

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЗОНАНСНЫХ ПРОЦЕССАХ НА ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ

*В. В. Бажанов, Г. Ш. Пронько,
Л. Д. Соловьев*

Институт физики высоких энергий,
Серпухов

Рассмотрен метод учета электромагнитных эффектов, возникающих в процессах рождения тяжелого узкого резонанса в e^+e^- -аннигиляции. Метод основан на низкоэнергетической теореме, соотношении унитарности и дисперсионных соотношениях. С учетом радиационных процессов получены формулы для полного сечения образования резонанса и сечения двухчастичных каналов (для последних радиационные поправки имеются также и в интерференционном члене сечения). Обсуждается универсальность электромагнитных поправок в сечениях других каналов. Получены формулы для ширины распада резонанса на пару лептонов и фотон для различных экспериментальных условий.

The way to take into account electromagnetic effects, arising in the processes with heavy narrow resonance production in e^+e^- annihilation has been considered in the present paper. The method is based on low energy theorem, unitarity and dispersion relations. Formulae for total cross section of resonance production and cross section of two-particle channels have been obtained with account of radiation processes. (For the latter one radiative corrections take place in the interference term of the cross section.) Universality of electromagnetic corrections in the cross sections for other channels is discussed. Formulae for the width of resonance decay into a leptonic pair and photon have been derived for different experimental conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные поправки к сечениям процессов с участием заряженных частиц, обусловленные излучением, обычно хорошо описываются низшим приближением теории возмущений по α . Однако в некоторых случаях влияние этих поправок настолько сильно, что учет их в низших порядках по α недостаточен, и необходимо суммировать весь ряд теории возмущений. Один из таких процессов — рождение тяжелого узкого резонанса (такого, как J/ψ или ϕ) в e^+e^- -аннигиляции. В данном случае тормозное излучение приводит к сильной деформации резонансной кривой: заметно

уменьшается сечение в максимуме (для J/ψ на 50%, для ϕ на 30%); появляется характерный радиационный «хвост», облегчающий наблюдение узкого резонанса в эксперименте.

Причина такого сильного влияния поправок связана с малой шириной резонанса и его большой массой, поскольку главным эффективным параметром разложения является $\alpha \ln(M/m) \ln(M/d)$, где M и m — массы резонанса и электрона; d — ширина резонанса или дисперсия распределения пучка e^+e^- по энергии. Для J/ψ -резонансов этот параметр близок к 0,5, и мы будем по нему суммировать. Другая константа $\alpha \ln(M/m) \approx 0,1$, по которой можно ограничиться низшим порядком, и, наконец, поправки порядка α можно совсем не учитывать.

Данная работа посвящена систематическому использованию метода S -матричной электродинамики [1] для учета электромагнитных эффектов в процессах с рождением тяжелого узкого резонанса в e^+e^- -аннигиляции. Основные результаты были кратко изложены в работах [2]. Резонансные процессы на встречных пучках изучались также в работах [3, 4] с помощью суммирования диаграмм.

Следует подчеркнуть, что метод S -матричной электродинамики основан на аксиоматическом подходе Н. Н. Боголюбова [5] и позволяет учитывать эффекты мягких фотонов без теории возмущений. Получаемые при этом выражения оказываются обобщенными функциями, аналитичными по α . Этот результат позволяет обосновать возможность применения метода суммирования диаграммы в данной проблеме.

Другая существенная особенность S -матричного метода заключается в том, что с его помощью можно не только получить формулы с учетом главных эффектов, но и сделать оценку поправочных членов. Этому вопросу в работе будет уделяться особое внимание.

Рассмотрим здесь низкоэнергетическую теорему для амплитуды излучения фотонов в процессе e^+e^- -аннигиляции в резонанс с большой массой $M \gg m$. Покажем, что, ограничиваясь одночастичным (полностью по энергии фотона) приближением, можно с достаточной точностью описывать излучение фотонов в области по крайней мере $\Sigma k_i \ll m_s$, где Σk_i — энергия фотонов; m_s^{-1} — размер адронной структуры резонанса (m_s во всяком случае больше массы π -мезона). Далее изучим электромагнитные эффекты в полном сечении рождения резонанса. Затем получим формулу для резонанса Брейта — Вигнера с учетом виртуальных γ -квантов в упругой амплитуде и сечение процесса $e^+e^- \rightarrow$ резонанс $\rightarrow l^+l^-$ с учетом излучения. В заключение обсудим электромагнитные эффекты в других каналах. В приложение вынесены детали вычисления ширины распада резонанса на e^+e^- -пару и γ -квант для типичных экспериментальных условий.

1. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Электромагнитные эффекты, возникающие при рождении резонанса в процессе e^+e^- -аннигиляции и искажающие форму резонансной кривой, связаны с тормозным излучением заряженных частиц высокой энергии. Если E — энергия e^+e^- -пары в системе центра масс, M — масса резонанса, то при достаточно малой его ширине доля энергии, уносимая тормозными фотонами, $\Delta E = E - M$. Для отделения электромагнитных эффектов достаточно описать ход энергетической зависимости сечения в малой окрестности резонанса. В этом случае энергия ΔE , уносимая фотонами, мала и мы можем пользоваться приближением мягких фотонов. При $\Delta E \ll m$ это приближение дает точное описание электромагнитных эффектов. Ниже покажем, что тот же инфракрасный механизм благодаря большой массе резонанса обеспечивает нужную точность и в области $\Delta E \ll M$.

В приближении нулевой ширины резонанс может находиться в асимптотическом состоянии и процесс его рождения, сопровождающийся излучением фотонов, описывается матричным элементом $\langle q, k_1, \dots, k_n | T | p, r \rangle$, где q — импульс резонанса; $k_i \varepsilon_i$ — импульсы и поляризации фотонов; p и r — импульсы позитрона и электрона. Этот матричный элемент содержит инфракрасные расходимости. С помощью известной формулы [6, 7] введем физический матричный элемент $T(q, k_1, \dots, k_n; p, r)$, который определяет сечение данного процесса и не содержит инфракрасных расходимостей:

$$\langle q, k_1, \dots, k_n | T | p, r \rangle = (m/\lambda)^{\beta(s-i0)} T(q, k_1, \dots, k_n; p, r), \quad (1)$$

где m — масса электрона; λ — масса фотона;

$$\beta(s) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{2s' - 4m^2}{s' \sqrt{s'(s' - 4m^2)}} \frac{ds'}{[s' - s]}. \quad (2)$$

При $|s| \gg m^2$

$$\text{Re } \beta(s) = -(\alpha/\pi) [\ln(s/m^2) - 1]. \quad (3)$$

Покажем здесь, что при $M \gg m$, $\Delta E \ll M$, $\Delta E \ll m_s$

$$\begin{aligned} & T(q, k_1, \dots, k_n; p, r) = \\ & = \left[\prod_{i=1}^n P(k_i) \right] \left[1 + O(\Delta E/M) + \sum_{i=1}^n (O(k_i^2/m_s^2) + \varphi(k_i)) \right] T(q; p, r), \quad (4) \end{aligned}$$

где $m_s^{-1} (m_s > m_\pi)$ определяет размер адронной структуры резонанса;

$$P(k) = e [p\varepsilon/(pk) - r\varepsilon/(rk)]; \quad (5)$$

$\varphi(k_i)$ — величина порядка α , причем при $k \rightarrow 0$ $\varphi(k) = O(k^2) + O(k^2 \ln k)$; $T(q; p, r)$ — амплитуда процесса рождения резонанса без излучения.

Перейдем к доказательству (4). Сначала рассмотрим случай одного фотона.

Амплитуда $\langle q, k | T | p, r \rangle$ — матричный элемент тока резонанса $\langle k | j | p, r \rangle$, взятый при $(p + r - k^2) = M^2$. С этим матричным элементом связан аналитическим продолжением другой матричный элемент этого же тока $\langle k, p | j | r \rangle$ (здесь p и r — состояния электрона), для которого известно асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$ [1, 7]:

$$j(k, p; r) = P(k) \exp[C_1(k)] [1 + C_2(k) + O(k^2) + O(k^2 \ln k)] j(p, r), \quad (6)$$

где $j(p, r)$ и $j(p, k; r)$ — матричные элементы тока после выделения инфракрасных расходимостей [см. (1)]; $C_i(k)$ — известные функции, причем

$$C_1(k) = O(k \ln k); \quad C_2(k) = O(k). \quad (7)$$

Это разложение получено решением уравнения S -матричной электродинамики [1, 7] без использования теории возмущений, что существенно в данном случае, поскольку теория возмущений а priori неприменима в инфракрасной области.

