

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ФЕРМИОНОВ

Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В рамках квазипотенциального подхода развит трехмерный релятивистский формализм для описания взаимодействия двух частиц со спином $1/2$. Фейнмановские матричные элементы однобозонного обмена, используемые в качестве квазипотенциалов, и квазипотенциальные уравнения в импульсном представлении преобразованы к виду прямого геометрического обобщения соответствующих потенциалов и уравнений нерелятивистской квантовой механики. Близость к трехмерному аппарату квантовой механики сохраняется и после перехода к релятивистскому конфигурационному представлению.

Within the quasipotential approach, a three-dimensional relativistic formalism is developed for the description of the two spin $1/2$ particles interaction. The Feynman matrix elements of one-boson-exchange as quasipotentials and the quasipotential equations in the momentum representation are transformed to a direct geometrical generalization of the corresponding equations and potentials of the nonrelativistic quantum mechanics. The three-dimensional analogy with quantum mechanics is conserved also after passing to the relativistic configurational representation.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре излагается новый математический аппарат для описания системы двух частиц со спином $1/2$, который является релятивистским обобщением нерелятивистского формализма, основанного на уравнениях Липпмана — Швингера, Шредингера и системы парциальных уравнений. Такой нерелятивистский формализм широко используется для описания NN -взаимодействия при низких энергиях, связанных состояний типа позитрония, в составных моделях частиц, в том числе и для описания спектра недавно открытых J/Ψ -мезонов. В качестве потенциалов обычно выбирают потенциалы Брейта — Ферми, содержащие релятивистские члены порядка v^2/c^2 .

Однако в связи с вводом в действие новых мезонных фабрик, рассчитанных на средние энергии, при которых релятивистские эффекты вносят заметный вклад в NN -взаимодействие, возникает необходимость развития такого аппарата, который позволил бы при рассмотрении нуклон-нуклонного взаимодействия в релятивистской области сохранить близость по форме к хорошо разработанному для низких энергий трехмерному квантовомеханическому формализму. В свою очередь, интенсивное развитие физики высоких энергий и релятивистской ядерной физики создает настоятельную необходимость в удобном и наглядном математическом аппарате для описания взаимодействий релятивистских частиц.

В данном обзоре на таком важном для практического применения примере, как взаимодействие двух частиц со спином $1/2$, будет показано, что последовательное использование геометрии Лобачевского позволяет в импульсном представлении вести описание в рамках одного трехмерного формализма, не переходя в релятивистской области от трехмерного описания к четырехмерному. При этом релятивистские выражения при неизменной, по сравнению со своими нерелятивистскими аналогами, форме будут отличаться от последних лишь геометрической природой входящих в них величин. Другими словами, будет показано, каким образом аппарат релятивистской теории можно преобразовать к такой форме, в которой он имел бы вид прямого геометрического обобщения аппарата квантовой механики.

Основным инструментом описания взаимодействия двух элементарных частиц являются уравнения для амплитуды рассеяния и волновой функции системы. В квантовой теории поля широко используется ковариантное уравнение Бете — Солпитера. Однако уравнение Бете — Солпитера, основанное на четырехмерном формализме, обладает рядом недостатков. Наиболее существенным из них является зависимость волновой функции от двух времен.

Для преодоления этой трудности А. А. Логунов и А. Н. Тавхелидзе предложили квазипотенциальный подход [1] к релятивистской проблеме двух тел. В их подходе волновая функция системы зависит от одной временной переменной, в силу чего она имеет ясный физический смысл и обычную квантовомеханическую вероятностную трактовку. Квазипотенциальный подход успешно применялся как для вычисления релятивистских поправок к уровням атома водорода и позитрония, так и для описания процессов рассеяния [2, 3].

Квазипотенциальные уравнения для релятивистской амплитуды рассеяния и волновой функции пишутся в системе центра инерции двух частиц. При этом они имеют трехмерную форму и в импульсном представлении выступают как релятивистские обобщения уравнений Шредингера и Лишмана — Швингера. По аналогии с этими уравнениями квазипотенциальная волновая функция

и амплитуда рассеяния определены вне энергетической поверхности, но, в отличие от уравнения Бете — Солпитера, на массовой поверхности.

В работах [4, 5] был предложен другой вариант квазипотенциального описания системы двух тел, основанный на развитой В. Г. Кадышевским [6] ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля. Отличительной чертой гамильтонова подхода является тот факт, что все интегрирования в импульсном пространстве проводятся по трехмерной поверхности гиперboloида массовой поверхности *

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = M^2. \tag{1}$$

Как известно, полная матрица рассеяния S задается лагранжианом теории $\mathcal{L}(x)$:

$$S = T \exp \left[i \int \mathcal{L}(x) dx \right].$$

Определим τ -матрицу соотношением $S = 1 + i\tau$. Для нее, очевидно, имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int T[\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)] dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \int \theta(x_1^0 - x_2^0) \dots \theta(x_{n-1}^0 - x_n^0) \mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Согласно работе [6], в последнем выражении θ -функции можно придать полностью ковариантный вид с помощью введения единичного времениподобного вектора λ : $\lambda^2 = 1$, $\lambda_0 > 0$. Действительно, во времениподобном направлении $\theta(x_0 - y_0) = \theta(\lambda(x - y))$, а для пространственных интервалов, когда $(x - y)^2 < 0$, θ -функция не дает вклада в силу условия локальной коммутативности: $[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)] = 0$, если $(x - y)^2 < 0$.

Ковариантную θ -функцию можно представить в виде фурье-интеграла [6]:

$$\theta(\lambda x) = (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp [i\tau(\lambda x)] / (\tau - i\epsilon).$$

Переходя к импульсному представлению

$$\tilde{\mathcal{L}}(p) = \int \exp(-ipx) \mathcal{L}(x) dx,$$

* Будем здесь использовать систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$, но иногда для удобства будем сохранять c .

получаем

$$T_n = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}(-\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\epsilon} \times \\ \times \tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau_1 - \lambda\tau_2) \frac{d\tau_2}{\tau_2 - i\epsilon} \dots \frac{d\tau_n}{\tau_n - i\epsilon} \tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau_n).$$

Последнее можно рассматривать как результат итерации некоторого линейного интегрального уравнения [6]

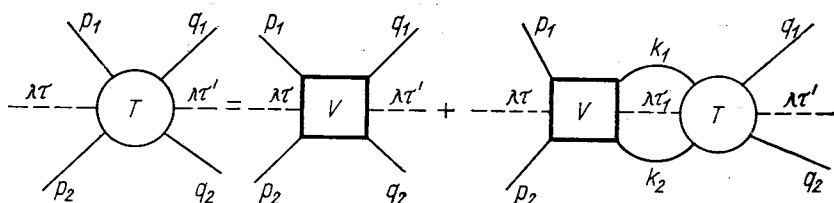
$$R(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau - \lambda\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\epsilon} R(\lambda\tau')$$

при условии, что

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = R(0).$$

Полученное интегральное уравнение приводит к своеобразной «шпурионной» диаграммной технике, существенным отличием которой от фейнмановской является тот факт, что все импульсы частиц, даже соответствующие внутренним линиям, лежат на массовой поверхности (1).

Уравнение для амплитуды рассеяния двух фермионов графически изображается следующим образом:



Сплошные линии отвечают фермионам. Пунктирные линии соответствуют шпурионам, которые уносят дополнительный импульс. Совокупность неприводимых диаграмм, соответствующая квадрату, носит название квазипотенциала.

В системе центра масс уравнения для волновой функции и амплитуды рассеяния, описывающие взаимодействие двух частиц со спином 1/2, в импульсном пространстве имеют следующий про-

стой вид [5]:

$$E_p (E_p - E_q) \Psi_q (p)_{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2} \frac{1}{M} \int d\Omega_{\mathbf{k}} V_{\sigma'_1 \sigma'_2}^{\sigma_1 \sigma_2} (\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q (k)_{\sigma'_1 \sigma'_2}; \quad (2)$$

$$T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma''_1 \sigma''_2} \frac{1}{M} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \frac{V_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma''_1 \sigma''_2} (\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) T_{\sigma''_1 \sigma''_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (\mathbf{k}, \mathbf{q})}{E_R (E_R - E_q - i\varepsilon)}, \quad (3)$$

где $V (\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ — квазипотенциал, зависящий в общем случае от энергии системы $2E_q = 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2}$, а элемент объема

$$d\Omega_{\mathbf{k}} = d\mathbf{k} / \sqrt{1 + \mathbf{k}^2/M^2} \quad (4)$$

является инвариантной мерой на гиперboloиде (1). Релятивистская амплитуда рассеяния в квазипотенциальном подходе Кадышевского, как и в подходе Логунова — Тавхелидзе, в случае действительного квазипотенциала на энергетической поверхности $E_p = E_k = E_q$ удовлетворяет релятивистскому двухчастичному условию унитарности

$$\text{Im} T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(8\pi)^3} \sqrt{(E_q^2 - M^2)/E_q^2} \times \sum_{\sigma''_1 \sigma''_2} \int d\omega_k T_{\sigma_1 \sigma_2}^{*\sigma''_1 \sigma''_2} (\mathbf{p}, \mathbf{k}) T_{\sigma''_1 \sigma''_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (\mathbf{k}, \mathbf{q}); \quad (5)$$

$$d\omega_k = \sin \theta_k d\theta_k d\varphi_k$$

и связана с упругим дифференциальным сечением по следующей формуле:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\omega_{\sigma_1 \sigma_2 \rightarrow \sigma'_1 \sigma'_2}} = \frac{|T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma'_1 \sigma'_2} (s, t)|^2}{64\pi^2 s}; \right\} \quad (6)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E_q^2.$$

Нашей задачей является построение на основе квазипотенциальных уравнений (2) и (3) для частиц со спином 1/2 трехмерного формализма, подобного тому, который был предложен для бесспинового случая в работах [7, 8].

1. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ФЕРМИОНОВ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Выберем в уравнениях (2) и (3) в качестве квазипотенциалов фейнмановские матричные элементы, отвечающие однобозонному обмену. Такое приближение, называемое моделью однобозонного обмена, широко используется в физике элементарных частиц,

в частности для описания NN -взаимодействия. В нерелятивистском пределе эти матричные элементы переходят в известные потенциалы квантовой механики, поэтому их называют релятивистскими потенциалами однобозонного обмена (ОВЕР) [9]. Однако релятивистские ОВЕР в том виде, в котором они задаются четырехмерной квантовой теорией поля, мало похожи на привычные потенциалы квантовой механики.

Ниже будет показано, что использование геометрии Лобачевского позволяет перейти к трехмерной записи релятивистских ОВЕР, в которой они будут иметь вид прямого геометрического обобщения соответствующих потенциалов квантовой механики, взятых в импульсном представлении [10]. При этом спин частиц будет описываться не на языке γ -матриц Дирака, а с помощью σ -матриц Паули. Чтобы пояснить смысл используемых нами величин, приведем некоторые сведения из геометрии Лобачевского.

Пространство Лобачевского

Как уже говорилось во введении, в квазипотенциальных уравнениях (2) и (3) импульсы всех частиц лежат на массовой поверхности, т. е. их компоненты связаны соотношением (1). Уравнение (1) задает в импульсном пространстве 3-поверхность, геометрия которой уже не является евклидовой, а является геометрией Лобачевского. В качестве координат на поверхности (1) выберем компоненты вектора импульса \mathbf{p} . Эти величины есть декартовы координаты на гиперплоскости $p_0 = 0$, на которую отображается гиперлоид при проектировании из точки $(\infty, 0)$. Теперь моделью пространства Лобачевского будет все трехмерное p -пространство с метрикой

$$ds^2 = \frac{M^2 dp^2 + [\mathbf{p} \times d\mathbf{p}]^2}{M^2 + p^2} = g_{ik}(\mathbf{p}) dp^i dp^k. \quad (7)$$

В нерелятивистском пределе, когда $c \rightarrow \infty$, кривизна гиперлоида стремится к нулю, и пространство Лобачевского переходит в трехмерное евклидово пространство импульсов. При этом

$$d\Omega_{\mathbf{k}} = d\mathbf{k} / \sqrt{1 + \mathbf{k}^2/M^2} \rightarrow d\mathbf{k}; \quad ds^2 \rightarrow d\mathbf{p}^2.$$

Группой движений пространства Лобачевского, реализованного на гиперлоиде (1), является группа Лоренца. Чисто лоренцевы преобразования Λ_p («бусты»), т. е. такие, что $\Lambda_p(M, 0) = (p^0, \mathbf{p})$:

$$\Lambda_p^{-1} \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}(-) \mathbf{p} = \mathbf{k} - (\mathbf{p}/M) [k_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/(M + p_0)] = \Delta; \quad (8)$$

$$(\Lambda_p^{-1} k^0)^0 \equiv (k(-) p)^0 = (k^0 p^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p})/M = \sqrt{M^2 + (\mathbf{k}(-) \mathbf{p})^2} = \Delta^0, \quad (9)$$

в нерелятивистском пределе переходят в преобразование трансляции в плоском евклидовом пространстве $\mathbf{k}(-) \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{p}$.

