

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

И. В. Волович

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва

В. А. Загребнов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В. П. Фролов

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва

Настоящая работа посвящена последовательному изложению квантовой теории безмассовых полей в искривленном асимптотически-плоском пространстве — времени, понятие и основные свойства которого подробно обсуждаются. На основе динамического принципа Швингера с помощью конформной техники Пенроуза развита схема квантования и получено явное выражение для S -матрицы и потоков энергии импульса частиц. Рассматривается применение развитого формализма к вопросу о рождении элементарных частиц дыр в гравитационном поле черных дыр.

The main principles of the massless quantum fields in the curved asymptotically flat space-time are given in detail. The quantization procedure is based on the Schwinger dynamical principle and the Penrose conformal technique. The explicit expressions for S -matrix and energy-momentum fluxes are obtained. The application of the developed formalism to the problem of elementary particles creation in the gravitational field of the black holes is considered.

ВВЕДЕНИЕ

Задача построения квантовой теории поля в искривленном пространстве — времени, еще недавно не вызывавшая особого интереса вне узкого круга специалистов, стала необычайно актуальной в последние годы. Исследования квантового рождения частиц в гравитационном поле на ранних этапах развития Вселенной и в особенности недавнее открытие возможного явления испарения малых черных дыр привлекли внимание к этой проблеме не только гравитационистов, но и широкого круга физиков, занимающихся теорией поля, физикой элементарных частиц и квантовой статистикой.

В настоящем обзоре систематически изложена квантовая теория в важном для применения случае, когда гравитационное поле, порождаемое ограниченным распределением вещества, убы-

вает на бесконечности (пространство — время является асимптотически-плоским). Подобная теория для безмассовых полей в настоящее время достигла известной степени завершенности и привлечение геометрических методов (конформных преобразований Пенроуза) позволило сформулировать ее в изящной и простой форме. Подчеркнем, однако, что эта простота явилась результатом длительного и глубокого анализа проблемы, в разработке которой участвовали такие известные теоретики, как Фок, Сакс, Арновитт, Дезер, Мизнер, Пенроуз, Хокинг и др.

При написании обзора мы старались (иногда в ущерб математической строгости) в первую очередь прояснить физическую сущность затрагиваемых вопросов. С этой целью в первых двух разделах на простейшем примере скалярного поля в пространстве Минковского проиллюстрированы различные (не очень, быть может, привычные) понятия, используемые в дальнейшем, такие, как световые бесконечности \mathcal{I}^+ и \mathcal{I}^- , пространство Пенроуза и т. п. При чтении обзора читатель, как мы надеемся, сможет оценить то упрощение, которое достигается в результате постоянного использования конформной техники при рассмотрении как классической, так и квантовой теории безмассовых полей.

По существу проблема, рассматриваемая в обзоре, может быть объяснена на простом примере теории поля ϕ с квадратичным действием:

$$W[\phi] = \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi;$$

здесь $g^{\mu\nu}(x)$ — заданные функции (метрика). Задача состоит в том, чтобы проквантовать эту теорию, т. е. найти канонические перестановочные соотношения и определить вакуумное состояние и понятие частицы для этого поля. В общем случае, когда пространственно-временное многообразие M топологически отличается от обычного пространства Минковского, при квантовании возникают трудности, связанные с этим отличием. Однако даже в том случае, когда M топологически эквивалентно пространству Минковского, при построении квантовой теории поля неизбежно возникает целый ряд вопросов.

При «наивном» подходе на первый взгляд казалось бы естественным отнести к этой теории, как к обычной теории в плоском пространстве с выбранными некоторым образом координатами x^μ . По обычным правилам строится гамильтониан как генератор трансляций вдоль координаты x^0 , и вакуум естественно было бы определить как низшее состояние этого гамильтониана. Однако при другом выборе координат x^μ мы получили бы другую, вообще говоря, неэквивалентную теорию, приводящую к другим физическим следствиям. Таким образом, мы приходим к необходимости использования инвариантного геометрического языка.

Обычно вакуумное состояние и понятие частицы однозначно определяются в области, где внешнее поле выключено. Для этого достаточно, чтобы частицы, двигающиеся в этом поле, с течением времени уходили в область, где этим внешним полем можно пренебречь. Это означает, что в рассматриваемом случае действия W метрика g должна стремиться к метрике плоского пространства вдоль траекторий частиц, т. е. световых геодезических. Пространство — время с метрикой, удовлетворяющей этому условию, называют асимптотически-плоским пространством. Это важное понятие подробно рассмотрено в первых четырех разделах обзора. Поскольку при удалении частицы на бесконечность гравитационное поле выключается, естественно было бы ожидать, что при этом восстанавливается симметрия группы Пуанкаре. Однако этого не происходит. Оказывается, что в силу медленного спада гравитационного поля на бесконечности действует более широкая группа асимптотических симметрий. Причина появления этой группы и свойства асимптотических симметрий обсуждаются в разд. 5, 6.

При квантовании в гравитационном поле мы использовали динамический принцип Швингера, позволивший нам получить коммутационные соотношения и динамические операторы не только на пространственно-подобных, но и на светоподобных поверхностях, в частности на асимптотической бесконечности \mathcal{I}^\pm (разд. 8). Определение асимптотического вакуума (разд. 9) и общее выражение для S -матрицы, полученное нами в асимптотически-плоском пространстве — времени (разд. 10), используются в разделе 11 в конкретной ситуации для вычисления спектра энергии и потока частиц, рождаемых гравитационным полем черных дыр. Изложение некоторых результатов основано на исследованиях авторов и публикуется впервые.

Авторы выражают признательность М. А. Маркову за интерес к работе и ценные советы. Мы считаем также приятным долгом поблагодарить Э. А. Тагирова за прочтение рукописи, ряд полезных критических замечаний и поддержку.

