

УДК 539.17.01

МЕТОД U -МАТРИЦЫ В ТЕОРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин,
О. А. Хрусталева*

Институт физики высоких энергий,
Серпухов

В обзоре обсуждается метод U -матрицы (обобщенной матрицы) в теории сильных взаимодействий. Дан вывод релятивистского уравнения квантовой теории затухания в рамках одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля. Изучены аналитические свойства U -матрицы и получены ее граничные оценки. Подчеркивается, что обобщенная матрица реакций — новая функция, описывающая процесс рассеяния. Рассмотрен способ связи прямого и перекрестного каналов, основанный на аналитическом продолжении U -матрицы, и дано обсуждение растущих полных сечений взаимодействия.

The U -matrix (the generalized reaction matrix) method in strong interaction theory is discussed in this review. The derivation of the relativistic equation of quantum theory of damping in the framework of the equal time formulation of the two body problem in quantum field theory is given. Analytic properties of U -matrix have been examined and the bounds for its value have been obtained. It is stressed that the generalized reaction matrix is a new function for the description of the scattering. A way of the connection between direct and cross channels is considered on the base of an analytical continuation of U -matrix and the discussion of rising total cross-section is given.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания системы двух релятивистских частиц занимает важное место в квантовой теории поля. Как известно, отличительной чертой квантовой теории поля является функциональный характер уравнений, и поэтому любая, даже двухчастичная, задача становится здесь задачей с бесконечным числом степеней свободы. Современный математический аппарат не позволяет в общем случае решить эти функциональные уравнения.

В теории с малой константой взаимодействия удастся использовать методы теории возмущений для получения приближенных выражений искомых величин с заданной точностью. В квантовых теориях с неслабой связью теория возмущений неприменима, и следует идти по пути построения более простых динамических

уравнений, которые можно решить и тем самым описать системы взаимодействующих частиц. Разлагая векторы состояний по набору базисных векторов с определенным числом свободных частиц, можно получить бесконечную цепочку уравнений для амплитуд вероятности того, что в искомом состоянии будет заданное число свободных частиц.

В методе Тамма — Данкова [1] бесконечная цепочка уравнений заменяется усеченной, в которой рассматриваются лишь амплитуды, соответствующие числу частиц, меньшему некоторого заданного числа N_0 . Это соответствует предположению, что в области умеренных энергий промежуточные состояния с большим числом частиц не могут оказать заметного влияния, например, на бинарный процесс. Если к этому добавить подчеркнутую трехмерность первоначальной формулировки метода Тамма — Данкова, благодаря чему величины, входящие в цепочку уравнений, имеют четкий физический смысл, то можно надеяться, что теоретики получат надежный математический аппарат, описывающий сильные взаимодействия умеренных энергий.

Однако более углубленное изучение метода Тамма — Данкова вскрыло и его недостатки. Все они были связаны с основным недостатком классической квантовой теории поля — необходимостью апеллировать к свободным полям с последующей ренормировкой основных физических величин [2]. Если S -матричная формулировка теории возмущений довольно успешно справилась с этой задачей, то для метода Тамма — Данкова ренормировки оказались непреодолимым затруднением.

Качественно другой подход к проблеме двух тел в квантовой теории поля представляет собой метод Бете — Солпитера [3]. Уравнение этого метода является как бы суммой всех уравнений их бесконечной цепочки. При этом ядром этого уравнения служит сложная функция, содержащая вклады от всех многочастичных промежуточных состояний, а искомой функцией является волновая функция системы двух частиц. Уравнение Бете — Солпитера имеет четырехмерный явно ковариантный вид, поэтому в данном подходе ренормировка не встречает препятствий, так как в нем используется та же инвариантная теория возмущений, что и в формализме матрицы рассеяния. Возможность применения фейнмановских диаграмм в уравнении Бета — Солпитера приводит еще к тому дополнительному преимуществу, что с их помощью можно исследовать аналитические свойства амплитуд по энергии и переде импульса.

Однако в уравнении Бете — Солпитера содержатся и существенные трудности, связанные в основном со свойствами волновой функции системы двух частиц. Интегрирование в этом ковариантном уравнении проводится по всему пространству Минковского независимо по четырехмерным координатам каждой из частиц.

При этом совершенно не ясно, какой смысл имеет относительное время двух частиц в системе и как сформулировать по нему граничные условия. Кроме того, в тех случаях, когда координаты частиц разделены времениподобным интервалом, вероятностная интерпретация волновой функции становится невозможной.

Сравнение метода Бете — Солпитера и предшествующей ему трехмерной формулировки Тамма — Данкова закономерно приводит к вопросу: существует ли такой формализм в релятивистской задаче двух частиц, который, сохраняя трехмерность описания, обладал бы в то же время главными преимуществами полностью ковариантного подхода [4]? Такой формализм был предложен А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе [5] в виде квазипотенциального уравнения, которое является релятивистским аналогом уравнения Шредингера. Ядром этого уравнения служит квазипотенциал, который представляет собой комплексную функцию, зависящую от энергии частиц, и является обобщением обычного потенциала в нерелятивистской квантовой механике. Мнимая часть квазипотенциала содержит вклад от всех многочастичных промежуточных состояний и должна иметь определенный знак в результате условия унитарности. Наибольшую простоту и наглядность квазипотенциальный подход приобретает в рамках одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля [6, 7]. Именно здесь аналогия с нерелятивистской квантовой механикой очевидна.

Одно из наиболее привлекательных свойств квазипотенциального подхода Логунова — Тавхелидзе — существование трехмерного интегрального уравнения, связывающего квазипотенциал взаимодействия с амплитудой упругого рассеяния двух частиц вне энергетической поверхности. Решая это уравнение с заданным квазипотенциалом и переходя на энергетическую поверхность, можно определить непосредственно физическую амплитуду, наблюдаемую на эксперименте. Однако обратная задача восстановления квазипотенциала далеко не однозначна, так как включает процедуру экстраполяции экспериментально наблюдаемой амплитуды за энергетическую поверхность.

В связи с этим представляет большой интерес рассмотрение таких динамических уравнений, которые содержат амплитуду упругого рассеяния непосредственно на энергетической поверхности, т. е. измераемую на опыте. Одновременная формулировка в квантовой теории поля естественным образом приводит к уравнению для амплитуды упругого рассеяния на энергетической поверхности, которое является релятивистским обобщением основного уравнения квантовой теории затухания [8]. Это уравнение связывает физическую амплитуду с так называемой матрицей реакций, или U -матрицей [7, 9]. Впервые она была введена Вигнером в теории ядерных реакций [10].

Физический смысл термина «затухание» восходит к классической теории торможения излучением: учет силы радиационного трения, пропорциональной третьей производной по времени от координаты электрона, приводит к появлению в выражении для сечения дополнительного фактора затухания $(1 + k^2)^{-1}$, где k пропорциональна частоте световой волны. В нерелятивистской квантовой механике удобство основного уравнения теории затухания заключается в том, что в случае эрмитовой матрицы реакций амплитуда рассеяния автоматически удовлетворяет условию унитарности. В квантовой теории поля с появлением многочастичных промежуточных состояний это замечательное свойство пропадает и U -матрица, вообще говоря, становится неэрмитовой. Эффект затухания в данном случае проявляется в относительном подавлении неупругих вкладов по сравнению с упругими.

В настоящем обзоре обсуждаются некоторые свойства амплитуды упругого рассеяния адронов в рамках релятивистского уравнения теории затухания, а также аналитические свойства матрицы реакций.

1. ОДНОВРЕМЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Прежде всего покажем, каким образом одновременная формулировка в квантовой теории поля приводит к квазипотенциальному уравнению Логунова — Тавхелидзе и к релятивистскому уравнению квантовой теории затухания. Для этого будем исходить из выражения для волновой функции системы двух взаимодействующих скалярных частиц:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \langle 0 | T(\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) S) | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle, \quad (1)$$

где $\varphi_i(x_i)$ — операторы полей в представлении взаимодействия, $|\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle$ — вектор состояния системы двух свободных (невзаимодействующих) частиц в том же представлении. Эту волновую функцию можно связать линейным соотношением со свободной функцией $\varphi_0(x_1, x_2)$, определяемой следующим граничным условием:

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1^0 \rightarrow -\infty \\ x_2^0 \rightarrow -\infty}} \varphi(x_1, x_2) = (2\pi)^{-3} (2q_1^0 2q_2^0)^{-1/2} \times \\ \times \exp\{-iq_1 x_1 - iq_2 x_2\}. \quad (2)$$

В результате имеем

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \int dy_1 dy_2 \langle 0 | \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1(y_1) \delta\varphi_2(y_2)} \times \\ \times T(\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) S) | 0 \rangle \varphi_0(y_1, y_2). \quad (3)$$

Раскрывая до конца хронологическое произведение в выражении (3) с помощью обобщенной теоремы Вика [11], получаем

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2) + \int dy_1 dy_2 D_1^c(x_1 - y_1) D_2^c(x_2 - y_2) \times \\ \times \int dz_1 dz_2 R(y_1, y_2; z_1, z_2) \varphi_0(z_1, z_2), \quad (4)$$

где R — вакуумное среднее от радиационного оператора четвертого порядка:

$$R(x_1, x_2; y_1, y_2) = - \left\langle 0 \left| \frac{\delta^4 S}{\delta\varphi_1^*(x_1) \delta\varphi_2^*(x_2) \delta\varphi_1(y_1) \delta\varphi_2(y_2)} S^+ \right| 0 \right\rangle; \quad (5)$$

свободная одночастичная функция Грина

$$D^c(x - y) = i \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi^*(y)) | 0 \rangle.$$

При выводе соотношения (4) считается, что полная и свободная одночастичные функции Грина имеют на массовой поверхности полюсы одинаковой степени (нет инфракрасной катастрофы).

Соотношение (4) — основополагающее в последующих выкладках. Заметим, что интегрирование по четырехмерным координатам частиц z_1 и z_2 в правой части (4) проводится по всему пространству Минковского независимо. Поэтому, когда частицы разделены времениподобным интервалом, вероятностная интерпретация волновой функции становится невозможной. Однако существует способ, позволяющий перейти в соотношении (4) и, следовательно, во всех дальнейших выкладках от интегрирования по четырехмерному пространству к интегрированию по некоторым пространственно-подобным поверхностям в этом пространстве. Этот способ основан на том замечательном свойстве волновой функции системы свободных частиц, что она подчиняется принципу Гюйгенса:

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \\ = \int_{\sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1^m d\sigma_2^n D_1^{(-)}(x_1 - \xi_1) D_2^{(-)}(x_2 - \xi_2) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_1^m} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_2^n} \varphi_0(\xi_1, \xi_2), \quad (6)$$

где $D^{(-)}$ — отрицательно частотная часть перестановочной функции свободных полей:

$$D^{(-)}(-y) = i \langle 0 | \varphi(x) \varphi^*(y) | 0 \rangle,$$

а интегрирование производится по произвольным пространственно-подобным поверхностям σ_1 и σ_2 . Если поверхности σ_1 и σ_2 совпадают, то аргументы ξ_1 и ξ_2 волновой функции под знаком интеграла (6) всегда будут разделены пространственно-подобным интервалом.