Матричные элементы $\langle k, p | j | r \rangle$ и $\langle k | j | p, r \rangle$ — граничные значения одной функции переменных $(p + k)^2$, $(r - k)^2$ и $(p - r)^2$. Поскольку процедура выделения инфракрасных расходимостей не нарушает аналитических свойств [7], физические матричные элементы также являются граничными значениями одной аналитической функции. Члены асимптотического разложения (6) обладают теми же аналитическими свойствами, и их можно продолжить в область аннигиляции, причем там они тоже дадут асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$. Это следует из того факта, что в комплексной плоскости переменных $(p + k)^2$ и $(r - k)^2$ особенность, определяющая поведение при $k \rightarrow 0$ в каналах рассеяния и аннигиляции, одна и та же — разрез от $(p + k)^2 = m^2$ и $(r - k)^2 = m^2$. При переходе из одного канала в другой характер этой особенности не меняется, т. е. инфракрасный механизм, ответственный за излучение мягких фотонов, один и тот же в обоих каналах. Для получения разложения матричного элемента $j(k; p, r)$ достаточно в (6) сделать замену $pk + i0 \rightarrow -pk$, $(p - r)^2 \rightarrow s - i0$, $\bar{u}(p) \rightarrow \bar{v}(p)$. Таким образом,

$$j(k; p, r) |_{(p+r-k)^2=M^2} = T(q, k; p, r) = P(k) \exp[C_1(k)] [1 + \tilde{C}_2(k) + O(k^2) + O(k^2 \ln k)] T(q; p, r), \quad (8)$$

где $\tilde{C}_i(k)$ — функции $C_i(k)$ в области аннигиляции.

Асимптотические разложения (6) и (8) справедливы во всех порядках по сильному и электромагнитному взаимодействиям. Однако чтобы практически применить асимптотическое разложение, необходимо уточнить порядок малости поправочных членов, другими словами, указать область, в которой поправки к главному полюсному члену малы и составляют, например, 1%. Рассмотрим сначала этот главный член асимптотического разложения. В уравнениях S -матричной электродинамики он возникает при учете одночастичных промежуточных состояний, а на языке

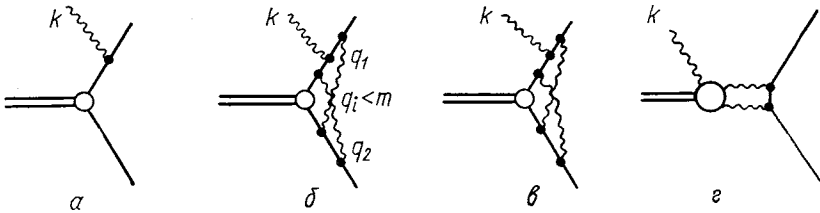


Рис. 1. Примеры диаграмм, описывающих излучение фотона:

a — борновский член; $б, в, г$ — поправки к борновскому члену, обусловленные мягкими и жесткими фотонами и сильными взаимодействиями соответственно. В каждом случае под азумеваются градиентно-инвариантные наборы диаграмм

диаграмм Фейнмана ему соответствует борновская диаграмма (рис. 1, a) и ее градиентно-инвариантный набор. В простейшем случае скалярных частиц и скалярного резонанса борновский член имеет вид $P(k) j ((p+r-k)^2)$, где $j ((p+r-k)^2)$ — ток резонанса, взятый на поверхности масс заряженных частиц, но при сдвинутом значении энергии. Первый член разложения тока по степеням k дает полюсный член в амплитуде излучения: $P(k) j ((p+r)^2)$. Следующие члены разложения имеют вид $P(k) (pk + rk)^n j ((p+r)^2)$. Для случая векторного резонанса и заряженных частиц спина 1/2 первое борновское приближение имеет более сложную спиновую структуру, но механизм возникновения полюсного слагаемого и поправочных членов с сингулярной зависимостью от k типа $(pk + rk)^n / pk$ тот же самый, что и в скалярном случае. Эти поправочные члены имеют относительный порядок $(k/M)^n$ при выполнении условия

$$\partial^n T(q; p, r) / (\partial M^2)^n \sim T(q; p, r) / (M^2)^n, \quad (9)$$

которое выполняется для степенно-логарифмических функций. Наличие близлежащих резонансов и другие причины сильной зависимости $T(q; p, r)$ от M^2 приводят к нарушению (9), что, в свою очередь, сказывается на области применимости полюсного приближения для $T(q, k; p, r)$. Таким образом, при условии (9)

амплитуду в борновском приближении получаем в виде

$$T(q, k; p, r) = P(k) [1 + O(k/M)] T(q; p, r). \quad (10)$$

Остальные поправки к полюсному члену по их происхождению можно условно разделить на три типа: 1) поправки, обусловленные мягкими виртуальными фотонами (см. рис. 1, б); 2) поправки от жестких фотонов (см. рис. 1, в); 3) поправки за счет сильного взаимодействия, обусловленные излучением после аннигиляции, т. е. излучением из адронного блока (см. рис. 1, г).

Известные члены асимптотического разложения (8) — поправки первого типа. Малость этих поправок определяется малостью параметра k/M при условии $(\alpha/\pi) \ln(M/m) < 1$. Таким образом, излучение первого типа имеет амплитуду $P(k) O(k/M) T(q; p, r)$ в области $k \ll M$ при условиях (9) и $(\alpha/\pi) \ln(M/m) < 1$.

Перейдем к рассмотрению поправок второго типа. При $k \ll m$ они имеют порядок $O(k) + O(k \ln k)$. Неизвестно, однако, как ведут себя эти поправки при $m < k \ll M$. В данной области теории возмущений применима, следовательно, можно оценить эти члены, ограничиваясь низшим порядком теории возмущений, для чего вычтем известные поправки первого типа из выражения теории возмущений. В результате получим, что поправки второго типа в области $k \ll M$, $k > m$ не превышают величины $\alpha P(k)$. Например, в низшем порядке член $O(k \ln k)$ при $k \rightarrow 0$, $M \gg m$ имеет вид $\alpha P(k) [pkrk/(M^2 m^2)] \ln [pkrk/(M^2 m^2)]$, а в области $k > m$, $M \gg m$ он переходит в $\alpha P(k) (m/M)^2 \ln^2(M^2/pk)$.

Последний тип излучения — излучение нейтральной системы адронов, в которые аннигилировала e^+e^- -пара, наиболее сложен, так как для его рассмотрения необходимо детально описать сам процесс аннигиляции. Можно, однако, сделать некоторые общие утверждения об амплитуде такого излучения, достаточные для дальнейшего рассмотрения. Их можно уточнять для конкретных моделей.

Амплитуда излучения этого типа не имеет сингулярной зависимости от k . Ее разложение по степеням k аналогично мультипольному разложению, и, следовательно, относительный порядок членов разложения определяется характерным размером излучающей системы адронов — в данном случае радиусом сильных взаимодействий m_s^{-1} * (m_s во всяком случае больше массы π -мезона). Предполагая конкретную модель резонанса, например модель орточармония [18] для J/ψ , можно уточнить относительный порядок амплитуды излучения, связав его с эффективной массой

* Здесь будем предполагать, что отсутствуют близлежащие резонансы с массой M_1 , такой, что $|M - M_1| < m_s$. В противном случае область применимости сужается до $k \ll |M - M_1|$.

кварка (в данной модели $m_s \approx 2 \text{ Гэв}$) и константой связи резонанса с фотоном.

Суммируя приведенные выше рассмотрения, можно сказать, что при $k \ll m_s$, $(2\alpha/\pi) \ln(M/m) < 1$:

$T(q, k; p, r) = P(k) [1 + O(k/M) + O(k^2/m_s^2) + \varphi(k)] T(q; p, r)$, где $\varphi(k) \sim \alpha$.