Авторы признательны А. С. Арвильскому за многочисленные стимулирующие обсуждения в процессе работы над обзором.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Мы начнем с того, что рассмотрим свойства решений уравнения

$$\square \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

в обычном плоском пространстве — времени, но с помощью методов, которые допускают обобщение на случай искривленного

пространства — времени. Этот раздел представляет собой как бы эскиз теории, которая затем будет развита для полей с различными спинами в асимптотически-плоском пространстве — времени.

Задача об излучении. Для уравнения (1) можно ставить различные задачи. Например, можно задавать значения поля φ и его производной на некоторой пространственно-подобной поверхности (*задачи Коши*) или задавать φ на характеристической поверхности (*задача Гурса*). Нам же будет удобно характеризовать поле φ в духе теории рассеяния его асимптотиками на бесконечности.

Вместо декартовых координат x^μ введем $r = |x|$ и x^A , где x^A ($A = 2, 3$) — координаты на поверхности единичной сферы, например, сферические θ, φ , и положим $u = x^0 - r$ (запаздывающее время). Метрика $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx)^2$ примет вид $ds^2 = du^2 + 2du dr - r^2 dl^2$, где dl — элемент длины на поверхности сферы; в сферических координатах $dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

Нас будет интересовать поведение решения φ уравнения (1) при фиксированных u, x^A и $r \rightarrow \infty$ (в этом случае будем говорить, что точка x стремится на \mathcal{I}^+). В приложении 1 показано, что если поле φ в начальный момент времени локализовано в пространстве, то существует

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ u, x^A = \text{const}}} r\varphi(u, r, x^A) = \Phi_{\text{out}}(u, x^A). \quad (2)$$

Функцию Φ_{out} будем называть образом φ на \mathcal{I}^+ (см. приложение 1); φ определяется своим образом однозначно. Если вместо u ввести координату $v = x^0 + r$ (опережающее время), то будет существовать

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ v, x^A = \text{const}}} r\varphi(v, r, x^A) = \Phi_{\text{in}}(v, x^A) \quad (3)$$

— образ φ на \mathcal{I}^- , который также однозначно характеризует соответствующее решение φ .

Обратим внимание на то, что точка x стремится на \mathcal{I}^+ вдоль образующей конуса, т. е. вдоль световой геодезической, а r является аффинным параметром вдоль этой геодезической. Таким образом, высказанные выше утверждения можно переформулировать на геометрическом языке следующим образом: безмассовое скалярное поле в плоском пространстве — времени однозначно определяется своими асимптотиками вдоль световых геодезических при стремлении к бесконечности аффинного параметра r .

Отсюда, в частности, следует, что всякая величина, зависящая от φ , например, вектор энергии — импульса, может быть выражена через Φ_{out} .

Для массивных полей, по-видимому, нужно рассматривать асимптотическое поведение вдоль времениподобных кривых [1, 2].

Пространство Пенроуза. Удобно сделать конформное преобразование и перейти от пространства — времени Минковского M с метрикой $g_{\mu\nu}$ [обозначим эту пару (M, g)] к новому «нефизическому» пространству — времени (будем называть его *пространством Пенроуза*) \hat{M} с метрикой $\hat{g}_{\mu\nu}$ так, чтобы \hat{M} было компактным многообразием с границей, которая представляет «бесконечность» M . Тогда вместо рассмотрения пределов $r \rightarrow \infty$, можно будет рассматривать поведение поля в окрестности границы.

Введем координату $\hat{r} = 1/r$. Очевидно, что $r \rightarrow \infty$ соответствует $\hat{r} \rightarrow 0$. Обозначим \mathcal{Y}^+ гиперповерхность, задаваемую уравнением $\hat{r} = 0$ (u, x^A — координаты на \mathcal{Y}^+). Поскольку x^A пробегают двумерную сферу S^2 , а u — вещественную прямую R^1 , то \mathcal{Y}^+ , разумеется, имеет топологию $R^1 \times S^2$. Эта гиперповерхность в исходных координатах соответствует фиксированным u и x^A и пределу $r \rightarrow \infty$, т. е. стремлению на бесконечность в M вдоль световых лучей, направленных в будущее, и называется поэтому «световой бесконечностью будущего». Метрика $ds^2 = = \hat{r}^{-2} [\hat{r}^2 du^2 - 2dudr - dl^2]$ на \mathcal{Y}^+ сингулярна, однако если мы сделаем конформное преобразование и перейдем к метрике $\hat{d}s = \Omega ds$, где $\Omega = \hat{r}$, то $\hat{d}s^2 = \hat{r}^2 du^2 - 2dud\hat{r} - dl^2$ в точке $\hat{r} = 0$ будет уже регулярной. В частности, на \mathcal{Y}^+ выполняются следующие равенства:

$$\hat{g}_{00} = \hat{g}_{0A} = 0; \hat{g}_{01} = 1; \partial \hat{r} \hat{g}_{00} = \partial \hat{r} \hat{g}_{0A} = \partial \hat{r} \hat{g}_{01} = 0. \quad (4)$$

Аналогично, используя опережающее время $v = x^0 + r$, вводится световая бесконечность прошлого \mathcal{Y}^- . Для того чтобы описать сразу и \mathcal{Y}^+ , и \mathcal{Y}^- , удобно перейти к координатам u, v, x^A . Метрика примет вид $ds^2 = dudv - (u - v)^2 dl^2/4$, $u \leq v$.