Аналогично (8) определим вектор $\mathbf{k} (+) \mathbf{p} \equiv \Lambda_p \mathbf{k}$, который в нерелятивистском пределе дает $\mathbf{k} + \mathbf{p}$. В сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= M \operatorname{ch} \chi_p; \quad \mathbf{p} = M \operatorname{sh} \chi_p \mathbf{n}_p; \quad \mathbf{n}_p = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|; \\ k_0 &= M \operatorname{ch} \chi_k; \quad \mathbf{k} = M \operatorname{sh} \chi_k \mathbf{n}_k; \quad \mathbf{n}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

равенство (9) принимает вид теоремы о косинусе сложного угла в тригонометрии Лобачевского:

$$\operatorname{ch} \chi_{pk} = \sqrt{1 + (\mathbf{k}(-) \mathbf{p})^2 / M^2} = \operatorname{ch} \chi_p \operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_k \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_k. \quad (11)$$

Вектор $\mathbf{k}(-) \mathbf{p}$ может рассматриваться как релятивистское геометрическое обобщение вектора передачи импульса $\mathbf{k} - \mathbf{p}$. С помощью (8) и (9) легко проверить, что квадрат 4-вектора передачи импульса выражается через вектор $\Delta = \mathbf{k}(-) \mathbf{p}$ следующим образом [7]:

$$t = (k - p)^2 = 2M^2 - 2pk = 2M^2 - 2M \sqrt{M^2 + (\mathbf{k}(-) \mathbf{p})^2}. \quad (12)$$

В пространстве скоростей, которое является пространством Лобачевского [11—13], важную роль играет понятие полускорости частицы, предложенное в работе [14]. В работе [10] были определены аналогичные по смыслу величины полуимпульса частицы $\pi_p = (\pi_p^0, \pi_p) = M (\operatorname{ch} \chi_p/2, \mathbf{n}_p \operatorname{sh} \chi_p/2)$ и полупередачи импульса \mathbf{x} , которая выражается через передачу импульса в пространстве Лобачевского

$$\Delta_0 = M \operatorname{ch} \chi_\Delta; \quad \Delta = M \operatorname{sh} \chi_\Delta \mathbf{n}_\Delta; \quad \mathbf{n}_\Delta = \Delta/|\Delta| \quad (13)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= M \operatorname{ch} \chi_\Delta/2 = M \sqrt{(\Delta_0 + M)/2M}; \\ \mathbf{x} &= M \mathbf{n}_\Delta \operatorname{sh} \chi_\Delta/2 = \Delta \sqrt{M/[2(\Delta_0 + M)]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношение (12) в терминах вектора полупередачи импульса \mathbf{x} принимает «абсолютный» вид

$$t = (k - p)^2 = -4\mathbf{x}^2, \quad (15)$$

так как в нерелятивистском пределе, когда $\pi_p \rightarrow \pi_{p0} = p/2$, а $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 = (\mathbf{k} - \mathbf{p})/2$, оно переходит в нерелятивистское соотношение

$$t = (k - p)^2 = -4\mathbf{x}^2 \rightarrow -(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 = -4\mathbf{x}_0^2,$$

не изменяя своей формы. В дальнейшем будет показано, что именно с помощью этих величин полуимпульса и полупередачи импульса (а не $\Delta = \mathbf{k}(-) \mathbf{p}$) релятивистские выражения можно преобразовать к «абсолютной» форме. Причина состоит в следую-

щем. Релятивистская энергия частицы не переходит непосредственно в энергию нерелятивистской частицы, так как содержит вместе с кинетической энергией и энергию покоя Mc^2 :

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \xrightarrow{\frac{v^2}{c^2} \ll 1} M + \mathbf{p}^2/(2M) = M + 2\pi_p^2/M.$$

Точное выражение для энергии релятивистской частицы в терминах полуимпульса имеет ту же форму:

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = M + 2\pi_p^2/M. \quad (16)$$

Для передачи импульса справедливо аналогичное равенство:

$$\Delta_0 = \sqrt{\Delta^2 + M^2} = M + 2\kappa^2/M. \quad (17)$$

Итак, поскольку в нерелятивистской теории масса покоя не включается в энергию частицы, геометрически обобщаться может лишь кинетическая часть энергии $W_{\text{кин}} = p_0 - M = 2\pi_p^2/M$. Для этой роли и служит полуимпульс частицы π_p .

«Абсолютная» форма релятивистских амплитуд однобозонного обмена

Покажем здесь, каким образом можно записать релятивистские амплитуды однобозонного обмена в терминах элементов пространства Лобачевского. Рассмотрим лишь основные виды взаимодействий и на их примере продемонстрируем переход к построению спиновых структур с помощью векторов, принадлежащих пространству Лобачевского. Полученные выражения в дальнейшем понадобятся для нахождения вида релятивистских ОВЕР в координатном пространстве.

Обмен псевдоскалярным мезоном. Во втором приближении по константе связи релятивистская амплитуда фермион-фермионного рассеяния, отвечающая обмену псевдоскалярным мезоном, определяется следующим выражением:

$$\langle \mathbf{p}_1 \sigma_1; \mathbf{p}_2 \sigma_2 | T_{PS}^{(2)} | \mathbf{k}_1 \sigma'_1; \mathbf{k}_2 \sigma'_2 \rangle = -g^2 \frac{\bar{u}^{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_5 u^{\sigma'_1}(\mathbf{k}_1) \bar{u}^{\sigma_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 u^{\sigma'_2}(\mathbf{k}_2)}{\mu^2 - (p_1 - k_1)^2}. \quad (18)$$

Совершим в (18) переход к биспинорам, определенным в системах покоя частиц. Четырехмерные матрицы преобразования биспино-

ров $u^\sigma(\mathbf{p}) = S_p u^\sigma(0)$ *, отвечающие чисто лоренцевым преобразованиям, параметризуются полускоростью частицы $\omega = \mathbf{n}_p \text{ th } \chi_p/2$:

$$S_p = \sqrt{(p_0 + M)/2M(1 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}/(p_0 + M))} = \text{ch } \chi_p/2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}_p \text{ sh } \chi_p/2; \quad (19)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$; $p_0 = M \text{ ch } \chi_p$.

Чисто лоренцевы преобразования Λ_p не образуют группы. Их произведение не есть, вообще говоря, чисто лоренцево преобразование на результирующий вектор, а содержит дополнительное вращение $V(\Lambda_p, \mathbf{k})$, описывающее томассовскую прецессию спина (вигнеровское вращение):

$$S_p^{-1} S_k = S_{\Lambda_{p\mathbf{k}}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\}. \quad (20)$$

Поскольку γ_5 -матрица коммутирует с матрицами $\boldsymbol{\alpha}$, используя (20), приходим к параметризации (18) через векторы $\Lambda = \mathbf{k} (-) \mathbf{p} = = (\Lambda_p^{-1} \mathbf{k})$. В результате с учетом (17) выражение (18) приобретает вид

$$-g^2 \frac{\bar{u}^{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_5 u^{\sigma_1'}(\mathbf{k}_1) \bar{u}^{\sigma_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 u^{\sigma_2'}(\mathbf{k}_2)}{\mu^2 - (p_1 - k_1)^2} = g^2 \sum_{\sigma_{1p} \sigma_{2p}} \frac{(\sigma_{1\mathbf{k}_1})_{\sigma_1 \sigma_{2p}} (\sigma_{2\mathbf{k}_2})_{\sigma_2 \sigma_{2p}}}{\mu^2 + 4\kappa_1^2} \times \\ \times \mathcal{D}_{\sigma_{1p} \sigma_1'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{p_1}, \mathbf{k}_1)\} \mathcal{D}_{\sigma_{2p} \sigma_2'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{p_2}, \mathbf{k}_2)\}, \quad (21)$$

где $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\kappa})_{\sigma_1 \sigma_2} = \xi_{\sigma_1}^* (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\kappa}) \xi_{\sigma_2}$.

* В стандартном представлении, в котором

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

биспинор в системе покоя имеет вид

$$u^\sigma(0) = \sqrt{2M} \begin{pmatrix} \xi^\sigma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В спинорном представлении, где

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & g^{\mu\nu} \sigma^\nu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

спинор

$$u^\sigma(0) = \sqrt{M} \begin{pmatrix} \xi^\sigma \\ \xi^\sigma \end{pmatrix}$$

(ξ^σ — двухкомпонентные паулевские спиноры, нормированные условием $\xi_\sigma^* \xi^{\sigma'} = \delta_\sigma^{\sigma'}$).

Как видно из (21), после отделения вигнеровского вращения [15]

$$\mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} = \frac{(k_0 + M)(p_0 + M) - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})}{V^2(k_0 + M)(p_0 + M)(k_0 p_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + M^2)}, \quad (22)$$

имеющего кинематическую природу, оставшаяся часть амплитуды

$$\langle \mathbf{p}_1 \sigma_1; \mathbf{p}_2 \sigma_2 | T_{PS}^{(2)} | \mathbf{k}_1 \sigma_{1p}; \mathbf{k}_2 \sigma_{2p} \rangle = g^2 \frac{4(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\kappa}_1)_{\sigma_1 \sigma_{1p}} (\boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\kappa}_2)_{\sigma_2 \sigma_{2p}}}{\mu^2 + 4\boldsymbol{\kappa}_1^2} \quad (23)$$

зависит от векторов $\Delta = \mathbf{k}(-)\mathbf{p}$ или, что то же, от векторов полу-передачи $\boldsymbol{\kappa}$ и является локальной в пространстве Лобачевского [10]. Заметим, что при описании NN -взаимодействия обычно используется потенциал однобозонного обмена, который получается из (18) нерелятивистским переходом [9]:

$$V_{PS}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = g^2 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \Delta_{1a})(\boldsymbol{\sigma}_2 \Delta_{2a})}{\mu^2 + \Delta_{1a}^2} = g^2 \frac{4(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\kappa}_{1a})(\boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\kappa}_{2a})}{\mu^2 + 4\boldsymbol{\kappa}_{1a}^2}, \quad (24)$$

где $\Delta_{1a} = 2\boldsymbol{\kappa}_{1a} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$.

Легко видеть, что релятивистское выражение (23), полученное из фейнмановского матричного элемента (18), — прямое геометрическое обобщение нерелятивистского потенциала (24), записанного с помощью вектора $\boldsymbol{\kappa}_a$. Выражение (23) имеет «абсолютную» форму, а различие с (24) состоит лишь в геометрической природе векторов $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\kappa}_a$. Релятивистское выражение (23) можно получить из (24) заменой вектора $\boldsymbol{\kappa}_a$ на его аналог $\boldsymbol{\kappa}$ (14) из пространства Лобачевского.

Наличие вигнеровского вращения в (21) связано со следующим фактом. Как следует из закона преобразования векторов состояния

$$U(\Lambda_p^{-1}) | \mathbf{k}, \sigma \rangle = \sum_{\sigma'} \mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} | \mathbf{k}(-)\mathbf{p}, \sigma' \rangle,$$

матрицы, описывающие поворот спина при лоренцевых преобразованиях, зависят от импульса самого состояния. В силу этого они различны для спиновых индексов левой и правой обкладок в матричном элементе амплитуды $T^{(2)}$ (18). По терминологии авторов работы [16] спиновые индексы «сидят» каждый на своем импульсе. Роль вигнеровского вращения в (21) состоит в осуществлении их пересадки на один импульс \mathbf{p} , в результате чего при лоренцевых преобразованиях они преобразуются по малой группе одного этого вектора. Происхождение вигнеровского вращения связано с релятивистской спиновой кинематикой. Необходимость его появления в (21) диктуется тем, что при определении векторов состояний $| \mathbf{k}, \sigma \rangle$ проекции спинов на оси Z задаются в системах покоя частиц. При этом, вообще говоря, с каждым импульсом можно связать свою систему координат, оси которых могут не совпадать. Вот такое совмещение осей и выполняет вигнеровское вращение [17].

С точки зрения геометрии Лобачевского вигнеровский поворот имеет прозрачный смысл. Он описывает вращение на угол между старым направлением вектора спина и новым, возникшим при параллельном переносе вектора спина в пространстве Лобачевского (как пространстве отрицательной кривизны) по треугольнику,

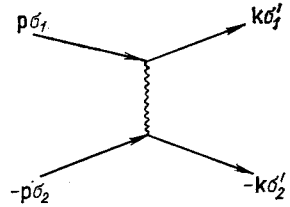


Рис. 1. Диаграмма рассеяния двух фермионов в приближении обмена векторной частицей

составленному из векторов \mathbf{p} , \mathbf{k} и Δ [13]. В нерелятивистском пределе вигнеровское вращение отсутствует: $V(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k}) = 1$; $v^2/c^2 \rightarrow \infty$.

Обмен векторным мезоном или фотоном. Борновское приближение для амплитуды рассеяния в этом случае задается выражением

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1 \sigma_1; \mathbf{p}_2 \sigma_2 | T_V^{(2)} | \mathbf{k}_1 \sigma_1'; \mathbf{k}_2 \sigma_2' \rangle = \\ & = g_V^2 \frac{\bar{u}^{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_\mu u^{\sigma_1'}(\mathbf{k}_1) \cdot \bar{u}^{\sigma_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^\mu u^{\sigma_2'}(\mathbf{k}_2)}{\mu^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и ранее, перейдем в (25) от биспиноров к двухкомпонентным спинорам. Пользуясь (2) и полученным в работе [18] равенством

$$S_p^{-1} \gamma^\mu S_p = (\Lambda_p)_\nu^\mu \gamma^\nu = \gamma_0 [p^\mu + 2\gamma_5 W^\mu(\mathbf{p})]/M, \quad (26)$$

где W^μ — 4-вектор релятивистского спина (вектор Паули — Любанского) с компонентами [19]

$$\left. \begin{aligned} W^0(\mathbf{p}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/2; \quad \mathbf{W}(\mathbf{p}) = M\boldsymbol{\sigma}/2 + \mathbf{p}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})/[2(\mathbf{p}_0 + M)]; \\ W^\mu(\mathbf{p}) W_\mu(\mathbf{p}) &= -M^2 s(s+1) = -M^2 (1/2)(1/2 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

получаем в с. ц. и. ($\kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa$) для (25) следующее выражение (рис. 1):

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}; \sigma_1 \sigma_2 | T_V^{(2)} | \mathbf{k}; \sigma_1' \sigma_2' \rangle = \sum_{\sigma_1 \mathbf{p} \sigma_2 \mathbf{p}} \langle \mathbf{p}; \sigma_1 \sigma_2 | T_V^{(2)} | \mathbf{k}; \sigma_1 \mathbf{p} \sigma_2 \mathbf{p} \rangle \times \\ & \times \mathcal{D}_{\sigma_1 \mathbf{p} \sigma_1'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \mathcal{D}_{\sigma_2 \mathbf{p} \sigma_2'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}; \sigma_1 \sigma_2 | T_V^{(2)} | \mathbf{k}; \sigma_{1p} \sigma_{2p} \rangle &= \xi_{\sigma_1}^* \xi_{\sigma_2}^* T_V^{(2)}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}) \xi_{\sigma_1} \xi_{\sigma_2} \\
 T_V^{(2)}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}) &= V_V^{(2)}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}) = -g_V^2 [4M^2/(\mu^2 + 4\kappa^2)] - \\
 &- g_V^2 4 \frac{[(\sigma_1 \kappa) \cdot (\sigma_2 \kappa) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \kappa^2]}{\mu^2 + 4\kappa^2} - g_V^2 \frac{8p_0 \kappa_0}{M^2} \frac{i(\sigma_1 + \sigma_2) [\mathbf{p} \times \kappa]}{\mu^2 + 4\kappa^2} - \\
 &- g_V^2 \frac{8}{M^2} \frac{p_0^2 \kappa_0^2 + 2p_0 \kappa_0 (\mathbf{p} \cdot \kappa) - M^4}{\mu^2 + 4\kappa^2} - \\
 &- g_V^2 \frac{8}{M^2} \frac{(\sigma_1 \cdot \mathbf{p})(\sigma_1 \cdot \kappa)(\sigma_2 \cdot \mathbf{p})(\sigma_2 \cdot \kappa)}{\mu^2 + 4\kappa^2}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Первый член в (29) является релятивистским обобщением потенциала Юкавы; второй — отвечает тензорным силам и спин-спиновому взаимодействию; третий содержит спин-орбитальное взаимодействие; четвертый вносит вклад в орбитальное движение. Последний член в (29) может быть разложен по спиновым структурам:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 \mathbf{p})(\sigma_1 \kappa) \cdot (\sigma_2 \mathbf{p})(\sigma_2 \kappa) &= (\mathbf{p}\kappa)^2 + [\mathbf{p} \times \kappa]^2 + \\
 + 8i \frac{\kappa_0}{M^3} (\mathbf{p}\kappa)^2 (\sigma_1 + \sigma_2) [\mathbf{p} \times \kappa] &+ 4(i\sigma_1 [\mathbf{p} \times \kappa] + i\sigma_2 [\mathbf{p} \times \kappa])^2,
 \end{aligned}$$

откуда видно, что он содержит вклады в орбитальное движение и спин-орбитальное взаимодействие.