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, введем символические операторные обозначения. Волновую функцию $\varphi(x_1, x_2)$ будем обозначать просто буквой φ . Функции $R(x_1, x_2; y_1, y_2)$ сопоставим оператор R . Функции $D_1^c(x_1 - y_1) D_2^c(x_2 - y_2)$ сопоставим оператор G_0 , а функции $D_1^{(-)}(x_1 - y_1) D_2^{(-)}(x_2 - y_2)$ — оператор D_0 . В такой символической записи соотношение (4) имеет следующий вид:

$$\varphi = \varphi_0 + G_0 R \varphi_0. \quad (7)$$

Равенство (6) сокращенно запишем таким образом:

$$\varphi_0 = D_0 \otimes \varphi_0, \quad (8)$$

где \otimes означает интегрирование по произвольным пространственно-подобным поверхностям.

Введем теперь новую волновую функцию φ' , определяемую следующим соотношением:

$$\begin{aligned} & \varphi'_{\sigma_1 \sigma_2}(x_1, x_2) = \\ & = \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1^m d\sigma_2^n D_1^{(-)}(x_1 - \xi_1) D_2^{(-)}(x_2 - \xi_2) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_1^m} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_2^n} \varphi(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (9)$$

или символически

$$\varphi'_{\sigma_1 \sigma_2} = D_0 \otimes \varphi. \quad (10)$$

Тогда из соотношений (7), (8) и (10) следует, что

$$\varphi'_{\sigma_1 \sigma_2} = \varphi_0 + G'_0 R \varphi_0, \quad (11)$$

где оператору $G'_0 = D_0 \otimes G_0$ соответствует функция

$$\begin{aligned} G'_0(x_1, x_2; y_1, y_2) = & \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1^m d\sigma_2^n D_1^{(-)}(x_1 - \xi_1) \times \\ & \times D_2^{(-)}(x_2 - \xi_2) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_1^m} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \xi_2^n} D_1^c(\xi_1 - y_1) D_2^c(\xi_2 - y_2). \end{aligned}$$

Соотношение (11) можно записать через оператор эволюции Ω следующим образом:

$$\varphi'_{\sigma_1 \sigma_2} = \Omega_{\sigma_1 \sigma_2} \varphi_0, \quad (12)$$

где

$$\Omega_{\sigma_1 \sigma_2} = 1 + G'_0 R. \quad (13)$$

Если теперь в духе уравнения Шредингера записать эволюционный оператор в следующем виде:

$$\Omega_{\sigma_1 \sigma_2} = (1 - G'_0 V_{\sigma_1 \sigma_2})^{-1}, \quad (14)$$

то соотношение (11) принимает вид

$$\varphi'_{\sigma_1\sigma_2} = (1 - G'_0 V_{\sigma_1\sigma_2})^{-1} \varphi_0. \quad (15)$$

Используя определение (10), получаем для волновой функции системы двух частиц следующее уравнение:

$$\varphi = \varphi_0 + G_0 V_{\sigma_1\sigma_2} D_0 \otimes \varphi. \quad (16)$$

Если выбрать теперь поверхности σ_1 и σ_2 совпадающими, то в этом уравнении координаты частиц в системе всегда будут разделены пространственно-подобным интервалом. В этом случае волновая функция допускает вероятностную интерпретацию, и приходим к уравнению Логунова — Тавхелидзе в конфигурационном пространстве. Функция $V_{\sigma_1\sigma_2}$ — обобщение обычного потенциала взаимодействия в нерелятивистской квантовой механике. Из соотношений (13) и (14) следует равенство

$$R = V_{\sigma_1\sigma_2} + V_{\sigma_1\sigma_2} G'_0 R. \quad (17)$$

Если вспомнить, что среднее от радиационного оператора четвертого порядка R в импульсном пространстве на энергетической поверхности пропорционально амплитуде упругого рассеяния двух частиц, то нетрудно увидеть, что из соотношения (17) можно получить связь квазипотенциала взаимодействия с амплитудой упругого рассеяния.

Представим теперь эволюционный оператор в несколько ином, чем (14), виде:

$$\Omega_{\sigma_1\sigma_2} = (1 - G'_0 U_{\sigma_1\sigma_2}/2)^{-1} (1 + G'_0 U_{\sigma_1\sigma_2}/2). \quad (18)$$

Такое представление для эволюционного оператора естественным образом возникает в нерелятивистской квантовой механике, где оператор $G'_0 U_{\sigma_1\sigma_2}$ всегда антиэрмитов, что автоматически обеспечивает выполнение условия унитарности для эволюционного оператора

$$\Omega_{\sigma_1\sigma_2} \Omega_{\sigma_1\sigma_2}^* = 1. \quad (19)$$

В квантовой теории поля с появлением многочастичных промежуточных состояний оператор $\Omega_{\sigma_1\sigma_2}$ перестает удовлетворять условию (19).

Из сравнения формул (13) и (18) следует, что

$$R = U_{\sigma_1\sigma_2} + U_{\sigma_1\sigma_2} G'_0 R/2, \quad (20)$$

а волновая функция системы двух частиц удовлетворяет уравнению

$$\varphi = \varphi_0 + G_0 U_{\sigma_1\sigma_1} \varphi_0/2 + G_0 U_{\sigma_1\sigma_2} D_0 \otimes \varphi/2. \quad (21)$$

2. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЗАТУХАНИЯ

Можно показать, что решение уравнения (21) не зависит от выбора пространственно-подобных поверхностей σ_1 и σ_2 . Поэтому в дальнейшем в качестве этих поверхностей возьмем две совпадающие плоскости, перпендикулярные оси времени в точке τ . Тогда уравнение (20) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R(x_1, x_2; y_1, y_2) = & U_{\tau\tau}(x_1, x_2; y_1, y_2) + \\
 & + \frac{1}{2} \int dz_1 dz_2 U_{\tau\tau}(x_1, x_2; z_1, z_2) \times \\
 & \times \int d\xi_1 d\xi_2 D_1^{(-)}(z_1 - \xi_1) D_2^{(-)}(z_2 - \xi_2) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_1^0} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_2^0} \times \\
 & \times \int dz'_1 dz'_2 D_1^c(\xi_1 - z'_1) D_2^c(\xi_2 - z'_2) \Big|_{\xi_1^0 = \xi_2^0 = \tau} R(z'_1, z'_2; y_1, y_2). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Соответствующим образом можно записать и уравнение (21), причем волновые функции в обеих частях будут зависеть от одного физического времени системы двух частиц. Такая процедура приравнивания времен позволяет избежать основных трудностей, присущих формализму Бете — Солпитера.

Если воспользоваться очевидным равенством

$$\int d\xi D^{(-)}(x - \xi) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi^0} D^c(\xi - y) = \theta(\xi^0 - y^0) D^{(-)}(x - y),$$

то уравнение (22) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R(x_1, x_2; y_1, y_2) = & U_{\tau\tau}(x_1, x_2; y_1, y_2) + \\
 & + \frac{1}{2} \int dz_1 dz_2 U_{\tau\tau}(x_1, x_2; z_1, z_2) \times \\
 & \times \int dz'_1 dz'_2 D_1^{(-)}(z_1 - z'_1) D_2^{(-)}(z_2 - z'_2) \theta(\tau - z_1^0) \theta(\tau - z_2^0) R(z'_1, z'_2; y_1, y_2). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Теперь в этом уравнении сдвинем плоскость постоянного времени τ к $+\infty$. Как показано в работе [9], это не должно изменить решения уравнения (21) для волновой функции системы. Соотношение (23) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 R(x_1, x_2; y_1, y_2) = & U_{\infty\infty}(x_1, x_2; y_1, y_2) + \\
 & + \frac{1}{2} \int dz_1 dz_2 U_{\infty\infty}(x_1, x_2; z_1, z_2) \times \\
 & \times \int dz'_1 dz'_2 D_1^{(-)}(z_1 - z'_1) D_2^{(-)}(z_2 - z'_2) R(z'_1, z'_2; y_1, y_2). \quad (24)
 \end{aligned}$$

С помощью фурье-преобразования запишем последнее равенство в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p_1, p_2; q_1, q_2) = & \tilde{U}_{\infty}(p_1, p_2; q_1, q_2) + \\ & + \frac{(2\pi)^{-3}}{2} \int dk_1 dk_2 \tilde{U}_{\infty}(p_1, p_2; k_1, k_2) \times \\ & \times \tilde{D}_1^{(-)}(k_1) \tilde{D}_2^{(-)}(k_2) \tilde{R}(k_1, k_2; q_1, q_2). \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку $\tilde{D}^{(-)}(k) = 2\pi i \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2)$, все импульсы в соотношении (25) можно считать взятыми на массовой поверхности:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = & \tilde{U}_{\infty}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) - \\ - \frac{(2\pi)^{-6}}{2} \int \frac{dk_1}{2k_1^0} \frac{dk_2}{2k_2^0} \tilde{U}_{\infty}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; \tilde{k}_1, \tilde{k}_2) R(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2), \end{aligned} \quad (26)$$

где тильда над импульсом указывает на то, что этот импульс лежит на массовой поверхности, т. е. \tilde{p} означает, что $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

В силу трансляционной инвариантности фурье-образы \tilde{R} и \tilde{U}_{∞} должны быть пропорциональны четырехмерной δ -функции. Поэтому, вводя новые функции F и U соотношениями

$$\left. \begin{aligned} i\tilde{R}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = & (2\pi)^7 \delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \\ & - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) F(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1); \\ i\tilde{U}_{\infty}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = & (2\pi)^7 \delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \\ & - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) U(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $E_p = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2}$, окончательно получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1) = & U(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1) + i\pi \int \frac{dk_1}{2k_1^0 2k_2^0} \delta(E_k - E_q) \times \\ & \times U(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}_1) F(\mathbf{k}_1; \mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Конечно, функции $F(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1)$ и $U(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1)$ кроме выписанных аргументов зависят еще от полного импульса системы двух частиц $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, который является интегралом движения. Вспомогая определение (5) функции $R(x_1, x_2; y_1, y_2)$, нетрудно показать, что функция $F(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1)$ совпадает с амплитудой упругого рассеяния двух скалярных частиц в инвариантной нормировке. Релятивистское уравнение теории затухания для амплитуды упругого рассеяния спинорной частицы на скалярной рассмотрено в работе [12].

3. УЧЕТ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Необходимо отметить, что уравнение (28), описывающее состояние рассеяния двух тел в квантовой теории поля, обладает достоинством метода Гамма — Данкова — трехмерностью и лишено трудностей с перенормировками, поскольку в нем имеем дело только с S -матрицей. Кроме того, по сравнению с квазипотенциальным уравнением Логонова — Тавхелидзе уравнение (28) имеет то важное преимущество, что непосредственно содержит амплитуду только на энергетической поверхности.

Для упрощения записи перейдем теперь снова к символическим обозначениям и запишем уравнение (28) в сокращенном виде:

$$F = U + iUDF, \quad (29)$$

где оператору D соответствует функция

$$D(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1) = \pi \delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) / (2p_1^0 p_2^0). \quad (30)$$

В этих же операторных обозначениях условие унитарности для амплитуды упругого рассеяния имеет вид

$$F - F^+ = 2iH + 2iF^+DF, \quad (31)$$

где оператору H соответствует вклад всех неупругих промежуточных состояний, т. е.

$$\begin{aligned} & 4\pi \delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)}{\sqrt{2p_1^0 2p_2^0 2q_1^0 2q_2^0}} = \\ & = \sum_{n>2} \langle n | T | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle^* \langle n | T | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Оператор T определяется S -матрицей через равенство

$$S = 1 + iT, \quad (33)$$

причем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | T | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle &= 2\pi \delta(E_p - E_q) \times \\ &\times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) [F(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) / \sqrt{2p_1^0 2p_2^0 2q_1^0 2q_2^0}]. \end{aligned}$$

Используя уравнения (29) и (31), нетрудно получить следующее очень важное соотношение:

$$U - U^+ = 2i(1 + iU^+D)H(1 - iDU). \quad (34)$$

Из этого соотношения следует, что матрица U не является эрмитовой, и причиной этого служит наличие многочастичных промежуточных состояний. В области не слишком больших энергий (ниже порога неупругих процессов) $H = 0$ и матрица U эрмитова, что приводит, как увидим ниже, к некоторым интересным след-

ствиям. С другой стороны, эрмитовость матрицы U означает, что амплитуда упругого рассеяния удовлетворяет двухчастичному условию унитарности.

В квантовой теории поля обычно вводят матрицу реакций R , которая непосредственно связана с S -матрицей следующим соотношением:

$$S = (1 - iR/2)^{-1} (1 + iR/2). \quad (35)$$

Заметим, что свойство унитарности S -матрицы требует, чтобы оператор R всегда был эрмитов. Оказывается, оператор U можно связать с двухчастичным матричным элементом матрицы реакций R и многочастичными матричными элементами операторов S и R . Введем функции K и G с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{K(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1)}{\sqrt{2p_1^0 2p_2^0 2q_1^0 2q_2^0}} = \\ = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | R | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} 4\pi\delta(E_p - E_q) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) [G(\mathbf{p}_1; \mathbf{q}_1) / \sqrt{2p_1^0 2p_2^0 2q_1^0 2q_2^0}] = \\ = \sum_{n>2} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | R | n \rangle \langle n | T | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда из соотношения (35) следует, что

$$F = K + iKDF + iG, \quad (38)$$

где F — амплитуда упругого рассеяния. Исключая теперь амплитуду F из уравнений (29) и (38), получаем

$$(1 - GD)U = K + iG. \quad (39)$$

Матрица K в этом соотношении представляет собой эрмитову матрицу реакций, которая обычно вводится в нерелятивистской квантовой механике. Таким образом, убеждаемся, что матрица U становится эрмитовой и совпадает с матрицей K только в случае отсутствия многочастичных промежуточных состояний, т. е. когда $G \equiv 0$.

4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЗАТУХАНИЯ

Парциальные разложения обобщенной матрицы реакций. Рассмотрим теперь рассеяние одинаковых частиц в системе центра инерции, т. е. когда $m_1 = m_2$ и $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}$. Уравнение (28) в этом случае после снятия интегрирования по энергии примет следующий вид:

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + i \frac{\pi}{8} \left(\frac{q^2}{q^2 + m^2} \right)^{1/2} \int d\Omega_{\mathbf{k}} U(\mathbf{p}, \mathbf{k}) F(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (40)$$

Функции $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ разложим по парциальным волнам:

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(p; q) P_l(\cos \widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}}); \quad (41)$$

$$U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) u_l(p; q) P_l(\cos \widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}}). \quad (42)$$

Поскольку функции F и U в уравнении (40) лежат на энергетической поверхности $p^2 = q^2$, в дальнейшем будем обозначать $f_l(p; q) = f_l(p^2)$ и $u_l(p, q) = u_l(p^2)$. Подставляя (41) и (42) в уравнение (40), получаем

$$f_l(p^2) = u_l(p^2) + i\rho(p^2) u_l(p^2) f_l(p^2), \quad (43)$$

где $\rho(p^2) = [p^2/(p^2 + m^2)]^{1/2}$. Таким образом, коэффициенты парциальных разложений функций F и U связаны между собой простым алгебраическим соотношением.

Как уже отмечалось, если $u_l(p^2)$ действительны, то парциальная амплитуда рассеяния $f_l(p^2)$ автоматически удовлетворяет двухчастичному условию унитарности

$$\text{Im } f_l(p^2) = \rho(p^2) |f_l(p^2)|^2.$$

Будем считать, что U -матрица неэрмитова, и тем самым учитываем вклад неупругих каналов в условие унитарности. Нетрудно найти связь между парциальным коэффициентом этой величины, который обозначим $\eta_l(p^2)$, и мнимой частью функции $u_l(p^2)$:

$$\eta_l(p^2) = \text{Im } u_l(p^2) / [1 + 2\rho(p^2) \text{Im } u_l(p^2) + \rho^2(p^2) |u_l(p^2)|^2].$$

Если теперь вспомнить интегральное уравнение, которое связывает парциальные амплитуды $f_l(p; q)$ вне энергетической поверхности с коэффициентами парциального разложения квазипотенциала $v_l(p; q)$ в методе Логунова — Тавхелидзе:

$$f_l(p; q) = v_l(p; q) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{v_l(p; k) f_l(k; q)}{k^2 - q^2 - i0}, \quad (44)$$

то нетрудно получить связь этих коэффициентов $v_l(p; q)$ с величинами $u_l(p; q)$ вне энергетической поверхности [30]:

$$v_l(p; q) = u_l(p; q) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{u_l(p; k) v_l(k; q)}{k^2 - q^2}. \quad (45)$$

Выражение для парциальных волн амплитуды рассеяния, записанное через коэффициенты разложения $u_l(p^2)$ U -матрицы, удобно для исследования резонансных явлений. Ниже остановимся

на некоторых свойствах такого представления и рассмотрим на его основе вопрос об асимптотическом поведении реджевских траекторий.

Интегральное уравнение, связывающее коэффициенты разложения U - и V -матриц по парциальным волнам, можно привести к фредгольмовскому виду. Исследование этого уравнения позволяет найти аналитические свойства U -матрицы по известным аналитическим свойствам квазипотенциала и, в частности, показывает, что если квазипотенциал V задан в виде суперпозиции потенциалов Юкавы, то обобщенную U -матрицу реакций также можно представить в аналогичном виде:

$$U(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \int_{u_0^2}^{\infty} dv \frac{\tilde{U}(v; p^2)}{v + (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2}, \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|. \quad (46)$$

Связь функции $u_l(s)$ с функцией Йоста. Обычно в квантовой теории поля для парциальной амплитуды рассеяния $f_l(p^2)$ предполагается следующая структура p^2 -плоскости: $f_l(p^2)$ аналитична в p^2 -плоскости, за исключением разрывов $-\infty < p^2 < -m^2$ и $p^2 \geq 0$ и действительна на отрезке $-m^2 \leq p^2 \leq 0$, где возможно также появление полюсов, соответствующих связанным состояниям. В этом случае функция $u_l(p^2)$ — аналитическая в p^2 -плоскости, за исключением разрыва $-\infty < p^2 \leq -m^2$, и действительна на отрезке $-m^2 \leq p^2 \leq 3m^2$. Конечно, на действительной полуоси $p^2 \geq 3m^2$ функции $f_l(p^2)$ и $u_l(p^2)$ имеют дополнительные точки ветвления, связанные с наличием неупругих процессов. Кроме того, функция $u_l(p^2)$ может иметь полюса на отрезке действительной оси $-m^2 \leq p^2 \leq 3m^2$, а также в комплексной плоскости. В дальнейшем рассмотрим связь полюсов и резонансов функции $u_l(p^2)$ и амплитуды рассеяния.

Обратно, если предположим для функции $u_l(p^2)$ перечисленные выше аналитические свойства, то, как это следует из (43), амплитуда рассеяния $f_l(p^2)$ будет аналитична в p^2 -плоскости, за исключением разрывов $-\infty < p^2 \leq -m^2$ и $p^2 \geq 0$, и действительна на отрезке $-m^2 \leq p^2 \leq 0$.

Проведение программы N/D -метода для парциальной амплитуды рассеяния, представленной в виде следующего отношения:

$$f_l(p^2) = u_l(p^2) [1 - ip(p^2) u_l(p^2)]^{-1}, \quad (47)$$

имеет некоторые особенности. Хотя формально величину $s_l(p) = 1 + 2ip(p^2 + m^2)^{-1/2} f_l(p)$ и можно представить в виде отношения $D_l(-p)/D_l(p)$, где $D_l(p) = 1 - ip(p^2 + m^2)^{-1/2} u_l(p)$, однако эту функцию нельзя отождествить с функцией Йоста, так как она обладает неправильными аналитическими свойствами.

Хорошо известно, что парциальную амплитуду рассеяния можно представить в виде отношения $f_l(p^2) = N_l(p^2)/D_l(p^2)$,

причем функция $N_l(p^2)$ имеет только левый разрез $-\infty < p^2 \leq -m^2$ и вещественна на отрезке $-m^2 \leq p^2 \leq 3m^2$ (не будем говорить здесь о возможных точках ветвления при $p^2 \geq 3m^2$), а $D_l(p^2)$ имеет только правый разрез $p^2 \geq 0$, нули в полюсах $f_l(p^2)$ и вещественна при $p^2 \leq 0$; $D_l(p^2) \rightarrow 1$ при $|p^2| \rightarrow \infty$. Для того чтобы отношение (47) записать в виде N/D -метода, необходимо ввести дополнительную функцию $\varphi_l(p^2)$ и положить

$$N_l(p^2) = u_l(p^2) \varphi_l(p^2); \quad (48)$$

$$D_l(p^2) = [1 - i\rho(p^2) u_l(p^2)] \varphi_l(p^2), \quad (49)$$

где $\varphi_l(p^2)$ имеет левый разрез в p^2 -плоскости, скачок на котором компенсирует соответствующее значение от первого сомножителя в формуле (49), и действительна на полуоси $p^2 \geq -m^2$. Для этой функции нетрудно получить интегральное уравнение [9,13] с ядром типа Коши, которое есть известный функционал от u_l :

$$\begin{aligned} \varphi_l(p^2) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2} \frac{F[u_l(v)]}{v - p^2} \varphi_l(v) dv; \\ F[u_l(v)] &= -\frac{\text{Im } u_l(v)}{u_l^*(v)} + \frac{[1 - i\rho(v) u_l(v)]}{u_l^*(v)} \times \\ &\times \frac{\text{Im } u_l(v) + \rho(v) |u_l(v)|^2}{1 + \rho^2(v) |u_l(v)|^2 + 2\rho(v) \text{Im } u_l(v)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Необходимость решать особое интегральное уравнение [14] для нахождения $D_l(p^2)$ связана с тем, что с самого начала был выделен имеющий левый разрез фактор $[1 - i\rho(p^2) u_l(p^2)]$, который определяет полюса парциальной амплитуды рассеяния $f_l(p^2)$. Если l не является целым числом, то функция $u_l(p^2)$ имеет, вообще говоря, точку ветвления при $p^2 = 0$. В этом случае, как обычно, следует рассмотреть функцию $u_l(p^2) = (p^2)^{-l} u_l(p^2)$.

Используя представление (49) и известную [15, 16] процедуру построения римановой поверхности функции $D_l(p^2)$, найдем, что на втором листе

$$D_l(p^2) = [1 + i\rho(p^2) u_l(p^2)] \varphi_l(p^2), \quad (51)$$

причем в p -плоскости значения $D_l(p)$ с $\text{Im } p > 0$ определяются значениями функции $D_l(p^2)$ на первом листе [формула (49)], а $D_l(p)$ с $\text{Im } p < 0$ — значениями $D_l(p^2)$, вычисленными по формуле (51). В соответствии с этим функция $D_l(p)$ имеет разрез по мнимой оси от $-im$ до $-i\infty$ и является аналогом функции Йоста.