Перейдем к рассмотрению рождения резонанса, сопровождаемого излучением нескольких фотонов. В этом случае также можно написать асимптотическое разложение при $k_i \rightarrow 0$ [4, 7]:

$$T(q, k_1, \dots, k_n; p, r) = \left[\prod_{i=1}^n P(k_i) \right] \exp \left[\sum_{i=1}^n C_1(k_i) \right] \times \\ \times \left[1 + \sum_{i=1}^n C_2(k_i) + \sum_{i>j} C_3(k_i, k_j) \right] T(q; p, r) + O(k^{2-n} \ln k), \quad (11)$$

где $P(k)$, $C_1(k)$, $C_2(k)$ — те же функции, что и в (6); $C_3(k_i, k_j)$ — член, описывающий скоррелированное излучение двух фотонов. Порядок членов $O(k^2 \ln k)$ указан для случая, когда $k_i = k$. Здесь, как и в случае излучения одного фотона, возможны те четыре механизма, о которых говорилось выше. Особенность данного разложения состоит в том, что имеются члены, описывающие скоррелированное излучение двух и большего числа фотонов, т. е. амплитуда излучения n фотонов не распадается на независимые амплитуды последовательного излучения этих фотонов. Очевидно, что корреляции могут быть лишь в том случае, когда два или большее число фотонов излучается в процессе одного типа. Когда фотоны излучаются механизмами разных типов, рассмотрение аналогично приведенному выше и параметры малости для каждого фотонного импульса определяются как и в случае одного фотона. Таким образом, без учета корреляций при условии $\Delta E \ll \ll M$, $(\alpha/\pi) \ln(M/m) < 1$, где ΔE — суммарная энергия фотонов:

$$T(q, k_1, \dots, k_n; p, r) = \left[\prod_{i=1}^n P(k_i) \right] [1 + O(\Delta E/M) + \\ + \sum_{i=1}^n (O(k_i^2/m_s^2) + \varphi(k_i))] T(q; p, r), \quad (12)$$

где $\varphi(k_i)$ — величины порядка α , соответствующие поправкам второго типа. Амплитуду скоррелированного излучения нескольких фотонов можно рассмотреть тем же способом, что и амплитуду излучения одного фотона. В приближении одночастичных промежуточных состояний вклад двухфотонных корреляционных членов в амплитуду излучения имеет вид

$$\prod_{i=1}^n P(k_i) \sum_{i>j} [P(k_i) P(k_j)]^{-1} e^2 T(q; p, r) / [P(k_i + k_j)]. \quad (13)$$

По сравнению с главным полюсным членом (12) амплитуда (13) имеет порядок $\Delta E/M$. Поправки к ней, вызванные обменом мягкими и жесткими фотонами, как показывают прямые вычисления по теории возмущений (рис. 2) и с помощью S -матричного подхода [9], малы и по своей энергетической зависимости аналогичны поправкам к амплитуде излучения одного фотона, обусловленным механизмом второго типа.

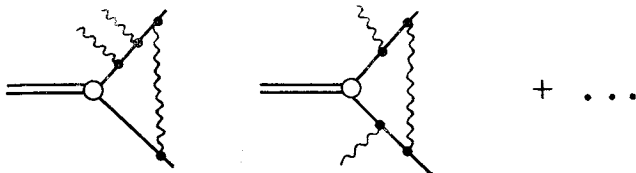


Рис. 2. Примеры диаграмм, содержащих поправки к амплитуде скоррелированного излучения двух фотонов

Более сложные двухфотонные члены имеют порядок $O(k^{2-n} \ln k)$ и $O(k^{2-n})$ (при $k_i = k$), причем их малость определяется отношением $\Delta E/M$. Трехфотонные и выше корреляционные члены имеют относительный порядок $(\Delta E/M)^2$ и выше. Таким образом, учет скоррелированного излучения дает поправки порядка $\Delta E/M$ к амплитуде (12). Суммируя вышесказанное, получаем формулу (4), с помощью которой ниже опишем электромагнитные эффекты при рождении тяжелого узкого резонанса.

2. ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ

Рассмотрим здесь электромагнитные эффекты в полном сечении образования резонанса в e^+e^- -аннигиляции. Спин, четность, C -четность резонанса будем считать равными 1^- .

Для простоты изучим сначала приближение бесконечно узкого резонанса. Без учета электромагнитных поправок полное сечение в этом приближении имеет вид:

$$\sigma(s) = \pi A \delta(x); \quad (14)$$

$$A = 12\pi \Gamma_e / M^3; \quad x = (s - M^2) / M^2, \quad (15)$$

где Γ_e — ширина распада резонанса на e^+e^- ; M — масса резонанса; $s = E^2$ — квадрат полной энергии в системе центра масс. Наблюдаемый процесс всегда сопровождается излучением бесконечного числа мягких фотонов. С учетом такого излучения сечение (14) при $x \ll 1$ переходит в следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(s) = \pi A \left[1 + \frac{3}{4}a + O(\alpha) + O(x) + O\left(\frac{(E-M)^{2l}}{m_s^2}\right) \right] x^{-1+a}, \quad x > 0; \\ \sigma(s) = 0, \quad x < 0, \end{aligned} \right\} (16)$$

где

$$a = -2 \operatorname{Re} \beta(s) \approx (2\alpha/\pi) [2 \ln(M/m) - 1], \quad M \gg m; \quad (17)$$

m — масса электрона. Формула (16) аналогична формулам для одночастичных особенностей амплитуд и функций Грина, полученных ранее в рамках S -матричного подхода [1, 9].

Для вывода (16) запишем сечение процесса с излучением произвольного числа фотонов:

$$\sigma(s) = \frac{\pi}{s} \int d^4q \delta(q^2 - M^2) \theta(q_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\tau_n \delta(P - q - K_n) \times \\ \times \overline{\Sigma} | \langle k_1, \dots, k_n, q | T | p_1, p_2 \rangle_{\lambda} |^2, \quad (18)$$

где $\overline{\Sigma}$ обозначает суммирование и усреднение по поляризациям;

$P = p_1 + p_2$; $K_n = \sum_{i=1}^n k_i$, $d\tau_n = \prod_{i=1}^n \{d^3k_i [(2\pi)^3 2k_0^i]^{-1}\}$, остальные обозначения введены выше.

Вблизи резонанса, т. е. при $x \ll 1$, суммарная энергия, уносимая фотонами, $\sum k_i^0 \ll m_s$, и можно воспользоваться низкоэнергетической теоремой (4).

Переходя к физическим матричным элементам, подставим (4) в (18) и проинтегрируем по d^4q . После этого, заменяя δ -функцию ее фурье-представлением и суммируя по n , получаем

$$\sigma(s) = \frac{\pi}{(2\pi)^4 s} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-i(s - M^2)y] \times \\ \times \exp \left[- \int P_{12}^2(k) \exp(2iPky) \tilde{d}k \right] \left(1 + \int \tilde{d}k \exp(2iPky) P_{12}^2(k) \times \right. \\ \left. \times \left[O\left(\frac{k}{M}\right) + O\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \right] \right) \overline{\Sigma} | T(q; p_1, p_2) |^2, \quad (19)$$

где $P_{12}(k)$ определено в (5) при $p = p_1$, $r = p_2$; a определено в (17).

Интегрирование по $\tilde{d}k$ дает

$$\sigma(s) = \frac{\pi}{s} \exp(D - aC) (sm^2)^{-a/2} \overline{\Sigma} | T(q; p_1, p_2) |^2 \frac{\exp(i\pi a/2)}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-i(s - M^2)y] (y + i0)^{-a}, \quad (20)$$

где C — постоянная Эйлера;

$$D = h(p_1, p_1) - 2h(p_1, p_2) + h(p_2, p_2); \quad (21)$$

$$h(p, r) = \frac{\alpha}{\pi} pr \int_0^1 \frac{dx}{p_x^2} \frac{1}{2v} \ln \frac{1+v}{1-v}; \quad p_x = px + r(1-x); \\ v = (1 - p_x^2 P^2 / (p_x P)^2)^{1/2}. \quad (22)$$

Окончательное интегрирование по y в (20) производится с помощью формулы [10]

$$\frac{\exp(i\pi a/2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-iyx) (y+i0)^{-a} = \frac{x_+^{-1+a}}{\Gamma(a)}, \quad (23)$$

которая может служить определением обобщенной функции $x_+^{-1+a}/\Gamma(a)$. Эта функция интегрируема в нуле, причем интеграл $\int dx f(x) x_+^{-1+a}/\Gamma(a)$ при $\text{Re } a < 0$ определяется как аналитическое продолжение $a_0 \rightarrow a$ интеграла $\int dx f(x) x_+^{-1+a_0}/\Gamma(a_0)$ с $\text{Re } a_0 > 0$. Обобщенная функция $x_+^{-1+a}/\Gamma(a)$ аналитична по a во всей комплексной плоскости. Отметим, что этот результат получен без теории возмущений суммированием по числу состояний в $\sigma(s)$.