Как известно [20], брейтовские потенциалы взаимодействия двух фермионов можно получить из фейнмановского матричного элемента, отвечающего обмену векторной частицей путем перехода к нерелятивистскому пределу или применения преобразования Фолди — Вотхойзена. Приведем их для удобства сравнения в той же калибровке, в которой выбран фотонный пропагатор в (25). Переписанные в терминах нерелятивистской полупередачи импульса $\kappa_0 = (\mathbf{k} - \mathbf{p})/2$, они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{брейт}}^{(2)}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}) &= -g_V^2 \frac{4M^2}{\mu^2 + 4\kappa_0^2} - g_V^2 \frac{4}{c^2} \frac{(\sigma_1 \kappa_0) \cdot (\sigma_2 \kappa_0) - (\sigma_1 \sigma_2) \kappa_0^2}{(c\mu)^2 + 4\kappa_0^2} - \\
 - g_V^2 \frac{8}{c^2} \frac{i(\sigma_1 + \sigma_2) [\mathbf{p} \times \kappa_0]}{\mu^2 + 4\kappa_0^2} &- g_V^2 \frac{8}{c^2} \frac{(\mathbf{p} + \kappa_0)^2}{(c\mu)^2 + 4\kappa_0^2}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (29) и (30), мы видим, что первые три члена в (29) можно рассматривать как прямое геометрическое обобщение нерелятивистских членов в (30). Важное отличие (29) от (30) состоит в том, что в точное релятивистское выражение спин-орбитальное взаимодействие входит с фактором $p_0 \kappa_0 / M^2$, содержащим зависимость от энергии. Это означает, что вклад спин-орбитального взаимодействия увеличивается с ростом энергии. В нерелятивистском пределе фактор $p_0 \kappa_0 / M^2 \rightarrow 1$. Последняя строка в (29) в силу пропорциональности $1/c^4$ не дает вклада в (30), где удержаны члены лишь порядка $1/c^2$.

Итак, переход к трехмерной записи в терминах пространства Лобачевского позволяет представить релятивистские ОВЕР в форме прямого геометрического обобщения потенциалов квантовой механики. Подчеркнем также, что использование языка геометрии Лобачевского дает возможность перейти от четырехмерного описания спина с помощью γ -матриц Дирака к трехмерному с помощью α -матриц Паули. Остановимся на этом важном моменте подробнее.

Вектор релятивистского спина $W^\mu(\mathbf{p})$ (27) можно получить чисто лоренцевым преобразованием из его значения в системе покоя

$$W^\mu(\mathbf{p}) = (\Lambda_p)^\mu_\nu W^\nu(0),$$

в которой он имеет лишь три необходимые компоненты, например для спина 1/2

$$W_0(0) = 0; \quad W(0) = M\sigma/2.$$

В силу справедливости условия

$$p_\mu W^\mu(\mathbf{p}) = 0 \tag{31}$$

в любой системе координат независимыми являются всего лишь три его компоненты. Принимая во внимание эти соотношения и определение вектора передачи импульса $\mathbf{k}(-)\mathbf{p} = (\Lambda_p^{-1}\mathbf{k})$ в пространстве Лобачевского (8), легко убедиться в справедливости следующего важного равенства:

$$(p - k)_\mu W^\mu(\mathbf{p}) = M\sigma(\mathbf{k}(-)\mathbf{p})/2, \tag{32}$$

устанавливающего эквивалентность четырехмерного и трехмерного описаний.

Равенство (32) позволяет установить связь нашей трехмерной параметризации с общим методом параметризации токов с помощью 4-вектора релятивистского спина, развитого А. А. Чешковым и Ю. М. Широковым [16]. Так, согласно работе [16], матричный элемент локального оператора тока $j(0)$ (скалярного или псевдоскалярного) записывается следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}; \sigma | j(0) | \mathbf{k}; \sigma' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_p = -s}^s \sum_{n=0}^{2s} \langle \sigma | \{i k_\mu W^\mu(\mathbf{p})\}^n | \sigma_p \rangle \mathcal{D}_{\sigma_p \sigma'}^s \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} f_n(t). \tag{33}$$

Инвариантные функции $f_n(t)$ (форм-факторы) получают как коэффициенты при разложении матричного элемента по линейно-независимым скалярам относительно группы вращений — скалярным произведениям $\{k_\mu W^\mu(\mathbf{p})\}^n$. Для скалярного оператора суммирование ведется по четным n , а для псевдоскалярного — по не-

четным. Благодаря равенству (32) и с учетом (33) этой же формуле можно придать трехмерный вид:

$$\begin{aligned} & \langle p; \sigma | j(0) | k; \sigma' \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_p = -s}^s \sum_{n=0}^{2s} \langle \sigma | \{iW(0)(\mathbf{k}(-)\mathbf{p})\}^n | \sigma_p \rangle \times \\ & \quad \times \mathcal{D}_{\sigma_p \sigma'}^s \{V^{-1}(\Lambda_p, k)\} f_n(t), \end{aligned} \quad (34)$$

где вектор релятивистского спина в системе покоя $W(0)$ уже не имеет лишних компонент.

Таким образом, трехмерная формулировка в пространстве Лобачевского выполняет ту же роль, что и преобразование Фолди — Вотхойзена, а именно исключение лишних компонент у вектора спина при описании релятивистских частиц. Но, в отличие от преобразования Фолди — Вотхойзена, связанного с разложением членов взаимодействия в ряд по степеням v^2/c^2 , наше преобразование является точным. Приведенная здесь формулировка позволяет построить трехмерный релятивистский аппарат, близкий по форме к аппарату квантовой механики, и развить феноменологический подход к релятивистской проблеме NN -взаимодействий. Действительно, описанный способ построения трехмерных релятивистских потенциалов можно рассматривать теперь как метод обобщения на релятивистский случай феноменологических потенциалов квантовой механики, взятых в импульсном представлении. Как видно из рассмотренных выше примеров, для такого обобщения необходимо в нерелятивистских потенциалах, записанных в импульсном пространстве, перейти к их выражению через полуимпульсы. Релятивистские выражения получаются заменой $\kappa_3 = (\mathbf{k} - \mathbf{p})/2$ на $\kappa = \sqrt{M/2(\Delta_0 + M)}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p})$, и добавлением кинематического вignerовского вращения. Ниже на примере NN -взаимодействия продемонстрируем метод построения спиновых структур с помощью тройки векторов из пространства Лобачевского.

Построение NN -спиновых структур в пространстве Лобачевского

Известно, что для описания рассеяния двух частиц со спинами $1/2$ можно с помощью биспиноров и γ -матриц построить пять независимых инвариантных спиновых структур:

$$\left. \begin{aligned} R_\alpha &= (\bar{u}(\mathbf{p}) \Gamma_{\alpha\mu}(\mathbf{k})) (\bar{u}(-\mathbf{p}) \Gamma_{\alpha\mu}(-\mathbf{k})); \\ \Gamma_\alpha &= (I, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

В общем случае, не ограничиваясь приближением ОВЕР, квазипотенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ в уравнении (2) разлагается по спиновым структурам (35). Повторяя те же рассуждения, которые использовались при переходе к записи выражений (21) и (25) в терминах элементов пространства Лобачевского (23) и (29), а также пользуясь формулами (26) и (27), можно после отделения вигнеровского вращения придать структурам (35) трехмерную форму. Однако при феноменологическом описании удобно не связываться с четырехмерным формализмом, а с самого начала использовать трехмерную аналогию с аппаратом квантовой механики. Для этого построим тройку независимых векторов в пространстве Лобачевского, а с их помощью и необходимое число спиновых структур.

Напомним, что обычно вне энергетической поверхности ($p^2 \neq k^2$) эти спиновые структуры строят с помощью тройки ортогональных векторов [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (\mathbf{k} + \mathbf{p})/N_l; & \mathbf{n} &= [\mathbf{k} \times \mathbf{p}]/N_n; \\ \mathbf{m} &= [\mathbf{l} \times \mathbf{n}]/N_m. \end{aligned} \tag{36}$$

На энергетической поверхности они переходят в привычные базисные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (\mathbf{k} + \mathbf{p})/N_l; & \mathbf{n} &= [\mathbf{k} \times \mathbf{p}]/N_n; \\ \mathbf{m} &= (\mathbf{k} - \mathbf{p})/N_m. \end{aligned} \tag{37}$$

Пространство Лобачевского — пространство постоянной отрицательной кривизны. Это приводит к тому, что если в нерелятивистской теории на энергетической поверхности векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} были ортогональны $(\mathbf{k} + \mathbf{p})(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = 0$, то векторы $\Delta_+ = \mathbf{k} (+) \mathbf{p}$ и $\Delta_- = \mathbf{k} (-) \mathbf{p}$ в смысле обычного скалярного произведения не ортогональны:

$$\Delta_+ \cdot \Delta_- = (\mathbf{k} (+) \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{k} (-) \mathbf{p})|_{k^2=p^2} = -[\mathbf{k} \times \mathbf{p}]^2/M^2.$$

Но как векторы из пространства Лобачевского они ортогональны в смысле скалярного произведения в пространстве Лобачевского. Легко проверить, что с метрическим тензором из (7) выполняется равенство

$$\Delta_+ \odot \Delta_- \equiv (\mathbf{k} (+) \mathbf{p})^i g_{ih} (\mathbf{k} (-) \mathbf{p})^h = 0.$$

Поскольку квазипотенциальное уравнение пишется вне энергетической поверхности, нам понадобится тройка ортогональных векторов вне энергетической поверхности. Покажем теперь, что если из квазипотенциала выделить кинематическое вигнеровское вращение, т. е. перейти к параметризации вида (28), то требование определенной T -четности спиновых структур приведет к их однозначному определению.

Для этого представим входящий в (2) и (3) квазипотенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ в следующем виде:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = \sum_j V_j(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}, \mathbf{p}; E_q) Q_1^{(j)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) Q_2^{(j)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \times \\ \times \mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\}, \quad (38)$$

где $V_j(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}, \mathbf{p}; E_q)$ — инвариантные функции; $Q_{1,2}^{(j)}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — искомые спиновые структуры. Для T -инвариантной амплитуды или квазипотенциала должно выполняться равенство

$$\left. \begin{aligned} T(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= (U_{iT}^{-1} U_{2T}^{-1} T(-\mathbf{k}, -\mathbf{p}) U_{1T} U_{2T})^T; \\ U_{iT} &= \alpha(\sigma_2)_i; \quad |\alpha| = 1, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где U_{iT} — унитарный оператор, действующий в спинорном пространстве i -й частицы. Учитывая, что $V^{-1}(\Lambda_{-\mathbf{k}}, -\mathbf{p}) = V(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})$, из (38) и (39) получаем условие T -инвариантности для спиновых структур:

$$Q(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \pm \mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \times \\ \times [U_T^{-1} Q(-\mathbf{k}, -\mathbf{p}) U_T]^T [\mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\}]^+, \quad (40)$$

которое отличается от нерелятивистского лишь наличием вигнеровских вращений.

В нашем распоряжении имеются два вектора \mathbf{p} и \mathbf{k} . Вигнеровское вращение — поворот в плоскости, проходящей через эти два вектора, вокруг вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{k} \times \mathbf{p}] / N_{\mathbf{n}}$. Поскольку этот поворот не меняет вектора \mathbf{n} , то спиновая структура $(\sigma \cdot \mathbf{n})$ обладает положительной T -четностью.

Оставшиеся два орта должны лежать в плоскости, образованной векторами \mathbf{p} и \mathbf{k} . Потребуем, чтобы структура $(\sigma \cdot \mathbf{m})$, где \mathbf{m} ищем в виде $(\mathbf{k} + x\mathbf{p}) / |\mathbf{k} + x\mathbf{p}|$, обладала отрицательной T -четностью. Согласно (40) это означает

$$\sigma \cdot (\mathbf{k} + x\mathbf{p}) = \mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \sigma \cdot (-\mathbf{p} - x\mathbf{k}) \mathcal{D}^{+1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\}, \quad (41)$$

откуда с учетом явного выражения (22) для \mathcal{D} -функции, легко определить искомый множитель $x(p_0, k_0, \mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$:

$$x = -(k_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} / (p_0 + M)) / M.$$

Полученный вектор $\mathbf{k} + x\mathbf{p}$ есть не что иное, как введенный ранее вектор передачи импульса в пространстве Лобачевского $\Delta = \mathbf{k}(-)\mathbf{p}$ (8). Таким образом,

$$m = (k(-)\mathbf{p}) / |\mathbf{k}(-)\mathbf{p}|. \quad (42)$$

Аналогично можно найти и вектор \mathbf{l} . Однако проще взять \mathbf{l} в следующем виде:

$$\mathbf{l} = [\mathbf{n} \times \mathbf{m}], \quad (43)$$

и проверить T -четность $(\sigma \mathbf{l})$. Для этого используем соотношение $(\sigma \mathbf{l}) = -i (\sigma \cdot \mathbf{n}) (\sigma \cdot \mathbf{m})$. Закljučая его с двух сторон между \mathcal{D} -функциями и используя (41), легко установить, что условие положительной T -четности с таким вектором \mathbf{l} (43) выполняется.