Асимптотическое поведение траекторий Редже. Из выражения (47) для парциальной амплитуды рассеяния следует, что траектории Редже $\alpha(p^2)$ должны определяться как решения $l = \alpha(p^2)$ сле-

дующего уравнения:

$$1 - i\rho(p^2) u_l(p^2) = 0. \quad (52)$$

Используя асимптотическое представление функции Q_l при разложении (46), получаем следующую оценку:

$$u_l(p^2) \sim \exp[-c(p^2)l/\sqrt{p^2}],$$

где $c(p^2)$ — медленно меняющаяся функция p^2 . Теперь нетрудно получить асимптотическое при $p^2 \rightarrow \infty$ поведение реджевских траекторий $\alpha(p^2) \sim \sqrt{p^2}$, справедливое с точностью до множителей, логарифмически зависящих от энергии.

Следует сказать, что этот результат не зависит от модельных предположений и имеет место и при других выборах U -матрицы. Он является по существу следствием того факта, что при высоких энергиях сталкивающихся частиц картина рассеяния близка к квазиклассической, и орбитальный момент входит во все величины через прицельный параметр l/p . Другие же параметры рассеяния — $\sigma_{\text{tot}}(p^2)$ и наклон углового распределения $\Delta(p^2)$ — являются в асимптотической области медленно меняющимися функциями энергии.

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА U -МАТРИЦЫ

Далее будем рассматривать обобщенную U -матрицу реакций как функцию инвариантных мандельштамовских переменных s , t и u , которые в случае равных масс в системе центра инерции имеют вид: $s = 4(p^2 + m^2)$, $t = -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2$ и $u = -(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$.

Релятивистское уравнение теории затухания определяет преобразование от амплитуды рассеяния к функции $U(s, t)$, причем, как уже отмечалось, это преобразование не требует выхода в нефизическую область по переменным s и t . Таким образом, имеем новую функцию, которая, так же как и амплитуда, содержит информацию о характере взаимодействия и полностью определяет процесс рассеяния. Поэтому представляется важным выяснение аналитической структуры функции $U(s, t)$ [13, 17] и получение ограничений на значение $|U(s, t)|$ [18].

Аналитические свойства по s . Аналитические свойства $U(s, t)$ по переменной s следуют из соотношения связывающего $u_l(s)$ и парциальную амплитуду рассеяния $f_l(s)$. Если функция $f_l(s)$ аналитична в s -плоскости с двумя разрезами $s \leq 0$ и $s \geq 4m^2$, то функция $u_l(s)$ будет аналитической в s -плоскости, за исключением точек, лежащих на полуосях $s \leq 0$ и $s \geq 16m^2$, и действительной в интервале $0 \leq s \leq 16m^2$.

Функция $u_l(s)$ может иметь полюса на действительной оси в интервале $0 \leq s \leq 16m^2$, положение которых определяется

уравнением

$$R(s) \equiv 1 - \rho(s) \operatorname{Im} f_l(s) = 0;$$

$$\rho(s) = [(s - 4m^2)/s]^{1/2}.$$

Используя условие унитарности, нетрудно видеть, что в точке s_0 , где $R(s_0) = 0$, выполняется соотношение $dR(s)/ds|_{s=s_0} = 0$. Если вблизи точки $s = s_0$ величина $R(s) = \rho^{-1}(s_0) d^{-2}(s - s_0)^2$, то находим, что $u_l(s) = -d/[\rho(s_0)(s - s_0)]$. Используя полюсное приближение для $u_l(s)$, получаем для амплитуды рассеяния резонансную форму Брейта — Вигнера: $f_l(s) = -d/(s - s_0 + id)$, причем соответствующий полюс расположен на втором листе римановой поверхности функции $f_l(s)$. Конечно, справедливо и обратное: упругий резонанс в l -волне приводит к полюсу в функции $u_l(s)$, расположенному на действительной оси. Амплитуда рассеяния, продолженная на второй лист через упругий $s \geq 4m^2$ разрез, $f_l^{(2)}(s)$ связана с функцией $u_l(s)$ следующим соотношением:

$$f_l^{(2)}(s) = u_l^*(s)/[1 + i\rho(s)u_l^*(s)].$$

Резонансы амплитуды, расположенные выше порога неупругих процессов, приводят к полюсам для функции $u_l(s)$, размещенным в комплексной плоскости s . Пусть вблизи резонанса

$$f_l^{(2)}(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{-\gamma_0}{s - s_0 - i(\gamma_0 + \gamma_1)}, \quad (\gamma_0 + \gamma_1) > 0.$$

В этом случае

$$u_l(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{-\gamma_0}{s - s_0 + i\gamma_1}.$$

Из условия унитарности следует, что вклад неупругих каналов $\eta_l(s) \sim \gamma_0\gamma_1$, откуда, с учетом положительности суммы $\gamma_0 + \gamma_1$, находим: $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_1 > 0$. Таким образом, резонанс в $u_l(s)$, отвечающий полюсу в амплитуде рассеяния при $s > 4m^2$, расположен под разрезом $s \geq 4m^2$ функции $u_l(s)$ и может рассматриваться как резонанс на нефизическом листе $u_l(s)$. Отметим также, что $u_l(s)$ имеет более узкий резонанс, чем амплитуда.

Рассмотрим другую возможность параметризации функции вблизи резонанса:

$$f_l^{(2)}(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{-\gamma_0 - i\Gamma}{s - s_0 - i(\gamma_0 + \gamma_1)},$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) > 0.$$

В этом случае $\eta_l(s) \sim (\gamma_0\gamma_1 - \Gamma^2)$, откуда следует, что $\gamma_0\gamma_1 > 0$ и поэтому $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_1 > 0$. Вблизи точки $s = s_0$ функция $u_l(s)$ будет иметь вид

$$u_l(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{-\gamma_0 + i\Gamma}{s - (s_0 + \Gamma) + i\gamma_1},$$

т. е. в этом случае смещается и положение резонанса. Конечно, следует считать, что $|\Gamma| \ll s_0$.

Приближение эффективного радиуса и его обобщение. Представим амплитуду рассеяния в виде

$$f_l(s) = \frac{1}{u_l^{-1}(s) - i\rho(s)}. \quad (53)$$

Поскольку функция $u_l^{-1}(s)$ действительна и не имеет особенностей на пороге упругого рассеяния, то, учитывая, что $u_l(s) \sim (s - 4m^2)^l$ при $s \rightarrow 4m^2$, можно записать

$$(s - 4m^2)^l u_l^{-1}(s) = a_l + b_l(s - 4m^2). \quad (54)$$

Это приводит к двухпараметрическому описанию упругого рассеяния вблизи порога:

$$f_l(s) = \frac{(s - 4m^2)^l}{a_l + b_l(s - 4m^2) - i\rho(s)(s - 4m^2)^l}. \quad (55)$$

Эта формула является формулой эффективного радиуса и приводит к брейт-вигнеровскому резонансу в амплитуде, если $a_l > 0$ и $b_l < 0$ [19].

Аналитические свойства функции $u_l(s)$, которые обсуждались в предыдущем разделе, позволяют написать следующее дисперсионное соотношение:

$$\rho^{2l}(s) u_l^{-1}(s) = \lambda_l - \left(\frac{s - s_0}{\pi}\right) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\rho^{2l}(s') \operatorname{Im} u_l^{-1}(s') ds'}{(s' - s_0)(s' - s - i\epsilon)} + \bar{u}_l(s), \quad (56)$$

где λ_l — константа вычитания; $\bar{u}_l(s)$ — вклад, учитывающий существование левого разреза у функции $u_l^{-1}(s)$. В формуле (56) учтено пороговое поведение функции $u_l(s)$ при $s \rightarrow 4m^2$ таким образом, чтобы не изменить ее поведение при $s \rightarrow \infty$. Используя условие унитарности, нетрудно найти

$$\operatorname{Im} u_l^{-1}(s) = -\rho(s) \frac{\sigma_l^{\text{inel}}(s)}{\sigma_l^{\text{el}}(s)} \equiv -\rho(s) d_l(s). \quad (57)$$

Тогда, объединяя слагаемые λ_l и $\bar{u}_l(s)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{s - 4m^2}{s}\right)^l u_l^{-1}(s) = \lambda_l(s) - \\ & - \left(\frac{s - s_0}{\pi}\right) \int_{4m^2}^{\infty} ds' \left(\frac{s' - 4m^2}{s'}\right)^{l+1/2} \frac{d_l(s')}{(s' - s_0)(s' - s - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (58)$$

Функция $\lambda_l(s)$ не содержит сингулярностей в области физических значений s , и в окрестности любой точки $s = s_R$ ее можно

разложить в следующий степенной ряд:

$$\lambda_l(s) = \lambda_l^{(0)} + \lambda_l^{(1)}(s - s_R) + \dots$$

Второе слагаемое в формуле (58) учитывает влияние неупругих каналов реакции.

Аналитичность по $\cos \theta$. Прежде всего отметим, что функция $U(s, t)$ может иметь дополнительные по сравнению с амплитудой рассеяния сингулярности, появление которых является следствием интегрального уравнения (40). Анализ второй итерации для функции $U(s, t)$ позволяет проследить за возникновением этих дополнительных сингулярностей. Допустим, что амплитуда рассеяния $F(s, t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\mathcal{F}(s, t) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sigma(s, x)}{x-t} dx, \quad (59)$$

где спектральная функция $\sigma(s, x)$ аналитична в разрезанной s -плоскости. Во втором порядке по амплитуде рассеяния имеем

$$U_2(s, t) = -\frac{i\pi\rho(s)}{8} \int_{4m^2}^{\infty} dx_1 \sigma(s, x_1) \int_{4m^2}^{\infty} dx_2 \sigma(s, x_2) J(s, t, x_1, x_2), \quad (60)$$

где функция $J(s, t, x_1, x_2)$ определяется хорошо известным интегралом и ее можно представить в спектральном виде:

$$J(s, t, x_1, x_2) = \frac{8\pi}{(s-4m^2)^2} \int_{t_0(s)}^{\infty} \frac{dx}{x-t} \frac{1}{\sqrt{K(\tilde{x}, x_1, x_2)}}. \quad (61)$$

Здесь $\tilde{x} = 1 + 2x/(s-4m^2)$, функция $K(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1$, а нижний предел интегрирования

$$t_0(s) = x_1 + x_2 + \frac{2x_1x_2}{s-4m^2} + \frac{s-4m^2}{2} \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - 1)(\tilde{x}_2^2 - 1)}. \quad (62)$$

Таким образом, $U_2(s, t)$ аналитична по передаче импульса в разрезанной t -плоскости. Разрез начинается в точке $t_0(s)$. Из формулы (62) и определения \tilde{x}_i нетрудно видеть, что для значений $s > 0$ точка $t_0(s)$ лежит на действительной оси, для $s \leq 0$ она смещается в комплексную t -плоскость. Следовательно, область аналитичности функции $U_2(s, t)$ по двум переменным не является прямым произведением плоскостей s и t с соответствующими унитарными разрезами. В плоскости $\cos \theta$ положение сингулярностей интеграла определяется функцией $z(s, x_1, x_2) = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - 1)(\tilde{x}_2^2 - 1)}$, когда $x_1, x_2 \geq 4m^2$. Для $s > 0$ функция

$U_2(s, \cos \theta)$ будет аналитической во всей плоскости $\cos \theta$ с двумя разрезами, которые начинаются в точках $\cos \theta = \pm [1 + 2t_0(s)/(s - 4m^2)]$. Для $s \leq 0$ начала этих разрезов стягиваются к точкам $\cos \theta = \pm 1$. Кроме того, появляются дополнительные сингулярности в комплексной $\cos \theta$ -плоскости.