Свяжем теперь $T(q; p_1, p_2)$ с шириной Γ_e . Для этого выделим из $T(q; p_1, p_2)$ дважды логарифмическую асимптотику [11] и линейную по логарифму поправку низшего порядка к вершинной функции (см., например, [12]). Высшие поправки к вершинной функции имеют порядок $O(\alpha a)$:

$$T(q; p_1, p_2) = \exp[-(a/4\pi) \ln^2(s/m^2)] (1 + 3a/8 + O(\alpha) + O(\alpha a)) \times \\ \times T_0(q; p_1, p_2); \quad (24)$$

$$T_0(q; p_1, p_2) = g \varepsilon_\mu \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1), \quad (25)$$

где ε — поляризация резонанса; u и v — спиноры. Ширина Γ_e выражается через $T_0(q; p_1, p_2)$ с помощью обычных формул для двухчастичного распада:

$$\Gamma_e = g^2 M / 12\pi. \quad (26)$$

Используя (20)–(26), получаем формулу (16). Для сравнения с теорией возмущений приведем разложение обобщенной функции x_+^{-1+a} в ряд Лорана по a :

$$x_+^{-1+a} = \begin{cases} \delta(x)/a + x^{-1} + ax^{-1} \ln x + \dots, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Поправки, не зависящие от x , в (16) происходят от учета радиационных поправок к вершине, в то время как поправки, зависящие от x , возникают за счет учета следующих членов в низкоэнергетической теореме. Если принять $m_s \sim m_\pi$, то вплоть до $E - M \sim \sim 10 \text{ Мэв}$ погрешность формулы (16) будет составлять 1%. Главный член формулы (16) получен в работе [3] и независимо, в связи с открытием J/ψ -резонансов, в работах [2, 4]. Оценка поправоч-

ных членов, найденная в данной работе, позволяет определить погрешность (16).

Учет конечной ширины резонанса произведем, заменяя $\delta(q^2 - M^2)$ в фазовом объеме (18) на брейт-вигнеровское распределение:

$$\delta(q^2 - M^2) \rightarrow \int dM'^2 \delta(q^2 - M'^2) \frac{M\Gamma}{\pi [(M^2 - M'^2)^2 + M^2\Gamma^2]}. \quad (27)$$

После замены переменных получим

$$\sigma(s) = (1 + O(x)) \int ds' \sigma_0(s') \frac{M\Gamma}{\pi [(s' - s)^2 + M^2\Gamma^2]}. \quad (28)$$

Окончательное интегрирование дает

$$\sigma(s) = A [1 + 3a/4 + O(x) + O((E - M)^2/m_s^2)] \text{Im}(-z)^{-1+a}, \quad (29)$$

где $z = x + iy$; $\gamma = \Gamma/M$. Эта формула описывает экспериментальное сечение в случае идеального разрешения по энергии, т. е. когда ширина резонанса много больше ширины распределения пучка по энергии. В противном случае (29) должна быть проинтегрирована с функцией распределения пучка по энергии

$$\sigma_{\text{эрс}}(s) = \int \sigma(s') P(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) d\sqrt{s'}. \quad (30)$$

Для гауссова распределения с дисперсией d

$$P(w) = \exp(-w^2/2d^2)/d\sqrt{2\pi} \quad (31)$$

результат выражается через функции параболического цилиндра:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эрс}}(s) = A \left(\frac{2d}{M}\right)^{-1+a} \text{Im} \left\{ \exp\left[\frac{(\gamma - ix)^2 M^2}{4d^2}\right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1-a)\right] D_{-1+a}\left(\frac{(\gamma - ix)M}{2d}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если $d \gg \Gamma$, вместо (29) можно пользоваться приближением бесконечного узкого резонанса (16). В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эрс}}(s) = [\pi A \exp(-ac)/\sqrt{2\pi}] (2d/M)^{-1+a} \times \\ \times \exp[-(\sqrt{s} - M)^2/4d^2] D_{-a}[-(\sqrt{s} - M)/d]. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим основные электромагнитные эффекты, сопровождающие рождение резонанса. При $x \gg \max\{\gamma, d/M\}$ сечение описывается формулой (16). Такая характерная степенная зависимость сечения от энергии — радиационный хвост облегчает наблюдение узкого резонанса при эксперименте. При $x \ll -\max\{\gamma, d/M\}$ получаем

$$\sigma_{\text{эрс}}(s) = A\gamma |x|^{a-2} (1-a), \quad (34)$$

т. е. сечение, в отличие от обычной брейт-вигнеровской формулы

$$\sigma_{\text{БВ}}(s) = A\gamma (x^2 + \gamma^2)^{-1}, \quad (35)$$

несимметрично относительно точки $x = 0$. Сечение в максимуме для двух предельных случаев имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{экс}}(s) &= A\gamma^{\alpha-1} = \gamma^{\alpha}\sigma_1(M^2), \quad \Gamma \gg d; \\ \sigma_{\text{экс}}(s) &\approx \sqrt{\pi} A (2\sqrt{2}d/M)^{\alpha-1} = (2\sqrt{2}d/M)^{\alpha}\sigma_1(M^2), \quad d \gg \Gamma, \end{aligned} \right\} (36)$$

где σ_1 — сечение без поправок.

Для иллюстрации заметим, что для J/ψ ($d \approx 1$ Мэв, $M = 3,1$ Гэв) сечение в максимуме с радиационными поправками почти вдвое (0,58) меньше того же значения без поправок. Этот факт может показаться странным; мы складываем сечения рождения резонанса без фотонов с сечением рождения с одним, двумя и т. д. фотонами, а в результате получаем меньшее значение. Разгадка этого парадокса состоит в том, что сечение процесса без фотонов или с фиксированным числом фотонов в конечном состоянии, строго говоря, равно нулю за счет радиационных поправок, и лишь суммируя бесконечное число таких процессов, можно получить отличное от нуля выражение. Найденное таким образом сечение всегда содержит множитель $(\Delta E)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, где ΔE — порядок суммарной энергии излученных мягких фотонов [см. (36)], который при достаточно малом значении ΔE приводит к уменьшению сечения.

3. СЕЧЕНИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Найдем здесь сечение процесса $e^+e^- \rightarrow l^+l^- +$ нерегистрируемые фотоны (l^+l^- — лептонная пара) в резонансной области. Рассмотрим сначала амплитуду безрадиационного процесса $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$. Эта амплитуда содержит фоновую и резонансную части. В низшем порядке по электромагнитному взаимодействию резонансная амплитуда $T_{\text{рез}}(s, t)$ имеет брейт-вигнеровскую форму. Учет фотонов в промежуточных состояниях приводит к тому, что особенность становится более сложной. Для ее вычисления можно воспользоваться методом суммирования асимптотик диаграмм Фейнмана, однако этим методом довольно сложно оценить точность получаемых формул. Мы будем использовать метод работ [1, 9], основанный на низкоэнергетической теореме, соотношении унитарности и дисперсионных соотношениях. Оценка поправочных членов, а вместе с ней и точность получаемых формул вытекают непосредственно из низкоэнергетической теоремы.

Запишем соотношение унитарности:

$$\text{Im } T(s, t) = \pi (2\pi)^3 \sum_N \langle p_3 p_4 | \hat{T} | N \rangle \langle N | T | p_1 p_2 \rangle, \quad (37)$$

где p_1, p_2 — импульсы начальных, p_3, p_4 — импульсы конечных частиц. Для определенности последние будем считать e^+e^- -парой.