Теперь нетрудно записать общую параметризацию P , T -инвариантной амплитуды рассеяния двух фермионов вне энергетической поверхности:

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \{V_1 + V_2 (\sigma_1 \mathbf{n} + \sigma_2 \mathbf{n}) + V_3 (\sigma_1 \mathbf{n})_i (\sigma_2 \mathbf{n})_i + V_4 (\sigma_1 \mathbf{l}) (\sigma_2 \mathbf{l}) + V_5 (\sigma_1 \mathbf{m}) (\sigma_2 \mathbf{m}) + V_6 [(\sigma_1 \mathbf{l}) (\sigma_2 \mathbf{m}) + (\sigma_1 \mathbf{m}) (\sigma_2 \mathbf{l})]\} \times \mathcal{D}_1^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} \mathcal{D}_2^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\}. \quad (44)$$

Функция $V_6(p_0, k_0, \mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$ является нечетной функцией относительно перестановки импульсов p и k . На энергетической поверхности, когда $p_0 = k_0$, шестое слагаемое в (44) обращается в нуль: $V_6(p_0, k_0, \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}) = -V_6(k_0, p_0, \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}) = 0$.

Преимущества введенных спиновых структур для параметризации релятивистских амплитуд, даваемых квантовой теорией поля, наиболее четко видны на примере γ_5 -взаимодействия. Действительно, согласно (21), в амплитуде $T_{PS}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ возникает лишь одна спин-структура $(\sigma_1 \mathbf{m}) (\sigma_2 \mathbf{m})$, в то время как при использовании обычной тройки ортов $\mathbf{l}_3, \mathbf{m}_3$ и \mathbf{n}_3 возникают три конструкции [5], соответствующие четвертому, пятому и шестому слагаемым в (44).

Удобство параметризации амплитуд в терминах элементов пространства Лобачевского продемонстрируем еще раз на примере процесса с участием частиц разных спинов. Рассмотрим взаимодействие псевдоскалярной, спинорной и векторной частиц [21] $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p$. Амплитуда такого процесса в приближении π -мезонного обмена (рис. 2) имеет в принятой в [22] нормировке вид

$$T^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{2igf_{\rho\pi\pi}}{(2\pi)^6} \frac{\bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p}') \gamma^5 u^\sigma(\mathbf{p})}{\mu_\pi^2 - (p - p')^2} e^\mu(\lambda, \mathbf{q}') q_\mu,$$

где $e^\mu(\lambda, \mathbf{q}')$ — 4-вектор поляризации векторного мезона. Индекс поляризации λ принимает значения $-1, 0, 1$. Согласно работе [21], четырехмерное скалярное произведение $e^\mu(\lambda, \mathbf{q}') q_\mu$ можно свести к трехмерному следующим образом:

$$e^\mu(\lambda, \mathbf{q}') q_\mu = e^\nu(\lambda, \mathbf{0}) (\Lambda_{\mathbf{q}'}^{-1})_\nu^\mu q_\mu = \mathbf{e}(\lambda, \mathbf{0}) \cdot \Delta_{\mathbf{q}'},$$

где выбрано $e^0(\lambda, \mathbf{0}) = 0$. С помощью изложенного выше метода форма $\bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p}') \gamma^5 u^\sigma(\mathbf{p})$ также легко сводится к трехмерному виду.

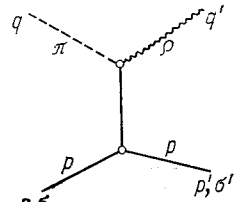


Рис. 2. Диаграмма π -мезонного обмена для процесса $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p$

В результате отделения вигнеровского вращения получаем простую трехмерную параметризацию амплитуды рассматриваемого процесса [21]:

$$T^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{2igf_{0\pi\pi}}{(2\pi)^6} \frac{|\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\kappa}_p|}{\mu_\pi^2 + 4\boldsymbol{\kappa}_p^2} \mathbf{e}(\lambda, 0) \cdot \Delta_q.$$

Интересно отметить, что полупередача импульса $\boldsymbol{\kappa}_p$ соответствует спинорным частицам — фермионам. Передача импульса Δ_q отвечает бозонам.

Локальная форма квазипотенциального уравнения

Как было установлено выше, после выделения кинематического вигнеровского вращения оставшаяся часть квазипотенциала

$$V_{\sigma_1 \sigma_2}^{(2)\sigma_1 p \sigma_2 p}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}) \equiv T_{\sigma_1 \sigma_2}^{(2)\sigma_1 p \sigma_2 p}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p})$$

является локальной в пространстве Лобачевского. Спиновые индексы этой части «сидят» на одном импульсе. Заметим, что в левой части уравнения (2) спиновые индексы волновой функции $\Psi_q(\mathbf{p})_{\sigma_1 \sigma_2}$ «сидят» на импульсе \mathbf{p} , а в правой $\Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma_1' \sigma_2'}$ — на импульсе \mathbf{k} . «Пересадим» теперь у $\Psi_q(\mathbf{k})$ -спиновые индексы тоже на импульс \mathbf{p} . Это преобразование имеет вид

$$\Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma_1 p \sigma_2 p} = \sum_{\sigma_1' \sigma_2'} \mathcal{D}_{\sigma_1 p \sigma_1'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} \mathcal{D}_{\sigma_2 p \sigma_2'}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\} \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma_1' \sigma_2'}. \quad (45)$$

Поскольку необходимые для этой операции \mathcal{D} -функции уже содержатся в квазипотенциале (38), то они осуществляют эту пересадку автоматически. В результате приходим к уравнению для волновой функции, в котором все спиновые индексы «сидят» на одном импульсе \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} & E_p(E_p - E_q) \Psi_q(\mathbf{p})_{\sigma_1 \sigma_2} = \\ & = \frac{1}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma_1 p \sigma_2 p} \int \frac{d^3 k}{E_k} V_{\sigma_1 p \sigma_2}^{\sigma_1 p \sigma_2 p}(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma_1 p \sigma_2 p}. \quad (46) \end{aligned}$$

При такой форме квазипотенциального уравнения взаимодействие описывается локальным в пространстве Лобачевского квазипотенциалом $V(\mathbf{k}(-) \mathbf{p}; \mathbf{p}, E_q)$, а правая часть (46) представляет собой свертку в пространстве Лобачевского. Естественность перехода к такой форме записи уравнения становится очевидной при решении его по теории возмущений. Действительно, если этим методом

решать уравнение для волновой функции, описывающей рассеяние двух частиц [5]:

$$\Psi_q(\mathbf{p})_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{(2\pi)^3}{M} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \xi_{\sigma_1} \xi_{\sigma_2} + \frac{1}{E_q(E_p - E_q - i\epsilon)} \frac{1}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma'_1\sigma'_2} \int \frac{d^3k}{E_k} V_{\sigma'_1\sigma'_2}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma'_1\sigma'_2}, \quad (47)$$

то при подстановке вместо $\Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma'_1\sigma'_2}$ в правую часть (47) в качестве первого приближения выражения $\frac{(2\pi)^3}{M} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \times \xi_{\sigma'_1} \xi_{\sigma'_2}/M$, описывающего свободное движение, необходимо осуществить «пересадку» спиновых индексов $\sigma'_1\sigma'_2$ с импульса \mathbf{p} на импульс \mathbf{k} . В то же время при работе с уравнениями в форме (46) необходимости в такой дополнительной операции не существует, так как она уже учтена преобразованием (45). Очевидно, что и в уравнении для релятивистской амплитуды рассеяния (3) в силу унитарности матрицы $\mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\}$ можно осуществить аналогичную «пересадку» всех спиновых индексов на один импульс, например \mathbf{p} .

Чтобы иметь полную аналогию с нерелятивистским уравнением Липшмана — Швингера, совершим переход к линейной по E_p функции Грина. Для этого, следуя работе [7], определим вне энергетической поверхности новую амплитуду $A_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}$ следующим образом:

$$A_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / (8\pi \sqrt{4E_p E_q}), \quad (48)$$

и введем квазипотенциал

$$\tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = -V_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) / (2M \sqrt{4E_p E_q}). \quad (49)$$

Уравнения (2) и (3) в терминах новых величин принимают вид

$$A_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{M}{4\pi} \tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma''_1\sigma''_2} \int \tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma''_1\sigma''_2}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_0) \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{2E_q - 2E_k + i\epsilon} A_{\sigma''_1\sigma''_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}); \quad (50)$$

$$(2E_q - 2E_p) \Psi_q(\mathbf{p})_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma'_1\sigma'_2} \int \tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma'_1\sigma'_2} d\Omega_{\mathbf{k}} \quad (51)$$

и являются по форме прямым геометрическим обобщением уравнений Липшмана — Швингера и Шредингера для спиновых частиц. Примем (50) и (51) за основные уравнения для неизвестных ампли-

туды рассеяния, $A_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}$ и волновой функции $\Psi_{q\sigma_1\sigma_2}$. Квазипотенциал $\tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ будем считать заданным и на энергетической поверхности $E_p = E_k = E_q$ связанным с \tilde{V} квазипотенциалом $V_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$, т. е. с совокупностью фейнмановских матричных элементов, соотношением

$$\tilde{V}_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = -V_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)/(4ME_q). \quad (52)$$

Для того чтобы и вне энергетической поверхности сохранить локальность квазипотенциала в импульсном пространстве Лобачевского, определим его продолжение за поверхность энергии по формуле (52), а не (49). Таким образом, во втором порядке по константе связи член $\tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ в (52) отличается от $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$, определенных формулами (18) и (25), лишь на множитель $-1/(4ME_q)$. Квазипотенциальные уравнения (2) и (3) после пересадки всех спиновых индексов на один импульс и преобразования к форме (50) и (51), выглядят, как прямое геометрическое обобщение аналогичных нерелятивистских уравнений. При этом квазипотенциалы в них определены по формулам (52) и (23), (29) и имеют вид геометрического обобщения своих нерелятивистских аналогов (24) и (30).

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе будет найден вид релятивистских потенциалов (23) и (29) в релятивистском конфигурационном представлении. Релятивистское конфигурационное представление (РКП) было введено ранее в работе [7]. Известно, что переход к обычному координатному пространству осуществляется с помощью преобразования Фурье, т. е. разложения по функциям $\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$, реализующим унитарные неприводимые представления (УНП) группы Галилея. В релятивистской области импульсное пространство уже не является евклидовым, а является пространством Лобачевского, реализованным на верхней полé гиперболоида (1). Группа движения пространства Лобачевского — группа Лоренца. Поэтому если локальным в пространстве Лобачевского квазипотенциалам (23) и (29) сопоставить локальные выражения в конфигурационном представлении, то переход к нему необходимо осуществлять с помощью разложений на группе движений пространства Лобачевского — группе Лоренца.

Разложение по УНП группы Лоренца применялось в теории элементарных частиц и ранее [23, 24]. Однако во всех этих работах групповой параметр, играющий в нашем подходе роль относительной координаты, не был истолкован как релятивистское обоб-

щение модуля радиус-вектора. Это не позволило авторам работ [23, 24] придать разложению на группе Лоренца смысл релятивистского обобщения фурье-преобразования к координатному представлению. Приведем кратко основные факты, относящиеся к РКП, которые потребуются для дальнейших построений.

Релятивистское конфигурационное представление

С математической точки зрения аппарат гармонического анализа на группе Лоренца хорошо известен. В работах [7, 8] этот аппарат использован в той форме, которая ему придана в работах [23, 24].

Полная и ортогональная система функций на гиперboloиде (1) введена в работе [23]:

$$\left. \begin{aligned} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) &= [(p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})/M]^{-1-irM}; \\ p_0 &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}; \quad \mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta); \quad \mathbf{n}^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Соотношения полноты и ортогональности для функций (53) приведены в приложении. Функции $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{n}, r)$ реализуют бесконечномерные, унитарные, неприводимые представления группы Лоренца, а параметр r , фигурирующий в (53), связан с собственными значениями оператора Казимира группы Лоренца $\hat{C}_L = M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}/4$ ($M_{\mu\nu}$ — генераторы группы Лоренца) следующим образом:

$$\hat{C}_L \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) = \left(\frac{1}{M^2} + r^2 \right) \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (54)$$

В работе [7] было предложено рассматривать параметр r как релятивистское обобщение относительной координаты. Действительно, в нерелятивистском пределе, когда пространство Лобачевского переходит в евклидово пространство:

$$\xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \rightarrow \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \quad (55)$$

оператор Казимира группы Лоренца \hat{C}_L переходит в оператор Казимира группы движений евклидова пространства \hat{C}_3 :

$$\hat{C}_L \rightarrow \left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 = \hat{C}_3. \quad (56)$$

Заметим, что обычные плоские волны $\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ реализуют унитарные неприводимые представления группы трансляций плоского евклидова пространства. Собственным значением оператора Казимира группы евклида \hat{C}_3 на них является квадрат нерелятивистской координаты

$$\hat{C}_3 \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = r^2 \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}). \quad (57)$$

Следовательно, предложенное в работе [7] релятивистское обобщение относительной координаты сохраняет ее теоретико-групповой смысл.

В работе [7] было показано, что оператором свободного гамильтониана для плоских волн (53)

$$\hat{H}_0 \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) = p_0 \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \quad (58)$$

является дифференциально-разностный оператор

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = M \operatorname{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{i}{r} \operatorname{sh} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\Delta_{0, \varphi}}{2Mr^2} \exp \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

с шагом, пропорциональным комptonовской длине волны частицы $1/M$. В нерелятивистском пределе

$$\exp \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - 1 \rightarrow \frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}$$

и \hat{H}_0 переходит в свободный гамильтониан уравнения Шредингера. Аналогично в работе [27] был найден оператор импульса, удовлетворяющий условию

$$\hat{\mathbf{P}} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) = \mathbf{p} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r). \quad (60)$$

Явный вид оператора $\hat{\mathbf{P}}$ приведен в приложении.

