay.