

УДК 539.141

## МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ДВУХ И ТРЕХ ЧАСТИЦ

*В. Н. Ефилов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна,

*Г. Шульц*

Центральный институт ядерных исследований, Россендорф, ГДР

Рассмотрен единый метод решения задач двух и трех частиц в модели граничных условий. Этот метод основан на использовании специфических свойств двухчастичных немассовых волновых функций. Показано, что уравнение Шредингера для системы трех тождественных бозонов, взаимодействия которых имеют место только в относительных  $s$ -состояниях и описываются моделью граничных условий без внешнего потенциала, точным образом сводится к одномерному интегральному уравнению.

A unified method of solving the two and three-body problem in the framework of the boundary condition model is considered. This method is used of the special properties of the two-particle off-shell wave function. The Schrödinger equation for the system of three identical bosons interacting only in relative  $s$ -states via boundary condition model without external potential can be reduced to one-dimensional integral equation in an exact way.

### ВВЕДЕНИЕ

Важным вопросом ядерной физики является установление вида нуклон-нуклонного потенциала. Наиболее последовательный метод решения этого вопроса — получение нуклон-нуклонного потенциала на основе мезонной теории ядерных сил. Однако эту теорию в настоящее время нельзя считать полностью завершенной и непротиворечивой. Поэтому в решении вопроса о виде нуклон-нуклонного потенциала находит широкое применение феноменологический подход, основанный на использовании экспериментальных данных по нуклон-нуклонному взаимодействию, а именно данных по фазам упругого рассеяния нуклонов (до энергий  $E \approx 400$  Мэв в лабораторной системе) и данных по дейтону. Примером получаемых таким способом «реалистических» потенциалов служат потенциалы Рейда [1], содержащие наряду с хорошо обоснованным в мезонной теории *ОРЕР*-потенциалом некоторые компоненты, феноменологически описывающие взаимодействия

на малых расстояниях. В частности, взаимодействие на весьма малых расстояниях ( $r \ll 0,4$  ферми) имитируется или твердым кором, или сильным отталкивательным потенциалом с малым радиусом действия.

При построении феноменологических потенциалов одной из простейших возможностей учета короткодействующих сил является введение модели граничных условий (МГУ). Согласно этой модели [2—4], область взаимодействия делится на внешнюю ( $r > c$ ) и внутреннюю ( $r < c$ ). Во внешней области взаимодействие описывается сравнительно простым потенциалом, а эффект короткодействующих сил, которые могут иметь весьма сложный характер, учитывается введением при  $r = c$  граничного условия для логарифмической производной волновой функции. Радиус граничных условий  $c$  и значение логарифмической производной  $f$  при  $r = c$  являются феноменологическими параметрами модели, которые должны определяться из экспериментальных данных. Заметим, что потенциал с твердым кором является частным случаем МГУ при  $f \rightarrow \infty$ . Для интерпретации нуклон-нуклонного взаимодействия использовались простая МГУ без внешнего потенциала [2, 3, 5, 6] и МГУ с потенциалом во внешней области [7, 8]. В частности, в работе [8] потенциал во внешней области определялся из мезонной теории.

Введение феноменологических нуклон-нуклонных потенциалов связано с известной неоднозначностью, обусловленной тем, что с экспериментальными данными в принципе совместимо много потенциалов различной формы, содержащих достаточное число параметров. Дополнительным критерием отбора таких потенциалов может служить сопоставление экспериментальных и теоретических данных для системы трех нуклонов. Корректные уравнения для системы трех сильнодействующих частиц были получены Л. Д. Фаддеевым [9]. Как известно, в случае парных взаимодействий ядра трехчастичных интегральных уравнений Фаддеева выражаются через двухчастичные немассовые  $T$ -матрицы. Следовательно, возникает вопрос о корректном определении двухчастичной  $T$ -матрицы для потенциалов, учитывающих короткодействующие силы по МГУ, так как в этом случае ее нельзя найти из обычного уравнения Липпмана — Швингера. Существуют различные способы обхода этой трудности.

Один из методов получения  $T$ -матрицы в МГУ — введение псевдопотенциала, воспроизводящего для волновой функции нужное значение логарифмической производной при  $r = c$  [6, 10]. Другой подход развит в работе [11]: не зависящую от энергии логарифмическую производную волновой функции при  $r = c$  можно получить с помощью некоторой предельной процедуры, применяемой к потенциалу специального вида, действующему во внутренней области. В этом случае как массовые, так и вне-

массовые двухчастичные волновые функции обращаются в нуль во внутренней области. Последнее обстоятельство можно использовать как исходный пункт для получения немассовой  $T$ -матрицы в МГУ. Введение граничного условия при  $r = c$  для логарифмической производной немассовой волновой функции и условия обращения в нуль этой функции во внутренней области вполне достаточно для получения немассовых  $T$ - и  $K$ -матриц в МГУ [12, 13]. Такой подход можно считать в некотором смысле «чистым» методом граничных условий, так как он, в полном соответствии с МГУ, не требует введения псевдопотенциалов или использования предельных процедур для потенциалов специального вида, действующих во внутренней области.

Использование двухчастичных немассовых  $T$ -матриц, соответствующих МГУ, непосредственно в трехчастичных уравнениях Фаддеева приводит к определенным трудностям, обусловленным тем, что эти уравнения не имеют однозначных решений [14, 15]. Последнее обстоятельство связано со специфическими свойствами двухчастичных  $T$ -матриц в МГУ, и, основываясь на этих свойствах, уравнения Фаддеева можно модифицировать и привести к уравнениям, имеющим однозначные решения [15]. Однако для достижения полной однозначности модифицированных уравнений Фаддеева оказывается необходимым введение произвольного трехчастичного параметра, имеющего смысл энергии, при которой функции каналов подчиняются тем же граничным условиям, что и двухчастичные волновые функции. Введение такого параметра оказывается необходимым даже для простейшего случая задачи трех тождественных бозонов [16]. В частном случае МГУ без внешнего потенциала модифицированные уравнения Фаддеева [14, 15] представляют собой интегральные уравнения для функций от одной векторной переменной. Другой подход к решению задачи трех частиц, когда парные взаимодействия описываются с помощью МГУ, развит в работах [17—20]. Граничным условиям, аналогичным условиям для немассовых двухчастичных волновых функций, должна подчиняться полная трехчастичная волновая функция [17, 18]. Это обстоятельство позволяет для МГУ без внешнего потенциала точным образом свести трехчастичное уравнение Шредингера в общем случае к системе уравнений для функций от одной векторной переменной. В частном случае системы трех тождественных бозонов с парными взаимодействиями только в  $s$ -состояниях для нулевого полного момента определение трехчастичной волновой функции сводится к решению одномерного интегрального уравнения для одной функции [19, 20].

Относительно одномерных уравнений работ [19, 20] необходимо сделать следующие замечания: во-первых, эти уравнения получены непосредственно из трехчастичного уравнения Шредингера с учетом граничных условий, вытекающих из условий для вне-

массовых двухчастичных волновых функций в МГУ (в этом отношении их вывод существенным образом отличается от вывода одномерных модифицированных уравнений Фаддеева [14, 15]); во-вторых, полученные в работах [19, 20] уравнения однозначно определяют такие трехчастичные характеристики, как энергия связи  $E_0$  и амплитуды переходов. Вопрос о неоднозначности возникает лишь при нахождении полной волновой функции, и для систем трех частиц, волновые функции которых обладают определенным типом перестановочной симметрии, его можно решить без введения дополнительных параметров, если МГУ рассматривать как предельный случай потенциала специального вида [11]; в-третьих, численное решение одномерного уравнения для системы трех тождественных бозонов дает для энергии связи значение  $E_0 = 7,7 \text{ Мэв}$  [20], что существенно отличается от результата  $E_0 = 12,69 \text{ Мэв}$ , полученного в работе [21] при решении уравнений Фаддеева. Наконец, заметим, что структура уравнений, полученных в работах [19, 20], позволяет простым способом приближенно учесть возможный вклад трехчастичных эффектов, например трехчастичных сил.

Ниже будут изложены основные результаты работ [12, 13, 17—20], представляющие собой единый подход к решению задач двух и трех частиц в МГУ, основанный на использовании граничных условий для немассовых двухчастичных волновых функций.

### 1. ВНЕМАССОВЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ $T$ - И $K$ -МАТРИЦЫ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

**Модель граничных условий без потенциала во внешней области.** Для получения некоторых необходимых соотношений в работах [12, 13] рассматривался двухчастичный потенциал  $V(r)$ , удовлетворяющий условиям, при которых имеют место уравнения Липшмана — Швингера. В этом случае парциальные  $l$ -компоненты  $T$ - и  $K$ -матриц определяются соотношениями:

$$T_l(p, k, Z) = - \int_0^{\infty} r^2 dr j_l(pr) V(r) \psi_{lk}(r, Z); \quad (1)$$

$$K_l(p, k, E) = - \int_0^{\infty} r^2 dr j_l(pr) V(r) \psi_{lk}(r, E), \quad (2)$$

причем в (2)  $E > 0$ , а в (1)  $Z = E \pm i\epsilon$  при  $E > 0$ . Компоненты  $T_l$  и  $K_l$  нормированы условиями

$$T_l(k, k, k^2 + i0) = \exp(i\delta_l) \sin \delta_l/k; \quad (3)$$

$$K_l(k, k, k^2) = \text{tg } \delta_l/k, \quad (4)$$

где  $\delta_l$  — парциальная фаза рассеяния.

Внемассовые волновые функции  $\psi_{lh}$  в (1) и (2) удовлетворяют уравнениям Липшмана — Швингера

$$\psi_{lh}(r, Z) = j_l(kr) - \int_0^\infty r'^2 dr' \mathcal{G}_l(r, r', Z) V(r') \psi_{lh}(r', Z); \quad (5)$$

$$\psi_{lh}(r, E) = j_l(kr) - \int_0^\infty r'^2 dr' \mathcal{G}_l^{(0)}(r, r', E) V(r') \psi_{lh}(r', E). \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) соответствующие функции Грина имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_l(r, r', Z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{j_l(pr) j_l(pr')}{p^2 - Z} = \\ &= i \sqrt{Z} j_l(\sqrt{Z} r_<) h_l^{(1)}(\sqrt{Z} r_>); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_l^{(0)}(r, r', E) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{j_l(pr) j_l(pr')}{p^2 - E} = \\ &= -\sqrt{E} j_l(\sqrt{E} r_<) n_l(\sqrt{E} r_>), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $j_l(x)$ ,  $h_l^{(1)}(x)$  и  $n_l(x)$  — соответственно сферические функции Бесселя, Ганкеля и Неймана. Заметим, что в (7)  $\sqrt{Z} = \pm \sqrt{E}$  для  $Z = E \pm i\varepsilon$ ,  $E > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{Z} = i\gamma$  для  $Z = -\gamma^2 < 0$ , а в (8)  $E > 0$ . Из уравнений (5) и (6) и из определений (1), (2) и (7), (8) непосредственно следует, что для короткодействующих потенциалов  $V(r)$  внемассовые волновые функции имеют следующий асимптотический вид:

$$\psi_{lh}(r, Z) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} j_l(kr) + i \sqrt{Z} T_l(\sqrt{Z}, k, Z) h_l^{(1)}(r \sqrt{Z}); \quad (9)$$

$$\psi_{lh}(r, E) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} j_l(kr) - \sqrt{E} K_l(\sqrt{E}, k, E) n_l(r \sqrt{E}), \quad (10)$$

а матрицы  $T_l$  и  $K_l$  можно выразить через фурье-компоненты  $\psi_{lh}(p, Z)$  и  $\psi_{lh}(p, E)$  соответствующих внемассовых волновых функций:

$$T_l(p, k, Z) = (p^2 - Z) \left[ \psi_{lh}(p, Z) - \frac{\pi}{2p^2} \delta(p - k) \right]; \quad (11)$$

$$K_l(p, k, E) = (p^2 - E) \left[ \psi_{lh}(p, E) - \frac{\pi}{2p^2} \delta(p - k) \right]. \quad (12)$$

При получении последнего соотношения (12) определение (8) считается, как обычно, эквивалентным следующему:

$$\mathcal{G}_l^{(0)}(r, r', E) = (1/2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathcal{G}_l(r, r', E + i\varepsilon) + \mathcal{G}_l(r, r', E - i\varepsilon)]. \quad (13)$$

Отметим далее два факта. Во-первых, из интегральных уравнений (5) и (6) следуют дифференциальные уравнения:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + Z - V(r) \right] \psi_{lk}(r, Z) = (Z - k^2) j_l(kr); \quad (14)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E - V(r) \right] \psi_{lk}(r, E) = (E - k^2) j_l(kr) \quad (15)$$

соответственно с граничными условиями (9) и (10) при  $r \rightarrow \infty$ . Во-вторых, из уравнений (5) и (6) и из определений (1), (2) и (7), (8) можно получить связь между  $T_l$ - и  $K_l$ -матрицами [22]:

$$K_l(p, k, s^2) = T_l(p, k, s^2 + i0) - i s \frac{T_l(p, s, s^2 + i0) T_l(s, k, s^2 + i0)}{1 + i s T_l(s, s, s^2 + i0)}. \quad (16)$$

Приведенных выше соотношений вполне достаточно для того, чтобы найти правильные выражения для немассовых  $T$ - и  $K$ -матриц в модели граничных условий. Для этого будем считать согласно работам [12, 13], что выполняются следующие два предположения:

1) для модельных немассовых волновых функций  $\psi_{lk}^{(c)}$  и модельных  $T_l^{(c)}$ - и  $K_l^{(c)}$ -матриц справедливы соотношения (9) — (12), не содержащие в явном виде потенциала;

2) модельные немассовые функции  $\psi_{lk}^{(c)}$  удовлетворяют граничным условиям:

$$\psi_{lk}^{(c)} = 0, \quad r < c; \quad (17)$$

$$c \left[ \frac{d}{dr} r \psi_{lk}^{(c)} \right]_{r=c_+} = f_l [r \psi_{lk}^{(c)}]_{r=c_+}, \quad (18)$$

где  $c_+ = c + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $c$  — радиус граничных условий, который может зависеть от  $l$ ;  $f_l$  — вещественный модельный параметр, причем  $c$  и  $f_l$  не зависят от энергии. Значение  $f_l \rightarrow \infty$  соответствует модели твердого шара радиуса  $c$ . Такой подход наиболее прост и логичен и полностью соответствует духу МГУ, в рамках которой не должен рассматриваться конкретный вид взаимодействия во внутренней области  $r < c$ . С этой точки зрения он принципиально отличается от метода, развитого в работе [11] и основанного на использовании уравнений (5), (6) и (14), (15) для потенциала специального вида, действующего в области  $r \leq c$ .

В рассматриваемой модели во внешней области потенциал отсутствует, поэтому соотношения (9) и (10) определяют вид немассовых волновых функций при  $r > c$ :

$$\psi_{lk}^{(c)}(r, Z) = j_l(kr) + i \sqrt{Z} T_l^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z) h_l^{(2)}(r \sqrt{Z}); \quad (19)$$

$$\psi_{lk}^{(c)}(r, E) = j_l(kr) - \sqrt{E} K_l^{(c)}(\sqrt{E}, k, E) n_l(r \sqrt{E}), \quad (20)$$

откуда при учете граничного условия (18) непосредственно следуют выражения для полумассовых  $T_l^{(c)}$ -и  $K_l^{(c)}$ -матриц:

$$T_l^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z) = \frac{i}{\sqrt{Z}} \frac{g_l(kc, f_l)}{D_l^{(1)}(c\sqrt{Z}, f_l)}; \quad (21)$$

$$K_l^{(c)}(\sqrt{E}, k, E) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{g_l(kc, f_l)}{D_l(c\sqrt{E}, f_l)}; \quad (22)$$

где

$$g_l(x, f_l) = x j_{l-1}(x) - (l + f_l) j_l(x); \quad (23)$$

$$D_l^{(1)}(x, f_l) = x h_{l-1}^{(1)}(x) - (l + f_l) h_l^{(1)}(x); \quad (24)$$

$$D_l(x, f_l) = x n_{l-1}(x) - (l + f_l) n_l(x). \quad (25)$$

Внемассовые элементы  $T_l^{(c)}$ - и  $K_l^{(c)}$ -матриц находятся соответственно из выражений (11) и (12). С учетом условия (17) фурье-компоненты  $\psi_{lk}^{(c)}(p, Z)$  и  $\psi_{lk}^{(c)}(p, E)$  будут иметь следующий вид:

$$\psi_{lk}^{(c)}(p, Z) = \int_c^\infty r^2 dr j_l(pr) \psi_{lk}^{(c)}(r, Z); \quad (26)$$

$$\psi_{lk}^{(c)}(p, E) = \int_c^\infty r^2 dr j_l(pr) \psi_{lk}^{(c)}(r, E), \quad (27)$$

где внемассовые функции  $\psi_{lk}^{(c)}$  определяются выражениями (19) и (20). Для вычисления (26) сферическую функцию Ганделя  $h_l^{(1)}(r\sqrt{Z})$  в (19) при  $r > c$  с помощью (7) удобно представить следующим образом:

$$h_l^{(1)}(r\sqrt{Z}) = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \frac{\mathcal{G}_l(r, c, Z)}{j_l(c\sqrt{Z})}, \quad (28)$$

и для нахождения фурье-компоненты  $\psi_{lk}^{(c)}(p, Z)$  (26) оказывается необходимым вычислить интеграл

$$I(Z) = \int_c^\infty r^2 dr j_l(pr) \mathcal{G}_l(r, c, Z),$$

который, как это следует из (7), будет иметь вид

$$I(Z) = \frac{j_l(pc)}{p^2 - Z} - i\sqrt{Z} F_l(p, \sqrt{Z}) h_l^{(1)}(c\sqrt{Z}), \quad (29)$$

где

$$F_l(p, k) = \int_0^c r^2 dr j_l(pr) j_l(kr). \quad (30)$$

Для положительных энергий ( $E > 0$ ) фурье-компонента  $\psi_{lk}(p, E)$  в (12) имеет особенность при  $p^2 = E$ , поэтому необходимы определенные правила для вычисления некоторых интегралов при нахождении  $\psi_{lk}^{(c)}(p, E)$  (27). По аналогии с предыдущим, функцию Неймана  $n_l(r\sqrt{E})$  в (20) с помощью (8) при  $r > c$  представим в виде

$$n_l(r\sqrt{E}) = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\mathcal{G}_l^{(0)}(r, c, E)}{j_l(c\sqrt{E})}. \quad (31)$$

Таким образом, чтобы определить фурье-компоненту (27), необходимо найти интеграл

$$I_0(E) = \int_c^\infty r^2 dr j_l(pr) \mathcal{G}_l^{(0)}(r, c, E).$$

Учитывая соотношение (13), этот интеграл можно рассматривать как следующее предельное выражение:

$$I_0(E) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [I(E + i\varepsilon) + I(E - i\varepsilon)].$$

Используя выражение (29) для  $I(Z)$  и принимая во внимание, что  $\sqrt{E \pm i\varepsilon} = \pm \sqrt{E} (\varepsilon \rightarrow 0)$ ,  $h_l^{(1)}(-x) = (-1)^l h_l^{(2)}(x)$ ,  $h_l^{(1)}(x) - h_l^{(2)}(x) = 2in_l(x)$ , легко найти окончательный результат:

$$I_0(E) = j_l(pc)/(p^2 - E) + \sqrt{E} F_l(p, \sqrt{E}) n_l(c\sqrt{E}). \quad (32)$$

Из полученных выражений и соотношений (11) и (12) непосредственно определяются немассовые  $T_l^{(c)}$ - и  $K_l^{(c)}$ -матрицы. Так, из (26), (19) и (29) следует, что

$$T_l^{(c)}(p, k, Z) = -(p^2 - Z) F_l(p, k) + \frac{T_l^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z)}{j_l(c\sqrt{Z})} [j_l(pc) - i\sqrt{Z}(p^2 - Z) F_l(p, \sqrt{Z}) h_l^{(1)}(c\sqrt{Z})], \quad (33)$$

а соотношения (27), (20) и (32) приводят к результату

$$K_l^{(c)}(p, k, E) = -(p^2 - E) F_l(p, k) + \frac{K_l^{(c)}(\sqrt{E}, k, E)}{j_l(c\sqrt{E})} \times \\ \times [j_l(pc) + \sqrt{E}(p^2 - E) F_l(p, \sqrt{E}) n_l(c\sqrt{E})], \quad (34)$$

где полумассовые значения  $T_l^{(c)}$ - и  $K_l^{(c)}$ -матриц и  $F_l(p, k)$  определяются соответственно выражениями (21), (22) и (30). Легко убедиться, что выражения (33) и (34) для  $T_l^{(c)}$ - и  $K_l^{(c)}$ -матриц симметричны по импульсам  $p$  и  $k$  и что  $T_l^{(c)}$ -матрица (33) удовлетворяет условию унитарности, а для положительных энергий выполняется соотношение (16). При отрицательных энергиях  $Z = -E_0$ ,



являющихся решениями уравнения

$$ic \sqrt{E_0} h_{l-1}^{(1)}(ic \sqrt{E_0}) - (l + f_l) h_l^{(1)}(ic \sqrt{E_0}) = 0, \quad (35)$$

$T$ -матрица (33) имеет, согласно (24), полюс. Для триплетного  $s$ -состояния протона и нейтрона энергия  $E_0$  должна быть положена равной энергии связи дейтона  $\varepsilon_d = \alpha^2$ , причем уравнение (35) в этом случае приобретает вид

$$f_0 + \alpha c = 0, \quad (36)$$

а в области  $r > c$  волновая функция дейтона

$$\varphi_d(r) = \sqrt{2\alpha} \exp[-\alpha(r-c)]/r. \quad (37)$$

Если имеется только одно связанное  $s$ -состояние, то соответствующим образом нормированные массовые волновые функции (19) и волновая функция (37) в области  $r > c$  для постоянных  $f_l$  и  $c$  образуют полную ортогональную систему [18].

Как указывалось выше, выражение (33) для  $T$ -матрицы было получено в работе [11] в результате некоторого предельного перехода, применяемого к потенциалу специального вида, действующему в области  $r \leq c$ :

$$V(r) = V_0 \theta(c-r) - cV_1 \delta(r-c), \quad (38)$$

где  $\theta(x) = 1$ ,  $x > 0$ ;  $\theta(x) = 0$ ,  $x < 0$ . Для такого потенциала легко найти в аналитическом виде немассовые волновые функции  $\psi_{lk}(r, Z)$  и  $T$ -матрицу. Последующий переход к пределу  $V_0 \rightarrow \infty$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  при выполнении условия  $c(\sqrt{V_0} - cV_1) = f_l$ , где  $f_l$  — константа, показывает, что предельное значение  $T_l^{(c)}(p, k, Z)$   $T$ -матрицы определяется выражением (33), а предельные волновые функции  $\psi_{lk}^{(c)}(r, Z)$  удовлетворяют условиям (17) и (18).

**Модель граничных условий с потенциалом во внешней области.** В более общем и более реалистическом случае, когда в области вне радиуса граничных условий ( $r > c$ ) действует потенциал  $V(r)$ , будем считать, что немассовые волновые функции  $\psi_{lk}$  подчиняются граничным условиям, аналогичным (17) и (18) [12, 13]:

$$\psi_{lk} = 0, \quad r < c; \quad (39)$$

$$c \left[ \frac{d}{dr} r \psi_{lk} \right]_{r=c+} = f_l [r \psi_{lk}]_{r=c+}, \quad (40)$$

а немассовые значения  $T_l$  и  $K_l$ -матриц определяются соответственно соотношениями (11) и (12). Представим далее волновые функции  $\psi_{lk}$  в виде

$$\psi_{lk} = \psi_{lk}^{(c)} + \Phi_{lk}, \quad (41)$$

где  $\psi_{lk}^{(c)}$  — немассовые волновые функции (19) и (20) в МГУ без внешнего потенциала, удовлетворяющие условиям (17) и (18). Из определения (41) следует, что в области  $r > c$  функции  $\varphi_{lk}$ , согласно (14) и (15), удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + Z \right] \varphi_{lk}(r, Z) = V(r) \psi_{lk}(r, Z); \quad (42)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E \right] \varphi_{lk}(r, E) = V(r) \psi_{lk}(r, E) \quad (43)$$

с потенциалом  $V(r)$ , отличным от нуля только при  $r > c$ , подчиняются граничным условиям (39) и (40) и при  $r \rightarrow \infty$  в соответствии с (9) и (10) имеют следующий асимптотический вид:

$$\varphi_{lk}(r, Z) \sim h_l^{(1)}(r\sqrt{Z}); \quad (44)$$

$$\varphi_{lk}(r, E) \sim n_l(r\sqrt{E}). \quad (45)$$

Дифференциальные уравнения (42) и (43) можно представить, согласно (41), как интегральные уравнения для функций  $\psi_{lk}$ , если ввести функции Грина  $H_l$  и  $H_l^{(0)}$  соответствующих уравнений:

$$\psi_{lk}(r, Z) = \psi_{lk}^{(c)}(r, Z) - \int_c^\infty r'^2 dr' H_l(r, r', Z) V(r') \psi_{lk}(r', Z); \quad (46)$$

$$\psi_{lk}(r, E) = \psi_{lk}^{(c)}(r, E) - \int_c^\infty r'^2 dr' H_l^{(0)}(r, r', E) V(r') \psi_{lk}(r', E). \quad (47)$$

Функции Грина в этих уравнениях определены только в области  $r, r' > c$ , и их можно легко найти в предположении, что МГУ имитирует такое взаимодействие в области  $r < c$ , которое не приводит к образованию связанного состояния при  $E < 0$ , а при  $E > 0$  рассматривается такая область энергий, которая не содержит резонансов, связанных с таким взаимодействием. В этом случае функции Грина можно построить с помощью двух линейно-независимых решений соответственно однородных уравнений (42) и (43). С учетом асимптотического поведения (44) и (45) функций  $\varphi_{lk}$  окончательные выражения для функций Грина будут иметь следующий вид:

$$H_l(r, r', Z) = i\sqrt{Z} \psi_l^{(c)}(\sqrt{Z}(r < c, Z) h_l^{(1)}(r > \sqrt{Z}); \quad (48)$$

$$H_l^{(0)}(r, r', E) = -\sqrt{E} \psi_l^{(c)}(\sqrt{E}(r < c, E) n_l(r > \sqrt{E}). \quad (49)$$

Заметим, что, согласно условию (17), в области  $r < c$ ,  $r' > c$  функции Грина (48) и (49) тождественно равны нулю.

Альтернативные выражения для функций Грина получаются при подстановке соотношений (19) и (20) в (48) и (49), что приводит к следующему результату:

$$H_l(r, r', Z) = \mathcal{G}_l(r, r', Z) - ZT_l^{(c)}(\sqrt{Z}, \sqrt{Z}, Z)h_l^{(1)}(r\sqrt{Z})h_l^{(2)}(r'\sqrt{Z}); \quad (50)$$

$$H_l^{(0)}(r, r', E) = \mathcal{G}_l^{(0)}(r, r', E) + EK_l^{(c)}(\sqrt{E}, \sqrt{E}, E)n_l(r\sqrt{E})n_l(r'\sqrt{E}), \quad (51)$$

где  $\mathcal{G}_l$  и  $\mathcal{G}_l^{(0)}$  определяются соответственно выражениями (7) и (8). Запись функций Грина в форме (50) и (51) позволяет с помощью соотношений (28), (34) и (29), (32) получить для области  $r, r' > c$  следующие интегральные представления:

$$H_l(r, r', Z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{j_l(pr)\psi_{lp}^{(c)}(r', Z)}{p^2 - Z}; \quad (52)$$

$$H_l^{(0)}(r, r', E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \frac{j_l(pr)\psi_{lp}^{(c)}(r', E)}{p^2 - E}, \quad (53)$$

с помощью которых, согласно (11), (12) и (46), (47), легко показать, что немассовые  $T$ - и  $K$ -матрицы имеют вид:

$$T_l(p, k, Z) = T_l^{(c)}(p, k, Z) + T_l^{(V)}(p, k, Z); \quad (54)$$

$$K_l(p, k, E) = K_l^{(c)}(p, k, E) + K_l^{(V)}(p, k, E), \quad (55)$$

где  $T_l^{(c)}$  и  $K_l^{(c)}$  — соответственно значения (33) и (34)  $T$ - и  $K$ -матриц при  $V(r) = 0$ . Связанные с внешним потенциалом  $V(r)$  части  $T_l^{(V)}$  и  $K_l^{(V)}$  полных  $T$ - и  $K$ -матриц по аналогии с (1), (2) определяются следующими выражениями:

$$T_l^{(V)}(p, k, Z) = - \int_c^\infty r^2 dr \psi_{lp}^{(c)}(r, Z) V(r) \psi_{lk}(z, Z); \quad (56)$$

$$K_l^{(V)}(p, k, E) = - \int_c^\infty r^2 dr \psi_{lp}^{(c)}(r, E) V(r) \psi_{lk}(r, E), \quad (57)$$

и удовлетворяют интегральным уравнениям типа Липпмана — Швингера:

$$T_l^{(V)}(p, k, Z) = V_l^{(1)}(p, k, Z) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p'^2 dp' \frac{V_l^{(2)}(p, p', Z) T_l^{(V)}(p', k, Z)}{p'^2 - Z}; \quad (58)$$

$$K_l^{(V)}(p, k, E) = V_l^{(1)}(p, k, E) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p'^2 dp' \frac{V_l^{(2)}(p, p', E) K_l^{(V)}(p', k, E)}{p'^2 - E}. \quad (59)$$

Обобщенные фурье-компоненты  $V_l^{(i)}(p, k, Z)$  потенциала  $V(r)$  в уравнении (58) имеют вид:

$$V_l^{(1)}(p, k, Z) = - \int_c^\infty r^2 dr \psi_{lp}^{(c)}(r, Z) V(r) \psi_{lk}^{(c)}(r, Z); \quad (60)$$

$$V_l^{(2)}(p, k, Z) = - \int_c^\infty r^2 dr \psi_{lp}^{(c)}(r, Z) V(r) j_l(kr). \quad (61)$$

Фурье-компоненты  $V_l^{(i)}(p, k, E)$  в (59) получаются из (60) и (61) формальной заменой переменной  $Z$  на  $E$ .

Заметим, что выражения (54)–(61) имеют место не только для МГУ, но также и тогда, когда во внутренней области  $r < c$  действует некоторый потенциал  $V_c(r)$ . В этом случае выражение (54) для полной  $T$ -матрицы и уравнение (58) хорошо известны из теории для двух неперекрывающихся потенциалов [23]. Вследствие нелинейной связи (16) между  $K$ - и  $T$ -матрицами соотношение (55) и уравнение (59) кажутся не вполне очевидными. Строго говоря, уравнение (59) было получено только для такого потенциала  $V_c(r)$ , который не приводит к резонансам в рассматриваемой области энергий  $E > 0$ . Это ограничение не принципиально, однако в противном случае необходимо более аккуратное построение функции Грина (49). В частном случае  $s$ -рассеяния на потенциале  $V(r)$  с твердым кором ( $f_0 \rightarrow \infty$ ) из полученных выше соотношений для  $K$ -матрицы следует

$$K_0(k, k, k^2) = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{k} \left( \operatorname{tg} \delta_c + \frac{1}{\cos^2 \delta_c} \frac{\operatorname{tg} \delta_V}{1 - \operatorname{tg} \delta_c \operatorname{tg} \delta_V} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg} (\delta_c + \delta_V),$$

т. е. получается известный результат [24]  $\delta = \delta_c + \delta_V$ , где  $\delta$  — полная  $s$ -фаза рассеяния;  $\delta_c = -kc$  — фаза рассеяния на твердом коре радиуса  $c$ ;  $\delta_V$  — фаза рассеяния на сдвинутом потенциале  $V(r+c)$ .

В качестве конкретного примера в работе [13] было рассмотрено нуклон-нуклонное  $s$ -взаимодействие с потенциалом экспоненциальной формы во внешней области:

$$V(r) = -V_0 \exp[-\beta(r-c)], \quad r > c. \quad (62)$$

Потенциал (62) взят из соображений, что при  $r \rightarrow \infty$  он экспоненциально затухает, и при  $l = 0$  задача рассеяния для такого потен-

циала имеет точное аналитическое решение [25]; потенциал (62) с твердым кором ( $f_0 \rightarrow \infty$ ) был рассмотрен в работах [26—28].

Учет короткодействующих сил с помощью более общей модели граничных условий позволяет ввести в выражения для  $s$ -фаз рассеяния по сравнению с твердым кором дополнительный параметр  $f_0$ , что позволяет при заданном функциональном виде потенциала в области  $r > c$  варьировать значения  $c$ , не ухудшая существенно согласия теоретических фаз с экспериментальными. В табл. 1 приведены полученные в работе [13] параметры  $f_0$  и параметры потенциала (62) для некоторых значений  $c$  соответственно для триплетного и синглетного состояний двух нуклонов. Параметры определялись методом наименьших квадратов с использованием точных выражений для  $s$ -фаз рассеяния и экспериментальных значений [29]  $^3S_0$ - и  $^1S_0$ -фаз рассеяния до энергии 360 Мэв в лабораторной системе (л. с.), которая соответствует появлению первого резонанса, связанного с параметрами  $f_0$  и  $c$ . Использовались также экспериментальные значения длин рассеяния  $a$  и эффектив-

Таблица 1

Значения  $f_0$  и параметров потенциала (62)  $V_0$  и  $\beta$  для  $s$ -состояния двух нуклонов в зависимости от  $c$ , а также значения длин рассеяния  $a$ , эффективного радиуса  $r_0$  и  $\chi^2$

$c$ , ферми	$f_0$	$V_0$ , ферми <sup>-2</sup>	$\beta$ , ферми <sup>-1</sup>	$a$ , ферми	$r_0$ , ферми	$29 \chi^2$
Триплетное состояние						
0,2	1090,54	6,108	1,734	5,407	1,781	217,51
0,4	1100,31	10,528	2,406	5,396	1,762	8,97
0,6	5,13	7,176	2,486	5,393	1,771	2,37
0,7	17,87	23,008	4,177	5,426	1,726	61,41
0,8	23,22	48,972	6,356	5,435	1,696	84,49
		Эксперимент [30]		$5,396 \pm 0,011$	$1,726 \pm 0,014$	
Синглетное состояние						
0,2	1109,22	4,468	1,810	-23,692	2,499	3,71
0,4	4,61	3,039	1,798	-23,668	2,506	2,67
0,6	7,69	6,151	2,460	-23,620	2,527	38,45
0,7	6,57	7,631	2,876	-23,334	2,480	66,89
0,8	20,08	18,906	4,028	-23,722	2,512	106,4
		Эксперимент [30]		$-23,678 \pm 0,028$	$2,51 \pm 0,11$	

ных радиусов  $r_0$  [30]. В табл. 1 указаны значения величины  $\chi^2$ , которая вычислена по 29 точкам и по минимуму которой производился выбор параметров. В работе [13] была также проведена

проверка адекватности соотношений (55), (57) и уравнения (47). С одной стороны, было получено аналитическое выражение для  $s$ -компоненты полной немассовой  $T$ -матрицы для потенциала (62) с учетом граничных условий (39) и (40) и с помощью соотношения (16) было найдено точное значение немассовой  $K$ -матрицы. С другой стороны, был разработан эффективный способ приближенного решения уравнения (47), основанный на методе моментов [31]. Хорошее совпадение точных значений с приближенными значениями  $K$ -матрицы, полученными с помощью (55) и (57), указывает как на корректность этих соотношений, так и на корректность уравнения (47), а следовательно, и (59).

## 2. ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

**Уравнения Шредингера и Фаддеева для системы трех тождественных частиц.** В работах [17—20] рассмотрен простейший вариант трехчастичной задачи с парными взаимодействиями: связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц. Такое ограничение непринципально и в то же время без излишних алгебраических усложнений позволяет изложить предлагаемый метод получения трехчастичных одномерных уравнений, когда взаимодействия описываются МГУ без внешнего потенциала. Как и в случае двух частиц, рассмотрим сначала задачу в предположении, что парные взаимодействия определяются такими потенциалами  $\hat{V}(r)$ , для которых имеют место двухчастичные уравнения Липпмана — Швингера и трехчастичные уравнения Фаддеева. Запись потенциалов в виде  $\hat{V}(r)$  подразумевает зависимость взаимодействий от относительного орбитального момента пары частиц.

Введем в системе центра масс (с. ц. м.) координаты Якоби:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3; \quad \rho_1 = -\mathbf{R}_1 + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3)/2, \quad (63)$$

где  $\mathbf{R}_i$  — радиус-вектор  $i$ -частицы. Наряду с координатами (63) в дальнейшем будут использоваться координаты  $\mathbf{r}_2$ ,  $\rho_2$  и  $\mathbf{r}_3$ ,  $\rho_3$ , которые можно получить из (63) циклическими перестановками индексов. Волновая функция системы трех тождественных бозонов  $\Psi(\mathbf{r}_1, \rho_1)$  симметрична относительно любых перестановок частиц

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \rho_1) = \Psi(-\mathbf{r}_1, \rho_1) = \Psi(\mathbf{r}_2, \rho_2) = \Psi(\mathbf{r}_3, \rho_3) \quad (64)$$

и выражается через функцию канала  $\psi(\mathbf{r}, \rho)$  (в данном случае одну) следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \rho_1) = \psi(\mathbf{r}_1, \rho_1) + \psi(\mathbf{r}_2, \rho_2) + \psi(\mathbf{r}_3, \rho_3). \quad (65)$$

В импульсном представлении функция канала  $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  удовлетворяет интегральному уравнению Фаддеева:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \left[ 2\pi^2 \left( k^2 + \frac{3}{4} q^2 - E \right) \right]^{-1} \int d\mathbf{q}' \left[ T\left(\mathbf{k}, \frac{1}{2}\mathbf{q} + \mathbf{q}', E - \frac{3}{4}q^2\right) \times \right. \\ \times \psi\left(-\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{q}', \mathbf{q}'\right) + T\left(\mathbf{k}, -\frac{1}{2}\mathbf{q} - \mathbf{q}', E - \frac{3}{4}q^2\right) \times \\ \left. \times \psi\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}', \mathbf{q}'\right) \right], \quad (66)$$

где  $E < 0$  — полная энергия системы (энергия связи);  $T(\mathbf{k}, \mathbf{p}, Z)$  — двухчастичная немассовая  $T$ -матрица, которая, согласно (11), связана с фурье-компонентой  $\psi_p(\mathbf{k}, Z)$  двухчастичной немассовой волновой функции  $\psi_p(\mathbf{r}, Z)$ :

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{p}, Z) = (1/4\pi)(k^2 - Z)[\psi_p(\mathbf{k}, Z) - (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})]. \quad (67)$$

Подстановка (67) в (66) приводит к следующему соотношению [17, 18]:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \psi_p\left(\mathbf{r}, E - \frac{3}{4}q^2\right) \times \\ \times \left[ \psi\left(-\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{3}{4}\mathbf{q}, -\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q}\right) + \psi\left(-\frac{1}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{4}\mathbf{q}, \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q}\right) \right], \quad (68)$$

которое связывает зависимость от  $\mathbf{r}$  фурье-компоненты  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  по переменной  $\mathbf{p}$  трехчастичной волновой функции (65) с зависимостью от  $\mathbf{r}$  двухчастичной немассовой функции  $\psi_p(\mathbf{r}, E - 3q^2/4)$ .

Будем далее для простоты считать, как и в работах [19, 20], что частицы взаимодействуют только в  $s$ -состояниях и полный орбитальный момент системы трех частиц равен нулю. В этом случае трехчастичная волновая функция  $\Psi(\mathbf{r}, \rho)$  зависит только от  $r$ ,  $\rho$  и угла между  $\mathbf{r}$  и  $\rho$  и имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \rho_1) = \psi(r_1, \rho_1) + \psi(r_2, \rho_2) + \psi(r_3, \rho_3), \quad (69)$$

а результат воздействия  $\hat{V}(\mathbf{r})$  на  $\Psi(\mathbf{r}, \rho)$  определяется соотношением

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \rho) = V(r) \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_r \Psi(\mathbf{r}, \rho) = V(r) \Psi_0(r, \rho). \quad (70)$$

Функция канала  $\psi(r, \rho)$  в (69) связана с  $V(r) \Psi_0(r, \rho)$  следующим образом:

$$\psi(r, \rho) = \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\infty \rho'^2 d\rho' \mathcal{G}_0(r, \rho; r', \rho'; E) V(r') \Psi_0(r', \rho'), \quad (71)$$

где

$$\mathcal{G}_0(r, \rho; r', \rho'; E) = \\ = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty q^2 dq \frac{j_0(kr) j_0(kr') j_0(q\rho) j_0(q\rho')}{k^2 + 3q^2/4 - E}. \quad (72)$$

Таким образом, из (69) и (71) следует, что функция канала  $\psi(r, \rho)$  и полная трехчастичная функция  $\Psi(r, \rho)$  однозначно определяются, если известно произведение  $V(r) \Psi_0(r, \rho)$ . Это обстоятельство весьма существенно при получении одномерных трехчастичных уравнений в МГУ без внешнего потенциала [19, 20].

Уравнение для  $s$ -компоненты  $\Psi_0(r, \rho)$  волновой функции  $\Psi(r, \rho)$  непосредственно следует из трехчастичного уравнения Шредингера и с учетом симметрии (64) и соотношения (70) имеет вид

$$\frac{1}{r_1 \rho_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + E \right) r_1 \rho_1 \Psi_0(r_1, \rho_1) = \\ = V(r_1) \Psi_0(r_1, \rho_1) + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{r_1} [V(r_2) \Psi_0(r_2, \rho_2) + V(r_3) \Psi_0(r_3, \rho_3)]. \quad (73)$$

Из этого уравнения вытекает, что для фурье-компоненты  $\Psi_0(r, q)$  по переменной  $\rho$  от  $\Psi_0(r, \rho)$  имеем следующее уравнение:

$$\frac{1}{r_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + E_q - V(r_1) \right] r_1 \Psi_0(r_1, q) = S(r_1, q), \quad (74)$$

$$\text{где } E_q = E - 3q^2/4; \quad (75)$$

$$S(r_1, q) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{r_1} d\rho_1 \exp[-iq\rho_1] \times \\ \times [V(r_2) \Psi_0(r_2, \rho_2) + V(r_3) \Psi_0(r_3, \rho_3)]. \quad (76)$$

Решение уравнения (74) с помощью функции Грина  $H(r, r', E)$  формально можно записать в виде

$$\Psi_0(r, q) = \int_0^\infty r'^2 dr' H(r, r', E_q) S(r', q). \quad (77)$$

Функция Грина имеет вид

$$H(r, r', E) = \begin{cases} -i \sqrt{E} \psi_{\sqrt{E}}(r, E) \varphi(r', E), & r < r'; \\ -i \sqrt{E} \varphi(r, E) \psi_{\sqrt{E}}(r', E), & r > r', \end{cases} \quad (78)$$

если считать, что известны два линейно-независимых решения однородного уравнения (74)  $\psi_{\sqrt{E}}(r, E)$  и  $\varphi(r, E)$  со следующей асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\sqrt{E}}(r, E) &\sim j_0(r\sqrt{E}) + i\sqrt{E} T(\sqrt{E}, \sqrt{E}, E) h_0^{(1)}(r\sqrt{E}); \\ \varphi(r, E) &\sim h_0^{(1)}(r\sqrt{E}), \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где  $T(\sqrt{E}, \sqrt{E}, E)$  —  $s$ -компонента двухчастичной  $T$ -матрицы (1) на массовой поверхности\*.

\* В (78) и (79) для простоты опущен индекс  $l = 0$ , характеризующий орбитальный момент двух частиц. В дальнейшем его также будем всюду опускать.



Для потенциалов  $V(r)$  с конечным радиусом действия  $c$  ( $V(r) = 0$  при  $r > c$ ) из выражений (77)–(79) следует, что произведение  $V(r)\Psi_0(r, q)$ , необходимое для определения трехчастичной волновой функции, можно представить в виде, не содержащем явным образом потенциала  $V(r)$ :

$$V(r)\Psi_0(r, q) = g(r, E_q)Y(q) + \theta(c-r) \int_0^\infty \rho^2 d\rho j_0(q\rho) D(r, \rho), \quad (80)$$

где  $\theta(x) = 1, x > 0; \theta(x) = 0, x < 0;$

$$Y(q) = i\sqrt{E_q} \int_c^\infty r^2 dr h_0^{(1)}(r\sqrt{E_q}) S(r, q); \quad (81)$$

$$g(r, E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp j_0(pr) T(p, \sqrt{E}, E). \quad (82)$$

**Модель граничных условий в задаче трех частиц.** Соотношения (80)–(82) служат основой для получения трехчастичных уравнений в МГУ без внешнего потенциала. Действительно, в МГУ полумассовая двухчастичная  $T$ -матрица в (82) имеет, с учетом условия симметрии  $T^{(c)}(p, \sqrt{E}, E) = T^{(c)}(\sqrt{E}, p, E)$ , вполне определенное значение (21). Кроме того, будем считать [19, 20], что соотношение (80) имеет место и в случае, когда парные взаимодействия частиц описываются МГУ. Таким образом, задача нахождения трехчастичной волновой функции в МГУ сводится к определению двумерной функции  $D(r, \rho)$  и одномерной функции  $Y(q)$  в (80). Уравнения для этих функций можно получить на основе соотношения (68) и граничных условий (17) и (18) для  $s$ -компоненты немассовой двухчастичной волновой функции, в соответствии с которыми для  $s$ -компоненты трехчастичной волновой функции имеем:

$$\Psi_0(r, q) = 0, \quad r < c; \quad (83)$$

$$c \left[ \frac{d}{dr} r\Psi_0(r, q) \right]_{r=c_+} = f(E_q) [r\Psi_0(r, q)]_{r=c_+}. \quad (84)$$

В условии (84) явным образом указана возможная зависимость логарифмической производной  $f$  от энергии  $E_q$  (75). В принципе параметр  $f$  в условии (18) для двух частиц можно считать зависящим от энергии  $E$ . Однако в этом случае, как легко убедиться, массовые волновые функции ( $E = k^2$ ), соответствующие физическим состояниям двух нуклонов при разных энергиях, будут неортогональны при сохранении условия (17). Тем не менее для энергий  $E < -\varepsilon_d$  ( $\varepsilon_d$  — энергия связи дейтона)  $f$  вполне можно рассматривать как некоторую произвольную функцию от  $E$ ,

потому что массовые волновые функции в этом случае не будут связаны с реальными состояниями двух нуклонов и нарушение условия ортогональности для них не имеет особого физического смысла. Возможность введения зависимости  $f$  от  $E$  при  $E < -\varepsilon_d$  будет более детально обсуждена ниже в связи с приближенным учетом трехчастичных эффектов.

Условие (83) можно записать в координатном представлении, и тогда в области  $r_1 < c$  будем иметь

$$V(r_1) \Psi_0(r_1, \rho_1) + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{r_1} [V(r_2) \Psi_0(r_2, \rho_2) + V(r_3) \Psi_0(r_3, \rho_3)] = 0. \quad (85)$$

Если при  $r_1 < c$  выполнено уравнение (85), то это приводит к тому, что  $\Psi_0(r_1, \rho_1) = 0$  в области  $r_1 < c$ , так как отличное от нуля решение однородного уравнения (73), конечное при  $\rho_1 \rightarrow 0$ , несовместимо с граничным условием при  $\rho_1 \rightarrow \infty$ . Первое уравнение для функций  $D(r, \rho)$  и  $Y(q)$  следует из (85), если выразить  $V(r) \Psi_0(r, \rho)$  с помощью (80) и использовать явное выражение для  $g(r, E)$ , которое, согласно (82) и (21), имеет следующий вид:

$$g(r, E) = -\frac{1}{r} \frac{\exp[-ic\sqrt{E}]}{f(E) - ic\sqrt{E}} [f(E) \delta(r-c) + cd'(r-c)]. \quad (86)$$

Окончательно приходим к следующему уравнению:

$$\theta(c-r_1) D(r_1, \rho_1) + \theta(c-r_1) \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{r_1} [\theta(c-r_2) D(r_2, \rho_2) + \theta(c-r_3) D(r_3, \rho_3)] = -\theta(c-r_1) F(r_1, \rho_1), \quad (87)$$

где

$$F(r_1, \rho_1) = \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega_{r_1} \int_0^\infty q^2 dq [g(r_2, E_q) j_0(q\rho_2) + g(r_3, E_q) j_0(q\rho_3)] Y(q). \quad (88)$$

При получении (87) использовалось соотношение  $\theta(c-r) \times g(r, E) = 0$ , которое следует из того факта, что в МГУ, согласно (82), (21) и (18), в выражении (86) для  $g(r, E)$  с необходимо понимать как  $c_+ = c + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отметим также, что при выводе (87) и (84) совершенно не возникает вопроса о введении конкретной формы потенциала  $V(r)$  в области  $r < c$ , а используются только граничные условия (17) и (18) для немассовых двухчастичных волновых функций.

Второе уравнение для  $D(r, \rho)$  и  $Y(q)$  получается из граничного условия (84), если полную волновую функцию выразить через функцию канала согласно соотношению (69). В соответствии

с (80) из выражений (71) и (72) следует, что в импульсном представлении функция канала  $\psi(k, q)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(k, q) = & -\frac{4\pi c}{k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E} \frac{\cos kc - f(E_q) j_0(kc)}{f(E_q) - ic\sqrt{E_q}} \times \\ & \times \exp(-ic\sqrt{E_q}) Y(q) - \\ & - \frac{1}{4\pi \left(k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E\right)} \int dr d\rho \exp(ikr + iq\rho) \theta(c-r) D(r, \rho). \end{aligned} \quad (89)$$

Использование (69) и (89) и условия (84) приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \exp(-ic\sqrt{E_q}) Y(q) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q'^2 dq' T_1(q, q') \exp(-ic\sqrt{E_{q'}}) Y(q') + \\ + \frac{1}{cL(E_q) [f(E_q) - ic\sqrt{E_q}]} \left\{ c \left[ \frac{d}{dr} r \Psi_0^{(1)}(r, q) \right]_{r=c_+} - \right. \\ \left. - f(E_q) [r \Psi_0^{(1)}(r, q)]_{r=c_+} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(q, q') = & \frac{c}{L(E_q) [f(E_q) - ic\sqrt{E_q}] [f(E_{q'}) - ic\sqrt{E_{q'}}]} \times \\ & \times \int_{-1}^{+1} dx \frac{[\cos p_1 c - f(E_{q'}) j_0(p_1 c)] [\cos p_2 c - f(E_q) j_0(p_2 c)]}{q^2 + q'^2 - qq'x - E}; \end{aligned} \quad (91)$$

$$p_1^2 = q^2 + q'^2/4 - qq'x; \quad p_2^2 = q^2/4 + q'^2 - qq'x;$$

$$L(E) = [1/(2ic\sqrt{E})] \{ [f(E) + ic\sqrt{E}]/[f(E) - ic\sqrt{E}] - \exp(2ic\sqrt{E}) \};$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(1)}(r, q) = & -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{r}_1 d\boldsymbol{\rho}_1 K_0(r, r_1, E_q) j_0(q\rho_1) \times \\ & \times [\theta(c-r_1) D(r_1, \rho_1) + \theta(c-r_2) D(r_2, \rho_2) + \theta(c-r_3) D(r_3, \rho_3)]; \end{aligned} \quad (92)$$

$$K_0(r, r', E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk [j_0(kr) j_0(kr')/(k^2 - E)].$$

Альтернативное второе уравнение для функций  $D(r, \rho)$  и  $Y(q)$  можно получить из (81), если, как и прежде,  $V(r) \Psi_0(r, \rho)$  выразить с помощью (80) и использовать (76) для  $S(r, q)$ . Это уравнение имеет вид

$$\exp(-ic\sqrt{E_q})Y(q) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q'^2 dq' T_2(q, q') \exp(-ic\sqrt{E_{q'}})Y(q') -$$

$$-\frac{i\sqrt{E_q}}{(4\pi)^2} \exp(-ic\sqrt{E_q}) \int dx_1 d\rho_1 \theta(r_1 - c) h_0^{(1)}(r_1\sqrt{E_q}) j_0(q\rho_1) \times$$

$$\times [\theta(c - r_2)D(r_2, \rho_2) + \theta(c - r_3)D(r_3, \rho_3)], \quad (93)$$

где

$$T_2(q, q') = \frac{c}{f(E_{q'}) - ic\sqrt{E_{q'}}} \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} dx \frac{[\cos p_1 c - f(E_{q'}) j_0(p_1 c)] [\cos p_2 c - ic\sqrt{E_q} j_0(p_2 c)]}{q^2 + q'^2 - qq'x - E}. \quad (94)$$

**Одномерное уравнение.** Уравнения (90) и (93) содержат неизвестную двумерную функцию  $D(r, \rho)$ , которая, в свою очередь, удовлетворяет уравнению (87). В работе [32] \* было показано, что в случае твердого кора для этого уравнения можно найти точное решение в аналитическом виде. С помощью метода, предложенного в работе [32], уравнение (87) может быть решено аналитически и для более общего случая МГУ [19]. Это обстоятельство совместно с выражением (88) позволяет точным образом, без каких-либо приближений, привести двумерные уравнения (90) и (93) к одномерным уравнениям для одной функции  $Y(q)$ , что является характерной особенностью трехчастичной задачи в случае двухчастичных взаимодействий, описываемых с помощью МГУ [14–16].

Правая часть уравнения (87), согласно (86) и (88), имеет вид

$$\theta(c - r_1)F(r_1, \rho_1) = -\theta(c - r_1)\chi(R)/(r_1\rho_1) -$$

$$- [c/(r_1\rho_1)]\theta(c - r_1)[\delta(r_1/2 + \rho_1 - c) - \delta(|r_1/2 - \rho_1| - c)]\varphi(R), \quad (95)$$

где

$$\chi(R) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} q^2 dq Y(q) b(E_q) F_0(q, R); \quad (96)$$

$$\varphi(R) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} q^2 dq Y(q) b(E_q) j_0(q\rho_0); \quad (97)$$

$$b(E) = \exp(-ic\sqrt{E})/[f(E) - ic\sqrt{E}];$$

$$F_0(q, R) = f(E_q) j_0(q\rho_0) - (3qc^2/4\rho_0) j_1(q\rho_0); \quad (98)$$

$$R^2 = r_1^2 + 4\rho_1^2/3; \quad \rho_0^2 = 3(R^2 - c^2)/4,$$

\* Автор работы [32] В. Ефимов (ИЯФ, Ленинград) — однофамилец одного из авторов (В.Н.Е.) данной статьи.

причем функция  $F_0(q, R)$  отлична от нуля только в области

$$|r_1/2 - \rho_1| < c < r_1/2 + \rho_1. \quad (99)$$

В работах [19, 20] показано, что в соответствии с (95) решение уравнения (87) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \theta(c-r) D(r, \rho) = & \theta(c-r) \frac{1}{r\rho} A(r, \rho) + \\ & + \theta(c-r) \frac{c}{r\rho} [\delta(r/2 + \rho - c) - \delta(|r/2 - \rho| - c)] \varphi(R), \end{aligned} \quad (100)$$

где функция  $A(r, \rho)$  в области  $r < c$  удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$A(r, \rho) + 2 \int_{|r/2 - \rho|}^{r/2 + \rho} \frac{dr'}{|\rho'|} \theta(c-r') A(r', \rho') = \chi(R) - 2c\varphi(R) \mathcal{G}(r, \rho); \quad (101)$$

$$\mathcal{G}(r, \rho) = \int_{|r/2 - \rho|}^{r/2 + \rho} \frac{dr'}{\rho'} \theta(c-r') [\delta(r'/2 + \rho' - c) - \delta(|r'/2 - \rho'| - c)]; \quad (102)$$

$$R^2 = r^2 + 4\rho^2/3; \quad \rho'^2 = 3(R^2 - r'^2)/4,$$

которое будет одномерным, если  $R$  рассматривать как фиксированный параметр. При введении новых переменных  $\alpha$  и  $\alpha'$ , согласно определениям

$$\left. \begin{aligned} r &= R \sin \alpha, \quad \rho = (\sqrt{3}/2) R \cos \alpha; \\ r' &= R \sin \alpha', \quad \rho' = (\sqrt{3}/2) R \cos \alpha', \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

уравнение (101) и выражение (102) приобретают вид:

$$\begin{aligned} A(R, \alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{|\pi/3 - \alpha|}^{\min(\pi/3 + \alpha, 2\pi/3 - \alpha)} d\alpha' \theta(c - R \sin \alpha') A(R, \alpha') = \\ = \chi(R) - 2c\varphi(R) \mathcal{G}(R, \alpha); \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(R, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{|\pi/3 - \alpha|}^{\min(\pi/3 + \alpha, 2\pi/3 - \alpha)} d\alpha' \theta(c - R \sin \alpha') \{ \delta[R\theta(\pi/6 - \alpha') \times \\ \times \sin(\alpha' + \pi/3) + R\theta(\alpha' - \pi/6) \sin(2\pi/3 - \alpha') - c] - \\ - \delta[R \sin |\pi/3 - \alpha'| - c] \}. \end{aligned} \quad (105)$$

В зависимости от значения параметра  $R$  область  $r < c$  делится согласно (103) и (99) на ряд областей, показанных на рисунке, в которых пределы интегрирования в (104) и функция  $\mathcal{G}(R, \alpha)$  (105) имеют разные значения. Явный вид интегральных уравнений для  $A(R, \alpha)$  в областях 1-6, указанных на рисунке, приведен в работе [19]. Эти уравнения отличаются от уравнений рабо-

ты [32] только правыми частями, и для их решения вполне можно использовать метод, предложенный в работе [32], который приводит к следующим решениям уравнения (104) для областей 1—5 (см. рисунок):

$$\left. \begin{aligned} A_1(R, \alpha) &= 0; & A_2(R, \alpha) &= B(R) \sin(\gamma - \pi/4); \\ A_3(R, \alpha) &= C(R) \sin(\gamma - \pi/4); \\ A_4(R, \alpha) &= A_5(R, \alpha) = D(R) \sin 4\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

где

$$B(R) = -\chi(R) / \sin(\gamma_0 + \pi/4);$$

$$C(R) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{A(R)} \left[ \chi(R) \sin 4\kappa_0 + \frac{4c}{R \cos \alpha_0} \varphi(R) \cos 4\kappa_0 \right];$$

$$D(R) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{Q(R)} \left[ \chi(R) \sin \frac{4}{\sqrt{3}} \kappa_0 + \frac{4c}{\sqrt{3} R \cos \alpha_0} \varphi(R) \cos \frac{4}{\sqrt{3}} \kappa_0 \right];$$

$$Q(R) = \frac{\sin(4 + 4/\sqrt{3}) \kappa_0}{4 + 4/\sqrt{3}} - \frac{\sin(4 - 4/\sqrt{3}) \kappa_0}{4 - 4/\sqrt{3}};$$

$$\gamma = (4/\sqrt{3})(\alpha - \pi/6); \quad \gamma_0 = (4/\sqrt{3})(\alpha_0 - \pi/6);$$

$$\alpha_0 = \arcsin(c/R); \quad \kappa_0 = \pi/2 - \alpha_0.$$

В области 6 решение  $A_6(R, \alpha)$  уравнения (104) будет иметь вид

$$A_6(R, \alpha) = F(R) \sin 4\alpha, \quad (107)$$

где  $F(R)$  — произвольная функция  $R$ . Наличие такого произвола соответствует указанному в работах [15, 16] факту, что в МГУ

трехчастичная волновая функция определяется неоднозначно. В рассматриваемом случае простейшей трехчастичной системы — системы трех тождественных бозонов — из условия (64) симметрии полной волновой функции следует, согласно [32], что в (107) необходимо положить  $F(R) \equiv 0$ , если считать, что МГУ соответствует предельной форме потенциала (38). Таким образом, в отличие от работы [16], в которой используются уравнения, полученные

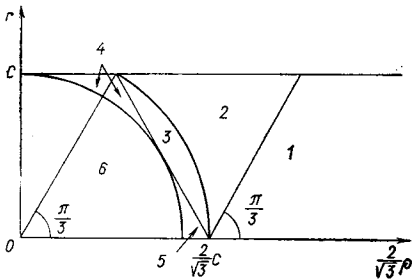


Рисунок. Области определения функции  $A(R, \alpha)$

в работе [15], уравнения (90) и (93) совместно с соотношением (89) однозначно определяют волновую функцию (69) системы трех тождественных бозонов без введения какого-либо дополнительного условия, содержащего произвольный трехчастичный параметр.

Аналогичные соображения применимы также и к системе трех нуклонов, для которой компоненты волновой функции в случае зарядовой инвариантности ядерных сил обладают определенной перестановочной симметрией.

Указанная выше неоднозначность решения (107) в области  $b$  совершенно не существенна, если энергию связи вычислять с помощью альтернативного уравнения (93), так как эта область не входит в интеграл выражения (84), из которого получается уравнение (93). Подобная ситуация будет иметь место и при вычислении амплитуд переходов, так как они определяются интегралами типа (84). Неоднозначность нужно устранять только в том случае, если с помощью (69) и (89) отыскивается трехчастичная волновая функция. Заметим, наконец, что уравнения (90) и (93) с помощью (92), (100) и выражений (106) для функции  $A(R, \alpha)$  можно записать в явном одномерном виде:

$$\psi(q) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q'^2 dq' [T_1(q, q') + V_1(q, q')] \psi(q') = 0; \quad (108)$$

$$\psi(q) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q'^2 dq' [T_2(q, q') + V_2(q, q')] \psi(q') = 0, \quad (109)$$

где  $\psi(q) = \exp(-ic\sqrt{E_q}) Y(q)$ ;  $T_1(q, q')$  и  $T_2(q, q')$  определяются соответственно выражениями (91) и (94). Выражений для  $V_1(q, q')$  и  $V_2(q, q')$  из-за их громоздкости выписывать не будем, укажем лишь, что они приведены в работе [20].

**Результаты для не зависящих от энергии параметров  $f$  и  $c$ .** В работе [20] уравнения (108) и (109) были решены для постоянных параметров  $f$  и  $c$ , соответствующих триплетному  $s$ -состоянию двух нуклонов. В этом случае  $f$  и  $c$  определяются по энергии связи дейтона  $\varepsilon_d = 2,225$  Мэв согласно соотношению (36) и по триплетной длине рассеяния  $a_t = 5,41$  ферми и имеют значения

$$f = -0,253, \quad c = 1,095 \text{ ферми.} \quad (110)$$

Численное решение уравнений (108) и (109) связано с определенными математическими трудностями, обусловленными осциллирующим характером и медленным затуханием ядер  $V_1(q, q')$  и  $V_2(q, q')$  этих уравнений, зависимость которых от  $q'$  определяется выражениями (96)–(98). Такое поведение ядер не позволяет применить для решения уравнений (108) и (109) стандартный способ трансформации бесконечного интервала интегрирования в конечный с последующим использованием гауссовых узлов. В работе [20] уравнения (108) и (109) были решены с помощью двух различных методов. Первый метод основан на разложении

$j_0(q\rho_0)$  и  $j_1(q\rho_0)$  в (97) и (98) в ряд по полной системе ортогональных функций  $\varphi_n^{(l)}(\rho_0)$  ( $l = 0, 1$ ). Параметр  $\rho_0$  меняется в пределах  $0 \leq \rho_0 \leq a$ ,  $a = 3c/2$ , поэтому для получения необходимых разложений нужно ввести функции  $\varphi_n^{(l)}(\rho)$ , удовлетворяющие условию ортогональности и нормировки:

$$\int_0^a \rho^2 d\rho \varphi_n^{(l)}(\rho) \varphi_{n'}^{(l)}(\rho) = \delta_{nn'}. \quad (111)$$

Такие функции, образующие полные системы, всегда можно построить, если их выбирать в виде полиномов. В частности, функции  $\varphi_n^{(0)}(\rho)$  и  $\varphi_n^{(1)}(\rho)$ , удовлетворяющие условию (111) и учитывающие четность и поведение  $j_0(q\rho)$  и  $j_1(q\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , выражаются через полиномы Якоби и определяются следующим образом:

$$\varphi_n^{(0)}(\rho) = \frac{(4n-1)^{1/2}}{2^{n-1} a^{3/2}} \sum_{\nu=1}^n \alpha_{n\nu}^{(0)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu-2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (112)$$

$$\varphi_n^{(1)}(\rho) = \frac{(4n+1)^{1/2}}{2^{n-1} a^{3/2}} \sum_{\nu=1}^n \alpha_{n\nu}^{(1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (113)$$

где

$$\alpha_{n\nu}^{(0)} = (-1)^{n+\nu} \frac{(2n+2\nu-3)!!}{[(2\nu-1)!! (\nu-1)! (n-\nu)!];}$$

$$\alpha_{n\nu}^{(1)} = (-1)^{n+\nu} \frac{(2n+2\nu-1)!!}{(2\nu+1)!! (\nu-1)! (n-\nu)!}.$$

Разложения  $j_0(q\rho)$  и  $j_1(q\rho)$  соответственно по функциям (112) и (113) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} j_0(q\rho) &= \sum_n C_n^{(0)}(q) \varphi_n^{(0)}(\rho); \\ j_1(q\rho) &= \sum_n C_n^{(1)}(q) \varphi_n^{(1)}(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

где

$$C_n^{(0)}(q) = (-1)^{n+1} a^{3/2} \sqrt{4n-1} \frac{1}{x} j_{2n-1}(x);$$

$$C_n^{(1)}(q) = (-1)^{n+1} a^{3/2} \sqrt{4n+1} \frac{1}{x} j_{2n}(x); \quad x = qa.$$

Использование разложений (114) с конечным числом  $N$  слагаемых в (96)—(98) позволяет привести ядра  $V_1(q, q')$  и  $V_2(q, q')$  уравнений (108) и (109) к вырожденному виду ( $2N$  сепарабельных слагаемых). Для таких ядер легко находятся резольвенты, и в результате вместо исходных уравнений (108) и (109) можно написать новые уравнения с перенормированными ядрами,



к которым вполне применим обычный метод использования гауссовых узлов для конечного интервала интегрирования.

Второй метод решения (108) и (109) основан на разбиении бесконечного интервала интегрирования на два подынтервала  $(0, q_0)$  и  $(q_0, \infty)$  и на введении новой переменной  $x = q'^2 - q_0^2$  и формального веса  $\exp(-\alpha x)$ , в результате чего (108) и (109) приобретают вид

$$q\psi(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_0} qq' dq' [T(q, q') + V(q, q')] q'\psi(q') + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} q \exp(-\alpha x) dx [T(q, q') + V(q, q')] q'\psi(q'). \quad (115)$$

При конечных  $\alpha$  для решения (115) можно применять стандартный метод использования гауссовых узлов [во втором интеграле — узлы для веса  $\exp(-\alpha x)$ ], а решения (108) и (109) будут соответствовать определяемому приближенным способом пределу решений уравнений типа (115) при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Изложенные выше два метода были использованы в работе [20] для решения уравнений (108) и (109), причем (109) решалось первым методом, а (108) — вторым. Уравнения были решены с параметрами  $f$  и  $c$  (110), и для энергии связи трех тождественных бозонов получено значение  $E_0 = 7,70 \text{ Мэв}$ , которое сильно отличается от значения  $E_0 = 12,69 \text{ Мэв}$ , найденного в работе [21] для той же модельной задачи из уравнения Фаддеева для тех же значений параметров  $f$  и  $c$ . Существенным фактом, как отмечалось в работе [20], является то, что два альтернативных уравнения (108) и (109) при применении двух различных методов решения привели к одному и тому же значению  $E_0$ . В действительности имеется разброс  $\Delta E = \pm 0,15 \text{ Мэв}$ , который приписывается недостаточной точности вычислений, связанной с использованием ограниченного числа членов ( $N \leq 8$ ) в разложениях (114) и ограниченных значений  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0,01$ ) в (115). Совпадение результатов в пределах указанного разброса может служить указанием на адекватность (108) и (109) и используемых для их решения численных методов.

Из уравнений (108) и (109) по двум обстоятельствам особый интерес представляет (109). Первое обстоятельство связано с тем, что при использовании этого уравнения для вычисления энергии связи  $E_0$  совершенно не требуется рассматривать область  $b$  (см. рисунок), единственную область, которая согласно (107) вносит неоднозначность, устранимую только с привлечением дополнительных соображений. Второе обстоятельство заключается в следующем. Если в  $s$ -компоненте двухчастичной  $T$ -матрицы, соответ-

ствующей МГУ и определяемой согласно (33) выражением:

$$T(k, p, Z) = T(p, k, Z) = -(p^2 - Z) \int_0^c r^2 dr j_0(pr) j_0(kr) + \\ + c \frac{\cos kc - j_0(kc)}{f - ic\sqrt{Z}} [\cos pc - ic\sqrt{Z} j_0(pc)], \quad (116)$$

отбросить первое слагаемое, то получим некоторое факторизованное приближение:

$$\bar{T}(k, p, Z) = c \{ [\cos kc - j_0(kc)] / (f - ic\sqrt{Z}) \} \times \\ \times [\cos pc - ic\sqrt{Z} j_0(pc)]. \quad (117)$$

Для приближенной  $T$ -матрицы (117) не имеют места соотношения, из которых следует неоднозначность уравнений Фаддеева [14]. Непосредственная подстановка (117) в уравнение Фаддеева для системы трех тождественных бозонов приводит его к одномерному интегральному уравнению с ядром (94), т. е. фактически к (109) с  $V_2(q, q') = 0$ . Ядро  $T_2(q, q')$  (94) имеет очень простую структуру и достаточно быстро убывает по  $q$  и  $q'$ , так что решение получающегося интегрального уравнения — тривиальная задача и приводит к значению  $\bar{E}_0 = 13,21 \text{ Мэв}$ . Зная двухчастичную  $T$ -матрицу, можно согласно (11) определить волновые функции, соответствующие приближенному выражению (117). Так, для массовой волновой функции будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \psi_k(r, k^2 + i0) &= 0, & r < c; \\ \psi_k(r, k^2 + i0) &= j_0(kr) + T(k, k, k^2 + i0) \exp(ikr)/r, & r > c; \end{aligned} \right\} (118)$$

где  $T(k, k, k^2 + i0)$  определяется согласно (21), тогда как в области  $r < c$  немассовая функция отлична от нуля и имеет вид

$$\psi_k(r, Z) = j_0(kr) - \exp(ic\sqrt{Z}) [\cos kc - ic\sqrt{Z} j_0(kc)] j_0(r\sqrt{Z}). \quad (119)$$

Таким образом, переход от точной  $T$ -матрицы (116) к приближенной (117) соответствует переходу от предельной формы потенциала (38) к некоторому квазипотенциалу типа квазипотенциала, рассмотренного в работе [6], воспроизводящего согласно (118) ту же самую амплитуду рассеяния, что и МГУ, но не содержащего отталкивательного кора в области  $r < c$ , что вытекает из выражений (119) и (17). Следовательно, переход от решения уравнения (109) только с  $T_2(q, q')$  к решению этого уравнения с учетом  $T_2(q, q')$  и  $V_2(q, q')$  будет соответствовать переходу от квазипотенциала без кора к предельной форме потенциала (38) с бесконечным отталкивательным кором при  $r < c$ . Очевидно, что такая процедура может только уменьшить энергию связи  $E_0$ , что подтверждается результатом, полученным в работе [20]. Заметим, что  $E_0 = 7,7 \text{ Мэв}$  существенно отличается также от  $E_0 = 18,4 \text{ Мэв}$

из работы [16]. Это можно объяснить тем, что одномерные уравнения (108) и (109) совершенно другие, чем уравнение работы [16]. В частности, из вывода последнего следует, что полная волновая функция  $\Psi(r, \rho)$  в области  $r < c$  обращается в нуль, тогда как (108) и (109) получены при условии [см. (83)] равенства нулю при  $r < c$  только  $s$ -компоненты трехчастичной волновой функции  $\Psi(r, \rho)$ . Таким образом, согласно (68), уравнение работы [16] соответствует двухчастичным взаимодействиям с твердым кором, действующим во всех парциальных компонентах. В отличие от этого (108) и (109) получены в предположении наличия взаимодействий, включая твердый кор, только в относительных двухчастичных  $s$ -состояниях.

По поводу работы [16], в которой используются уравнения, полученные в работе [15], можно сделать следующее дополнительное замечание. Как было указано выше, для достижения однозначности этих уравнений требуется введение произвольного трехчастичного параметра  $W_0$ , представляющего собой частное значение энергии, при котором на функции каналов независимо накладываются граничные условия, аналогичные условиям (17) и (18) для двухчастичных волновых функций в МГУ. Эти дополнительные существенно трехчастичные условия не вытекают из характера двухчастичных взаимодействий и приводят к тому, что уравнения работы [15] являются фактически модельными уравнениями. В отличие от этого, одномерные уравнения (108) и (109) безмодельны на трехчастичном уровне, так как при их выводе используются лишь граничные условия (17) и (18) для двухчастичных волновых функций. Следовательно, результаты работ [16, 33] нельзя считать соответствующими «пустотным» двухчастичным взаимодействиям, описываемым МГУ без внешнего потенциала. Параметр  $W_0$  определяет вид ядер интегральных уравнений работ [15, 16] посредством функции  $D(q)$ , получающейся из (24) при  $l = 0$  и  $x = c \sqrt{W_0 - 3q^2/4}$ , зависимость которой от  $q$  дается выражением

$$D(q) = -ixD_0^{(4)}(x, f) = [f - ic \sqrt{W_0 - 3q^2/4}] \exp[ic \sqrt{W_0 - 3q^2/4}], \quad (120)$$

где  $f$  удовлетворяет соотношению (36). Из (120) следует, что характер функции  $D(q)$  будет существенным образом зависеть от выбора  $W_0$ : в области  $W_0 < -\varepsilon_d$   $D(q)$  будет вещественной и знакопостоянной, в области  $-\varepsilon_d < W_0 < 0$  вещественной, но знакопеременной. Выбор  $W_0 < 0$  заведомо обеспечивает выполнение условия унитарности для трехчастичной  $T$ -матрицы [15], однако в работе [16] исследована только область  $W_0 < -\varepsilon_d$  и показана слабая зависимость энергии связи  $E_0$  трех бозонов от параметра  $W_0$ , тогда как для полноты необходимо было рассмотреть также и область  $-\varepsilon_d < W_0 < 0$ .

Из явных выражений для ядер  $T_2(q, q')$  (94) и  $V_2(q, q')$  [20] уравнения (109) видно, что  $T_2(q, q') \sim c^0$ , а  $V_2(q, q') \sim c^2$ . Таким образом, относительный вклад в энергию связи  $E_0$ , связанный с учетом в (109)  $V_2(q, q')$ , должен понижаться с уменьше-

Таблица 2

Зависимость значений энергий связи  $\bar{E}_0$  и  $E_0$ , получаемых из (109) соответственно без  $V_2(q, q')$  и с учетом  $V_2(q, q')$  от параметров  $f$  и  $c$ , удовлетворяющих условию  $f = -c \sqrt{\varepsilon_d}$  (36)

$f$	$c$ , ферми	$\bar{E}_0$ , Мэв	$E_0$ , Мэв	$f$	$c$ , ферми	$\bar{E}_0$ , Мэв	$E_0$ , Мэв
-0,253	1,095	13,21	7,70	-0,173	0,7489	17,96	10,61
-0,213	0,9221	15,60	9,48	-0,133	0,5757	24,8	17,20

нием  $c$ , если  $c < 1$  ферми. В табл. 2 представлены результаты расчетов  $E_0$  для ряда значений  $c$ , причем  $f$  варьировалось, а значения  $c$  определялись из условия  $c = -f/0,231$  ферми, что в соответствии с (36) обеспечивало для различных наборов значений  $f$  и  $c$  постоянство энергии связи дейтона  $\varepsilon_d = 2,225$  Мэв. В таблице приведены также значения  $\bar{E}_0$ , получающиеся при учете в (109) только ядра  $T_2(q, q')$ . Видно, что для всех значений  $f$  и  $c$  величина  $E_0$  меньше  $\bar{E}_0$ , т. е. учет  $V_2(q, q')$  в (109) всегда приводит, как было указано выше, к уменьшению энергии связи, а относительная поправка значительно меньше для  $c \approx 0,6$  ферми (последняя строка таблицы), чем для  $c \approx 1$  ферми (первая строка таблицы). Заметим, что приведенные в табл. 2 значения  $\bar{E}_0$  очень близки к результатам работы [21].

Результаты для зависящего от энергии  $E$  параметра  $f(E)$ . Трехчастичные уравнения (90) и (93) были получены при использовании условия (84) и выражения (86), содержащих параметр  $f$ , входящий в двухчастичное условие (18). Как уже указывалось, при сохранении условия (17) в (18)  $f$  нельзя считать зависящим от энергии  $E$ , так как это приводит к нарушению ортогональности волновых функций для состояний двух нуклонов при различных энергиях. Однако для «нефизических» энергий  $E_q < -\varepsilon_d$ , где  $E_q$  определяется соотношением (75),  $f$  в (84) и (86) можно считать зависящим от энергии  $E_q$ , что следует рассматривать как некоторый приближенный способ учета трехчастичных эффектов, таких, например, как трехчастичные силы. Действительно, если в системе трех частиц существенны трехчастичные силы (см. по этому поводу работы [34]), то как уравнение Шредингера (73), так и уравнение Фаддеева (66) должны быть видоизменены с учетом этих сил. В этом случае нельзя уже будет получить на основе (17)

и (18) граничных условий типа (83) и (84) для трехчастичной волновой функции. Использование этих условий с постоянным  $f$  и таким же, как и в (18), соответствует полному пренебрежению ролью трехчастичных сил. Поэтому введение для  $E < -\varepsilon_d$  зависимости  $f$  от  $E$ , не затрагивающей ортогональности волновых функций реальных состояний двух нуклонов, можно рассматривать, как приближенный учет трехчастичных сил на языке парных взаимодействий. Такой подход подобен методу, используемому в теории конечных ферми-систем, когда для парных взаимодействий вводятся два типа констант: вакуумные и константы взаимодействия в среде [35].

Зависимость  $f$  от  $E$  при  $E < -\varepsilon_d$  бралась в работе [20] в виде

$$f(E) = c_1 + c_2 (-E/\varepsilon_d)^{c_3}. \tag{124}$$

В табл. 3 даны значения энергии связи  $E_0$  трех тождественных

Таблица 3  
Зависимость энергии связи  $E_0$  от характера поведения  $f(E)$  при  $E < -\varepsilon_d$ , определяемого выражением (124)

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$E_0, Mэв$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$E_0, Mэв$
-0,506	0,253	0,3	4,30	0	-0,253	0,1	10,34
-0,506	0,253	0,2	5,16	0	-0,253	0,2	15,64
-0,506	0,253	0,1	6,50	0	-0,253	0,3	26,77
0	-0,253	0	7,70				

бозонов для параметра  $f(E)$ . Видно, что значения  $E_0$  сильно зависят от характера поведения  $f(E)$  при  $E < -\varepsilon_d$ . Так, если при  $E \rightarrow -\infty f(E) \rightarrow +\infty$ , то получающиеся  $E_0$  меньше значения  $E_0$ , соответствующего  $f = \text{const}$ , а если при  $E \rightarrow -\infty f(E) \rightarrow -\infty$ , то соответствующие значения  $E_0$ , наоборот, больше значения  $E_0$  при  $f = \text{const}$ . Приведенные в табл. 3 значения  $E_0$  получены при одном и том же  $c = 1,095$  ферми.

Зависящий от энергии двухчастичный потенциал. Большое отличие найденного в работе [20] значения энергии связи трех бозонов ( $E_0 = 7,70 Mэв$ ) от результата работы [21] ( $E_0 = 12,69 Mэв$ ), полученного из уравнения Фалдеева для тех же самых значений (110) параметров МГУ, и приведенное выше утверждение о модельности уравнений работ [15, 16] ставит вопрос о поиске независимого способа проверки указанных выше фактов. Такая возможность возникает, на наш взгляд, при введении МГУ без внешнего потенциала с логарифмической производной  $f$ , зависящей от энергии  $E$  во всем интервале ее изменения. Однако это предположение при сохранении условия (17), как было указа-

но выше, приводит к тому, что волновые функции на массовой поверхности, соответствующие различным физическим состояниям двух частиц, оказываются неортогональными. Действительно, введем массовые волновые функции, имеющие в соответствии с (19) в области  $r > c$  вид ( $Z = E \pm i0$ ,  $E = k^2$ ) \*:

$$\psi_k^{\pm}(r) = j_0(kr) + i\sqrt{Z} F^{(\pm)}(k) h_0^{(1)}(r\sqrt{Z}), \quad (122)$$

и удовлетворяющие условиям (17) и (18) с зависящей от энергии  $f$ :

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = 0, \quad r < c; \quad (123)$$

$$c \left[ \frac{d}{dr} r \psi_k^{(\pm)}(r) \right]_{r=c+} = f(E) [r \psi_k^{(\pm)}(r)]_{r=c+}. \quad (124)$$

Выражение для амплитуды рассеяния  $F^{(\pm)}(k)$  следует из (122) и (124):

$$F^{(\pm)}(k) = T(k, k, k^2 \pm i0) = \frac{c \exp[\mp ikc]}{f(E) \mp ikc} [\cos kc - f(E) j_0(kc)] \quad (125)$$

и удовлетворяет условию унитарности

$$F^{(+)}(k) - F^{(-)}(k) = 2ikF^{(+)}(k)F^{(-)}(k).$$

Как известно, волновые функции  $\psi_k^{(\pm)}(r)$  должны удовлетворять соотношению ортогональности:

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \psi_k^{(-)*}(r) \psi_{k'}^{(+)}(r) = (\pi/2k^2) \exp[2i\delta(k)] \delta(k - k'), \quad (126)$$

где  $\delta(k)$  —  $s$ -фаза рассеяния, определяемая согласно (125) выражением:

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = k [f(E) + kc \operatorname{tg} kc] / [kc - f(E) \operatorname{tg} kc]. \quad (127)$$

Подстановка в (126) выражений (122) для  $\psi_k^{(\pm)}(r)$  при учете (123) и (125) приводит к результату:

$$J = \int_c^{\infty} r^2 dr \psi_k^{(-)*}(r) \psi_{k'}^{(+)}(r) = \frac{\pi}{2k^2} \exp[2i\delta(k)] \delta(k - k') + \frac{c \exp[-ikc - ik'c] [f(E) - f(E')]}{(k^2 - k'^2) [f(E) - ikc] [f(E') - ik'c]}. \quad (128)$$

Таким образом, условия (123) и (124) несовместимы с условием (126) ортогональности массовых волновых функций, для выполнения которого необходимо предположить, что  $\psi_k^{(\pm)}(r)$  в области  $r < c$  отличны от нуля, и можно представить следующим образом:

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = A_{\pm}(k) \chi(r), \quad r < c. \quad (129)$$

\* Как и выше, будем далее рассматривать только  $s$ -состояние и индекс  $l = 0$  будем всюду опускать.

Тогда в соответствии с (128) условие (126) будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \psi_k^{(-)*}(r) \psi_k^{(+)}(r) = A_-^*(k) A_+(k') B + J; \quad (130)$$

$$B = \int_0^c r^2 dr \chi^2(r). \quad (131)$$

Выбор конкретной зависимости  $f$  от  $E$  в виде

$$f(E) = f(0) - \gamma c^2 E \quad (132)$$

с произвольным параметром  $\gamma \geq 0$  обеспечивает выполнение условия  $\partial f / \partial E \leq 0$ , вытекающего из принципа причинности [4], и позволяет с учетом (128) и (130) определить  $A_{\pm}(k)$  в (129) таким образом, чтобы было выполнено условие ортогональности (126):

$$A_{\pm}(k) = (\gamma c^3 / B)^{1/2} \exp[\mp i k c] / [f(E) \mp i k c]. \quad (133)$$

Для волновой функции дейтона  $\varphi_d(r)$  с энергией связи  $\varepsilon_d = \alpha^2$  по аналогии с (122) и (129) будем иметь:

$$\varphi_d(r) = A(\alpha) \chi(r), \quad r < c; \quad (134)$$

$$\varphi_d(r) = N \exp(-\alpha r) / r, \quad r > c, \quad (135)$$

причем для  $f(E)$  (132) выбор  $A(\alpha)$  в виде

$$A(\alpha) = N \exp(-\alpha c) (\gamma c / B)^{1/2} \quad (136)$$

приводит к условию

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \varphi_d(r) \psi_k^{(\pm)}(r) = 0, \quad (137)$$

а из (36) и (132) следует

$$f(0) + \gamma c^2 \alpha^2 + \alpha c = 0. \quad (138)$$

Выражения для  $A_{\pm}(k)$  (133) и  $A(\alpha)$  (136), обеспечивающие выполнение условий (126) и (137) ортогональности, содержат два произвольных параметра  $\gamma$  и  $B$ , связанных соответственно с зависимостью (132)  $f$  от  $E$  и с характером поведения  $\chi(r)$  волновых функций в области  $r < c$ . В последнем случае простейшим вариантом является выбор  $\chi(r)$  в виде

$$\chi(r) = \text{sh } \beta r / r. \quad (139)$$

Внемассовую  $T$ -матрицу можно найти с помощью метода, описанного в разд. 1. Однако в этом случае для немассовых волновых функций  $\psi_k(r, Z)$  в граничном условии (18) и в условии, аналогичном (129),  $f$  и  $A$  должны рассматриваться как функции двух

переменных  $k$  и  $Z$ , вид которых необходимо выбрать так, чтобы массовые волновые функции были ортогональны, а немассовая  $T$ -матрица была бы аналитической функцией в плоскости комплексной переменной  $Z$  и удовлетворяла бы условиям симметрии и унитарности. Такой путь нам кажется несколько сложным, поэтому выберем здесь другой метод построения  $T$ -матрицы, основанный на введении на вещественной оси  $Z = E$  некоторого потенциала, для которого массовые волновые функции удовлетворяют граничному условию (124) с  $f(E)$  (132), условиям ортогональности (126) и (137) и соответственно при  $r > c$  имеют вид (122) и (135), а при  $r < c$  — (129) и (134) с  $\chi(r)$  (139). Таким потенциалом является зависящий от энергии  $E$  потенциал (38):

$$V(r, E) = V_0(E) \theta(c - r) - cV_1(E) \delta(r - c), \quad (140)$$

где

$$V_0(E) = \beta^2 + E; \quad (141)$$

$$c^2V_1(E) = \beta c \operatorname{cth} \beta c - f(0) + \gamma c^2 E. \quad (142)$$

Чтобы определить немассовую  $T$ -матрицу  $T(p, k, Z)$ , необходимо ввести продолжение потенциала (140) в комплексную плоскость  $Z = E \pm i\epsilon$ , в качестве которого выберем соотношение

$$V(r, Z) = V(r, \operatorname{Re} Z) = V(r, E). \quad (143)$$

Такое продолжение не является аналитическим, тем не менее для  $T$ -матрицы имеет место уравнение Липпмана — Швингера, так как в нем переменная  $Z$  рассматривается как параметр [36], но оно будет определять  $T$ -матрицу как неаналитическую функцию  $Z$ , что обусловлено определением (143) потенциала (140) в комплексной плоскости  $Z$ . Следовательно, вводимая модель не пригодна для описания таких эффектов или для вывода таких соотношений, когда важное значение имеет аналитичность  $T$ -матрицы как функции  $Z$ . Однако в дальнейшем будем применять получаемую  $T$ -матрицу только при решении уравнений Фаддеева, вывод которых не использует аналитичность  $T$ -матрицы, и в которых необходимы значения  $T$ -матрицы на отрицательной вещественной полуоси  $Z = E < 0$  и на верхнем и нижнем берегах  $Z = E \pm i0$  разреза вдоль вещественной положительной полуоси  $Z = E > 0$ . Условие (143) и вид потенциала (140) обеспечат выполнение некоторых важных соотношений для  $T$ -матрицы.

Для потенциала (140)–(143) немассовые волновые функции  $\psi_k(r, Z)$  имеют вид [11] ( $Z = E \pm i0$ ):

$$\psi_k(r, Z) = \frac{k^2 - E}{k^2 + \beta^2} j_0(kr) + A(k, Z) \frac{1}{r} \operatorname{sh} \beta r, \quad r < c; \quad (144)$$

$$\psi_k(r, Z) = j_0(kr) + i \sqrt{Z} T(\sqrt{Z}, k, Z) h_0^{(1)}(r \sqrt{Z}), \quad r > c, \quad (145)$$



где

$$A(k, Z) = \frac{c}{\text{sh } \beta c [f(E) - ic \sqrt{Z}]} \left\{ \frac{\beta^2 + E}{\beta^2 + k^2} [\cos kc - ic \sqrt{Z} j_0(kc)] + \right. \\ \left. + c^2 V_1(E) j_0(kc) \frac{k^2 - E}{k^2 + \beta^2} \right\}; \quad (146)$$

$$T(\sqrt{Z}, k, Z) = \frac{c \exp[-ic \sqrt{Z}]}{f(E) - ic \sqrt{Z}} \times \\ \times \left\{ \frac{\beta^2 + E}{\beta^2 + k^2} [\cos kc - \beta c \text{cth } \beta c j_0(kc)] + c^2 V_1(E) j_0(kc) \right\}. \quad (147)$$

Явные выражения (144) и (145) для немассовых волновых функций позволяют с помощью соотношения (11) определить  $T$ -матрицу:

$$T(p, k, Z) = -(p^2 - Z) \frac{\beta^2 + E}{\beta^2 + k^2} F_0(p, k) - \\ - (p^2 - Z) \frac{\text{sh } \beta c}{\beta^2 + p^2} [\cos pc - \beta c \text{cth } \beta c j_0(pc)] A(k, Z) + \\ + \exp[ic \sqrt{Z}] [\cos pc - ic \sqrt{Z} j_0(pc)] T(\sqrt{Z}, k, Z), \quad (148)$$

где  $Z = E \pm i0$ , а  $F_0(p, k)$  определяется выражением (30) при  $l = 0$ . Из (146) следует:

$$A(k, k^2 \pm i0) = [c \exp(\mp ikc)] / \{\text{sh } \beta c [f(E) \mp ikc]\},$$

что при сопоставлении (144) с (129), (139) и (133) с учетом (131) приводит к соотношению между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\gamma = (\text{sh } 2\beta c / 2\beta c - 1) / 2 \text{sh}^2 \beta c. \quad (149)$$

Это обеспечивает ортогональность (126) и (137) массовых волновых функций. Однако остается открытым вопрос о симметрии и унитарности  $T$ -матрицы (148). Эти свойства  $T$ -матрицы — следствие двух свойств резольвенты  $R(Z) = (H - Z)^{-1}$ , где  $H$  — двухчастичный гамильтониан [36]:

$$R^*(Z) = R(Z^*); \quad (150)$$

$$R(Z_1) - R(Z_2) = (Z_1 - Z_2) R(Z_1) R(Z_2), \quad (151)$$

причем последнее соотношение известно как тождество Гильберта.

Так как потенциал (140) — вещественный, то из (143) следует, что (150) выполняется автоматически. Тождество Гильберта не будет выполняться при  $E_1 \neq E_2$ . Но в работе [36] для доказательства унитарности  $T$ -матрицы используется (151) при  $Z_1 = E + i\varepsilon$ ,  $Z_2 = E - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом случае для нашей модели (140) и (143) тождество Гильберта (151) справедливо. Таким образом,  $T$ -матри-

ца (148) симметрична по  $p$  и  $k$  и удовлетворяет условию унитарности:

$$\begin{aligned} T(p, k, E+i0) - T(p, k, E-i0) = \\ = 2i \sqrt{E} T(p, \sqrt{E}, E+i0) T(\sqrt{E}, k, E-i0), \end{aligned}$$

частным случаем которого является унитарность амплитуды рассеяния  $F^{(\pm)}(k)$  (125).

Введение модели (140) и (143) будем рассматривать как некоторую вспомогательную процедуру, которая позволяет получить простым и наглядным способом предельный случай, когда взаимодействие описывается МГУ. Действительно, если  $\gamma \rightarrow 0$ , то из (132) и (149) следует соответственно, что  $f(E) \rightarrow \text{const}$  и  $\beta c \rightarrow \infty$ . При этих условиях, согласно (144) и (142), потенциал (140) совпадает с предельной формой потенциала (38), выражения (147) и (148) для  $T$ -матриц переходят соответственно в выражения (21) и (33) при  $l = 0$ , а немассовые функции (144) и (145) удовлетворяют граничным условиям (17) и (18). Таким образом, случай  $\gamma = 0$  полностью соответствует МГУ без внешнего потенциала с постоянной логарифмической производной. Зависящий от энергии потенциал (140) содержит четыре параметра:  $c$ ,  $f(0)$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Параметр  $\gamma$  удобно считать произвольным, что будет, согласно (132), приводить к различной зависимости от энергии  $E$  логарифмической производной  $f(E)$ . Остальные параметры можно определить из соотношений (138) (при наличии связанного состояния), (149) и из выражений для длины рассеяния  $a$  и эффективного радиуса  $r_0$ , следующих из (127). В случае системы нейтрона и протона для определения параметров потенциала (140) можно использовать экспериментальные значения энергии связи дейтона  $\varepsilon_d = 2,225 \text{ Мэв}$  и длины рассеяния  $a_t = 5,41 \text{ ферми}$  для триплетного состояния, а для синглетного состояния — экспериментальные значения длины рассеяния  $a_s = -23,72 \text{ ферми}$  и эффективного радиуса  $r_{0s} = 2,76 \text{ ферми}$  [37].

В табл. 4 для различных  $\gamma$  приведены параметры потенциала (140) для триплетного и синглетного состояний нейтрона и протона, причем для триплетного состояния в последнем столбце указаны получающиеся из (127) значения эффективного радиуса  $r_{0t}$ , которые можно сопоставить с экспериментальным значением  $r_{0t} = 1,75 \text{ ферми}$ . Из табл. 4 видно, что набор потенциалов (140), соответствующих различным значениям  $\gamma \neq 0$ , а также МГУ без внешнего потенциала с постоянной логарифмической производной ( $\gamma = 0$ ), одинаковым образом описывают  $s$ -фазы  $np$ -рассеяния в области энергий, для которых справедливо приближение эффективного радиуса. Для приведенных в табл. 4 параметров потенциала (140) триплетная  $T$ -матрица (148) имеет только один полюс при отрицательной энергии  $E = -\varepsilon_d$ , тогда как синглетная

$T$ -матрица никаких полюсов при  $E < 0$  не имеет. В комплексной плоскости  $k = \sqrt{E}$  триплетная амплитуда рассеяния  $F^{(+)}(k)$  (125) имеет полюс на положительной мнимой полуоси, соответствующей энергии связи дейтона  $\varepsilon_d = 2,225 \text{ Мэв}$ , а синглетная амплитуда имеет полюс на отрицательной мнимой полуоси, который соответствует виртуальному состоянию дейтона с энергией связи  $\varepsilon_0 = -0,066 \text{ Мэв}$ , что согласуется с экспериментальным значением [38]. В согласии со (132) триплетная и синглетная амплитуды  $F^{(+)}(k)$  имеют вторые полюса. Они расположены на отрица-

Таблица 4

Значения параметров потенциала (140) для нейтрона и протона, согласованные с энергией связи дейтона  $\varepsilon_d = 2,225 \text{ Мэв}$ , с триплетной длиной рассеяния  $a_t = 5,41 \text{ ферми}$ , с синглетной длиной рассеяния  $a_s = -23,72 \text{ ферми}$  и с синглетным эффективным радиусом  $r_{0s} = 2,76 \text{ ферми}$  [37]. Указаны также значения триплетного эффективного радиуса  $r_{0t}$  (экспериментальное значение  $r_{0t} = 1,75 \text{ ферми}$ )

$\gamma$	$c,$ ферми	$f(0)$	$\beta^2,$ Мэв	$r_{0t},$ ферми	$\gamma$	$c,$ ферми	$f(0)$	$\beta^2,$ Мэв	$r_{0t},$ ферми
Триплетное состояние					Синглетное состояние				
0	1,0965	-0,2540	$\infty$	1,7788	0	1,3061	0,0522	$\infty$	—
0,03	1,1301	-0,2638	9019	1,7788	0,03	1,3464	0,0537	6354	—
0,06	1,1653	-0,2743	2121	1,7788	0,06	1,3894	0,0553	1491,7	—
0,09	1,2020	-0,2854	885,8	1,7788	0,09	1,4354	0,0571	621,2	—
0,12	1,2403	-0,2972	464,6	1,7788	0,12	1,4845	0,0589	324,3	—
0,15	1,2803	-0,3097	272,3	1,7789	0,15	1,5373	0,0609	188,9	—

тельной мнимой полуоси, однако для  $\gamma \neq 0$ , приведенных в табл. 4, удалены от вещественной оси на большое расстояние (от 5 до 30 ферми<sup>-1</sup>).

Волновые функции (144) в области  $r < c$  при  $\gamma \neq 0$  не обращаются в нуль, т. е. в этом случае не выполняются необходимые условия [14], приводящие к неоднозначности уравнений Фаддеева, и возможно их непосредственное решение. Тогда результат, соответствующий парным взаимодействиям, описываемым МГУ, естественно рассматривать как результат экстраполяции в точку  $\gamma = 0$  значений, полученных для  $\gamma \neq 0$  при решении уравнений Фаддеева. При этом, конечно, предполагается, что такие значения ввиду простой зависимости от  $\gamma T$ -матрицы (148) являются достаточно плавными функциями  $\gamma$ . Уравнения Фаддеева можно решать обычным методом приближенной факторизации двухчастичной  $T$ -матрицы, что при учете конечного числа парциальных компонент сводит их к конечной системе одномерных интегральных уравнений [39]. Нефакторизованное слагаемое в  $T$ -матрице (148),

соответствующей потенциалу (140), (143), содержит функцию  $F_0(p, k)$ , которую удобно факторизовать с помощью метода Бубнова — Галеркина, рассмотренного в работах [40, 41]. Для этого необходимо ввести полную систему ортонормированных функций  $\varphi_n(r)$ , определенных в интервале  $(0, c)$ , в качестве которых можно взять  $\varphi_n(r)$  в виде полиномов степени  $n$ . В этом случае  $\varphi_n(r)$ , как и функции (112) и (113), выражаются через полиномы Якоби и принимают вид

$$\varphi_n(r) = \frac{(2n+1)^{1/2}}{c^{3/2}} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{n+\nu} \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!(\nu+1)!(\nu-1)!} \left(\frac{r}{c}\right)^{\nu-1},$$

$n = 1, 2, 3, \dots,$

а для  $F_0(p, k)$  будет иметь место хорошо сходящееся разложение [41]:

$$F_0(p, k) = \sum_n M_n(p) M_n(k), \quad (152)$$

где

$$M_n(k) = \int_0^c r^2 dr j_0(kr) \varphi_n(r).$$

Таблица 5

Зависимость энергии связи  $E_0$  трех тождественных бозонов и энергии связи  $E_T$  трития от значений  $\gamma$  в (132). Для  $E_0$  приведены результаты, соответствующие триплетному потенциалу (140) с учетом  $N$  слагаемых в (152) и пренебрежению в (148) членом с  $F_0(k, p)$  ( $N=0$ ). Значения при  $\gamma=0$  получены с помощью параболической экстраполяции

$\gamma$	$E_0, \text{ Мэв}$			$E_T, \text{ Мэв}$	$\gamma$	$E_0, \text{ Мэв}$			$E_T, \text{ Мэв}$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=1$		$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=1$
0,15	—	18,43	—	8,96	0,06	19,70	12,05	11,95	5,14
0,12	—	15,99	—	7,49	0,03	16,09	10,53	10,42	4,44
0,09	25,26	13,69	13,67	5,93	0	14,45	9,12	9,07	3,83

В табл. 5 для ряда значений  $\gamma \neq 0$  приведены энергия связи  $E_0$  трех тождественных бозонов и энергия связи трития  $E_T$ , полученные из уравнений Фаддеева. Для  $E_0$  указаны значения, получающиеся для триплетного потенциала (140) при учете  $N$  слагаемых в разложении (152) ( $N=1, 2$ ). Видно, что учет второго слагаемого в (150) ( $N=2$ ) дает лишь небольшую поправку к результатам с  $N=1$ , т. е. уже одночленная факторизация  $F_0(p, k)$

в (148) методом Бубнова — Галеркина является достаточно хорошим приближением. Приведенные в табл. 5 результаты для  $\gamma = 0$  получены параболической экстраполяцией соответствующих величин при  $\gamma \neq 0$ , и вполне естественно, что возникает вопрос о погрешности, связанной с такой процедурой. Для оценки этой погрешности при  $\gamma \neq 0$  было решено уравнение Фаддеева для трех бозонов с приближенной  $T$ -матрицей, получающейся из (148) при выбрасывании нефакторизованного члена с  $F_0(p, k)$  ( $N = 0$ ). Сопоставление соответствующего экстраполированного значения  $14,45 \text{ Мэв}$  со значением  $\bar{E}_0 = 13,21 \text{ Мэв}$  (см. выше), полученного для приближенной  $T$ -матрицы (117), приводит к  $\Delta E = 1,24 \text{ Мэв}$ , которую можно рассматривать как погрешность экстраполяции. По поводу вычисления с помощью уравнений Фаддеева значений, приведенных в табл. 5, необходимо сделать следующее замечание. В уравнения Фаддеева входит энергия  $E_q = E - 3q^2/4$ , поэтому, для того чтобы заведомо обеспечить сходимость некоторых интегралов, фактически использовалась не  $T$ -матрица (148), соответствующая  $f(E)$  (132) и  $V(r, E)$  (140), а предполагалось, что при  $E \leq -\beta^2 f(E)$  и  $V_0(E)$  соответственно принимают значения  $f(E) = f(0) + \gamma c^2 \beta^2$ ,  $V_0(E) = 0$ .

Результаты, приведенные в табл. 4 и 5, интересны в двух отношениях. Во-первых, для нейтрона и протона существует семейство потенциалов (140), которые для значений параметров, указанных в табл. 4, соответствуют экспериментальным значениям длины рассеяния и эффективных радиусов, а также энергии связи дейтона. Для этих потенциалов немассовое поведение  $T$ -матриц (148) различно, и это обстоятельство приводит к существенно различным значениям энергии связи трех бозонов  $E_0$  и энергии связи  $E_T$  трития (см. табл. 5). Отметим, что для  $\gamma = 0,18$  нами было получено для трех бозонов  $E_0 = 20,73 \text{ Мэв}$  и был обнаружен второй уровень  $E_1 = 2,266 \text{ Мэв}$ , что очень хорошо совпадает с результатами работы [42] ( $E_0 = 20,64 \text{ Мэв}$ ,  $E_1 = 2,293 \text{ Мэв}$ ) для статического потенциала прямоугольной формы. Во-вторых, значение  $E_0 = 9,07 \text{ Мэв}$  ( $\gamma = 0$ ,  $N = 2$ ) с учетом погрешности экстраполяции  $\Delta E = 1,24 \text{ Мэв}$  согласуется со значением  $E_0 = 7,70 \text{ Мэв}$ , полученным при решении непосредственно одномерных уравнений (108) и (109), что подтверждает как адекватность этих уравнений, так и сделанное выше заключение о трехчастичной моделиности уравнений работы [15]. Если принять, что погрешность экстраполяции для трития будет того же порядка, что и для трех бозонов ( $\Delta E \approx 1 \text{ Мэв}$ ), то значение  $E_T = 3,83 \text{ Мэв}$  ( $\gamma = 0$ , см. табл. 5), противоречит результату  $E_T = 7,05 \text{ Мэв}$  [33].

В связи с изложенным выше необходимо более подробно остановиться на большом отличии значения  $E_0 = 7,70 \text{ Мэв}$ , полученного в работе [20] при решении уравнений (108) и (109), от результата  $E_0 = 12,69 \text{ Мэв}$  работы [21], так как в ней рещалась та же

самая задача: вычислялась энергия связи  $E_0$  системы трех тождественных бозонов с нулевым полным угловым моментом, взаимодействующих только в относительных  $s$ -состояниях согласно МГУ. Значение  $E_0$  определялось в работе [21] из уравнения Фаддеева (66) с учетом только  $s$ -компоненты (116) парной  $T$ -матрицы с параметрами  $f$  и  $c$  (110). К сожалению, авторы не могут детально указать на причины сильного расхождения результатов работ [20] и [21], можно только отметить два обстоятельства, которые могут привести к подобному различию.

Первое обстоятельство связано с используемым в работе [21] существенным предположением о том, что для МГУ уравнение Фаддеева имеет тот же вид (66), что и для «нормальных» потенциалов. Рассматривая МГУ как предельную форму потенциала (38), видно, что такое предположение будет справедливо, если в (66) предел  $T_{\alpha\psi\beta}$  ( $\alpha, \beta$  — различные каналы) равен произведению пределов  $T_{\alpha}$  и  $\psi_{\beta}$ . По нашему мнению, такое утверждение требует более детального обоснования. Второе обстоятельство, на которое мы хотели бы указать, заключается в следующем. В работе [21] с помощью приближенного метода решается двумерное уравнение Фаддеева сведением его к матричному уравнению. Следует заметить, что матричный метод строго обоснован только для интегральных уравнений, ядра которых имеют конечную норму. Однако в МГУ ядра уравнений Фаддеева, взятых в виде (66), имеют бесконечную норму даже при учете только  $s$ -компоненты парной  $T$ -матрицы [44], причем это обстоятельство имеет место и для потенциалов с твердым кором. Таким образом, даже если справедливо предположение о том, что в МГУ уравнения Фаддеева имеют тот же вид (66), что и для обычных потенциалов, то предположение о справедливости использования матричного метода требует специальной проверки. В работе [21] оба эти предположения оправдываются ссылкой на результаты работы [44], в которой для парных потенциалов прямоугольной формы с твердым кором энергия связи трития  $E_T$  определялась как предел при  $V_0 \rightarrow \infty$  значений  $E_T$ , получаемых из уравнений Фаддеева для таких же потенциалов с кором конечной величины  $V_0$ . Однако, как нам кажется, в случае бесконечной нормы ядер какая-либо численная процедура решения интегральных уравнений, корректность которой доказывалась в общем виде только для ядер с конечной нормой, должна быть оправдана в каждом конкретном случае ее применения. Было бы весьма полезным определить предельное значение энергии связи  $E_0$  трех тождественных бозонов, используя потенциал (38) для ряда больших, но конечных значений  $V_0$  и  $V_1$ . Приведенное выше предельное значение  $E_0$  для потенциала (140)—(142) при  $\gamma \rightarrow 0$  скорее подтверждает результат работы [20], чем [21].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах [12, 13, 17—20] для решения задач двух и трех частиц в МГУ предложен единый метод, основанный на использовании граничных условий (17) и (18) для немассовых двухчастичных волновых функций и соотношений (9)—(12) и (68), следующих из уравнений Липпмана — Швингера и Фаддеева, и не содержащих в явном виде потенциалов. Для двух частиц такой подход в случае МГУ без внешнего потенциала представляет собой своего рода беспотенциальную параметризацию экспериментальных фаз рассеяния, а соотношения (21), (22) и (33), (34) определяют немассовые  $T$ - и  $K$ -матрицы. Первое из этих двух обстоятельств не удивительно, так как непосредственная проверка показывает, что согласно (21) и (22) МГУ без внешнего потенциала хорошо описывает экспериментальные  $s$ -фазы нуклон-нуклонного рассеяния до энергий порядка  $40 \text{ Мэв}$  в лабораторной системе, т. е. фактически в той области энергий, для которых удовлетворительно оправдывается не зависящее от формы потенциала приближение эффективного радиуса. Рассмотренный выше метод без труда можно обобщить на случай тензорного взаимодействия, и в его рамках вычисление немассовых  $T$ - и  $K$ -матриц будет значительно проще, чем при использовании предельной формы тензорного потенциала вида (38) [43]. В более реалистическом случае МГУ с потенциалом во внешней области на примере потенциала (62) простой экспоненциальной формы показано, что экспериментальные нуклон-нуклонные  $s$ -фазы до энергий  $400 \text{ Мэв}$  в лабораторной системе можно в среднем одинаково хорошо описать целым семейством таких потенциалов с различными значениями радиуса граничных условий  $s$ . Для  $s = 0,4 \text{ ферми}$  МГУ с внешним потенциалом (62) описывает экспериментальные  $s$ -фазы гораздо лучше, чем потенциал (62) с твердым кором радиуса  $s$  [26—28].

В частном случае трехчастичной задачи (система трех тождественных бозонов, взаимодействующих в  $s$ -состояниях, с нулевым полным моментом) показано, что решение уравнений Шредингера точным образом сводится к решению безмодельного на трехчастичном уровне одномерного интегрального уравнения (108) или (109), если парные взаимодействия описываются МГУ без внешнего потенциала. Особенность уравнений (108) и (109) заключается в том, что они однозначны, тогда как для получения однозначных трехчастичных уравнений в МГУ, представляющих модификацию уравнений Фаддеева [15], необходимо ввести дополнительное трехчастичное условие и произвольный трехчастичный параметр, которые приводят эти уравнения к существенно модельному виду. Указанное выше ограничение частным случаем трехчастичной задачи сделано только ради простоты, изложенный метод можно применить также и для более реалистических систем.

Решение уравнений (108) и (109) дало для энергии связи трех бозонов значение  $E_0 = 7,70 \text{ Мэв}$ , которое значительно отличается от результата  $E_0 = 12,69 \text{ Мэв}$ , полученного в работе [21] на основе уравнений Фаддеева. Структура уравнений (108) и (109) позволяет простым способом учесть приближенно влияние трехчастичных эффектов на энергию связи  $E_0$  с помощью введения зависимости от энергии (124) параметра  $f$ . Большой интерес могут представить расчеты энергии связи трития для определения параметров в (121) и последующий расчет с этими параметрами фаз  $nd$ -рассеяния. Введение зависящего от энергии  $np$ -потенциала (140) подтвердило полученное при решении уравнений (108) и (109) значение  $E_0 = 7,70 \text{ Мэв}$  и вывод о том, что уравнения работы [15] являются модельными и не соответствуют «пустотному» взаимодействию двух частиц, описываемому МГУ без внешнего потенциала.

В более реалистическом случае МГУ с локальным внешним потенциалом изложенный выше метод уже не приводит к одномерным уравнениям вида (108) и (109). Однако использование хорошо разработанных методов факторизации двухчастичной  $T$ -матрицы позволяет с хорошей точностью приближенно заменить локальный потенциал конечной суммой нелокальных сепарабельных потенциалов, и в этом случае решение трехчастичной задачи будет сводиться к решению системы одномерных интегральных уравнений. Крайне интересно на основе таких уравнений провести расчеты для найденного семейства потенциалов (62) с целью определения трехчастичных параметров: энергии связи трития, дублетной длины  $nd$ -рассеяния, зависимости от переданного импульса форм-фактора трития и т. п., так как модельные расчеты [21] указывают на сильную зависимость некоторых из этих величин от радиуса граничных условий. Рассмотренный метод решения трехчастичной задачи в МГУ может служить основой для корректного учета отгалкивательного кора при использовании в трехнуклонных задачах феноменологических потенциалов с жестким кором.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. Б. Беляеву, Р. Ван Вагенингену, Ю. А. Симонову и Дж. А. Тьюну за весьма полезные и плодотворные дискуссии, а также И. И. Шелонцеву и Н. Ю. Шириковой за помощь при проведении численных расчетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reid R. V. «Ann. Phys.», 1968, v. 50, p. 411.
2. Breit G., Bouricius W. G. «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1029.
3. Feshbach H., Lomon E. L. «Phys. Rev.», 1956, v. 102, p. 891.
4. Feshbach H., Lomon E. L. «Ann. Phys.», 1964, v. 29, p. 19.
5. Lomon E. L., McMillan M. «Ann. Phys.», 1963, v. 23, p. 439.
6. Hoenig M. M., Lomon E. L. «Ann. Phys.», 1966, v. 36, p. 363.
7. Lomon E. L., Nauenberg M. «Nucl. Phys.», 1961, v. 24, p. 474.



8. Lomon E. L., Feshbach H. «Ann. Phys.», 1968, v. 48, p. 94.
9. Фаддеев Л. Д. «ЖЭТФ», 1960, т. 39, с. 1459.
10. Hoenig M. M. «Nucl. Phys. A», 1973, v. 206, p. 169.
11. Kim Y. E., Tubis A. «Phys. Rev. C», 1970, v. 1, p. 414.
12. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р4-6708, 1972.
13. Efimov V. N., Schulz H. «Nucl. Phys. A», 1974, v. 235, p. 436.
14. Brayshaw D. D. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 659.
15. Brayshaw D. D. «Phys. Rev. D», 1973, v. 7, p. 1835.
16. Brayshaw D. D. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 2572.
17. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р4-7689, 1974.
18. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р4-8580, 1975.
19. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р4-8707, 1975.
20. Ефимов В. Н., Шульц Г. Препринт ОИЯИ Р4-8895, 1975; Efimov V. N., Schulz H. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 261, p. 328.
21. Kim Y. E., Tubis A. «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 354.
22. Lovelace S. «Phys. Rev. B», 1964, v. 135, p. 1225.
23. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. Пер. с англ. М., «Мир», 1967; Fuda M. G. «Phys. Rev. C», 1971, v. 3, p. 55.
24. Fuda M. G. «Phys. Rev.», 1969, v. 178, p. 1682.
25. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
26. Tang Y. G., Schmid E. W., Herndon R. C. «Nucl. Phys.», 1965, v. 65, p. 203.
27. Afnan J. R., Tang Y. C. «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 1337.
28. Ohmura T. «Progr. Theor. Phys.», 1969, v. 41, p. 419.
29. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1714.
30. Noyes H. P. «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 2025.
31. Воробьев Ю. В. Метод моментов в прикладной математике. М., Гостехиздат, 1958.
32. Ефимов В. «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 107.
33. Brayshaw D. D. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 382.
34. Yang S.-N. «Phys. Rev. C», 1974, v. 10, p. 2067; Blatt D. W. E., McKellar В. Н. J. «Phys. Rev. C», 1975, v. 11, p. 614.
35. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., «Наука», 1965.
36. Фаддеев Л. Д. «Труды Мат. ин-та АН СССР», 1963, т. 69.
37. Lomon E., Wilson R. «Phys. Rev. C», 1974, v. 9, p. 1329.
38. Brayshaw D. D., Noyes H. P. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1582.
39. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. «УФН», 1971, т. 103, с. 469.
40. Efimov V. N. Comptes Rendus du Congres International de Physique Nucleaire. V. II. Paris, 1964, p. 258.
41. Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ 4-5741, 1971.
42. Kharchenko V. F., Storozhenko S. A., Kuzmichev V. E. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 188, p. 609.
43. Kim Y. E., Tubis A. «Phys. Rev. C», 1970, v. 2, p. 2118.
44. Kim Y. E., Tubis A. «Phys. Rev. C», 1971, v. 4, p. 693.