В работах [7, 8] был найден образ мезонного пропагатора $1/(\mu^2 - t)$ в новом координатном пространстве:

$$V_{\text{ЮК}}^{\text{рел}}(r) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} \frac{\operatorname{ch} rMa}{\operatorname{sh} rM\pi} \text{ при } \mu^2 < 4M^2; \quad a = \arccos [(\mu^2 - 2M^2)/2M^2]; & (61a) \\ \frac{1}{4\pi r} \frac{\cos rMb}{\operatorname{sh} rM\pi} \text{ при } \mu^2 > 4M^2; \quad b = \operatorname{Arch} [(\mu^2 - 2M^2)/2M^2], & (61б) \end{cases}$$

который можно рассматривать как релятивистское обобщение потенциала Юкавы. При $\mu^2 < 4M^2$ выражение (61a) переходит в обычный потенциал Юкавы $\exp(-\mu r)/4\pi r$. При $\mu = 0$ (61) представляет собой образ пропагатора обмена безмассовой частицей $1/(p - k)^2$ и выглядит как потенциал Кулона, модифицированный на расстояниях порядка комptonовской длины волны:

$$V_{\text{Кул}}^{\text{рел}}(r) = (\operatorname{cth} rM\pi)/4\pi r. \quad (62)$$

В заключение этого раздела отметим некоторые важные свойства новой релятивистской координаты. Первое, очевидное, — модуль релятивистской координаты r есть релятивистский инвариант, поскольку он параметризует собственные значения инва-

риантного оператора Казимира \hat{C}_L группы Лоренца [см. (54)]. В силу этого образы мезонных пропагаторов — релятивистские потенциалы (61) и (62) — тоже являются релятивистски-инвариантными величинами.

Другое важное свойство релятивистской координаты вытекает из ее связи с инвариантным среднеквадратическим радиусом системы:

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{6}{F(0)} \frac{\partial F(t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad (63)$$

где $F(t)$ — инвариантный форм-фактор системы. Известно, что в брейтовской системе координат [где $p = -k$; $t = (p - k)^2 = -\mathbf{q}^2 = -(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2$] выражение для инвариантного среднеквадратического радиуса приобретает нерелятивистский вид

$$\langle r_0^2 \rangle |_{\text{бр. сист}} = -\frac{6}{F_0} \frac{\partial F(t)}{\partial \mathbf{q}^2} \Big|_{\mathbf{q}^2=0} = \frac{1}{F(0)} \left[\left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right)^2 F(t) \right]_{\mathbf{q}^2=0}$$

и имеет смысл собственного значения оператора Казимира \hat{C}_3 группы движений трехмерного евклидова пространства импульсов. В работе [28] было показано, что формальному определению инвариантного среднеквадратического радиуса системы (63) можно тоже придать теоретико-групповой смысл собственного значения оператора Казимира группы Лоренца:

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{6}{F(0)} \frac{\partial F(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{F(0)} [\hat{C}_L F(t)] \Big|_{t=0}. \quad (64)$$

Преобразование в релятивистское координатное пространство для форм-фактора $F(t)$ в силу сферической симметрии имеет вид [28]

$$F(t) = 4\pi \int \frac{\sin rMy}{rM \operatorname{sh} y} F(r) r^2 dr; \\ y = \operatorname{Ar ch} (1 - t/2M^2)$$

и справедливо в любой системе координат (а не только лишь в брейтовской, как при обычном подходе). Из последнего равенства, (64) и (54) следует, что выражение для инвариантного среднеквадратического радиуса в терминах инвариантного распределения $F(r)$ примет вид

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{\int (1/M^2 + r^2) F(r) dr}{\int F(r) dr} = \frac{1}{M^2} + \frac{\int r^2 F(r) dr}{\int F(r) dr}. \quad (65)$$

Это соотношение, связывающее новую координату r с радиусом системы $\langle r_0^2 \rangle$, будет существенно в дальнейшем при обсуждении вида релятивистских тензорных сил. Следует отметить, что в слу-

чае, когда распределения $F(r)$ в новом координатном пространстве является знакопостоянной функцией, новая координата, как это вытекает из (65), описывает лишь расстояния большие, чем комптоновская длина волны $1/M$.

Релятивистское спин-орбитальное взаимодействие

Рассмотрим часть квазипотенциала (29), содержащую спин-орбитальное взаимодействие:

$$V_{SL}(\Delta, \mathbf{p}) = -ig\tilde{V} \frac{4p_0}{M} \frac{\mathbf{S} \cdot [\mathbf{p} \times \Delta]}{\mu^2 + 4\kappa^2}; \quad \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2}{2}.$$

С помощью преобразования с функциями (53) в r -пространстве получаем [29]

$$V_{SL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{g\tilde{V}}{(2\pi)^3} \frac{p_0}{M} (\mathbf{S} \cdot [\mathbf{p} \times \nabla_{\text{разн}}]) V_{\text{юн}}(r), \quad (66)$$

где $\nabla_{\text{разн}}$ — дифференциально-разностный оператор, связанный с оператором импульса соотношением $\nabla_{\text{разн}} = i\hat{\mathbf{P}}$.

Воспользуемся явным видом оператора $\nabla_{\text{разн}}$ (см. приложение) и представим (66) в виде

$$V_{SL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{g\tilde{V}}{(2\pi)^3} \frac{p_0}{M} \frac{1}{r+i/M} \frac{1}{2i/M} \left[1 - \exp\left(-2\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right) \right] (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) V_{\text{юн}}(r). \quad (67)$$

Оператор орбитального момента \mathbf{L} выражается через векторное произведение \mathbf{r} и \mathbf{p} по следующей формуле [29]:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \exp\left(-\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right), \quad (68)$$

переходящей очевидным образом в нерелятивистскую. Однако в явное выражение для оператора $\hat{\mathbf{P}}$ в сферических координатах (1) операции дифференцирования по угловым переменным входят обычным образом, а операция конечно-разностного «дифференцирования» затрагивает лишь модуль r и не входит в выражение для оператора \mathbf{L} (68) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} L_x &= i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \\ L_y &= -i \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{L}^2 = -\Delta_{\theta, \varphi}$, где $\Delta_{\theta, \varphi}$ — оператор Лапласа на сфере. Это замечание позволяет пользоваться при частичном разложении

нерелятивистским формализмом, внося изменения лишь в радиальную часть.

В нерелятивистском пределе оператор

$$\frac{1}{2i/M} \left[1 - \exp \left(-2 \frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]$$

переходит в обычный оператор дифференцирования $\partial/\partial r$, а потенциал (67) переходит в потенциал спин-орбитального взаимодействия квантовой механики:

$$V_{SL}^{\text{нер}}(r) \sim \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial V}{\partial r} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}).$$

Следует особо отметить, что в релятивистском потенциале (67) нет членов, содержащих более высокие порядки сингулярности, чем имеющиеся в потенциалах Юкавы и Кулона. Действительно, в релятивистском случае роль дифференцирования выполняют операции конечного сдвига, в результате которых потенциал приобретает сингулярность в комплексной точке. Сдвиг осуществляется по мнимой оси с шагом, пропорциональным комптоновской длине волны частицы. Поэтому в нерелятивистском пределе эти сингулярности налагаются на сингулярность в нуле самого потенциала. Таким образом, можно сказать, что полунерелятивистское описание, связанное с разложением по степеням v^2/c^2 членов взаимодействия, приводит к слиянию сингулярностей, тогда как использование последовательного релятивистского формализма снимает это вырождение.

Релятивистские тензорные силы

В нерелятивистской мезонной теории ядерных сил тензорный потенциал возникает как фурье-образ выражения $(\sigma_1 \cdot \mathbf{q})(\sigma_2 \cdot \mathbf{q})/(\mu^2 + \mathbf{q}^2)$ и его можно представить как результат действия оператора $(\sigma_1 \cdot \nabla)(\sigma_2 \cdot \nabla)$ на известный потенциал Юкавы:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \cdot \nabla)(\sigma_2 \cdot \nabla) V_{\text{ЮК}}^{\text{нер}}(r) &= \frac{1}{3} [\mu^2 V_{\text{ЮК}}^{\text{нер}}(r) - 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})] (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + \\ &+ \frac{1}{3} \left[\mu^2 + \frac{3\mu}{r} + \frac{3}{r^2} \right] V_{\text{ЮК}}^{\text{нер}}(r) S_{1,2}, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_{1,2} &= 3(\sigma_1 \cdot \mathbf{n})(\sigma_2 \cdot \mathbf{n}) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2); \\ V_{\text{ЮК}}^{\text{нер}}(r) &= \exp(-\mu r)/4\pi r. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

В релятивистском случае тензорные силы возникают при рассмотрении в импульсном пространстве аналогичной части квази-потенциала

$$\frac{4(\sigma_1 \cdot \boldsymbol{\kappa})(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{\kappa})}{\mu^2 + 4\boldsymbol{\kappa}^2} = \frac{(\sigma_1 \cdot \boldsymbol{\Delta})(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{\Delta})}{\mu^2 - 2M^2 + 2M\Delta_0} \frac{2M}{\Delta_0 + M}. \quad (71)$$

После перехода к r -пространству с функциями (53) находим, что

$$V(\mathbf{r}) = \frac{4M^2}{4M^2 - \mu^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_{\text{разн}}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_{\text{разн}}) \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} rMa}\right) V_{\text{Юк}}(r). \quad (72)$$

Рассмотрим случай юкавского потенциала (61а) при $\mu^2 < 4M^2$. После выполнения разностного дифференцирования получаем аналогично нерелятивистскому случаю скалярную и тензорную части [29]:

$$V(\mathbf{r}) = V_S(r) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + V_T(r) S_{1,2}, \quad (73)$$

$$\text{где} \quad V_S(r) = \frac{1}{3} \left[\mu^2 V_{\text{Юк}}(r) - 8\pi \frac{\delta(1/M^2 + r^2) \delta(\mathbf{n})}{r} \right] \quad (74)$$

и

$$V_T(r) = \frac{1}{3} \frac{r^2}{(r+i/M)(r+2i/M)} \left[\mu^2 + \frac{3\mu}{r} \left(1 - \frac{\mu^2}{2M^2}\right) \frac{\operatorname{th} rMa}{\sqrt{1 - \mu^2/4M^2}} + \frac{1}{r^2} \frac{3 - 2\mu^2/M^2(1 - \mu^2/4M^2) - 3/(2 \operatorname{ch} rMa)}{1 - \mu^2/4M^2} \right] V_{\text{Юк}}(r). \quad (75)$$

Потенциал (73) с такими V_S и V_T в нерелятивистском пределе переходит в выражение (69). Как видно, в релятивистское выражение (74) входит δ -функция от аргумента $1/M^2 + r^2$ вместо $\delta(r)$ в (69). Как отмечалось ранее [см. (65)], именно комбинацией $1/M^2 + r^2$ и измеряется среднеквадратический радиус системы в релятивистском случае, а точка $X^2 = 1/M^2 + r^2 = 0$ в релятивистском случае отвечает центр системы в полной аналогии с нерелятивистским членом $\delta(r)$ в (69). Так же как и при спин-орбитальном взаимодействии, потенциал V_T (75) в отличие от нерелятивистского выражения (69) не содержит более высоких сингулярностей в нуле, чем сам потенциал Юкавы (61).

3. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В квазипотенциальном уравнении (2) переход к конфигурационному представлению можно осуществлять с помощью двух различных наборов функций на гиперboloиде (1). Один из них образует функции (53), а само разложение имеет в обозначениях, приведенных в работе [7], следующий вид:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p_0} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \Psi(\mathbf{p}). \quad (76)$$

Другой полный набор, полученный в работе [30] (см. также [31, 32]), содержит зависимость от спиновых переменных. Различие между этими двумя наборами функций связано с различием законов преобразования бесспиновой и спиновой волновых функций [30].

Однако если работать с квазипотенциальным уравнением в форме (46), то нам достаточно разложения по бесспиновым скалярным плоским волнам (53). Действительно, в ковариантной формулировке уравнения для волновой функции

$$\begin{aligned} & \sqrt{s_p} (V_{s_p} - V_{s_q}) \Psi_q(\mathbf{p})_{\sigma_1 \sigma_2} = \\ & = \frac{4}{(4\pi^3)} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2} \frac{1}{M} \int d\Omega_{\mathbf{k}} V_{\sigma'_1 \sigma'_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}, \mathbf{p}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma'_1 \sigma'_2} \end{aligned}$$

функция Грина $(V_{s_p} - V_{s_q} - i\varepsilon)^{-1}$, переходящая в с. ц. и. в $(2E_p - 2E_q - i\varepsilon)^{-1}$ [см. (50) и (51)], является скаляром в спиновом пространстве, а вся зависимость гамильтониана от спина сосредоточена в квазипотенциале *. Следовательно, после «пересадки» всех спиновых индексов на один импульс \mathbf{p} они будут преобразовываться на малой группе этого вектора (индексы σ_p принимают числовые значения $\pm 1/2$), т. е. испытывать одинаковое вигнеровское вращение при преобразованиях Лоренца. В силу унитарности матрицы $\mathcal{D}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_p, \mathbf{k})\}$ вигнеровские вращения выделяются в левой и правой частях уравнений (50) и (51), не изменив при этом формы уравнений и вида потенциалов. Таким образом, для наших целей достаточно иметь полную и ортогональную систему функций в пространстве Лобачевского, которую и образуют бесспиновые функции (53).

В дальнейшем будем работать с уравнением для волновой функции в фиксированной системе координат — с. ц. и. После использования преобразования (76) уравнение (51) примет вид

$$\begin{aligned} & (2E_q - 2\hat{H}_0) \Psi_q(\mathbf{r})_{\sigma_1 \sigma_2} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\Omega_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \tilde{V}_{\sigma'_1 \sigma'_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\Delta, \mathbf{p}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma'_1 \sigma'_2}. \quad (77) \end{aligned}$$

Наша цель — преобразование правой части уравнения (77), содержащей взаимодействие, к локальной форме в новом координатном пространстве. Для этого в интегральной части (77) перейдем к волновой функции в r -пространстве

$$\Psi_q(\mathbf{k})_{\sigma_1 \sigma_2} = \int d^3 r_1 \xi^*(\mathbf{k}; \mathbf{n}_1, r_1) \Psi_q(\mathbf{r}_1)_{\sigma_1 \sigma_2}$$

и применим равенство

$$\xi(\mathbf{k}; \mathbf{n}, r) = \xi(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{n}_p, r) \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r),$$

* Такой формализм близок к нерелятивистскому (уравнение Паули), где от спина зависят лишь члены взаимодействия.

где единичный вектор [31, 32]

$$\mathbf{n}_{\Lambda p} = \frac{M\mathbf{n} - \mathbf{p} [1 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) / (p_0 + M)]}{p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}. \quad (78)$$

Воспользуемся в (77) инвариантностью элемента объема $d\Omega_{\mathbf{k}} = d\Omega_{\mathbf{k}(-)\mathbf{p}}$ и перейдем к образу потенциала в РКП:

$$V_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(r, \mathbf{n}; \mathbf{p}; E_q) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\Omega_{\Lambda} \xi^*(\Lambda; \mathbf{n}, r) \tilde{V}_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\Lambda, \mathbf{p}; E_q). \quad (79)$$

После подстановки (79) в (77) правая часть принимает вид

$$\int d^3r_1 \sum_{\sigma_1'\sigma_2'} \int d\Omega_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}_1, r_1) V_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(r_1, \mathbf{n}_{\Lambda p}; \mathbf{p}; E_q) \Psi_q(r)_{\sigma_1'\sigma_2'}. \quad (80)$$

Из предыдущего раздела известно, что зависимость потенциала $V(r_1, \mathbf{n}_{\Lambda p}; \mathbf{p}; E_q)$ от единичного вектора $\mathbf{n}_{\Lambda p}$ сосредоточена лишь в спиновых структурах $S_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}$. Благодаря этому потенциал можно представить в следующем виде:

$$V_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(r, \mathbf{n}_{\Lambda p}; \mathbf{p}; E_q) = V(r; \mathbf{p}; E_q) S_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{\Lambda p}). \quad (81)$$

Функцию $V(r; \mathbf{p}; E_q)$, зависящую лишь от модуля координаты r , можно вынести за знак интегрирования по импульсу, если заменить в ней вектор \mathbf{p} на оператор $\hat{\mathbf{P}}$. В результате (80) примет вид [29]

$$\int d^3r_1 V(r_1; \hat{\mathbf{P}}; E_q) \sum_{\sigma_1'\sigma_2'} Z_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Psi_q(\mathbf{r}_1)_{\sigma_1'\sigma_2'}, \quad (82)$$

где функция $Z_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ определяется спиновыми структурами потенциала

$$Z_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int d\Omega_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) S_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{\Lambda p}) \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}_1, r_1). \quad (83)$$

Из (83) становится очевидным, что для той части потенциала, которая не зависит от спиновых переменных, т. е. для $S_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2} \sim \delta_{\sigma_1\sigma_1'} \delta_{\sigma_2\sigma_2'}$, взаимодействие описывается локальным образом:

$$(2E_q - 2\hat{H}_0) \Psi_q(\mathbf{r})_{\sigma_1\sigma_2} = \sum_{\sigma_1'\sigma_2'} V_{\sigma_1'\sigma_2'}^{\sigma_1\sigma_2}(r; \mathbf{p}; E_q) \Psi_q(\mathbf{r})_{\sigma_1'\sigma_2'}, \quad (84)$$

поскольку функция $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ обращается в δ -функцию: $Z_{\text{бессп}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$. К этому случаю относятся такие важные потенциалы взаимодействия, как юкавский (61) и кулоновский (62).

Далее покажем, что и при других видах взаимодействия достигается аналогичная локализация. Так, для спин-орбитального взаимодействия Z -функция оказывается пропорциональной δ -функции, а для тензорных сил из функции $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ можно выделить член, пропорциональный δ -функции.

Локальная форма уравнения для спин-орбитальных и тензорных сил

Для спин-орбитального взаимодействия согласно (66) и (78) спиновая структура потенциала имеет вид

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{n}_{\Lambda p}) = \mathbf{S} \cdot [\mathbf{n}_{\Lambda p} \times \mathbf{p}] = (\mathbf{S} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{p}]) M / (p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}).$$

Тогда по определению (83)

$$Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \exp \left[-\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right] \int d\Omega_p (\mathbf{S} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{p}]) \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}_1, r_1) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) / r.$$

Таким образом, интеграл в (82) снимается и уравнение принимает вид [29]

$$(2E_q - 2\hat{H}_0) \Psi_q(\mathbf{r}) = \hat{V}_{SL}(\mathbf{r}) \Psi_q(\mathbf{r}),$$

где

$$\hat{V}_{SL}(\mathbf{r}) = \frac{g^2 \hat{V}}{(2\pi)^3} \frac{r+iM}{r-iM} \frac{1}{r} \frac{1}{2i/M} \left[\exp \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \exp \left(-\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \times V_{\text{юр}}(r) \frac{\hat{H}_0}{M} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}). \quad (85)$$

Угловая зависимость тензорного взаимодействия содержится в операторе

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Lambda p}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Lambda p}), \quad (86)$$

где единичный вектор $\mathbf{n}_{\Lambda p}$ задается (78). В этом случае функцию $Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ разобьем на две части:

$$Z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \exp \left(-2 \frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \tilde{Z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1). \quad (87)$$

Первое слагаемое, очевидно, снимает интегрирование в (82), второе же по сравнению с первым является релятивистской поправкой порядка $1/Mc$:

$$\tilde{Z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \exp \left(-2 \frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{M} \int d\Omega_p \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \left\{ -[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n})] \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{p_0 + M} \right) + \frac{1}{M} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}) \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{p_0 + M} \right)^2 \right\} \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}_1, r_1). \quad (88)$$

Таким образом, правая часть квазипотенциального уравнения будет иметь вид

$$\left[V_S(r) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + V_T^* \left(r - \frac{2i}{M} \right) S_{1,2} \right] \Psi_q(r) + \int d^3r_1 V_T^*(r_1) \tilde{Z}(r, r_1) \Psi_q(r_1). \quad (89)$$

Итак, первый член в правой части (89) представляет собой локальное релятивистское тензорное взаимодействие, отличие которого от нерелятивистского содержится в новых выражениях для радиальных потенциальных функций $V_S(r)$ и $V_T(r)$.

Заметим, что при желании в поправочном релятивистском интегральном члене (89) можно взять интеграл в любом порядке по степеням p/M , если оставшуюся подынтегральную функцию в (88) разложить в ряд по степеням p/M и воспользоваться условием ортогональности «плоских волн». Однако при феноменологическом описании можно не рассматривать поправочных членов к локальной части тензорного взаимодействия, так как она сама является полностью релятивистской. При этом уравнение с релятивистским тензорным потенциалом запишется аналогично уравнению Шредингера:

$$(2E_q - 2\hat{H}_0) \Psi_q(r) = g^2 \left[V_S(r) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + V_T^* \left(r - \frac{2i}{M} \right) S_{1,2} \right] \Psi_q(r). \quad (90)$$

Система парциальных уравнений

Обозначим $\chi^{(S)}(\sigma)$ собственные функции операторов квадрата полного спина $S = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ и проекции спина на направление оси Z :

$$\left. \begin{aligned} S^2 \chi^{(S)}(\sigma) &= s(s+1) \chi^{(S)}(\sigma); \\ S_Z \chi^{(S)}(\sigma) &= \sigma \chi^{(S)}(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Спиноры $\chi^{(S)}(\sigma)$ образуют полную и ортогональную систему функций. При $S = 1$ функции $\chi^{(1)}(\sigma)$ имеют вид

$$\chi^{(1)}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi^{(1)}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Основываясь на парциальном разложении плоских волн (см. приложение), запишем

$$\xi(q; \mathbf{n}, r) \chi_\mu^{(S)}(\sigma) = 4\pi \sum_{jlm} i^l p_l(\text{ch } \chi_q, r) \{\Omega_{jlm}^{*(S)}(\mathbf{n}_q)\}_\sigma \{\Omega_{jlm}^{(S)}(\mathbf{n})\}_\mu, \quad (93)$$

где $\mathbf{n}_q = \mathbf{q}/q$; функции $p_l(\text{ch } \chi_q, r)$ определены согласно (П. 4). Шаровые спиноры $\Omega_{jIM}^{(S)}$ имеют обычный вид

$$\{\Omega_{jIM}^{(S)}(\mathbf{n})\}_\alpha = \langle lM - \alpha s \alpha | jM \rangle Y_{l, M-\alpha}(\mathbf{n}). \quad (94)$$

Таким образом, угловая часть парциального разложения для плоской волны со спином (93) в нашем подходе имеет тот же вид, что и в нерелятивистском формализме. Это делает удобным применение предложенного аппарата, так как можно использовать результаты, полученные в нерелятивистской квантовой механике. Продемонстрируем это на примере взаимодействия двух фермионов. Пусть их взаимодействие описывается квазипотенциалом

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \hat{V}_S(r) + \hat{V}_{SL}(r)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) + \hat{V}_T(r) S_{1,2}, \quad (95)$$

где $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ — оператор полного спина; $S_{1,2} = 6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 - 2\mathbf{S}^2$ — оператор тензорных сил. При использовании модели однобозонного обмена необходимо в качестве \hat{V}_S взять релятивистский потенциал Юкавы (61), а вместо \hat{V}_{SL} и V_T подставить соответственно выражения (85) и тензорную часть потенциала из (89)*.

Введем радиальную функцию $\omega_{l's'; ls}^j(r)$ с помощью разложения, аналогичного разложению плоской волны (93):

$$\Psi_{q\mu}^{(S)}(\mathbf{r}; \sigma) = \frac{4\pi}{r \text{sh } \chi_q} \sum_{\substack{jIM \\ s'l'}} \omega_{l's'; ls}^j(r) \{\Omega_{jIM}^{*(S)}(\mathbf{n}_q)\}_\sigma \{\Omega_{jIM}^{(S)}(\mathbf{n})\}_\mu. \quad (96)$$

Тогда трехмерное уравнение для функции $\Psi_q^{(S)}(\mathbf{r}; \sigma)$ переходит в систему радиальных уравнений, которая в общем случае имеет вид

$$(2E_q - 2\hat{H}_0^{\text{rad}}) \omega_{l's'; ls}^j(r) = \sum_{l''s''} \hat{v}_{l''s''; l's'}^j(r; E_q) \omega_{l''s''; ls}^j(r), \quad (97)$$

где

$$\hat{H}_0^{\text{rad}} = M \text{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l'(l'+1)}{2Mr(r+i/M)} \exp \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right); \quad (98)$$

$$\hat{v}_{l''s''; l's'}^j(r; E_q) = \int d\omega_n \Omega_{jIM}^{*(S')}(\mathbf{n}) \hat{V}(\mathbf{r}; E_q) \Omega_{jIM}^{(S)}(\mathbf{n}). \quad (99)$$

Матричные элементы квазипотенциала $\hat{v}^j(r; E_q)$ легко вычисляются. При этом благодаря полному соответствию релятивистских спиновых структур квазипотенциала (95) нерелятивистским спин-структурам матричные элементы (99) будут иметь формально тот же вид, что и в нерелятивистском случае. Отличие заключается лишь в явных выражениях для функций \hat{V}_S , \hat{V}_{SL} и \hat{V}_T .

* Как было указано выше, при феноменологическом описании интегральный член для тензорных сил в (89) можно отбросить.

Искомая система парциальных уравнений для двух фермионов, взаимодействующих посредством квазипотенциала (95), имеет вид * [29]:

а) при $S=0$, $l'=j$

$$\left[2E_q - 2M \operatorname{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{j(j+1)}{Mr(r+i/M)} \right] \omega_{j,0} = \hat{V}_S \omega_{j,0}; \quad (100)$$

б) при $S=1$, $l'=j$

$$\left[2E_q - 2M \operatorname{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{j(j+1)}{Mr(r+i/M)} \right] \omega_{j,1} = (\hat{V}_S + 2\hat{V}_T) \omega_{j,1}; \quad (101)$$

в) при $S=1$, $l'=j-1$

$$\begin{aligned} & \left[2E_q - 2M \operatorname{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{j(j-1)}{Mr(r+i/M)} \right] \omega_{j-1,1} = \\ & = \left[\hat{V}_S + (j-1)\hat{V}_{RL} - \frac{2(j-1)}{2j+1}\hat{V}_T \right] \omega_{j-1,1} - \frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} V_T \omega_{j+1,1}; \end{aligned} \quad (102)$$

г) при $S=1$, $l'=j+1$

$$\begin{aligned} & \left[2E_q - 2M \operatorname{ch} \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{(j+1)(j+2)}{Mr(r+i/M)} \right] \omega_{j+1,1} = \\ & = \left[\hat{V}_S - (j+2)\hat{V}_{SL} - \frac{2(j+1)}{2j+1}\hat{V}_T \right] \omega_{j+1,1} - \frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \hat{V}_T \omega_{j-1,1}. \end{aligned} \quad (103)$$

Таким образом, уравнения (100) и (101), описывающие взаимодействие в синглетном состоянии и в триплетном с $l'=l=j$, не связаны. Связаны лишь уравнения (102) и (103) для состояний с $l'=j-1$ и $l'=j+1$, имеющих одинаковую четность.

Приведем теперь решение уравнения (100) для кулоновского взаимодействия. Для этого в (29) возьмем лишь первый член при $\mu=0$:

$$V_V^{(2)}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p}; E_q) = -e^2 \frac{4M^2}{4\pi^2} = e^2 \frac{2M}{\Delta_0 - M} = e^2 \frac{4M^2}{(p-k)^2},$$

отвечающий вкладу скалярной части фотонного пропагатора. В РКП ему отвечает релятивистский кулоновский потенциал притяжения:

$$V(r) = 4M\alpha'(\operatorname{cth} \pi r M)/r. \quad (104)$$

Совершая переход к уравнению второго порядка, мы приходим по формуле (52) к потенциалу $\tilde{V}(r) = -(\alpha/E_q)(\operatorname{cth} \pi r M)/r$. При этом квазипотенциальное уравнение принимает вид

$$\left(2\hat{H}_0 - \frac{\alpha}{E_q} \frac{\operatorname{cth} \pi r M}{r} \right) \Psi_q(\mathbf{r}) = 2E_q \Psi_q(\mathbf{r}). \quad (105)$$

* Для краткости записи опустим индексы jIM у функции $\omega_{j's'; l_s}(r)$.

Используя результаты работы [8], находим, что решением этого уравнения будут функции

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \Psi_{ql}(r) p_l\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{q \cdot r}\right), \quad (106)$$

где радиальные волновые функции

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ql}(r) = \exp\left[-ix\left(l+1 - \frac{\alpha \operatorname{cth} \pi r M}{\sin 2x}\right)\right] \times \\ \times \exp(-xrM) \frac{\Gamma(irM+l+1)}{\Gamma(irM+1)} {}_2F_1\left(l+1-irM, \right. \\ \left. l+1 - \frac{\alpha \operatorname{cth} \pi r M}{\sin 2x}, 2l+2, 1 - \exp(-2ix)\right); \\ E_q = M \cos x \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

являются вещественными благодаря включению i -периодического множителя $\exp[-ix(l+1 - \alpha \operatorname{cth} \pi r M / \sin 2x)]$. Важно отметить, что этот же множитель обеспечивает конечность волновой функции в точке $X^2 = 0$ при вычислении среднего от спин-спинового взаимодействия (74) по функциям (107).