Введем новые координаты p, q так, что $v = \operatorname{tg} p$, $u = = \operatorname{tg} q$ ($-\pi/2 \leq q \leq p \leq \pi/2$). Тогда точки на бесконечности имеют конечные координаты $p = \pi/2$ и $q = -\pi/2$ (рис. 1). Естественно, при этих значениях p, q метрика ds теряет смысл но если перейти к конформной метрике $\hat{d}s = \Omega ds$, где $\Omega = = [(1 + u)(1 + v)]^{-1/2}$, то ds будет уже вполне регулярна: $ds^2 = = dpdq - \sin^2(p - q) dl^2/4$. Таким образом, мы получили многообразии \hat{M} , параметризованное координатами p, q, x^A с границей $q = -\pi/2$ (\mathcal{Y}^-) и $p = \pi/2$ (\mathcal{Y}^+). Внутренность $\hat{M}/(\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-)$ конформна M . Пространство \hat{M} обладает свойствами: 1) на границе $\partial \hat{M} = \mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-$ имеем $\Omega = 0$, внутри $\Omega > 0$; 2) каждая световая геодезическая в \hat{M} имеет две концевые точки на $\partial \hat{M}$. В дальнейшем для искривленного пространства — времени существо-

вание пространства \hat{M} , конформного данному пространству — времени M , со свойствами 1 и 2 будет принято за определение асимптотически-плоского пространства.

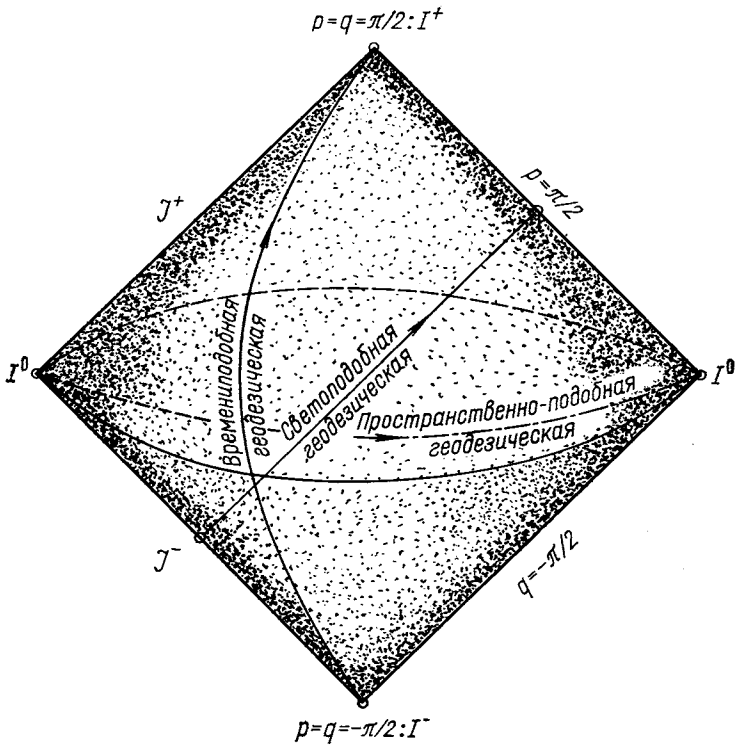


Рис. 1.

Спинорный формализм в плоском пространстве — времени. Спиноры, как известно, необходимы для описания полей с полудельным спином. Но оказывается, что введение спинорного представления полезно и при работе с тензорными полями [3,7]. Соответствие между спинорными и тензорными величинами устанавливается на основе известного локального изоморфизма группы Лоренца L_4^+ и группы $SL(2, C)$ и производится с помощью переводящих символов Инфельда — Ван-дер-Вардена $\sigma_{\mu}^{A\dot{B}}$, которые при определенном выборе базисов в спинорном и тензорном пространствах совпадают с матрицами Паули $\sigma_{\mu}^{a\dot{B}}$ [8]. Например, тензору электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, обладающему свойствами $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$,

$\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ (черта означает комплексное сопряжение), сопоставляется симметричный спинор Φ_{AB} , связанный с $F_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$F_{\mu\nu}\sigma_{AB}^{\mu}\sigma_{CD}^{\nu} = \Phi_{AC}\varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AC}\bar{\Phi}_{BD}, \quad \|\varepsilon_{AB}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0$$

([] — символ антисимметризации) записываются в виде

$$\partial^{A\dot{B}}\Phi_{AC} = 0, \quad \partial^{A\dot{B}} = \sigma_{\mu}^{A\dot{B}}\partial^{\mu}.$$

Напомним, что вообще любое безмассовое поле спина s ($s > 0$) описывается симметричным спинором $\Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$, подчиняющимся уравнению

$$\partial^{A_1\dot{B}}\Phi_{A_1 \dots A_{2s}} = 0.$$

Асимптотическое вырождение. Проиллюстрируем на примере электромагнитного поля важное свойство асимптотического вырождения безмассовых полей. Рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое изолированным источником и опишем скорость убывания напряженности этого поля при удалении от источника вдоль световой геодезической γ . Удобно ввести спиновый базис o^A, ι^A связанный с γ следующим образом. Пусть ι^{μ} — касательный к γ вектор, тогда o^A — соответствующий ему спинор, т. е. $\iota^{\mu}\sigma_{\mu}^{A\dot{B}} = o^A\bar{o}^{\dot{B}}$, а ι^A — «ортогональный» спинор, нормированный условием $\iota_A o^A = 1$. Разложим электромагнитное поле Φ_{AB} по этому базису:

$$\Phi_{AB} = \Phi_0 \iota_A \iota_B + \Phi_1 o_{(A} \iota_{B)} + \Phi_2 o_A o_B. \tag{5}$$