Для амплитуды рассеяния, исходя из общих принципов квантовой теории поля, аналитичность по $\cos \theta$ доказана в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $b(s)$. Следовательно, в этом эллипсе сходится частичный ряд, определяющий амплитуду рассеяния $\mathcal{F}(s, \cos \theta)$. В соответствии с известной теоремой о сходимости разложений по полиномам Лежандра имеем $b(s) = [1 + d^2(s)]/2d(s)$, где $d(s) = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_l(s)|^{1/l}$. Поскольку частичный коэффициент U -матрицы связан простым алгебраическим соотношением с $f_l(s)$, то нетрудно получить с учетом того, что $\lim_{l \rightarrow \infty} f_l(s) \rightarrow 0$, соответствующий эллипс аналитичности для функции $U(s, \cos \theta)$. Он оказывается тем же самым, что и для амплитуды рассеяния. Соответственно для $\text{Im } U(s, \cos \theta)$ получаем аналитичность в расширенном эллипсе Лемана с большой полуосью $2b^2(s) - 1$.

Рассмотрим теперь возможность расширения эллипса аналитичности для $U(s, \cos \theta)$. Пусть для $\mathcal{F}(s, t)$ имеет место дисперсионное соотношение по t вида (59), откуда можно немедленно заключить, что частичный ряд для амплитуды рассеяния, а следовательно, и частичный ряд для $U(s, \cos \theta)$ сходятся в эллипсе с большой полуосью $b(s) = 1 + 8m^2/(s - 4m^2)$. Поэтому имеет место интегральное представление

$$U(s, \cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{U(s, \zeta)}{\zeta - \cos \theta} d\zeta, \tag{63}$$

где γ — граница эллипса аналитичности для $U(s, \cos \theta)$. Подставляя теперь интегралы (59) и (63) в уравнение (40), видим, что возможность расширения этого эллипса аналитичности определяется аналитическими свойствами интеграла по угловым переменным. Последний имеет вид, аналогичный (60):

$$\frac{\pi\rho(s)}{2(s - 4m^2)} \int_{4m^2}^{\infty} dx \sigma(s, x) \oint_{\gamma} d\zeta U(s, \zeta) \bar{J}(s, \cos \theta, x, \zeta), \tag{64}$$

где

$$\bar{J}(s, \cos \theta, x, \zeta) = \int_{z_0}^{\infty} \frac{dy}{y - \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{K(y, \tilde{x}, \zeta)}}; \tag{65}$$

$$z_0(s, x, \zeta) = \tilde{x}\zeta + \sqrt{(\tilde{x}^2 - 1)(\zeta^2 - 1)}. \tag{66}$$

Как уже обсуждалось в начале этого раздела, аналитические свойства функции $\bar{J}(s, \cos \theta, x, \zeta)$ не позволяют продолжить интеграл (64) на всю плоскость $\cos \theta$ с двумя разрезами $\cos \theta = \pm [1 + 2t/(s - 4m^2)]$, $t > 4m^2$, т. е. получить для $U(s, \cos \theta)$ такую же область аналитичности, как и для $\mathcal{F}(s, \cos \theta)$, определенной интегралом (59).

Отметим, что для $s \geq 4m^2$ особенности интеграла (65) сосредоточены на действительной оси, причем разрезы начинаются в точках $\cos \theta = \pm [2b^2(s) - 1]$, т. е. в этом случае возможно продолжение в большой эллипс Лемана. Повторяя описанную процедуру, можно распространить область аналитичности $U(s, \cos \theta)$ на всю плоскость $\cos \theta$ с двумя разрезами. Однако в общем случае при попытке расширить область аналитичности $U(s, \cos \theta)$ до большого эллипса Лемана можно натолкнуться на особенности в комплексной плоскости $\cos \theta$, которые располагаются в точках $\pm z_0(s, x, \zeta)$, определяемых выражением (66), когда \tilde{x} и $\tilde{\zeta}$ пробегает совокупности значений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= [1 + 2x/(s - 4m^2)], & x &\geq 4m^2; \\ \tilde{\zeta} &= [1 + 2t/(s - 4m^2)], & t &\geq 4m^2. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Таким образом, областью аналитичности по переменной $\cos \theta$ для функции $U(s, t)$ является эллипс, большая полуось которого определяется положением ближайшей особенности амплитуды рассеяния в t -плоскости. Расширение этого эллипса возможно лишь для значений переменной $s > 4m^2$. Поэтому двойное дисперсионное соотношение для функции $U(s, t)$ не имеет места.

Полиномиальная ограниченность $U(s, t)$. Полиномиальная ограниченность и аналитичность амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана — Мартена предполагает, что $f_l(s)$ экспоненциально убывает для больших значений орбитального момента и $s \rightarrow \infty$. Такое поведение позволяет пренебречь членами частичного ряда для $\mathcal{F}(s, \cos \theta)$ со значениями $l > L(s)$, где $L(s)$ определяется значением большой полуоси эллипса аналитичности: $r(s) = 1 + 2t_0/s$ и $L(s) = (s/t_0)^{1/2} \ln(s/s_0)/2$. Из уравнения (43) следует, что экспоненциальное убывание с ростом l имеет место и для коэффициентов $u_l(s)$:

$$|u_l(s)| < s^N \exp[-2l(s/t_0)^{-1/2}] \quad (68)$$

для $l > L(s)$. Условие полиномиальной ограниченности для $U(s, t)$ может не выполняться, если существует $l_0 < L(s)$ такое, что $\text{Im } f_{l_0}(s) \rightarrow 1$ быстрее любого полинома при $s \rightarrow \infty$. Отметим, что такого исключительного поведения частичной амплитуды с номером l_0 не может быть, если $F(s, t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению по передаче, поскольку в этом случае указан-

ным поведением при $s \rightarrow \infty$ должна обладать спектральная функция. В этом последнем случае неупругое сечение $\sigma_{inel}(s)$ должно убывать быстрее любой степени s при $s \rightarrow \infty$. С другой стороны, если предположить полиномиальную ограниченность $U(s, t)$, то вместе с аналитичностью этой величины по $\cos \theta$ в эллипсе с большой полуосью $r(s) = 1 + 8m^2/(s - 4m^2)$ вновь приходим к справедливости оценки (68).

Ограничение снизу для случая $\theta = 0$. Ограничение снизу на функцию $U(s, 0)$ можно получить, предполагая известными значения упругого и неупругого сечений.

Поскольку предположение о том, что амплитуда рассеяния $F(s, t)$, чисто мнимая при высоких энергиях взаимодействующих частиц, хорошо укладывается в рамки теоретических и экспериментальных представлений о характере взаимодействия в области высоких энергий, в дальнейшем будем полагать $F(s, t) = i\bar{F}(s, t)$ и $U(s, t) = i\bar{U}(s, t)$. Тогда, имея в виду неравенство (68), будем искать минимум выражения

$$\bar{U}(s, 0) = \frac{2}{\pi^2 \rho(s)} \sum_{l=0}^{L(s)} (2l+1) C_l(s); \quad C_l(s) = \rho(s) \bar{u}_l(s) \quad (69)$$

при фиксированных

$$\sigma_{el}(s) = \frac{16\pi}{s\rho^2(s)} \sum_{l=0}^{L(s)} (2l+1) \left[\frac{C_l(s)}{1+C_l(s)} \right]^2 \quad (70)$$

и

$$\sigma_{inel}(s) = \frac{16\pi}{s\rho^2(s)} \sum_{l=0}^{L(s)} (2l+1) \frac{C_l(s)}{[1+C_l(s)]^2}. \quad (71)$$

Задача отыскания минимума (69) просто решается методом неопределенных коэффициентов λ и μ . Уравнения, определяющие коэффициенты $C_l(s, \lambda, \mu)$, которые минимизируют $\bar{U}(s, 0)$, одинаковы для всех l , поэтому из выражений (70) и (71) получаем:

$$C_l(s, \lambda, \mu) = \sigma_{el}(s)/\sigma_{inel}(s) \quad (72)$$

и

$$\bar{U}(s, 0) \geq \frac{2L(s)[L(s)+1]}{\pi^2 \rho(s)} \frac{\sigma_{el}(s)}{\sigma_{inel}(s)}. \quad (73)$$

Если воспользоваться теперь выражением для граничного значения $L(s)$, то имеем

$$\bar{U}(s, 0) \geq \frac{1}{2\pi^2 \zeta(s)} \frac{s}{t_0} \ln^2 \left(\frac{s}{s_0} \right) \frac{\sigma_{el}(s)}{\sigma_{inel}(s)}. \quad (74)$$

Учитывая, что $\pi^2 \rho(s) \bar{F}(s, 0) \leq 2L(s) [L(s) + 1]$, неравенство (73) можно записать в следующем виде:

$$\bar{U}(s, 0) \geq \bar{F}(s, 0) \frac{\sigma_{el}(s)}{\sigma_{inel}(s)},$$

или, используя оптическую теорему, определяем

$$\bar{U}(s, 0) \geq \frac{s \sigma_{tot}(s)}{8\pi^3} \frac{\sigma_{el}(s)}{\sigma_{inel}(s)}. \quad (75)$$

Неравенства (74) и (75) определяют нижнюю границу функции $U(s, t)$ при $t = 0$, причем эта величина зависит от отношения $d(s)$. Отметим, что подобной оценки снизу для амплитуды рассеяния не существует. Функция $\bar{F}(s, 0)$ ограничена сверху величиной $2\pi^{-2} \rho^{-1}(s) L(s) [L(s) + 1]$, которая совпадает, за исключением фактора затухания $d(s)$, с нижней границей для $\bar{U}(s, 0)$.

Ограничение на $|U(s, \cos \theta)|$ для больших углов рассеяния. Прежде всего выясним характер поведения $\bar{U}(s, t)$ в области малых передач импульса. Пусть амплитуда рассеяния

$$F(s, t) = \frac{isp(s)}{8\pi^3} \sigma_{tot}(s) \exp[a(s)t].$$

Представляя функцию $\bar{U}(s, t)$ в виде итерационного ряда с параметром разложения $\tau \equiv 2\sigma_{el}(s)/\sigma_{tot}(s)$, можно найти следующую оценку [18]:

$$\bar{U}(s, t) \sim \{-\sqrt{4a(s)t \ln \tau}\} \quad (76)$$

при условии, что $[a(s)t/\ln \tau] \gg 1$. Таким образом, если $2\sigma_{el} \approx \sigma_{tot}$, то зависимость $\bar{U}(s, t) \sim \exp[-b(s)\sqrt{|t|}]$ имеет место уже при малых передачах $|t| \sim a^{-1}(s) \ln \tau^{-1}$. В соответствии с полученной оценкой примем, что для малых углов рассеяния $\theta > \theta_0(s) = [1/sa(s)] \ln[\sigma_{tot}(s)/2\sigma_{el}(s)]$ функция

$$\bar{U}(s, t) = \bar{U}(s, 0) \exp\{-\sqrt{s\theta^2 a(s) \ln \tau^{-1}}\}. \quad (77)$$

Введем также угол $\theta(s)$, определяемый соотношением $\cos \theta(s) = 1 - c^2 \ln^2(s/s_0)/[2sa(s) \ln \tau^{-1}]$. Тогда в области углов $\theta_0(s) < \theta \leq \theta(s)$ имеет место неравенство $\bar{U}(s, t) \geq \bar{U}(s, 0) s^{-c}$.