Уровни энергии находятся из требования, чтобы гипергеометрическая функция в (107) при $r \rightarrow \infty$ возрастала не быстрее полинома. В результате приходим к правилу квантования

$$\alpha / \sin 2x_q = n. \quad (108)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой, определяющей энергетический спектр, полученный при решении уравнения Логунова — Тавхелидзе с потенциалом (104) [27]:

$$|W| = 4M \sin^2\left(\frac{1}{4} \arcsin \frac{\alpha}{n}\right), \quad (109)$$

где, согласно $2E_q = 2M \cos x_q = 2M - |W|$, $|W|$ — энергия связи. Из (109) в нерелятивистском пределе $|W| \ll M$ следует формула Бора для случая равных масс:

$$W = -|W| = -\frac{\alpha^2}{2n^2} \frac{M}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

4. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ КВАРК-АНТИКВАРКОВОЙ СИСТЕМЫ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ И СПЕКТР ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ

В настоящем разделе мы применим развитый выше формализм для описания мезонов как составных частиц, являющихся связанным состоянием кварка и антикварка со спинами $1/2$.

В последнее время для объяснения отрицательных результатов многочисленных попыток найти кварки в свободном состоянии бы-

ла предложена модель с «невывлетающими» кварками. В ее потенциальной трактовке [33—35] запирающие кварков внутри частицы обеспечиваются растущей с расстоянием части потенциала (относительно решения квазипотенциального уравнения с потенциалом такого вида в РКП см. работы [36]):

$$V_{\text{запир}}(r) = \lambda r, \quad (110)$$

которая добавляется к квазирелятивистскому потенциалу Брейта — Ферми (см. разд. 2 и 3), возникающему при обмене между кварками безмассовым глюоном. Таким образом, полный потенциал взаимодействия кварка и антикварка имеет вид [33—35]:

$$V_{q\bar{q}}(r) = V_{\text{Брейт}}(r) + \lambda r + V_0. \quad (111)$$

Однако поскольку мезоны обладают конечным радиусом, то представление о запирающем кварк-потенциале как растущем по линейному закону во всем пространстве не является необходимым.

В работе [37] показано, что формализм релятивистского конфигурационного представления позволяет теоретико-групповым образом ввести потенциал, который запирает кварки внутри конечной области, имеющей радиус порядка комптоновской длины волны частицы. Чтобы описать расстояния меньше, чем комптоновская длина волны частицы, необходимо модифицировать разложение волновой функции на группе Лоренца.

Известно, что среди унитарных неприводимых представлений группы Лоренца кроме основной серии, использованной нами в разд. 2 и 3, имеются также и представления дополнительной серии (ДС). Для обеих серий собственные значения оператора Казимира группы Лоренца, имеющие согласно (64) и (65) смысл квадрата расстояния X^2 от центра системы, параметризуются следующим образом:

$$C_L^2 \rightarrow X^2 = \begin{cases} 1/M^2 + r^2, & 0 \leq r < \infty \\ & \text{для основной} \\ & \text{серии;} \\ 1/M^2 - \rho^2, & 0 < \rho \leq 1/M \\ & \text{для дополнительной} \\ & \text{серии.} \end{cases} \quad (112)$$

Поэтому переход к расстояниям меньшим, чем комптоновская длина волны $X^2 < 1/M^2$, может быть достигнут включением в разложение волновой функции дополнительной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца. При этом групповой параметр ρ приобретает смысл относительной координаты, отсчитываемой от границы сферы $X^2 = 1/M^2$ к центру, так что значению $\rho = 1/M$ отвечает начало координат $X^2 = 0$ [28].

Для дополнительной серии аналогом плоских волн основной серии (53) $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ являются функции $\zeta(\mathbf{p}, \rho) = [(p_0 - \mathbf{p}\mathbf{n})/M]^{-1-\rho M}$. Формально их (как и собственные значения оператора Казимира \hat{C}_L) можно получить из $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = [(p_0 - \mathbf{p}\mathbf{n})/M]^{-1+i r M}$ заменой $r \rightarrow i\rho$. Разложение волновой функции относительного движения двух кварков $\Psi(\mathbf{p})$ с учетом дополнительной серии принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\mathbf{p}) = & \int_0^\infty dr \int d\omega_n \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) + \\ & + \int_0^{1/M} d\rho \int d\omega_n \zeta(\mathbf{p}, \rho) \Psi(\rho); \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

$$d\omega_n = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Парциальное разложение для «плоских волн» ДС определяется следующим образом:

$$\zeta(\mathbf{p}, \rho) = \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \pi_l(\rho, \text{ch } \chi_p) P_l(\cos \theta_{\mathbf{p}\mathbf{n}}), \quad (114)$$

где радиальные функции

$$\pi_0(\rho, \text{ch } \chi_p) = \text{sh } \rho M \chi_p / (\rho M \text{ sh } \chi_p); \quad (115)$$

$$\pi_l(\rho, \text{ch } \chi_p) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \text{sh } \chi_p}} \frac{\Gamma(\rho + l + 1)}{\Gamma(\rho + 1)} P_{-1/2-l}^{-1/2-\rho}(\text{ch } \chi_p). \quad (116)$$

Формально то же можно получить из функций основной серии $p_l(r, \text{ch } \chi_p)$ [см. П.3) — (П.5)] заменой $r \rightarrow i\rho$.

Рассмотрим теперь аналог релятивистского кулоновского потенциала притяжения $V(r) = (-1/4\pi r) \text{cth } \pi r M$ на расстояниях меньших $1/M$. Совершая в (62) переход к дополнительной серии заменой $r \rightarrow i\rho$, получаем потенциал

$$V(\rho) = (1/4\pi\rho) \text{ctg } \pi\rho M, \quad (117)$$

изображенный на рис. 3. Такой потенциал запирает кварки внутри сферы с $R^2 = X^2 = 1/M^2$, но в отличие от (110) действует лишь в ограниченном объеме $\dot{X}^2 \leq 1/M^2$.

В работе [37] был найден оператор свободного гамильтониана для «плоских волн» дополнительной серии:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \zeta(\mathbf{p}, \rho) &= 2E_p \zeta(\mathbf{p}, \rho); \\ 2E_p &= 2M \text{ch } \chi_p = 2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (118)$$

Как и в случае основной серии, он является конечно-разностным оператором

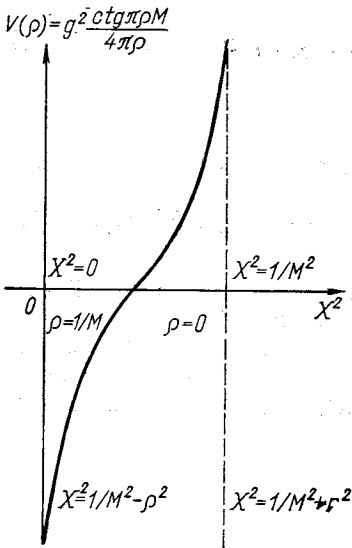
$$\hat{H}_0 = 2M \operatorname{ch} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{2M}{\rho} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{M \rho^2} \exp \left(\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \quad (119)$$

и его можно получить из (59) заменой $r \rightarrow i\rho$. Поэтому формализм парциальных уравнений, описывающих относительное движение двух частиц со спинами $1/2$, можно перенести из r -пространства в ρ -пространство с заменой $r \rightarrow i\rho$.

Следовательно, в состоянии с полным спином $S = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = 1$ движение двух кварков со спинами $1/2$ в центральном поле (117) будет описываться уравнением

$$(\hat{H}_0 + V(\rho)) \Psi_q(\rho) = 2E_q \Psi_q(\rho). \quad (120)$$

Энергия системы $2E_q$ представляет собой массу частицы, образованной связанным состоянием кварка и антикварка. Решение уравнения (120) в области $0 \leq X^2 \leq 1/(2M)^2$, где $\operatorname{ctg} \pi r M < 0$ и $M_{\text{связ}} \equiv 2E_q = 2M \cos x$, для состояний с $l = 0$ имеет вид



$$\begin{aligned} \Psi_{q, l=0}(\rho) = & (\exp(-ix) \sin x) \exp(-ix\rho M) \times \\ & \times \exp \left[x \frac{\operatorname{ctg} \pi r M}{2 \sin x} \right] {}_2F_1 \left(1 + \rho M, 1 + \right. \\ & \left. + i \frac{\operatorname{ctg} \pi r M}{2 \sin x}; 2; 2i \exp(-ix) \sin x \right). \end{aligned} \quad (121)$$

Функция $\operatorname{ctg} \pi r M$ в (117) является константой относительно операций конечно-разностного исчисления, фигурирующих в гамильтониане (119), в силу чего в уравнении (120) она играет роль эффективной константы связи.

Рис. 3. Потенциал заперания кварков $V(\rho) = (4\pi\rho)^{-1} \operatorname{ctg} \pi r M$

Требование регулярности решения при $X^2 = 0$ ($\rho = 1/M$) приводит к условию квантования $\sin 2x = x$, которое определяет два уровня энергии: один с $M_{\text{связ}} \equiv 2E_q \approx 1,398 M$, другой с $M_{\text{связ}} \equiv 2E_q = 2M$. В области $1/(2M)^2 \leq X^2 < 1/M^2$, где $\operatorname{ctg} \pi r M > 0$ и $2E_q = 2M \operatorname{ch} \chi \geq 2M$, волновая функция получается из (121) заменой $x \rightarrow i\chi$. Требование регулярности решения

в точке $X^2 = 1/M^2$ ($\rho = 0$) приводит к условию $2\text{sh } \chi \exp(-\chi) = \chi$, определяющему еще один уровень с $M_{\text{связ}} = 2E_q \approx 2,968 M$.

Таким образом, в системе кварк-антикварк, находящейся в поле потенциала (117) в состоянии с $l = 0$ и $s = 1$, возможно существование трех уровней энергии или трех возбужденных состояний одной частицы с массами (M_q — масса кварка):

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{связ}}^I &\equiv 2E_q^I = 1,39798M_q; \\ M_{\text{связ}}^{II} &\equiv 2E_q^{II} = 2M_q; \\ M_{\text{связ}}^{III} &\equiv 2E_q^{III} = 2,96750M_q. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

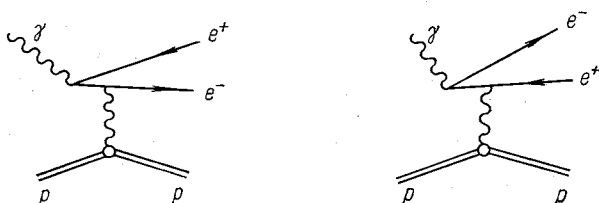
Если нас интересует, какие могут быть массы возбужденных состояний ρ -мезона, то, приравняв $M^I = M_\rho = 773 \pm 3 \text{ Мэв}$, получим для массы кварка $M_q = 553 \pm 2 \text{ Мэв}$. Из (122) следует, что массы второго и третьего радиальных возбуждений ρ -мезона будут соответственно равны: $M_{\rho'} = M^{II} = 1106 \pm 4 \text{ Мэв}$ и $M_{\rho''} = M^{III} = 1645 \pm 6 \text{ Мэв}$.

Этот результат был впервые получен в работе [37] в тот момент, когда лишь третья частица в этом спектре могла быть идентифицирована с ρ'' -мезоном с $M_{\rho''\text{экс}} \approx 1650 \text{ Мэв}$, $\Gamma_{\rho''} > 200 \text{ Мэв}$ и не было экспериментально открытого кандидата на место второго радиального возбуждения с массой $1106 \pm 4 \text{ Мэв}$. Однако спустя несколько месяцев в DESY в процессе $\gamma + p \rightarrow V + p$, $V \rightarrow e^+e^-$ был экспериментально открыт векторный мезон с $M \approx 1110 \text{ Мэв}$ и $\Gamma \approx 20 \div 30 \text{ Мэв}$ [39].

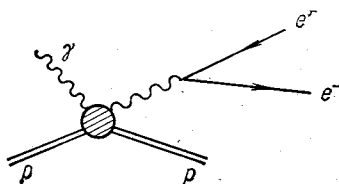
Амплитуда такого процесса представляется в виде

$$A = A_{\text{вн}}(2\gamma) + A_c + A(3\gamma) + \dots, \quad (123)$$

где амплитуда $A_{\text{вн}}(2\gamma)$ отвечает следующим бете-гайтлеровским диаграммам с двумя фотонами:



Амплитуда комптоновского рассеяния, соответствующая диаграмме



параметризуется с учетом возможных вкладов векторных мезонов в промежуточном состоянии:

$$A_c \sim i \sum_V \left(\frac{m_V^2}{\mu^2} \frac{\exp(i\varphi_V)}{m_V^2 - \mu^2 - im_V \Gamma_V} \sqrt{\frac{d\sigma^V/dt}{\gamma_V^2/4\pi}} \right); \quad (124)$$

$$\frac{d\sigma^V}{dt} = \frac{d\sigma(\gamma p \rightarrow V p)}{dt} \Big|_{t=0} \exp(b_V t),$$

где m_V — масса векторного мезона; b_V — наклон дифференциального сечения фоторождения мезона на нуклоне. Поправки от бете-гайтлеровских процессов с участием более чем двух γ -квантов малы, в силу чего

$$|A|^2 \approx |A_c|^2 + 2 \operatorname{Re}(A_c A_{\text{BH}}) + |A_{\text{BH}}(2\gamma)|^2. \quad (125)$$

Поскольку амплитуда Бете — Гайтлера $A_{\text{BH}}(2\gamma)$ намного превышает амплитуду комптоновского процесса, сигнал, свидетельствующий о наличии структуры в распределении по массе в A_c , легче детектировать от интерференционного члена $\operatorname{Re}(A_c A_{\text{BH}})$, чем от A_c^2 .

Чтобы избавиться от большого вклада бете-гайтлеровского члена $A_{\text{BH}}^2(2\gamma)$, авторы [39] использовали тот факт, что интерференционный член $\operatorname{Re}(A_c A_{\text{BH}})$ антисимметричен относительно перестановки импульсов электрона p_- и позитрона p_+ , и каждое событие в распределении на массе включали с весом $\operatorname{sign}(|p_+|\theta_+ - |p_-|\theta_-)$ [где θ_+ (θ_-) — полярный угол вылета позитрона (электрона) относительно протонного пучка], что позволило учитывать вклад лишь интерференционного члена.