Здесь $\Phi_0 = \Phi_{AB} o^A o^B$; $\Phi_1 = \Phi_{AB} \iota^A o^B$; $\Phi_2 = \Phi_{AB} \iota^A \iota^B$; () — символ симметризации. Если r — аффинный параметр вдоль геодезической γ (можно считать, что это просто длина радиус-вектора в сферических координатах), то при $r \rightarrow \infty$ имеем следующее асимптотическое поведение: $\Phi_0 \sim r^{-3}$, $\Phi_1 \sim r^{-2}$ (кулоновская часть), $\Phi_2 \sim r^{-1}$ (излучение). В тензорных обозначениях имеем так называемое свойство асимптотического вырождения [58]

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(2)}/r + F_{\mu\nu}^{(1)}/r^2 + F_{\mu\nu}^{(0)}/r^3 + O(1/r^4).$$

Обратим внимание на то, что в разложении (5) Φ_0 и Φ_2 являются коэффициентами перед парами одинаковых спиноров, а Φ_1 — перед парой различных спиноров. Соответствующими алгебраическими свойствами обладают величины $F_{\mu\nu}^{(i)}$ (см. об этом подробнее в разд. 3).

Действие группы Пуанкаре на \mathcal{Y}^\pm . На \mathcal{Y}^\pm естественным образом возникает некоторое нелинейное представление группы Пуанкаре, действующей в M . Более того, представление группы Пуанкаре на \mathcal{Y}^\pm оказывается изоморфным самой группе. Опишем этот изоморфизм более подробно.

Преобразованию декартовых координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$ соответствует преобразование координат u, r, θ, φ в $u', r', \theta', \varphi'$, которое сложным образом зависит от u, r, θ и φ . При $r = \infty$ эта зависимость упрощается и можно показать [9], что

$$\left. \begin{aligned} \lim \theta' &= H(\theta, \varphi); \quad \lim \varphi' = I(\theta, \varphi); \\ \lim u' &= K^{-1}(u + a_0 + a_1 \sin \theta \cos \varphi + a_2 \sin \theta \sin \varphi + a_3 \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь предел берется при $r \rightarrow \infty$ и фиксированных u, θ, φ . Функции H, I, K в (6) такие, что преобразование $\theta' = H(\theta, \varphi), \varphi' = I(\theta, \varphi)$ является конформным преобразованием на сфере

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = K^2(\theta', \varphi') (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2). \quad (7)$$

Это конформное преобразование можно представить в виде

$$\zeta' = (a\zeta + b)/(c\zeta + d), \quad (8)$$

где $\zeta = \exp(i\varphi) \operatorname{ctg} \theta/2$; $\zeta' = \exp(i\varphi') \operatorname{ctg} \theta'/2$; a, b, c, d — комплексные параметры, которые удовлетворяют условию $ad - bc = \pm 1$. Закон композиции при конформных преобразованиях совпадает с правилами умножения матриц. Таким образом, устанавливается связь с группой $SL(2, C)$, откуда и следует изоморфизм группы Пуанкаре, действующей в M , и ее представления на \mathcal{Y}^\pm .

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Процедура квантования классического поля φ состоит, как известно, из двух частей: 1) построения канонических коммутационных соотношений (операторной алгебры) и 2) выбора и интерпретации состояний в гильбертовом пространстве, в котором реализуется эта операторная алгебра (в частности, выбор вакуума).

Каноническое квантование. Напомним вкратце основные формулы канонического квантования скалярного поля φ с действием

$$W = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \alpha R \varphi^2). \quad (9)$$

Здесь R — кривизна, α — некоторое число. Хотя в плоском случае $R = 0$, при варьировании по $g_{\mu\nu}$ член $\alpha R \varphi^2$ дает ненулевой вклад; например, метрический тензор энергии — импульса $T_{\mu\nu} = -\delta W / \delta g^{\mu\nu}$ совпадает с так называемым «исправленным» тензором

энергии — импульса [10, 11]. Мы будем пользоваться ковариантными обозначениями. Метрика $g_{\mu\nu}$ — плоская, но координаты могут быть криволинейными. В декартовых координатах, очевидно, $\sqrt{-g} = 1$ и ковариантные производные совпадают с обычными.

Выберем пространственно-подобную поверхность Коши Σ , задаваемую уравнением $x^0 = \text{const}$ и определим на ней импульс $\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = \sqrt{-g} g^{0\mu} \varphi_{,\mu}$. Гамильтониан имеет вид

$$H = \int_{x^0=\text{const}} (\pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}) d^3x = \int_{x^0=\text{const}} d^3x \left[\frac{1}{g^{00}} \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{-g}} - \pi g^{0k} \varphi_{,k} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{(g^{00})^2} g^{0k} g^{0l} \varphi_{,k} \varphi_{,l} - \frac{1}{2} \alpha R \varphi^2 \right], \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Зададим канонические коммутационные соотношения на Σ : $[\varphi(x), \pi(y)] = i \delta^{(3)}(x, y)$; остальные коммутаторы равны нулю. Здесь δ -функция определяется соотношением

$$\int_{x^0=y^0=\text{const}} d^3y \delta^{(3)}(x, y) f(y) = f(x).$$

Тензор энергии — импульса имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = (2\alpha + 1) \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \\ &- (1 + 4\alpha) g_{\mu\nu} \varphi_{,\rho} g^{0\sigma} \varphi_{,\sigma} / 2 + 2\alpha \varphi \varphi_{,\mu\nu}. \end{aligned} \quad (10)$$

Операторы энергии — импульса $P_\mu = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} d\Sigma^\nu$ и тензора момента количества движения (в декартовых координатах) $M_{\mu\nu} = \int_{\Sigma} (x_\mu T_{\lambda\nu} - x_\nu T_{\lambda\mu}) d\Sigma^\lambda$ можно записать в виде

$$P[\xi] = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} \xi^\mu d\Sigma^\nu, \quad (11)$$

где ξ^μ — векторные поля Киллинга, соответствующие сдвигам и вращениям; $d\Sigma^\nu$ — элемент поверхности Σ ; если уравнение для Σ есть $x^0 = \text{const}$, то $d\Sigma^\nu = \sqrt{-g} g^{0\nu} d^3x$.