В приближении бесконечно узкого резонанса для резонансной части амплитуды $T_{\text{рез}}(s, t)$ соотношение (37) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } T_{\text{рез}}^x(s, t) = & \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \tilde{d}q \, d\tau_n \delta(P - q - K_n) \times \\ & \times \langle p_3, p_4 | \overset{\dagger}{T} | q, k_1 \dots k_n \rangle_{\lambda} \langle k_1 \dots k_n, q | T | p_1, p_2 \rangle_{\lambda} + \\ & + \pi (2\pi)^3 \left[\sum_{N'} \langle p_3, p_4 | \overset{\dagger}{T} | N' \rangle_{\text{рез}}^{\lambda} \langle N' | T | p_1, p_2 \rangle_{\text{фон}}^{\lambda} + \right. \\ & \left. + \langle p_3, p_4 | \overset{\dagger}{T} | N' \rangle_{\text{фон}}^{\lambda} \langle N' | T | p_1, p_2 \rangle_{\text{рез}}^{\lambda} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где $|q, k_1 \dots k_n\rangle$ — состояние резонанса с импульсом q и n фотонов с импульсами $k_1 \dots k_n$, N' не содержит резонанса; индексы «рез» и «фон» обозначают соответственно резонансную и фоновую части амплитуды; λ у матричных элементов означает, что рассмотрение ведется при ненулевой фотонной массе λ ; остальные обозначения определены в (18) и (19).

Нашей задачей является построение резонансной амплитуды, удовлетворяющей соотношению унитарности с учетом фотонов в промежуточных состояниях. Без фотонов такая задача была рассмотрена в работе [13], в которой показано, что амплитуда $T_{1 \text{ рез}}(s, t)$, восстановленная с помощью дисперсионных соотношений только по первому члену (38), отличается от $T_{\text{рез}}(s, t)$ лишь фазовым множителем с фазой, медленно меняющейся от энергии, причем эта фаза пропорциональна фазе матричного элемента $\langle q | T | p_1 p_2 \rangle$. Можно показать, что такая же ситуация имеет место и в нашем случае. Если предположить, что

$$T_{\text{рез}}(s, t) = \exp(i\varphi) T_{1 \text{ рез}}(s, t), \quad (39)$$

где $T_{1 \text{ рез}}(s, t)$ — амплитуда, восстановленная с помощью дисперсионных соотношений* по первому члену (38) [см. формулу (43)], то, подставляя (39) в (38), получим выражение для φ , которое действительно не имеет резонансной зависимости от s . Перейдем к вычислению первого члена в (38):

$$\begin{aligned} \text{Im } T_{1 \text{ рез}}^{\lambda}(s, t) = & \pi (2\pi)^3 \sum_n \frac{1}{n!} \int \tilde{d}q \, d\tau_n \delta(P - q - K_n) \times \\ & \times \langle p_3, p_4 | \overset{\dagger}{T} | q, k_1 \dots k_n \rangle_{\lambda} \langle q, k_1 \dots k_n | T | p_1, p_2 \rangle_{\lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

* Неоднозначность восстановления $T_{1 \text{ рез}}(s, t)$ с помощью дисперсионных соотношений несущественна в данном случае, поскольку амплитуда берется вблизи резонанса.

Конечную ширину резонанса учтем, заменяя δ -функцию в фазовом объеме на брейт-вигнеровское распределение [см. (27)].

Суммирование по фотонам производится точно так же, как и в случае полного сечения. В результате получаем

$$\text{Im } T_{1 \text{ рез}}^\lambda (s, t) = -\frac{T_0}{M^2} \left(\frac{\lambda}{M} \right)^{-b} \frac{\exp(D_1 - Cb)}{\Gamma(b)} \times \\ \times \left[1 + \frac{3}{4} a + O(\alpha) + O(x) + O\left(\frac{(E-M)^2}{m_s^2}\right) \right] \text{Im}(-z)^{-1+b}, \quad (41)$$

где C — постоянная Эйлера; $\Gamma(b)$ — гамма-функция;

$$z = (s - M^2)/M^2 + i\Gamma/M = x + i\gamma;$$

$$b = 2[\beta(t) - \beta(u)];$$

$$T_0 = \langle p_3 p_4 | \hat{T}^\dagger | q \rangle_\lambda \langle q | T | p_1 p_2 \rangle_\lambda; \quad (42)$$

$$D_1 = h(p_1, p_3) - h(p_1, p_4) + h(p_2, p_4) - h(p_2, p_3),$$

а $h(p_1, p_2)$ определено в (24). Заметим, что $\text{Im } T_{1 \text{ рез}}^\lambda (s, 0)$ связана через оптическую теорему с полным сечением образования резонанса (29). Восстанавливая $T_{1 \text{ рез}}^\lambda (s, t)$ с помощью дисперсионных соотношений, получаем

$$T_{1 \text{ рез}}^\lambda (s, t) = \frac{T_0}{M^2} \left(\frac{\lambda}{M} \right)^{-b} \exp(D_1 - Cb) \Gamma(1-b) \times \\ \times \left[1 + \frac{3}{4} a + O(x) + O\left(\frac{(E-M)^2}{m_s^2}\right) \right] (z)^{-1+b}. \quad (43)$$

Чтобы получить наблюдаемое в эксперименте сечение, необходимо учесть процессы с излучением произвольного числа фотонов:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2s} \int d\tau_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\tau_n \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) \times \\ \times |T(p_3, p_4, k_1 \dots k_n | p_1, p_2)|^2 \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{+2b-2a}, \quad (44)$$

где $d\tau_f = \tilde{d}p_3 \tilde{d}p_4$, a и b определены в формулах (17) и (42), а

$$T(p_3, p_4, k_1 \dots k_n | p_1, p_2) = \\ = (m/\lambda)^{-2b+2a} \langle p_3, p_4, k_1 \dots k_n | T | p_1, p_2 \rangle_\lambda \quad (45)$$

есть физическая (не содержащая инфракрасных расходимостей) амплитуда процесса с излучением n -фотонов с импульсами k_1, \dots, \dots, k_n .

Разобьем амплитуду $T(p_3, p_4, k_1 \dots k_n | p_1 p_2)$ в (44) на фоновую и резонансную части. Сечение после этого разбивается на три члена (резонансный, интерференционный и фоновый):

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рез}} + d\sigma_{\text{инт}} + d\sigma_{\text{фон}}.$$

Соответствующие выражения для них совершенно аналогичны (44). Фоновые процессы определяются электродинамикой; например, в случае $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ это рассеяние Баба с излучением. Радиационные поправки к фоновому члену составляют несколько процентов по отношению к низшему порядку теории возмущений (см., например, [14]), поэтому в $d\sigma_{\text{фон}}$ ограничимся низшим порядком. Далее будем вычислять резонансный и интерференционный члены вблизи резонанса.

Чтобы определить $d\sigma_{\text{рез}}$, необходимы формулы для амплитуды резонансного процесса с n мягкими фотонами в конечном состоянии. Такие формулы приведены в работе [6], где они получаются при анализе диаграмм теории возмущений. Например, для одного фотона

$$T_{\text{рез}}(p_3, p_4, k | p_1, p_2) = P_{12}(k) [1 + O(k/M)] T_{\text{рез}}(s - 2Pk, t) + P_{34}(k) [1 + O(k/M)] T_{\text{рез}}(s, t). \quad (46)$$

Первый член описывает излучение до рождения резонанса, второй — излучение в конечном состоянии. В силу резонансной зависимости от s амплитуды $T_{\text{рез}}(s, t)$ ее нельзя разлагать по k в первом слагаемом (46). Формула (46) — естественное обобщение низкоэнергетической теоремы (8) на случай процессов с четырьмя заряженными частицами, и ее, по-видимому, можно получить и в рамках S -матричного подхода. Здесь будем предполагать, что поправочные члены в (46) те же, что и в (4). Фотоны, излученные в начальном состоянии, будем условно называть начальными, излученные в конечном состоянии — конечными.