При получении оценки снизу на амплитуду $F(s, t)$ для больших углов рассеяния [20, 21] приходится предположить аналитичность по $\cos \theta$ в несколько большей области, чем эллипс Мартена — Лемана, и полиномиальную ограниченность. Следуя работе [20], предположим существование мандельштамовской аналитичности для амплитуды рассеяния $F(s, t)$. Тогда функция $\bar{U}(s, t)$ для значений s выше порога упругого рассеяния будет аналитичной в плоскости $\cos \theta$ с двумя разрезами $[-\infty, -r(s)]$ и $[r(s), +\infty]$, где

$r(s) = 1 + 8m^2(s - 4m^2)^{-1}$, и полиномиально ограниченной при $s \rightarrow \infty$:

$$|\bar{U}(s, t)| < S^N. \tag{78}$$

Проводя теперь последовательно известные конформные отображения [22] и используя теорему о трех кругах, получаем следующую оценку снизу на большие углы для функции $\bar{U}(s, \cos \theta)$:

$$|\bar{U}(s, \cos \theta)| \geq \exp \{ -b \sqrt{sa(s) \ln [\sigma_{\text{tot}}(s)/2\sigma_{\text{el}}(s)]} \}. \tag{79}$$

При нахождении (79) воспользовались тем, что при малых $|t| \ll s$ имеет место формула (77) для $\bar{U}(s, t)$. Последнее предпологает, что при $s \rightarrow \infty$ $\sigma_{\text{el}}(s) \rightarrow \sigma_{\text{tot}}(s)/2$ снизу. Пусть

$$\sigma_{\text{el}}(s) = \sigma_{\text{tot}}(s) [1 - b's^{-\alpha} \ln^{2\beta} s]/2,$$

где $\alpha \leq 1$ и $\beta \geq 0$ при $\alpha = 1$. Тогда, учитывая, что $a(s) \leq \ln^2 s$ [22], получаем

$$|\bar{U}(s, \cos \theta)| \geq \exp \{ -b''s^{(1-\alpha)/2} \ln^{(1+\beta)} s \}. \tag{80}$$

Таким образом, оценка снизу для функции $\bar{U}(s, \cos \theta)$ в случае больших углов рассеяния существенно зависит от поведения упругого сечения в предасимптотической области. Быстрое изменение $\sigma_{\text{el}}(s)$ приводит к замене экспоненциальной оценки на степенную. Из формулы (80) следует, что если разность $\sigma_{\text{tot}}(s)/2 - \sigma_{\text{el}}(s)$ убывает как s^{-1} , то

$$|\bar{U}(s, \cos \theta)| \geq s^{-n}, \tag{81}$$

т. е. функция $\bar{U}(s, \cos \theta)$ убывает не быстрее некоторой степени s для больших углов рассеяния. Из неравенства (80) следует, что в любом случае нижняя граница для функции $\bar{U}(s, t)$ превосходит нижнюю границу для амплитуды рассеяния.

Все сказанное выше справедливо для случая, когда параметр разложения итерационного ряда меньше единицы. Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma_{\text{el}}(s) > \sigma_{\text{inel}}(s)$. Прежде всего получим выражение для логарифмической производной функции $\bar{U}(s, t)$ в точке $t = 0$. В случае чисто мнимой амплитуды рассеяния $F(s, t) = i\bar{F}(s, t)$ уравнение (40) принимает следующий вид:

$$\bar{U}(s, t) = \bar{F}(s, t) + \frac{\pi\rho(s)}{8(s-4m^2)} \int_{4m^2-s}^0 dt_1 \int_{4m^2-s}^0 dt_2 \frac{\bar{F}(s, t_1) \bar{U}(s, t_2) \theta(K)}{\sqrt{K}}, \tag{82}$$

$$K = -(t^2 + t_1^2 + t_2^2) + 2(tt_1 + tt_2 + t_1t_2) + 4tt_1t_2/s.$$

Пусть *

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}(s, t) &= f(s) \exp [a(s) t]; \\ \bar{U}(s, t) &= u(s) \exp [b(s) t]. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Подставляя (83) в уравнение (82), получаем

$$U(s, t) = f(s) \exp [a(s) t] + \frac{\pi^2 \rho(s) f(s) u(s)}{2s [a(s) + b(s)]} \exp \left[\frac{a(s) b(s)}{a(s) + b(s)} t \right],$$

откуда для логарифмической производной в точке $t = 0$ находим, полагая $\bar{u}(s) \equiv \pi^2 \rho(s) u(s)/2s$:

$$b(s) = a(s) \left[1 + \frac{\bar{u}(s) \Delta(s)}{a(s) (1 + \Delta(s))^2} \right] \left[1 + \frac{\bar{u}(s)}{a(s) (1 + \Delta(s))} \right]^{-1}, \quad (84)$$

где $\Delta(s) \equiv b(s)/a(s)$. Соотношение (84) нетрудно переписать в следующем виде:

$$b(s) = a(s) - \bar{u}(s) \{ \Delta(s) / [1 + \Delta(s)] \}^2. \quad (85)$$

Пренебрегая $\Delta(s)$ по сравнению с единицей, получаем

$$b(s) = [a^2(s) \bar{u}(s)]^{1/2}.$$

Учитывая теперь найденное ранее ограничение на величину $\bar{U}(s, 0)$, приходим к следующему неравенству:

$$b(s) \leq \{ a^3(s) / [d(s) \ln^2 s] \}^{1/2}. \quad (86)$$

Принимая во внимание, что $a(s) \leq \ln^2 s$, окончательно находим

$$b(s) \leq \ln^2 s / \sqrt{d(s)}. \quad (87)$$

Отношение

$$\Delta(s) \leq 1 / \sqrt{d(s)} \quad (88)$$

и действительно стремится к нулю, если $d(s)$ возрастает при $s \rightarrow \infty$.

Таким образом, получили выражения (87) и (88), которые определяют ограничения на параметр наклона функции $U(s, t)$ в точке $t = 0$ и на отношение параметров наклона $U(s, t)$ и амплитуды рассеяния. Убывание $\Delta(s)$ при $s \rightarrow \infty$ показывает, что функция $U(s, t)$ является более пологой вблизи нуля, чем амплитуда рассеяния. Обе оценки зависят от поведения $d(s)$ при $s \rightarrow \infty$.

Если теперь воспользуемся полученной оценкой $b(s)$, то для нижней границы функции $U(s, t)$ в случае больших углов рассея-

* Нетрудно показать, что для малых передач $t \sim 0$ подынтегральное выражение отлично от нуля только для близких значений переменных интегрирования $t_1 \sim t_2$. В силу того, что $F(s, t)$ быстро убывает с ростом $|t|$, основной вклад в интеграл (82) будет давать область малых t_i , $i = 1, 2$.

ния имеем

$$|\bar{U}(t, \cos \theta)| \geq \exp[-\varphi_0(s)], \quad (89)$$

где

$$\varphi_0(s) = d' \frac{\sqrt{s} \ln s}{\{2(b' + c' \sqrt{\bar{u}(s)/a(s)})[\ln s/a(s)]\}^{1/2}}, \quad (90)$$

b' , c' и d' — постоянные. Это выражение отличается от соответствующего выражения для $\varphi_0(s)$ в случае амплитуды рассеяния $F(s, t)$ появлением фактора $[\bar{u}(s)/a(s)]^{1/2}$ во втором слагаемом знаменателя. Используя неравенство (87), а также ограничение $a(s) \leq \ln^2 s$, можно получить следующую оценку для функции $\varphi_0(s)$:

$$\varphi_0(s) \leq d' \frac{\sqrt{s} \ln s}{[b' + c' \sqrt{\bar{d}(s)} \ln s/a(s)]^{1/2}} \leq d' \frac{\sqrt{s} \ln s}{[b' + c' \sqrt{\bar{d}(s)/\ln s}]^{1/2}}. \quad (91)$$

Из формулы (91) следует, что если $\bar{d}(s) \leq \ln^2 s$, то для $\varphi_0(s)$ справедливо неравенство $\varphi_0(s) \leq \sqrt{s} \ln s$, правая часть которого совпадает с оценкой энергетической зависимости $\varphi_0(s)$ в случае амплитуды рассеяния. Если же $\bar{d}(s) > \ln^2(s)$, то имеем

$$\varphi_0(s) \leq [\ln s / \sqrt{\bar{d}(s)}]^{1/2} \sqrt{s}.$$

Два последних неравенства показывают, что для рассеяния на большие углы нижняя граница функции $U(s, t)$ превосходит соответствующее значение для амплитуды рассеяния. Отметим, что этот вывод достаточно общий, так как он основан лишь на предположении о возрастании отношения $\bar{d}(s)$ при $s \rightarrow \infty$. Если же предположить быстрое убывание неупругого сечения при $s \rightarrow \infty$: $\bar{d}(s) \sim s^2 \ln^2 s$, то нижняя граница (89) становится степенной. Полученные оценки показывают, что функция $U(s, t)$ по порядку величины не меньше амплитуды, а при определенных условиях на поведение упругого сечения превосходит амплитуду рассеяния. Эти оценки существенно зависят от поведения отношения $\sigma_{el}(s)/\sigma_{inel}(s)$, которое определяет границу для $U(s, 0)$ и логарифмическую производную $\bar{U}(s, t)$ в точке $t = 0$. Ограничение, найденное для функции $\bar{U}(s, 0)$, не имеет аналога в случае амплитуды рассеяния. Это подчеркивает вывод о том, что $U(s, t)$ является новой характеристикой для описания процесса рассеяния.

6. СВЯЗЬ ПРЯМОГО И АННИГИЛЯЦИОННОГО КАНАЛОВ РЕАКЦИИ, ОСНОВАННАЯ НА АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ U-МАТРИЦЫ

Введение. Основопологающей идеей современной физики высоких энергий является понятие об амплитуде рассеяния как о единой аналитической функции своих переменных [23]. Именно это

понятие позволило установить ряд важных закономерностей упругих и неупругих процессов и нарисовать наглядную физическую картину сильных взаимодействий при высоких энергиях в рамках лишь общих принципов локальной теории поля [24, 25]. Для получения динамического аппарата теории сильных взаимодействий весьма плодотворной оказалась идея об использовании связи прямого и аннигиляционного каналов реакции [25]. Наиболее неясным здесь остается то, что должно быть главным результатом предложенной схемы связи каналов — в какой мере амплитуда рассеяния, аналитически продолженная из аннигиляционного канала в прямой, соответствует физической действительности.

Трудности обычной схемы связаны прежде всего с требованием, по которому аналитически продолженная амплитуда рассеяния должна удовлетворять условию унитарности в прямом канале. Конечно, это условие выполнялось бы автоматически, если бы дело имели с точной амплитудой. Однако всегда продолжается некоторое приближенное выражение, а в этом случае положение может измениться радикально. Если даже условие унитарности удачно удовлетворено в одном канале реакции, трудно судить о том, что произойдет при аналитическом продолжении амплитуды.

На серьезность отмеченных трудностей указывает, например, то обстоятельство, что точные решения уравнения Бете — Солпитера для состояния рассеяния, продолженные в другой канал, обычно явно противоречат условию унитарности [26]. Соответствующие парциальные амплитуды при достаточно больших постоянных связи по модулю превышают единицу.

Те же самые соображения можно высказать и по поводу схемы комплексных орбитальных моментов. Пусть осуществляется самый простой случай, когда амплитуда рассеяния в аннигиляционном канале мероморфна и достаточно быстро убывает в нужной части l -плоскости. Аналитическое продолжение амплитуды в прямой канал тогда не вызывает затруднений. В результате амплитуда рассеяния при асимптотически больших энергиях и фиксированных передачах импульса представляется в виде суммы степенных функций энергии. При достаточно большом показателе главного слагаемого полное сечение рассеяния может увеличиваться, причем этот рост находится в явном противоречии с условием унитарности. Сочетание метода аналитического продолжения ряда парциальных амплитуд с методом уравнения Бете — Солпитера [27, 28] показывает, что степень роста полного сечения связана с величиной постоянной связи.