Коммутатор полей (в декартовых координатах) равен

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \exp(-ikx) \delta(k^2) \varepsilon(k^0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon(x^0 - y^0) \delta((x - y)^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Операторы на \mathcal{J}^\pm . Из (12) переходом к пределу легко получаются коммутационные соотношения для $\Phi_{\text{out, in}}$:

$$\left. \begin{aligned} [\Phi_{\text{out}}(u, x^A), \Phi_{\text{out}}(u', x'^A)] &= -ie(u - u') \delta(x^A - x'^A)/2; \\ [\Phi_{\text{in}}(v, x^A), \Phi_{\text{in}}(v', x'^A)] &= -ie(v - v') \delta(x^A - x'^A)/2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь $\delta(x^A - x'^A)$ — δ -функция на сфере, в сферических координатах $\delta(x^A - x'^A) = [\sin \theta]^{-1} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$.

Динамические переменные на \mathcal{J}^\pm имеют тот же вид, что и в классической теории, но нуждаются в доопределении, поскольку становятся операторами.

Данные на \mathcal{J}^\pm полностью определяют решение уравнения (1) во всем пространстве — времени, поэтому квантование можно выполнить, задав на \mathcal{J}^+ или \mathcal{J}^- коммутационные соотношения (13). Используя уравнения движения, можно проверить, что это будет эквивалентно каноническому квантованию. Отметим, что на световой гиперповерхности \mathcal{J}^\pm в отличие от случая пространственно-подобной гиперповерхности значения поля в различных точках не являются динамически-независимыми и коммутатор (13) отличен от нуля, если аргументы u полей лежат на одной световой образующей, т. е. могут быть связаны причинным (световым) сигналом.

Поскольку между φ и Φ_{out} существенно взаимнооднозначное соответствие, все величины, зависящие от φ , можно выразить через Φ_{out} . В частности, используя независимость от Σ выражения $\mathbf{P}[\xi] = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_{\mu\nu} \xi^\mu d\Sigma^\nu$ для перехода к интегрированию по светоподобной гиперповерхности и учитывая асимптотику

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} \sim [(2\alpha + 1) \dot{\Phi}^2 + 2\alpha \Phi \ddot{\Phi}] l_\mu l_\nu / r^2 + O(1/r^3) \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

где l_μ — касательный вектор к световой геодезической с аффинным параметром r , а $\dot{\Phi} = \partial_u \Phi$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu &= \int du \sin \theta d\theta d\varphi n_\mu(\theta, \varphi) [(2\alpha + 1) \dot{\Phi}^2 + 2\alpha \Phi \ddot{\Phi}], \quad (14) \\ n_\mu(\theta, \varphi) &= (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \end{aligned}$$

Определение вакуума. Вакуум, как и любое другое состояние, определяется на гиперповерхности Коши Σ и будет обозначаться $|0, \Sigma\rangle$. В плоском случае для свободного поля вакуум, как известно, от Σ не зависит и обычно определяется условием $\mathbf{P}_\mu |0\rangle = 0$, где \mathbf{P}_μ — генераторы сдвигов группы Пуанкаре, или, что эквивалентно, условием $\mathbf{a}_\alpha |0\rangle = 0$, где \mathbf{a}_α — оператор уничтожения, соответствующий отрицательно-частотным решениям относительно декартова времени x^0 .

Отметим, что если ввести на \mathcal{U} операторы рождения и уничтожения в соответствии с положительной и отрицательной частотностью относительно запаздывающего (опережающего) времени u (v):

$$\Phi_{\text{out}}(u, x^A) = \int [\exp(-i\omega u) a(\omega, x^A) + \exp(i\omega u) a^*(\omega, x^A)] d\omega,$$

то вакуум $|0, \text{out}\rangle$ (аналогично $|0, \text{in}\rangle$) можно определить также соотношением $a_{\text{out}}(\omega, x^A) |0, \text{out}\rangle = 0$. Можно убедиться, что $|0\rangle = |0, \text{in}\rangle = |0, \text{out}\rangle$. Поэтому вместо операции нормального упорядочения относительно $|0\rangle$, которая обычно используется для придания операторного смысла выражениям типа (14), можно использовать эквивалентную ей операцию нормального упорядочения относительно in- и out-вакуумов.

Для обобщения на случай искривленного пространства — времени более поучительно напомнить определение вакуума для поля ϕ , которое взаимодействует с внешним классическим источником $g(x)$, сосредоточенным в ограниченной области пространства — времени и описываемым уравнением $\square \phi = g$. Пусть $g(x) = 0$ при $x^0 < x_1^0$ (область \mathcal{O}_1) и при $x^0 > x_2^0$ (область \mathcal{O}_2). Если гиперповерхность Σ лежит в области \mathcal{O}_1 или \mathcal{O}_2 , то там ϕ подчиняется уравнению $\square \phi = 0$ и совпадает с соответствующими свободными полями ϕ_{in} и ϕ_{out} , с помощью которых обычным образом определяются in- и out-вакуумы. Эти вакуумы, вообще говоря, отличаются друг от друга, что соответствует рождению частиц источником g .

3. ПОНЯТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Наиболее близким по своим геометрическим и физическим свойствам к плоскому пространству — времени является класс пространств, гравитационное поле которых создается изолированными источниками, причем так, что при удалении от источников оно спадает и метрика становится «почти плоской». Такие пространства называются асимптотически-плоскими (точное определение будет дано ниже).