В связи с тем что излучение мягких фотонов в начальном состоянии из-за резонансного характера амплитуды играет выделенную роль, при квадрировании амплитуды в (44) возникает четыре типа спаривания фотонов: ii — начальный с начальным, if — начальный с конечным, fi — конечный с начальным, ff — конечный с конечным. Поэтому разделим все фотоны на четыре группы: $\{k_{n_1}^{ii}\}$, $\{k_{n_2}^{if}\}$, $\{k_{n_3}^{fi}\}$, $\{k_{n_4}^{ff}\}$, где нижний индекс означает число фотонов в группе. С учетом этого перепишем выражение для резонансного члена:

$$d\sigma_{\text{рез}} = \frac{(2\pi)^4}{2s} \int d\tau_f \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \frac{d\tau_{n_1} d\tau_{n_2} d\tau_{n_3} d\tau_{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \times \\ \times \delta\left(P - p_3 - p_4 - \sum_{i=1}^4 K_{n_i}\right) \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{+2b-2a} \times \\ \times |T(p_3, p_4, \{k_{n_1}^{ii}\}, \{k_{n_2}^{if}\}, \{k_{n_3}^{fi}\}, \{k_{n_4}^{ff}\} | p_1, p_2)|^2. \quad (47)$$

Вблизи резонанса энергия фотонов k^{ii} , k^{if} , k^{fi} ограничена величиной $\sqrt{s} - M$, поэтому для этих фотонов можно пользоваться

низкоэнергетической формулой (46). Фотоны типа ff могут быть и жесткими, поскольку их излучение не приводит к сдвигу амплитуды с резонанса.

Заменим входящую в (43) функцию $(x + i\gamma)^{-1+b}$ ее фурье-представлением:

$$(x + i\gamma)^{-1+b} = \frac{-i \exp(ib\pi/2)}{\Gamma(1-b)} \int_{-\infty}^{\infty} y_+^{-b} \exp[iy(x + i\gamma)] dy. \quad (48)$$

Тогда, подставляя (39), (43) и (48) в (47) и суммируя по фотонам k^{ii} , k^{if} , k^{fi} , получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{рез}} = & \frac{(2\pi)^4}{2s} \int d\tau_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) d\tau_n \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{2b-2a} \times \\ & \times \exp(2D_1 - 2Cb) \left(\frac{m}{M}\right)^{-2b} |T_{\text{рез}}(p_3, p_4, \{k_n^{ff}\} | p_1 p_2)|^2 \times \\ & \times \int dy_1 dy_2 \exp[-i(y_1 - y_2)x - \gamma(y_1 + y_2) + R] (y_1)_+^{-b} (y_2)_+^{-b}; \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = & - \int \tilde{d}k \{P_{32}^2(k) \exp[i(y_2 - y_1)2Pk/M^2] - \\ & - P_{12}(k) P_{34}(k) [\exp[-iy_1(2Pk/M^2)] + \exp[iy_2(2Pk/M^2)]]\}. \quad (50) \end{aligned}$$

Интегрирование по $\tilde{d}k$ в (50) дает

$$\begin{aligned} R = & (a - 2b) \ln(m/\lambda) - 2D_1 + D + (2b - a)[C + \ln(m/M)] + \\ & + b \ln(0 + iy_1) + b \ln(0 + iy_2) - a \ln[0 + i(y_1 - y_2)]. \quad (51) \end{aligned}$$

Вычисляя оставшиеся табличные интегралы по y_1 , y_2 и подставляя выражение для вершинной функции (24), получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{рез}}(\Delta) = & A \frac{\Gamma_{l\gamma}(\Delta)}{\Gamma} \text{Im}(-z)^{-1+a} \times \\ & \times \left[1 + \frac{3}{4}a + O(x) + O\left(\frac{(E-M)^2}{m_s^2}\right) \right], \quad (52) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{l\gamma}(\Delta) = & \frac{(2\pi)^4}{2M} \int_{\Delta} d\tau_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\tau_n \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) \rho_{\mu\nu} \times \\ & \times \langle p_3, p_4, k_1 \dots k_n | \hat{T} | q, \varepsilon^\mu \rangle_\lambda \langle q, \varepsilon^\nu | T | p_3, p_4, k_1 \dots k_n \rangle_\lambda; \\ \rho_{\mu\nu} = & -[g_{\mu\nu} - 2(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu)/M^2]/2; \quad M \gg m. \end{aligned}$$

Область интегрирования Δ определяется условиями регистрации конечных частиц. Величина $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ представляет собой ширину распада резонанса с матрицей плотности $\rho_{\mu\nu}$ на $l^+l^- + \text{фотоны}$, когда импульсы конечных заряженных частиц лежат в области Δ , и является реально наблюдаемой в экспериментах величиной.

Для конкретных условий эксперимента свяжем $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ с шириной Γ_e [формула (26)]. Пусть в эксперименте регистрируются лептон и антилептон со следующими критериями отбора событий (в системе центра масс):

$$p_3^0, p_4^0 \geq E(1 - \eta)/2; \Delta\theta, \Delta\varphi < \chi; |\cos\theta| < c, \quad (53)$$

где p_3^0, p_4^0 — энергии; $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$ — углы неколлинеарности конечных лептонов; θ — угол рассеяния. Эти ограничения определяют область Δ .

В случае, когда энергия ηE , приходящаяся на долю нерегистрируемых фотонов, мала $\eta E \ll E$, а также $\eta < \chi$, величину $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ можно вычислить во всех порядках по $\alpha \ln(M/m_l) \ln \eta$ с помощью низкоэнергетической теоремы (4):

$$\Gamma_{l\gamma}(\Delta) = (2\eta)^{a_l} (1 + O(\eta) + O(a_l)) \Gamma_l, \quad \eta \ll 1, \eta < \chi, \quad (54)$$

где a_l определено в (17) при $m = m_l$.

Если $\eta \sim 1$, то на долю нерегистрируемых фотонов может приходиться энергия порядка E и их нельзя будет считать мягкими. Поэтому единственный способ определения $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ в этом случае — теория возмущений. Соответствующие вычисления в первом порядке по α приведены в приложении. Окончательное интегрирование в полученных формулах можно провести только численно. Здесь же приведем приближенную формулу, в которой пренебрежем членами порядка единицы по сравнению с $\ln \chi$, $\ln(E/m)$ и $\ln \eta$:

$$\Gamma_{l\gamma}(\Delta) = \frac{3}{8} (1 + \delta_l) \Gamma_e \int_{|\cos\theta| < c} (1 + \cos^2\theta) d\cos\theta; \quad (55)$$

$$\delta_l = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \ln^2 \frac{\eta}{2} - \ln^2 \frac{\chi}{2} + \ln \frac{E}{m_l} (4 \ln \eta + 3) + \right. \\ \left. + \ln \frac{\eta}{\chi} \left(4 \ln \frac{\chi}{4} - 1 \right) - 4 \ln \frac{\chi E}{4m_l} (\chi - \eta) \right\}, \quad \chi < \eta, \quad (56)$$

где η, c, χ определены в (53). Из формулы (56) видно, что ширины $\Gamma_{\mu\gamma}(\Delta)$ и $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ отличаются друг от друга. Например, для экспериментов [15] по J/ψ (3095) ($\eta = 1/2, \chi = 10^\circ$):

$$\delta_l = -0,09; \delta_\mu = -0,02; \Gamma_{\mu\gamma}(\Delta)/\Gamma_{l\gamma}(\Delta) \approx 1,07. \quad (57)$$

Заметим, что если углы и импульсы конечных заряженных частиц не ограничены ($\eta = 1$, $\chi = 2\pi$, $c = 1$), то в первом порядке по α имеет место точная формула

$$\Gamma_{l\gamma} = \Gamma_e \{1 + (3\alpha/4\pi) [1 + 12m_l^2/M^2 + O(m_l^4/M^2) \ln(m_l/M)]\}. \quad (58)$$