Таким образом, в традиционной схеме метода комплексных орбитальных моментов также не можем выйти за рамки слабой связи. Предположение о существовании полюса, приводящего

к постоянному полному сечению, лежит на грани конфликта с условием унитарности. Введение такого полюса можно оправдать лишь после успеха обработки экспериментальных данных. Современные данные, однако, указывают на возможность неограниченного роста полного сечения. Нельзя, конечно, отрицать возможности согласования и этих данных с теоретической схемой для усложнения аналитической структуры амплитуды в l -плоскости, введения итерационных рядов реджевских амплитуд и т. п. Однако вся эта процедура не может не привести к затемнению первоначально ясной идеи связи двух каналов реакции рассеяния.

Анализ перечисленных выше противоречий наводит на мысль, что амплитуда рассеяния — просто неподходящий объект для аналитического продолжения. С другой стороны, идея использования связи прямого и аннигиляционного каналов реакции для нахождения динамического аппарата теории сильных взаимодействий чрезвычайно привлекательна и плодотворна. Требование удовлетворительного выполнения условия унитарности заставляет искать другие способы связи прямого и аннигиляционного каналов. Предлагаемый способ связи каналов [28], который основан на аналитическом продолжении обобщенной матрицы реакций, снимает многие трудности, связанные с прямым аналитическим продолжением амплитуды.

Выше была рассмотрена схема построения одновременного уравнения для волновой функции системы из двух взаимодействующих частиц, которая определяется выражением (1).

Волновая функция частицы 1 и античастицы 2 с теми же импульсами

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \langle 0 | T(\varphi_1(x_1) \varphi_2^*(x_2) S) | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \quad (92)$$

связана с волновой функцией $\varphi_0(x_1, x_2)$, определяемой равенством (2), аналогичным соотношением

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2) + \int dy_1 dy_2 D_1^c(x_1 - y_1) \times \\ \times D_2^c(x_2 - y_2) \tilde{R}(y_1, y_2; z_1, z_2) \varphi_0(z_1, z_2) dz_1 dz_2, \quad (93)$$

причем справедливо соотношение

$$R_1^1(x_1, x_2; y_1, y_2) = \tilde{R}(x_1, y_2; y_1, x_2). \quad (94)$$

В импульсном представлении вне массовой поверхности

$$R(p_1, p_2; q_1, q_2) = \tilde{R}(p_1, -q_2; q_1, -p_2). \quad (95)$$

Соотношения (94) и (95) — обычные кроссинг-соотношения для амплитуд реакции с участием частиц и античастиц. Связь функций R и \tilde{R} в импульсном представлении определяет возможность

аналитического продолжения амплитуды рассеяния из области физических значений переменных перекрестного канала реакции в соответствующую область прямого канала. С другой стороны, эти функции определяют квазипотенциалы в соответствующих каналах.

Аналогично тому, как это сделано для амплитуды рассеяния двух частиц, нетрудно показать, что амплитуда рассеяния частицы на античастице и соответствующая обобщенная матрица реакции связаны аналогичным уравнением:

$$\tilde{\mathcal{F}}(p_1, q_1) = \tilde{U}(p_1, q_1) + i\pi \int \frac{dk_1}{2k_1^0 2k_2^0} \delta(E_p - E_q) \tilde{U}(p_1; k_1) \tilde{\mathcal{F}}(k_1, q_1). \quad (96)$$

Из соотношений (20) и (95) вытекает, что имеет место равенство

$$U_{\infty}(p_1, p_2; q_1, q_2) = \tilde{U}_{\infty}(p_1, -q_2; q_1, -p_2). \quad (97)$$

Из (95) следует, что амплитуды \mathcal{F} и $\tilde{\mathcal{F}}$ связаны соотношением

$$\mathcal{F}(s, t) = \tilde{\mathcal{F}}(t, s). \quad (98)$$

Из уравнений (28) и (96) или прямо из равенства (97) вытекает, что такое же соотношение справедливо и для обобщенной матрицы реакций:

$$U(s, t) = \tilde{U}(t, s). \quad (99)$$

Таким образом, можно предложить следующий способ описания рассеяния при высоких энергиях: задается амплитуда рассеяния в аннигиляционном канале, находится обобщенная матрица реакций, затем она аналитически продолжается в прямой канал, после чего решается уравнение для амплитуды рассеяния. Покажем, как реализуется эта программа [28].

Об аналитическом продолжении U -матрицы. Обсудим здесь спектральное представление для функции $\tilde{U}(t, s)$ и выделение четной и нечетной составляющих $\tilde{U}^{\pm}(t, s)$, парциальные коэффициенты которых допускают однозначное аналитическое продолжение в l -плоскость и для которых имеет место реджевское асимптотическое поведение в пределе высоких энергий в прямом канале реакций.

Релятивистское уравнение теории затухания (96) определяет преобразование от амплитуды рассеяния $\tilde{\mathcal{F}}(t, s)$ к функции $\tilde{U}(t, s)$. Пусть для амплитуды имеет место следующее спектральное представление:

$$\tilde{\mathcal{F}}(t, s) = \int_{4m^2}^{\infty} dv \frac{\sigma_1(t, v)}{v-s} + \int_{4m^2}^{\infty} dv \frac{\sigma_2(t, v)}{v-u} \equiv F_1(t, s) + F_2(t, u).$$

Переходя, как обычно, к полусумме и полуразности спектральных функций $\sigma_i(t, \nu)$ и вводя обозначение $\tilde{\mathcal{F}}^\pm(t, s) = F^\pm(t, s) \pm \pm F^\pm(t, u)$, где $F^\pm(t, s)$ определяются спектральными интегралами с плотностями $\sigma^\pm(t, \nu)$, представим амплитуду рассеяния в виде суммы $\tilde{\mathcal{F}}(t, s) = \tilde{\mathcal{F}}^+(t, s) + \tilde{\mathcal{F}}^-(t, s)$. Первое слагаемое в этой сумме разлагается только по четным парциальным волнам ($l = 2k$), а второе — только по нечетным ($l = 2k + 1$). Определяя парциальные амплитуды рассеяния как коэффициенты разложения

$$\tilde{\mathcal{F}}^\pm(t, s) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l^\pm(t) P_l \left(1 + \frac{2s}{t-4m^2} \right), \quad (100)$$

получаем

$$f_l^\pm(t) = 2 \int_{4m^2}^{\infty} d\nu \sigma^\pm(t, \nu) Q_l \left(1 + \frac{2\nu}{t-4m^2} \right). \quad (101)$$

Функции $f_l^\pm(t)$ допускают однозначное аналитическое продолжение в l -плоскость, причем парциальная амплитуда $f_l(t) = f_l^+(t)$ для четных l и $f_l(t) = f_l^-(t)$ для нечетных значений l .

Уравнение (96), связывающее $\tilde{\mathcal{F}}(t, s)$ и $\tilde{U}(t, s)$, можно написать для четных и нечетных частей отдельно:

$$\tilde{\mathcal{F}}^\pm = \tilde{U}^\pm + i\pi \tilde{U}^\pm \mathcal{F}^\pm, \quad (102)$$

причем $\tilde{U}^+(t, s) + \tilde{U}^-(t, s) = \tilde{U}(t, s)$. Эти уравнения в парциальных волнах имеют следующий вид:

$$f_l^\pm(t) = u_l^\pm(t) [1 + i\rho(t) f_l^\pm(t)]. \quad (103)$$

Определяемые соотношениями (103) функции $u_l^\pm(t)$ допускают однозначное аналитическое продолжение на комплексные значения $l: u^\pm(l, t)$.

Анализ членов итерационного ряда для каждой из функций $u_l^\pm(t)$ показывает, что его члены можно представить в спектральном виде, аналогичном (101). Предположим, что в некоторой области по t имеет место следующее представление:

$$u_l^\pm(t) = 2 \int_{4m^2}^{\infty} d\nu \rho^\pm(t, \nu) Q_l \left(1 + \frac{2\nu}{t-4m^2} \right), \quad (104)$$

причем функция $\rho^\pm(t, \nu)$, в силу (101) и (103), должна удовлетворять известным [28] уравнениям

$$\rho^\pm(t, \nu) = \sigma^\pm(t, \nu) + \int_{4m^2}^{\infty} d\nu_1 R^\pm(t, \nu, \nu_1) \rho^\pm(t, \nu_1), \quad (105)$$

ядра которых определяются выражением

$$iR^{\pm}(t, v, v_1) = \frac{i\rho(t)}{i(t-4m^2)} \int_{4m^2}^{\infty} \sigma^{\pm}(t, v_2) \frac{\theta(K) dv_2}{\sqrt{K(\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)}}, \quad (106)$$

где

$$K(v, v_1, v_2) = v^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2vv_1v_2 - 1 \quad \text{и} \quad \tilde{v} = 1 + 2v/(t-4m^2).$$

Используя представление (106), функции $\tilde{U}^{\pm}(t, s)$ можно записать в виде суммы

$$\tilde{U}^{\pm}(t, s) = \tilde{U}'^{\pm}(t, s) \pm \tilde{U}''^{\pm}(t, u), \quad (107)$$

здесь

$$\tilde{U}'^{\pm}(t, s) = \int_{4m^2}^{\infty} dv \frac{\rho^{\pm}(tv)}{v-s}. \quad (108)$$

Для каждой из функций $\tilde{U}^{\pm}(t, s)$, представленной в виде разложения по парциальным волнам, можно выполнить преобразование Зоммерфельда — Ватсона, которое используется для аналитического продолжения обобщенной матрицы реакций в прямой канал. Чтобы эффективно использовать это представление, необходимо анализ особенностей функций $U^{\pm}(l, t)$ в l -плоскости.

Если, используя полученное спектральное представление, выполнить аналитическое продолжение обобщенной матрицы реакций в s -канал в соответствии с условиями (99), то при $s \rightarrow \infty$ получим реджевскую асимптотическую формулу для функции $U(s, t)$:

$$U(s, t) = g(t) s^{\beta(t)}. \quad (109)$$

Способ получения асимптотической формулы для $U(s, t)$ [29] при $s \rightarrow \infty$ состоит в использовании спектрального представления функций $\tilde{U}^{\pm}(t, s)$ определяемого формулами (107) и (108), и выражения для $\rho^{\pm}(t, v)$ в пределе $v \rightarrow \infty$. В результате имеем

$$U^{\pm}(s, t) = -g^{\pm}(t) \{(\pm 1 + \exp[-i\pi\beta^{\pm}(t)]/\sin \pi\beta^{\pm}(t)\} s^{\beta^{\pm}(t)}. \quad (110)$$

Уравнение, определяющее функции $\beta^{\pm}(t)$, имеет вид

$$\int_0^{i1} \bar{R}(t, x) x^{\beta^{\pm}(t)} dx = 1, \quad (111)$$

где

$$i\bar{R}^{\pm}(t, x) = 2\rho(t) \int_{4m^2}^{\infty} \sigma(t, y) \frac{\theta[(1-x^2)-4xy(t-4m^2)-1]}{[(1-x^2)-4xy(t-4m^2)-1]^{1/2}} dy. \quad (112)$$

Отметим, что при выводе формулы (109) не накладывается ограничение $\beta(0) \leq 1$, необходимое для сохранения унитарности

в прямом канале в случае, когда осуществляется асимптотическое продолжение амплитуды рассеяния. Значение $\beta(0)$ определяет асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ поведение полного сечения взаимодействия $\sigma_{\text{tot}}(s)$.