Хотя на первый взгляд понятие асимптотически-плоского пространства — времени кажется довольно ясным, точное определение и анализ относящихся сюда проблем далеко не простое дело. Для этого потребовались усилия многих физиков, таких, как Фок [12], Траутман [13], Бонди [14], Сакс [9, 15], Арновитт, Дезер и Мизнер [16], Ньюмен, Пенроуз [3, 17] и др., однако до сих пор еще не все вопросы получили полное решение. Трудности связаны, как обычно, в общей теории относительности с общекоординатной инвариантностью и с нелинейностью (т. е., по существу, с принципом эквивалентности) теории.

Что такое асимптотически-плоское пространство — время? Попробуем уточнить приведенное выше интуитивное определение. Прежде всего, что означает «изолированные источники» и в каком смысле надо понимать «удаление» от них? Точнее говоря, для того чтобы описать, в каком смысле метрика $g_{\mu\nu}$ стремится к плоской $\eta_{\mu\nu}$, нужно указать:

1) в каком смысле понимается удаление от источника на бесконечность (например, можно удаляться вдоль светоподобных, времениподобных или пространственно-подобных геодезических или каким-либо другим способом);

2) как понимать малость отклонения тензора $g_{\mu\nu}$ от $\eta_{\mu\nu}$ («малое» отклонение в одних координатах может оказаться «большим» в других);

3) как быстро метрика $g_{\mu\nu}$ должна приближаться к плоской (см. обсуждение этого вопроса в разд. 6).

Определение асимптотически-плоского пространства — это, по существу, вопрос соглашения и удобства. Для того чтобы такое определение было разумным, оно должно включать гравитационное поле, создаваемое изолированным источником. Эта задача была проанализирована Бонди [14] и Саксом [9, 19]. В их работах важную роль играют особые светоподобные

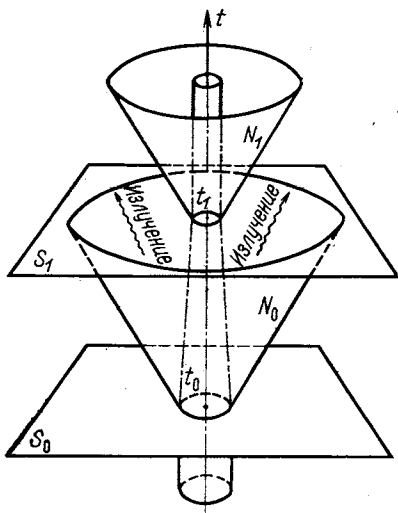


Рис. 2.

системы отсчета. Поясним, каким образом возникают такие системы отсчета, следующим примером. Пусть мы хотим измерить некоторые интегральные характеристики источника гравитационного поля (например, массу) до излучения (в момент t_0) и после излучения (после t_1) с помощью измерений на бесконечности. Тогда для этой цели непригодны пространственно-подобные гиперповерхности S_0 и S_1 (рис. 2), поскольку всё излучение их пересекает и удаленный наблюдатель будет мерить суммарную массу источника плюс излучения. Нужно использовать светоподобные гиперповерхности N_0 и N_1 .

В работах [3, 9, 14, 19] было показано, что метрика гравитационного поля, создаваемого изолированным источником, приводится к виду [ср. с (28)]:

$$ds^2 = r^2 A dr^2 - 2B_R dx^k dr + r^2 C_{kl} dx^k dx^l \quad (r > r_0), \quad (15)$$

где A, B_k, C_{kl} — функции x^k, r , достаточное число раз дифференцируемые в окрестности гиперповерхности \mathcal{J}^\pm (при $r \rightarrow \infty$). Если предположить, что детерминант этой метрики не обращается в нуль, то очевидно, что ее можно представить в виде $ds^2 = \Omega^2 d\hat{s}^2$, где $\Omega = r^{-1}$ и $d\hat{s}$ регулярна на \mathcal{J}^\pm (см. выше плоский случай).

Определение асимптотически-плоского пространства — времени. Сформулируем вначале точное определение *асимптотически-простого* (по Пенроузу) пространства — времени [3, 6, 57].

Пространство — время M с метрикой $g_{\mu\nu}$ называется асимптотически-простым, если существует другое «нефизическое» пространство — время \hat{M} с границей $\partial\hat{M} = \mathcal{J}$, так что: 1) M конформно $\hat{M} \setminus \partial\hat{M}$; 2) существуют гладкая вещественная функция $\Omega \geq 0$ на \hat{M} и гладкая псевдориманова метрика $\hat{g}_{\mu\nu}$ на \hat{M} , такая, что $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ на M ; 3) $\Omega > 0$ в $\hat{M} \setminus \partial\hat{M}$ и $\Omega = 0$ на $\partial\hat{M}$, $\nabla_\mu \Omega|_{\partial\hat{M}} \neq 0$; 4) каждая световая геодезическая в M имеет две конечные точки на $\partial\hat{M}$. Отсюда следует [6], что \hat{M} имеет топологию R^4 . Тройку $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$ будем называть *пространством Пенроуза*, соответствующим пространству — времени (M, g) . Можно показать, что условиями 1—4 пространство Пенроуза $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$ определяется однозначно с точностью до конформного преобразования $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega) \rightarrow (\hat{M}, \omega^2 \hat{g}, \omega \Omega)$, где $\omega > 0$ в \hat{M} .

Приведенное определение не охватывает, вообще говоря, случай, когда пространство — время имеет особенности или горизонты событий, в частности при наличии черных дыр.