В этом случае $\Gamma_{\mu\gamma}$ и $\Gamma_{l\gamma}$ совпадают с $\Gamma_e = \Gamma_\mu$ с точностью до 1%. Займемся вычислением интерференционного члена:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{инт}} = & \frac{(2\pi)^4}{2s} 2 \operatorname{Re} \int d\tau_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\tau_n \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) \times \\ & \times \langle p_3, p_4, k_1 \dots k_n | \overset{\dagger}{T} | p_1, p_2 \rangle_{\lambda, \text{рез}} \langle p_1 p_2 | T | p_3, p_4, k_1 \dots k_n \rangle_{\lambda, \text{фон}}. \end{aligned} \quad (59)$$

Мягкими в данном случае являются фотоны, излученные до столкновения в резонансной амплитуде. Суммируя по этим фотонам так же, как в предыдущих случаях, и проводя аналогичные выкладки, получаем

$$d\sigma_{\text{инт}}(\Delta) = 2 \operatorname{Re} [B(\Delta) (-z)^{-1+a} \exp(i\varphi)] (1 + O(|z|)), \quad (60)$$

где φ — относительная фаза фоновой и резонансной амплитуд,

$$\begin{aligned} B(\Delta) = & \frac{(2\pi)^4}{2s} (1 + O(a)) \left| g\bar{v}(p_2) \gamma^{\mu\nu} u(p_1) \int d\tau_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\tau_n \times \right. \\ & \times \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) (m/\lambda)^{+a/2} \exp\left(+\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{M}{m}\right) \times \\ & \times \langle p_1, p_2 | \overset{\dagger}{T} | p_3, p_4, k_1 \dots k_n \rangle_{\lambda, \text{фон}} \langle p_3, p_4, k_1 \dots k_n | T | q, \varepsilon^\mu \rangle_{\lambda}. \end{aligned} \quad (61)$$

Если пренебречь радиационными поправками в $B(\Delta)$, то для канала $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ получим

$$B(\Delta) = -\frac{3}{2} \frac{a\Gamma_e}{M} \int_{|\cos\theta| < c} \left[(1 + \cos^2\theta) - \frac{(1 + \cos^2\theta)}{1 - \cos\theta} \right] d\cos\theta; \quad (62)$$

для $\mu^+\mu^-$ -канала второй член в квадратных скобках отсутствует. Фаза φ в (60) нам неизвестна и является свободным параметром. Экспериментальные данные хорошо согласуются с $\varphi = 0$.

Обсудим теперь характер интерференции. Для канала $\mu^+\mu^-$ последний член в квадратных скобках (62) отсутствует и интерференция является деструктивной до резонанса и конструктивной за ним. Для канала $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ситуация противоположна. Это может сильно сказаться на резонансной кривой: радиационный хвост для e^+e^- -канала может быть сильно подавлен или вообще отсутствовать.

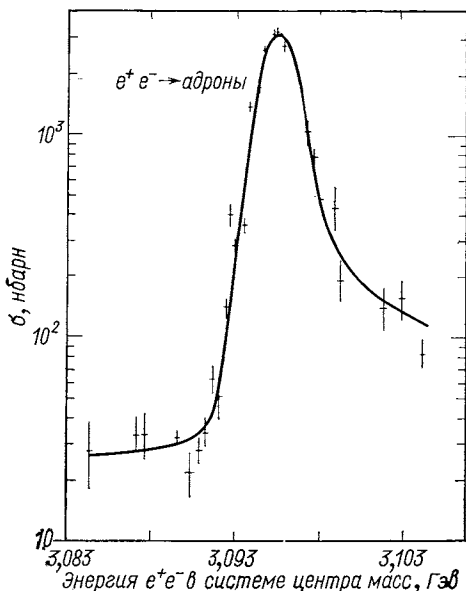


Рис. 3. Кривая изображает подгонку предварительных экспериментальных данных по полному сечению рождения J/ψ (3095) [16] с помощью формулы (32) при фиксированной дисперсии энергии пучка $d = 1 \text{ Мэв}$

Проиллюстрируем применение полученных формул к обработке доступных экспериментальных данных по J/ψ (3095) [16]. Как говорилось выше, формулы для сечений необходимо сгладить с распределением частиц в пучке по энергиям. Фиксируя дисперсию энергии пучка $d = 1 \text{ Мэв}$ *, оставляя свободными параметры Γ , Γ_e , Γ_μ , Γ_h , M и подгоняя экспериментальные данные методом

* Для более точных подгонок необходимо считать d свободным параметром.

наименьших квадратов, получаем с учетом (57):

$$\Gamma_e \Gamma_{\psi} / \Gamma = 0,33 \pm 0,06 \text{ кэв}; \quad \Gamma_e^2 / \Gamma = 0,29 \pm 0,06 \text{ кэв}; \quad (63)$$

$$\Gamma_e \Gamma_h / \Gamma = 5,6 \pm 0,8 \text{ кэв}.$$

Соответствующие кривые приведены на рис. 3 и 4*.

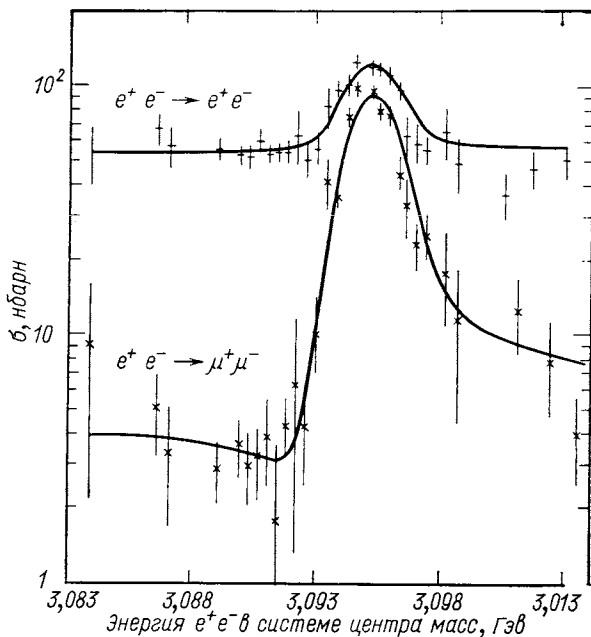


Рис. 4. Кривые изображают подгонку предварительных экспериментальных данных по рождению J/ψ в двухчастичных каналах $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ и $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ с помощью формул, полученных в данной работе

4. ДРУГИЕ КАНАЛЫ

Выше были рассмотрены электромагнитные эффекты в полном сечении образования резонанса и в сечениях двухчастичных лептонных каналов e^+e^- -аннигиляции в резонансной области. Аналогичные эффекты имеют место и в других каналах.

В отсутствие электромагнитного взаимодействия резонансное сечение некоторого канала X связано с полным сечением рожде-

* Экспериментальные данные более полные, чем в работе [16], приведены в статье [17], где получены следующие результаты: $\Gamma_e^2 / \Gamma = 0,33 \pm \pm 0,9 \text{ кэв}$; $\Gamma_e \Gamma_{\psi} / \Gamma = 0,33 \pm 0,9 \text{ кэв}$; $\Gamma_e \Gamma_h / \Gamma = 4,3 \pm 0,8 \text{ кэв}$.

ния резонанса формулой

$$\sigma_X^{\text{рез}} = (\Gamma_X/\Gamma) \sigma_{\text{tot}}^{\text{рез}}, \quad (64)$$

где $\sigma_X^{\text{рез}} (\Gamma_X)$ — резонансное сечение (ширина распада) в данное состояние.

Как изменится это отношение при учете электромагнитного взаимодействия? Если X — двухчастичный лептонный канал, то сравнение формул (29) и (52) показывает, что формула (64) остается справедливой.

Можно показать, что и для любого другого канала электромагнитные поправки не нарушают соотношения (64). Этот факт ведет к очень важному следствию: несмотря на то что сами сечения сильно искажаются за счет электромагнитных эффектов, их отношения сохраняются, следовательно, нахождение относительных ширин возможно по отношению сечений. Причина такой универсальности радиационных поправок состоит в том, что радиационное изменение формы резонансной кривой происходит в результате излучения до столкновения и, следовательно, определяется только начальным состоянием. Сравнение формул (43) и (52) показывает, что вклад виртуальных фотонов, приводящих к изменению одночастичной особенности, и вклад интерференции реальных фотонов, испущенных до столкновения с фотонами, испущенными после него, взаимно компенсируются, приводя к формуле (64). Эта компенсация аналогична компенсации инфракрасных расходимостей, с той лишь разницей, что там компенсируются бесконечные части, а здесь — конечные.