В выделенном таким образом распределении по массам от интерференционного члена и был обнаружен пик при $M \approx 1110 \text{ Мэв}$ помимо вкладов от ρ -, ω - и ϕ -мезонов. Ширина этого нового векторного мезона оценивается из разрешающей способности самой аппаратуры $\Gamma_{M1110} \leq 30 \text{ Мэв}$, а $BR \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} = 4,9 \cdot 10^{-5} (\text{Гэв}/c)^2$.

Заметим, что для ρ -, ω - и ϕ -мезонов $BR \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} \approx 1 \div 4 \cdot 10^{-3} \mu\text{б} (\text{Гэв}/c)^2$ [39], т. е. на два порядка выше, чем для нового мезона.

Формулы (122) задают спектр возбужденных состояний ω -мезона, аналогичный ρ -мезонному. Так, положив $M^I = M_\omega = 783 \text{ Мэв}$, получим $M_{q^*} = 560 \text{ Мэв}$, откуда $M_\omega^{\text{II}} = M_{\omega^*} = 1120 \text{ Мэв}$; $M_\omega^{\text{III}} = M_{\omega^*} = 1662 \text{ Мэв}$.

Таким образом, согласно модели [37], в области обнаруженного в DESY нового резонанса $M = 1110 \text{ Мэв}$ должны лежать две частицы ρ' (1106 ± 4) и ω' (1120), для которых, по-видимому, должен наблюдаться эффект, аналогичный ρ — ω -смешиванию. Ширина ω' (1120), согласно оценкам по кварковой модели, должна

быть значительно меньше, чем ширина ρ' (1106 ± 4), что и объясняет относительно небольшую ширину наблюдавшейся при $M = \approx 1110$ Мэв резонансной структуры.

Остановимся теперь кратко на некоторых следствиях, возникающих при распространении нашей модели записания кварков на случай J/Ψ -частиц. Если приравнять $M^I = M_{\Psi(3095)}$, то для массы тяжелого очарованного кварка Q найдем $M_Q = 2216$ Мэв, что даст по формуле (122) следующие значения масс радиальных возбуждений Ψ -мезона: $M_{\Psi}^{II} = 4432 (\pm 4)$ Мэв; $M_{\Psi}^{III} = 6576$ Мэв.

Следовательно, при нашем потенциале записания (111) первым радиальным возбуждением Ψ -мезона будет не Ψ' (3685), а Ψ (4414). Это не удивительно, так как интерпретация Ψ' (3685) как радиального возбуждения J/Ψ (3095) обычно приводит к заключению о нерелятивистском характере движения кварков [35], тогда как наше описание является существенно релятивистским и происходит в области $X^2 < 1/M^2$, не имеющей нерелятивистского аналога. При этом Ψ' (3685) можно интерпретировать как связанное состояние двух других тяжелых кварков Q' с массой $M_{Q'} = 2635$ Мэв, а его возможными радиальными возбуждениями согласно (122) будут $M_{\Psi'}^{II} = 5270$ Мэв и $M_{\Psi'}^{III} = 7820$ Мэв.

Таким образом, в нашей модели записания кварков с помощью потенциала (117) для объяснения спектра J/Ψ -частиц необходимо введение более одного шармового кварка с разными массами, что находится в согласии с результатами работ [40], в которых обсуждается возможность увеличения числа кварков до шести и более.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами предложен трехмерный релятивистский аппарат для описания системы двух взаимодействующих фермионов, сохраняющий близость к нерелятивистскому формализму обычной квантовой механики. В качестве потенциалов были взяты ОВЕР, преобразованные к виду прямого геометрического обобщения известных нерелятивистских потенциалов. Заметим, что представление образов потенциалов в импульсном пространстве в абсолютно геометрическом виде открывает возможность для феноменологической релятивизации нерелятивистских моделей. Для этой цели в нерелятивистском выражении необходимо заменить вектор евклидовой полупередачи $\kappa_3 = (\mathbf{k} - \mathbf{p})/2$ на вектор полупередачи κ из пространства Лобачевского, а затем добавить к амплитуде кинематическое вигнеровское вращение.

Применение геометрии Лобачевского для описания взаимодействия двух частиц со спином $1/2$ позволяет ввести такую тройку ортогональных векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} и \mathbf{n} , что в их терминах релятивистская амплитуда и квазипотенциал параметризуются наиболее

экономно. Так, для обмена псевдоскалярным мезоном разложение борновской амплитуды рассеяния двух нуклонов вне энергетической поверхности по спиновым структурам содержит лишь один член, в то время как при использовании обычной евклидовой тройки ортов такое же разложение включает три слагаемых [5].

Найденная форма ОВЕР удобна для использования в квазипотенциальном уравнении Кадышевского релятивистского конфигурационного представления. При этом в качестве операторов свободного гамильтониана \hat{H}_0 и вектора импульса $\hat{\mathbf{P}}$ выступают дифференциально-разностные операторы. Найденные образы ОВЕР в координатном пространстве можно рассматривать как релятивистское обобщение потенциалов Кулона, Юкавы, спин-орбитальных и тензорных сил.

Релятивистские спин-орбитальное и тензорное взаимодействия в отличие от нерелятивистского случая не содержат сингулярных членов порядка r^{-3} . Это объясняется конечно-разностной природой операторов \hat{H}_0 и $\hat{\mathbf{P}}$, содержащих сдвиг по мнимой оси с шагом \hbar/Mc . В отличие от точечного дифференцирования, действие разностного оператора на сингулярную функцию не увеличивает порядок сингулярности. Возникает лишь новая особенность в комплексной точке, отстоящей от действительной оси на комптоновскую длину волны. Эти два различных полюса с точки зрения нерелятивистского описания «видны» как единственная сингулярность более высокого порядка. В данном смысле полунерелятивистский формализм можно назвать вырожденным. Последовательное релятивистское описание обладает более высокой «разрешающей способностью», так как снимает это вырождение.

Интересно отметить, что потенциалы с особенностями в комплексных точках чисто феноменологическим путем уже вводились ранее [41] (см., также [42]), для описания ряда характерных черт высокоэнергетического рассеяния. Таким образом, наш формализм как бы подводит основание под использование таких потенциалов.

Построенный формализм парциальных уравнений во многих отношениях аналогичен нерелятивистскому. Это связано с тем, что группа Лоренца содержит в качестве подгруппы группу вращений и, следовательно, имеет среди своих генераторов оператор орбитального момента L . Мы надеемся, что развитый здесь формализм будет удобен для решения задач релятивистской ядерной физики и для построения релятивистских составных моделей элементарных частиц.

Авторы выражают свою благодарность В. Г. Кадышевскому за интерес к работе и плодотворные обсуждения. Авторы благодарят также П. С. Исаева, В. А. Матвеева, В. А. Мещерякова, Р. М. Мир-Касимова, А. Ф. Пашкова, Л. И. Пономарева, В. Н. Старикова и Н. А. Черникова за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Соотношения полноты и ортогональности для функций (53) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_p \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}_1, r_1) &= \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1); \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \xi^*(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) \xi(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}, r) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/M^2}; \\ \mathbf{r} &= r \cdot \mathbf{n}; \quad d\mathbf{r} = r^2 dr d\omega_{\mathbf{n}} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

Парциальное разложение для плоских волн (53) будет

$$\xi(\mathbf{p}; \mathbf{n}, r) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l p_l(\text{ch } \chi_p, r) P_l((\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{p}|), \quad (\text{II.2})$$

где радиальные функции

$$p_l(\text{ch } \chi_p, r) = (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \text{sh } \chi_p}} \frac{\Gamma(irM + l + 1)}{\Gamma(irM + 1)} P_{-1/2-l}^{\text{ch } \chi_p}(\text{ch } \chi_p); \quad (\text{II.3})$$

$$p_l(\text{ch } \chi_p, r) = i^l \frac{\Gamma(irM + 1)}{\Gamma(-irM + l + 1)} (\text{sh } \chi_p)^l \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi_p} \right)^l p_0(\text{ch } \chi_p, r) \quad (\text{II.4})$$

$$p_0(\text{ch } \chi_p, r) = \sin rM \chi_p / rM \text{sh } \chi_p \quad (\text{II.5})$$

в нерелятивистском пределе $M \gg 1$, $\chi_p \ll 1$ переходят в сферические функции Бесселя

$$p_l(\text{ch } \chi_p, r) \rightarrow j_l(pr). \quad (\text{II.6})$$

Компоненты конечно-разностного оператора импульса $\hat{\mathbf{p}} = -i \nabla_{\text{разн.}}$ удовлетворяющего (60), записываются в сферических координатах следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_1 &= -\sin \theta \cos \varphi \left[M \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right) - \hat{H}_0 \right] - \\ &- i \left(\frac{\cos \theta \cdot \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right); \\ \hat{p}_2 &= -\sin \theta \cdot \sin \varphi \left[M \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right) - \hat{H}_0 \right] - \\ &- i \left(\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right); \\ \hat{p}_3 &= -\cos \theta \left[M \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right) - \hat{H}_0 \right] + i \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \exp\left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. «Nuovo cimento», 1963, v. 29, p. 380.
2. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Препринты ОИЯИ Е-3498, 1967; Р2-3900, 1968; Боголюбов П. Н. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 1, с. 144; Фаустов Р. Н. «Докл. АН СССР», 1964, т. 154, с. 1329; «Nucl. Phys.», 1966, v. 75, p. 669; «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 3, с. 238; Логунов А. А.

- и др. «ТМФ», 1971, т. 6, с. 157; Саврин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталеv О. А. «ЭЧАЯ», 1976, т. 7, вып. 1, с. 24; Гарсеванишвили В. Р. и др. «ТМФ», 1975, т. 23, с. 310; «ТМФ», 1975, т. 25, с. 37; Голоскоков и др. «ТМФ», 1975, т. 24, с. 24; Квинихидзе А. Н. и др. «ЭЧАЯ», 1977, т. 8, вып. 3, с. 478.
3. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. В кн.: Проблемы теоретической физики (Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием). М., «Наука», 1969. В [3] имеется подробный список литературы по квазипотенциальному подходу.
 4. Kadyshesky V. G. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 6, p. 125.
 5. Kadyshesky V. G., Matveev M. D. «Nuovo cimento», 1968, v. 55A, p. 275.
 6. Кадышевский В. Г. «ЖЭТФ», 1964, т. 46, с. 654; 1964, т. 46, с. 872.
 7. Kadyshesky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. «Nuovo cimento», 1968, v. 55A, p. 233.
 8. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. В кн.: «ЭЧАЯ», 1972, т. 2. М., Атомиздат, 1972, с. 635.
 9. Babikov V. V. «Nucl. Phys.», 1966, v. 76, p. 665.
 10. Скачков Н. Б. «ТМФ», 1975, т. 22, с. 213.
 11. Фок В. А. Теория пространства, времени, тяготения. М., Гостехиздат, 1955.
 12. Черников Н. А. «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, с. 530; «Научные доклады высшей школы», 1958, т. 2, с. 158; 1959, т. 3, с. 151; Препринт ОИЯИ P2-7231, 1961; «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 3, с. 773.
 13. Wick G. C. «Ann. Phys.», 1962, v. 18, p. 65; Смородинский Я. А. «ЖЭТФ», 1962, т. 43, с. 2218.
 14. Черников Н. А. «ЖЭТФ», 1957, т. 33, с. 541; В кн.: Лекции в Международной школе теоретической физики при ОИЯИ. Т. 3. Дубна, 1964, с. 151; Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968.
 15. Широков Ю. М. «Докл. АН СССР», 1954, т. 99, с. 737.
 16. Чешков А. А., Широков Ю. М. «ЖЭТФ», 1963, т. 44, с. 1982.
 17. Moussa P., Stora R. Analysis of Scattering and Decay. New York—London—Paris, Gordon and Breach, 1968.
 18. Скачков Н. Б. Препринт ОИЯИ E2-7333, 1973.
 19. Широков Ю. М. «ЖЭТФ», 1951, т. 21, с. 748; 1957, т. 33, с. 1198.
 20. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959; Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
 21. Скачков Н. Б. Препринт ОИЯИ E2-7459, Дубна, 1973.
 22. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
 23. Шапиро И. С. «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, с. 647; «ЖЭТФ», 1962, т. 43, с. 1727.
 24. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. «ЖЭТФ», 1964, т. 46, с. 1793.
 25. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
 26. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 5, 7. М., Физматгиз, 1962.
 27. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Фриман М. «Ядерная физика». 1969, т. 9, с. 646.
 28. Скачков Н. Б. «ТМФ», 1975, т. 25, с. 313.
 29. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. Препринты ОИЯИ E2-9763, E2-10260, P2-10320, Дубна, 1976.
 30. Заставенко Л. Г., Чжоу Гуан-чжао. «ЖЭТФ», 1958, т. 35, с. 1417; 1960, т. 38 с. 134.
 31. Попов В. С. «ЖЭТФ», 1959, т. 37, с. 1116.
 32. Мавродиев С. Ш., Скачков Н. Б. «ТМФ», 1975, т. 23, с. 32.

33. Appelquist T., Politzer H. D. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 34, p. 43; De Rujula A., Glashow S. L. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 34, p. 46; Harrington B. L., Park S. Y., Yildiz A. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 168.
34. Schnitzer H. J. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 35, p. 1540; «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 74; Kang J. S., Schnitzer H. J. «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 841, 2791.
35. Barbieri R., Kögerler R., Kunszt Z., Catto R. Ref. TH. CERN-2036, June 1975; Eichten e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 369; Gunion J. F., Willey R. S. «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 174; Gunion J. F., Li L. F. «Phys. Rev. D», 1975, v. 11, p. 3583.
36. Jung K. S., Chung K. H., Willey R. S. «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 1999; Amirkhanov I. V., Grusha G. V., Mir-Kasimov R. M. Preprint JINR E2-9767; E2-9868, Dubna, 1976.
37. Скачков Н. Б. «Письма в ЖЭТФ», 1976, т. 23, с. 713; Препринт ОИЯИ E2-9748, Дубна, 1976.
38. Ström S. «Arkiv Eysik», 1968, Bd. 38, nr. 22, S. 373.
39. Bartalucci S. e.a. Preprint DESY-76/43, 1976; Preprint LNF-77/1 (P) Frascati, 1976.
40. Harari G. «Phys. Lett. B», 1975, v. 57, p. 265; De Rujula A., Georgi H., Glashow S. L. Harvard preprint, 1975.
41. Paliev A., Rosendorf S. «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, p. 1045.
42. Филиппов А. Т. Препринты ОИЯИ E2-6936, Дубна, 1973; E2-7563, Дубна, 1974; E2-7929, Дубна, 1974.