Чтобы охватить этот случай, дадим такое определение. Пространство — время M называется *асимптотически-простым в слабом смысле* [6], если существует асимптотически-простое пространство \hat{M}' , такое, что для некоторого открытого подмножества K множества \hat{M}' (с $\partial\hat{M}' \subset K$) область $\hat{M}' \cap K$ изометрична подмножеству M . Это означает, что асимптотически-простое в слабом смысле пространство — время содержит конформную «внешнюю» бесконечность, но не исключается и наличие «внутренних» бесконечностей.

Подчеркнем, что определение асимптотически-простого пространства — времени приспособлено для безмассовых полей и неудобно для работы с массивными полями. Попытки ввести аналогичное понятие для массивных полей сделаны в [1, 2].

В дальнейшем ограничимся случаем, когда в некоторой окрестности \mathcal{J} тензор энергии — импульса материи обращается в нуль. Соответствующее асимптотически-простое в слабом смысле пространство — время будем называть *асимптотически-плоским пространством*. Отметим, что многие приведенные ниже утвержде-

ния справедливы и в общем случае асимптотически-простого в слабом смысле пространства. Поверхность \mathcal{J} будет временноподобной, пространственно-подобной или светоподобной в зависимости от того, положительна ли космологическая константа Λ , отрицательна или равна нулю. В дальнейшем считается $\Lambda = 0$.

Свойства асимптотически-плоского пространства. Асимптотическое вырождение. Отметим следующие свойства асимптотически-плоского пространства: 1) \mathcal{J} -изотропная гиперповерхность; 2) гиперповерхность \mathcal{J} состоит из двух непересекающихся частей \mathcal{J}^+ (световая бесконечность будущего) и \mathcal{J}^- (световая бесконечность прошлого), каждая из которых имеет топологию $R^1 \times S^2$; 3) тензор кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$ на \mathcal{J} , т. е. пространство — время (M, g) , действительно плоское на бесконечности; 4) асимптотическое вырождение. Важное свойство асимптотического вырождения гравитационного поля опишем более подробно. Свободное гравитационное поле описывается тензором Вейля $C_{\mu\nu\lambda\rho}$, который совпадает в пустоте с тензором $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ и обладает свойствами: $C_{\mu\nu\lambda\rho} = C_{[\lambda\rho][\mu\nu]}$; $C_{\mu[\nu\lambda\rho]} = 0$; $C_{\nu\mu\lambda}^{\mu} = 0$. Аналогично электромагнитному случаю (см. разд. 1) спинорную форму этого тензора можно записать следующим образом:

$$C_{\mu\nu\lambda\rho} \sigma^{\mu}_{AA} \sigma^{\nu}_{BB} \sigma^{\lambda}_{CC} \sigma^{\rho}_{DD} = \Psi_{ABCD} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \bar{\Psi}_{ABCD},$$

где Ψ_{ABCD} — симметричный спинор, называемый спинором Вейля. Вследствие симметрии Ψ_{ABCD} его можно представить в виде $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — различные, вообще говоря, спиноры, единственные с точностью до множителя; они могут совпадать. Перечисляя все возможные случаи, приходим к классификации Петрова [3,20]:

$$\Psi_{ABCD} = \begin{cases} \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}, & \text{тип I;} \\ \alpha_{(A} \alpha_B \gamma_C \delta_{D)}, & \text{тип II;} \\ \alpha_{(A} \alpha_B \beta_C \beta_{D)}, & \text{тип D;} \\ \alpha_{(A} \alpha_B \alpha_C \beta_{D)}, & \text{тип III;} \\ \alpha_A \alpha_B \alpha_C \alpha_{D)}, & \text{тип N.} \end{cases}$$

Каждый из спиноров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяет не вектор, поскольку они заданы лишь с точностью до множителя, а некоторое световое направление в данной точке пространства — времени. Эти направления называются *главными световыми направлениями гравитационного поля*.

Если выбран базис в спиновом пространстве, состоящий из спиноров σ^A, ι^A , то компоненты Ψ_{ABCD} относительно этого базиса

принято обозначать следующим образом: $\Psi_0 = \Psi_{ABCD} o^A o^B o^C o^D$;

$$\Psi_1 = \Psi_{ABCD} o^A o^B o^C l^D; \quad \Psi_2 = \Psi_{ABCD} o^A o^B l^C l^D;$$

$$\Psi_3 = \Psi_{ABCD} o^A l^B l^C l^D; \quad \Psi_4 = \Psi_{ABCD} l^A l^B l^C l^D.$$

Пять комплексных величин Ψ_i соответствуют десяти вещественным компонентам $C_{\mu\nu\lambda\rho}$. Спинор Ψ_{ABCD} теперь представляется в виде

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_0 l^A l^B l^C l^D - 4\Psi_1 l^A l^B l^C o^D + \\ + 6\Psi_2 l^A l^B o^C o^D - 4\Psi_3 l^A o^B o^C o^D + \Psi_4 o^A o^B o^C o^D.$$

Пусть дана световая геодезическая γ в M . Выберем o^A так, чтобы соответствующий вектор был касательным к γ , и пусть r — аффинный параметр вдоль γ [можно выбрать его так, чтобы при приближении к $\mathcal{I}^r \sim \Omega^{-1}$ (см. разд. 4)]. Тогда можно доказать, что $\Psi_i \sim r^{-(5-i)}$, $i = 0, \dots, 4$, при $r \rightarrow \infty$. Поэтому для тензора Вейля имеем

$$C_{\mu\nu\lambda\rho} = N_{\mu\nu\lambda\rho}/r + \text{III}_{\mu\nu\lambda\rho}/r^2 + \text{II}_{\mu\nu\lambda\rho}/r^3 + I_{\mu\nu\lambda\rho}/r^4 + O(1/r^5),$$

где $N_{\mu\nu\lambda\rho}, \dots$ означает тензор, имеющий соответствующий тип по Петрову [19]. Именно этим соотношением и определяется свойство асимптотического вырождения гравитационного поля. В случае, когда гравитационное излучение отсутствует, первые два члена разложения обращаются в нуль.