Интерференционный член в сечении X имеет вид, аналогичный (60):

$$\sigma_X^{\text{инт}} = 2 \operatorname{Re} [B_X (-z)^{-1+a}] = 2 |B_X| \operatorname{Re} [\exp(i\varphi X) (-z)^{-1+a}],$$

где

$$|B_X| = \frac{(2\pi^4)}{2s} (1 + O(a)) |g\bar{\nu}(p_2) \gamma^{\mu} u(p_1)| \int d\tau_X \delta(P - p_X) \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{a/2} \times \\ \times \exp\left(\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{M}{m}\right) \langle p_1, p_2 | T | X \rangle_{\lambda, \text{фон}} \langle X | T | q, \epsilon^{\mu} \rangle_{\lambda}; \quad (65)$$

$d\tau_X$ — фазовый объем канала X ; φ_X — разность фаз резонансной и фоновой амплитуд. В отличие от случая лептонных каналов фаза может быть значительной, и при подгонке экспериментальных кривых одна должна входить как дополнительный параметр.

В заключение авторы благодарят В. В. Анисовича и М. А. Мествиришвили за плодотворные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении вычислим в первом порядке по α величину

$$\begin{aligned} \Gamma_{l\gamma}(\Delta) = & \frac{(2\pi)^4}{2M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Delta} \delta(P - p_3 - p_4 - K_n) d\tau_j d\tau_n \times \\ & \times \overline{\sum} \rho_{\mu\nu} \langle p_3, p_4, k_1 \dots k_n | \overset{\dagger}{T} | q, \varepsilon^\mu \rangle_{\lambda} \times \\ & \times \langle q, \varepsilon^\nu | T | p_3, p_4, k_1 \dots k_n \rangle_{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

входящую в выражение для резонансного сечения $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$. Обозначения определены в (52) и (53).

В первом порядке по α в $\Gamma_{l\gamma}(\Delta)$ дают вклад два первых члена суммы (П.1). Для вычисления вклада первого члена $\Gamma_{l\gamma}^0(\Delta)$ ($n=0$) достаточно подставить в (П.1) выражение для вершинной функции с точностью до α (см., например, [12]):

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_{\mu} | p_3, p_4 \rangle_{\lambda} &= g\bar{v}(p_4) \gamma^{\mu} u(p_3) [1 + \alpha \delta_1/2]; \\ \text{Re } \delta_1 &= (2/\pi) \{ -\ln^2(E/m_l) + (3/2) \ln(E/m_l) - \\ & - (2 \ln(E/m_l) - 1) \ln(m_l/\lambda) \}, \quad E \gg m_l, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где $E^2 = (p_3 + p_4)^2$. Тогда получаем

$$\Gamma_{l\gamma}^0(\Delta) = (3/8) \Gamma_e (1 + \alpha \text{Re } \delta_1) \int_{|\cos \theta| < c} (1 + \cos^2 \theta) d \cos \theta. \quad (\text{П.3})$$

Здесь Γ_e и c определены в (25) и (53) соответственно.

Чтобы вычислить вклад второго члена, проинтегрируем по p_4 :

$$\begin{aligned} \Gamma_{l\gamma}(\Delta) = & \frac{1}{32M(2\pi)^4} \int_{\Delta} d \cos \theta \int_{\Delta'} \frac{(E-2k)E}{(E+k(\cos \theta_r - 1))^2} \overline{\sum} \rho_{\mu\nu} \times \\ & \times \langle p_3, p_4, k | j_{\mu} | 0 \rangle_{\lambda} \langle 0 | j_{\nu} | p_3, p_4, k \rangle_{\lambda} \frac{k^2 dk}{k^0} \Omega_k. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Область интегрирования по фотонному импульсу Δ' определяется законом сохранения и условиями (55) [подробнее см. работу [8]]:

$$\Delta': \left\{ k < \min \left[\frac{E\eta}{2}, \frac{E \sin \chi}{\sin \chi + 2 \sin \theta_r} \right] \right\}, \quad (\text{П.5})$$

где η, χ даны в (53).

Интегрирование в формуле (П.4) можно провести только численно. Далее будем вычислять $\Gamma_{l\gamma}^1(\Delta)$ с логарифмической точностью, т. е. пренебрегая членами порядка единицы по сравнению с $\ln E/m_l, \ln \eta, \ln \chi$. При этом достаточно в квадрате матричного элемента учесть зависимость от θ_r только в знаменателях $(p_3 k)$ и $(p_3 k)^2$, а в остальных инвариантах считать $\theta_r = 0$. В силу симметрии задачи излучение вдоль \mathbf{p}_3 и \mathbf{p}_4 одинаково, поэтому учтем излучение лишь вдоль \mathbf{p}_3 и удвоим результат.

Проводя соответствующие вычисления с учетом указанных приближений, получаем

$$\Gamma_{l\gamma}(\Delta) = \Gamma_{l\gamma}^0(\Delta) + \Gamma_{l\gamma}^1(\Delta) = \frac{3}{8} \Gamma_e (1 + \alpha \delta_2 + \alpha \text{Re } \delta_1) \int_{|\cos \theta| < c} (1 + \cos^2 \theta) d \cos \theta, \quad (\text{П.6})$$

где

$$\delta_2 = -\frac{1}{\pi} \int \frac{k dk}{k_0} d \cos \theta_h \left[\frac{km_l^2}{(p_3k)^2} - \frac{E-2k}{(p_3k)} \right] \frac{(E-2k)}{E} \quad (\text{П.7})$$

Разбивая интеграл по dk в (П.7) на две части $k < \chi E/2$ и $k > \chi E/2$ и интегрируя с указанной точностью, получаем при $\eta > \chi$

$$\delta_2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln^2 \frac{\eta}{2} - \ln^2 \frac{\chi}{2} + \ln \frac{E}{m_l} (4 \ln \eta + 3) + \ln \frac{\eta}{\chi} \left(4 \ln \frac{\chi}{4} - 1 \right) + \right. \\ \left. + 4 \ln \frac{\chi E}{4m_l} (\chi - \eta) \right\} - \text{Re } \delta_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев Л. Д. «ТМФ», 1974, т. 18, с. 3; «Ann. Phys.», 1973, v. 81, p. 80 (здесь содержатся ссылки на более ранние работы).
2. Бажанов В. В., Пронько Г. П., Соловьев Л. Д. «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 24, с. 673; Препринт ИФВЭ 75-9, Серпухов, 1975.
3. Perez-Y-Jorba J. LAL, Raport Technique ACO, 15-67, 1967.
4. Jackson J. D., Tsai Y. In: Notes From the SLAC Theory Workshop on the « ψ », SLAC-PUB-1515, Standford, 1974; Yennie D. R. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 238; Азимов Я. И. и др. «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 24, с. 378.
5. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
6. Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. «Ann. Phys.», 1961, v. 13, p. 397.
7. Пронько Г. П., Соловьев Л. Д. Препринт ИФВЭ 73-16. Серпухов, 1973; Пронько Г. П. «ТМФ», 1974, т. 18, с. 203.
8. Tsai S. Proc. Intern. Symp. on Electron and Photon Interaction at High Energies. V. 2. Hamburg, 1965, p. 387; Байер В. Н., Фадин В. С., Хозе В. А. «Ядерная физика», 1967, т. 6, с. 560.
9. Пронько Г. П., Соловьев Л. Д. «ТМФ», 1974, т. 19, с. 172.
10. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. М., Физматгиз, 1959.
11. Судаков В. В. «ЖЭТФ», 1956, т. 30, с. 87.
12. Ахизер А. П., Берестецкий В. В. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
13. Steinman O. «Helv. phys. acta», 1971, v. 44, p. 618.
14. Berends F. A., Gastman K. J. F. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 68, p. 541.
15. Aubert J. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 1404; Augustin J. e.a. Ibid., p. 1406; Vacci C. e.a. Ibid., p. 1408.
16. Panofsky W. H. K. Доклад на семинаре в Новом Орлеане США. Март, 1975.
17. Boyarski A. M. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1357.
18. Appelquist T., Politzer H. D. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 43.