Вычисление амплитуды в прямом канале. Вычислим амплитуду рассеяния вперед, исходя из выражения (110) для обобщенной матрицы реакций. Переходя к представлению прицельного параметра, получаем

$$\mathcal{F}(s, t) = \frac{s}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{bu(b, s)}{1 - iu(b, s)} J_0(b \sqrt{-t}) db, \quad (113)$$

где

$$u(b, s) = \frac{\pi^2}{s} \int_0^\infty \sqrt{-t} U(s, t) J_0(b \sqrt{-t}) d(\sqrt{-t}). \quad (114)$$

Представим функцию $U(s, t)$ в области малых передач импульса в виде

$$U(s, t) = -g\xi(0) (s/s_0)^{\beta(0)} \exp\{t\beta'(0) [\ln(s/s_0) - i\pi/2]\}, \\ \xi(0) = -i + \text{ctg}[\pi\beta(0)/2]. \quad (115)$$

Тогда имеем $u(b, s) = u(s) \exp(-b^2/a)$, где $u(s) = 2\pi^2 g [i\xi(0)/(as_0)] \times (s/s_0)^{\beta(0)-1}$; $a = 4\beta'(0) [\ln(s/s_0) - i\pi/2]$. Для полного сечения взаимодействия из формулы (113) находим

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = \frac{8\pi^3}{s} \text{Im} \mathcal{F}(s, 0) = 4\pi \text{Re} [a(s) \ln(1 + u(s))] = \\ = 16\pi\beta'(0) \text{Re} \{[\ln(s/s_0) - i\pi/2] \times \\ \times \ln[1 + i\pi^2 g\xi(0)/\{2s_0\beta'(0) [\ln(s/s_0) - i\pi/2]\} (s/s_0)^{\beta(0)-1}]\}. \quad (116)$$

Из последнего выражения легко видеть, что в случае, когда $\beta(0) \leq 1$, асимптотический при $s \rightarrow \infty$ вклад в полное сечение имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 8\pi^3 (g/s_0) (s/s_0)^{\beta(0)-1}. \quad (117)$$

Если же $\beta(0) > 1$, то $\sigma_{\text{tot}}(s) = 16\pi\beta'(0) [\beta(0) - 1] \ln^2(s/s_0)$, т. е. полное сечение растет максимально допустимым образом, насыщая унитарный предел. Учет предасимптотических членов в формуле для полного сечения позволяет в случае $\beta(0) > 1$ получить следующее разложение по степеням логарифма:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = a \ln^2(s/s_0) + b \ln(s/s_0) + c + \dots,$$

где оставлены члены, не убывающие при $s \rightarrow \infty$. Следует также учитывать возможность появления нескольких конкурирующих

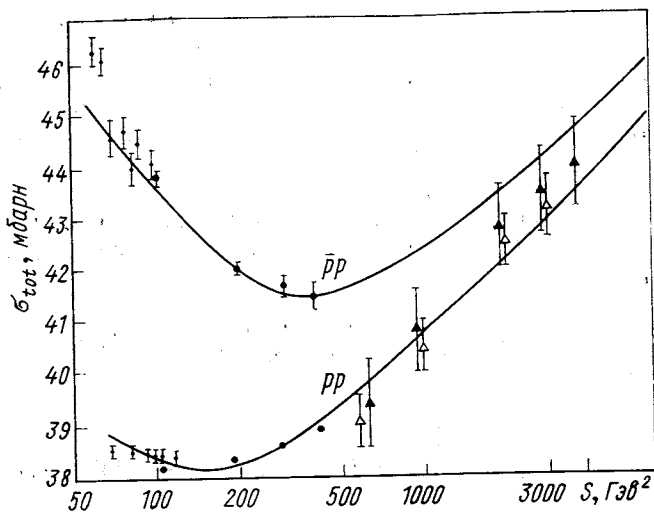


Рис. 1. Полные сечения pp - и $\bar{p}p$ -рассеяния. Экспериментальные точки из работ [32—34]

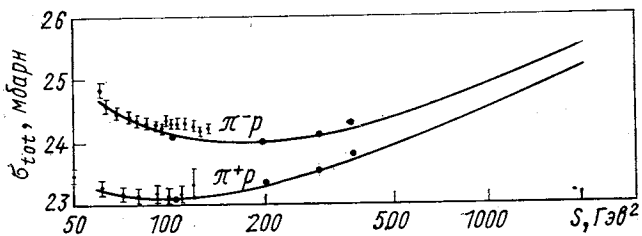


Рис. 2. Полные сечения $\pi^\pm p$ -рассеяния. Экспериментальные точки из работ [32, 33]

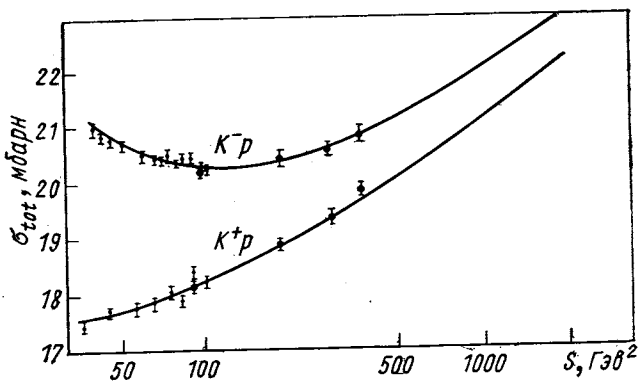


Рис. 3. Полные сечения $K^\pm p$ -рассеяния. Экспериментальные точки из работ [32, 33]

решений уравнения (111). Данная схема связи каналов, по-видимому, более соответствует физической действительности, чем традиционный подход, связанный с аналитическим продолжением амплитуды рассеяния, особенно ввиду экспериментально обнаруженного неограниченного роста полных сечений взаимодействия адронов. При таком подходе удается простым образом, не усложняя специально схему и не вводя всякий раз новые типы возможных сингулярностей, включить все допустимые условием унитарности зависимости полного сечения взаимодействия от энергии. В рамках такого подхода зависимость траекторий от константы связи, полученная в моделях теории поля [26], приводит к росту полного сечения взаимодействия, если константа связи велика. Следовательно, экспериментально наблюдаемый рост полных сечений может быть понят в теории поля как непосредственное следствие неслабой связи. При этом адекватным динамическим аппаратом является подход, использующий аналитическую структуру обобщенной матрицы реакций.

В работе [31] была проведена обработка экспериментальных данных по полным сечениям взаимодействия адронов в области энергий ИФВЭ, NAL и ISR [32—34] на основе описанного выше подхода. Результаты проведенных вычислений приводятся на рис. 1—3. Численные значения параметров даны в таблице.

Таблица

Реакция	pp	$\bar{p}p$	π^+p	π^-p	K^+p	K^-p
Число экспериментальных точек N	27		30		25	
χ^2	44,8		40,4		17,1	
$\beta(0)$	$1,033 \pm 0,002$		$1,025 \pm 0,007$		$1,056 \pm 0,005$	
$\beta'(0)$, <i>мкбарн</i>	$1,80 \pm 0,07$		$2,29 \pm 0,4$		$1,16 \pm 0,11$	
g , $G\text{эв}^2$	$246,2 \pm \pm 11,5$	$582,4 \pm \pm 51,5$	$113 \pm \pm 23$	$229 \pm \pm 28$	$44,6 \pm \pm 15$	$198,6 \pm \pm 20,2$
s_0 , $G\text{эв}^2$	$76,8 \pm \pm 3,6$	$165 \pm \pm 15,3$	$60,6 \pm \pm 12$	$118 \pm \pm 14$	$30,9 \pm \pm 10$	$118,5 \pm \pm 12$

Авторы глубоко благодарны академику А. А. Логунову за многочисленные ценные советы при выполнении работ, составивших основу настоящего обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fock V. A. «Z. Phys. Sowjetunion», 1934, v. 6, p. 425; Tamm I. E. «J. Phys. USSR», 1945, v. 9, p. 449; Dancoff S. M. «Phys. Rev.», 1950, v. 78, p. 382.
2. Логунов А. А., Хрусталеv О. А. В кн.: Сборник «Проблемы теоретической физики», посвященный И. Е. Тамму. М., «Наука», 1972, с. 96.
3. Salpeter E. E., Bethe H. A. «Phys. Rev.», 1951, v. 84, p. 1232.
4. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. В кн.: Сборник «Проблемы теоретической физики», посвященный 70-летию Н. Н. Боголюбова. М., «Наука», 1969, с. 261.
5. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. «Nuovo cimento», 1963, v. 29, p. 380.
6. Macke W. «Z. Naturforsch.», 1953, Bd 8, S. 599, 615; Zimmermann W. «Nuovo cimento», Suppl. 1, 1954, v. 11, p. 43; Krolikowski W., Rzewuski J. «Nuovo cimento», 1955, v. 20, p. 203.
7. Логунов А. А. и др. «ТМФ», 1971, т. 6, с. 157.
8. Sokolov A. «J. Phys. USSR», 1941, v. 5, p. 231; Heitler W. «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1941, v. 37, p. 291; Wilson A. H. Ibid., p. 301.
9. Саврин В. И., Тюрин Н. Е. Препринт ИФВЭ СТФ 73-31, Серпухов, 1973.
10. Wigner E. P. «Phys. Rev.», 1946, v. 70, p. 15.
11. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
12. Белов В. К. «ТМФ», 1973, т. 14, с. 45.
13. Белов В. К., Саврин В. И., Тюрин Н. Е. «ТМФ», 1973, т. 14, с. 277.
14. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1969.
15. Арбузов Б. А. и др. «ЖЭТФ», 1964, т. 46, с. 1266.
16. Oehme R. «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 1840.
17. Саврин В. И., Тюрин Н. Е. Препринт ИФВЭ 74-91, Серпухов, 1974.
18. Тюрин Н. Е. Препринт ИФВЭ 74-93, Серпухов, 1974.
19. Ширков Д. В., Мещеряков В. А., Серебряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
20. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A. «Phys. Lett. B», 1967, v. 24, p. 583.
21. Cerulus F., Martin A. «Phys. Lett.», 1964, v. 8, p. 80.
22. Логунов А. А. и др. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 1, 3.
23. Боголюбов Н. Н. Доклад на Международной конференции в Сиэтле, 1956.
24. Логунов А. А. и др. «ТМФ», 1971, т. 9, с. 3, 153.
25. Froissart M. «Phys. Rev.», 1964, v. 123, p. 1053; Chew G. F., Frautschi S. C. «Phys. Rev.», 1964, v. 123, p. 1478.
26. Nakanishi N. «Suppl. Progr. Theor. Phys.», 1969, v. 43, p. 1.
27. Lee B. W., Sawyer R. F. «Phys. Rev.», 1962, v. 127, p. 2266.
28. Тюрин Н. Е., Хрусталеv О. А. Препринт ИФВЭ 74-119, Серпухов, 1974.
29. Белов В. К. «Вест. МГУ. Физика. Астрономия», 1974, т. 4, с. 432.
30. Fubini S., Stroffolini R. Lectures given at Trieste, IAEA, 1962.
31. Семенов С. В. и др. Препринт ИФВЭ 75-24, Серпухов, 1975.
32. Denisov S. P. e.a. «Phys. Lett. B», 1971, v. 36, p. 415, 528; «Nucl. Phys. B», 1973, v. 65, p. 1.
33. Carrol A. S. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 928, 932.
34. Amaldi U. e.a. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 112. Amendolia S. R. e.a. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 119.