Примеры асимптотически-плоских пространств. Класс метрик, попадающих под определение асимптотически-плоских, весьма широк и включает, в частности, такие популярные метрики, как Шварцшильда, Рейсснера — Нордстрема, Вайдья, Керра и др. В качестве примера на рис. 3 изображена диаграмма Пенроуза для максимально продолженной метрики Шварцшильда

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 dl^2 \quad (16)$$

в координатах $u = \arctg U$, $v = \arctg V$, где координаты Крускала U, V связаны с r и t (при $r > 2m$) соотношениями $V/U = -\exp(-t/2m)$, $VU = \exp(r/2m) \times (1 - r/2m)$.

В координатах U, V метрика (16) имеет вид

$$ds^2 = f^2 dU dV - r^2 dl^2,$$

где $f^2 = (32m^3/r) \exp(-r/2m)$.

4. ГЕОМЕТРИЯ СВЕТОПОДОБНЫХ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ

В этом разделе рассмотрен вопрос о выборе координат в окрестности светоподобных бесконечностей \mathcal{I}^\pm . Хотя приведенное в предыдущем разделе определение асимптотически-плоского пространства сформулировано в не зависящей от выбора координат

форме, оказывается удобным при конкретных вычислениях использовать определенную систему координат. Подобные вычисления существенно упрощаются, если в качестве координат в окрестности \mathcal{J}^\pm выбирают *конформные координаты Бонди*, в которых геометрические характеристики поверхностей \mathcal{J}^\pm описываются наиболее простым образом [24].

Геометрия светоподобных поверхностей. Поверхности \mathcal{J}^\pm в асимптотически-плоском пространстве являются светоподобными поверхностями. Мы приведем некоторые сведения, касающиеся

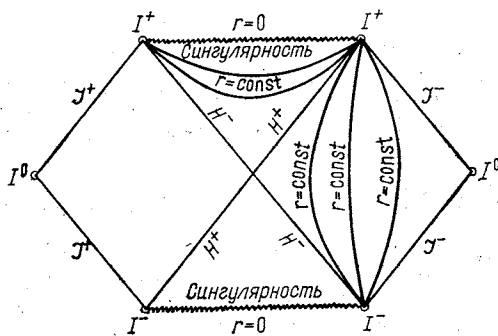


Рис. 3.

геометрических свойств светоподобных поверхностей, которые постоянно будут использоваться в дальнейшем.

Пусть имеется семейство поверхностей Σ_c , описываемых уравнением $U(x) = c$. Подобные поверхности называют светоподобными, если векторное поле $l^\mu = g^{\mu\nu} U_{,\nu}$ нормалей к ним является светоподобным $l^\mu l_\mu = 0$. Так как касательные векторы ξ^μ к поверхности Σ_c определяются условием $l_\mu \xi^\mu = 0$, то очевидно, что вектор нормали l^μ одновременно является вектором, касательным к Σ_c . Поэтому на светоподобной поверхности всегда имеется ненулевой вектор l^μ , такой, что $l^\mu \xi_\mu = 0$ для произвольного касательного к Σ_c , и, следовательно, метрика на светоподобной поверхности Σ_c , индуцированная ее вложением в пространство — время, является вырожденной. Многие существенные отличия геометрических свойств светоподобных поверхностей от свойств пространственноподобных поверхностей связаны именно с этим обстоятельством.

Интегральные кривые $\gamma: x^\mu = x^\mu(r)$ векторного поля $l^\mu = g^{\mu\nu} U_{,\nu}$, определяемые уравнением

$$dx^\mu(r)/dr = l^\mu, \quad (17)$$

являются световыми геодезическими, причем r есть аффинный параметр вдоль этих геодезических *. Важным свойством интегральных кривых γ является то, что если подобная кривая проходит через точку поверхности Σ_c , то она целиком лежит на этой поверхности. Светоподобные кривые γ принято называть *образующими* поверхности Σ_c . Через каждую неособую точку p ($l^\mu(p) \neq 0$) поверхности Σ_c проходит одна и только одна образующая. Важными геометрическими характеристиками светоподобной поверхности Σ_c являются *расширение* ρ и *сдвиг* σ ее образующих **:

$$\rho = -l^\mu_{;\mu}/2; \quad \sigma = [l_{(\alpha;\beta)}l^{\alpha;\beta}/2 - (l^\alpha_{;\alpha})^2/4]^{1/2}. \quad (18)$$

Хотя приведенное выражение для ρ и σ содержит дифференцирование вдоль направления, выводящего с поверхности Σ_c , можно показать, что значения инвариантов ρ и σ не зависят от выбора продолжения светоподобного векторного поля l^μ вне Σ_c , т. е. полностью определяются полем l^μ на Σ_c . Простейшими примерами светоподобных поверхностей в пространстве Минковского являются световой конус и светоподобная гиперплоскость. Обе они являются бессдвиговыми ($\sigma = 0$) и $\rho = -1/r \neq 0$ для конуса и $\rho = 0$ для гиперплоскости.

Координаты на \mathcal{J}^\pm . Если в пространстве или на поверхности задана конгруэнция *** (световых) геодезических, то можно следующим образом ввести координатную систему, связанную с данной конгруэнцией. Пусть координаты x^A «нумеруют» кривые конгруэнции (т. е. x^A постоянны вдоль геодезической из конгруэнции и для двух разных геодезических координаты x^A различны). Координаты (u, x^A) произвольной точки p определяются координатами x^A геодезической, проходящей через точку p , и значением u в точке p аффинного параметра вдоль этой геодезической ****. Нетрудно видеть, что координаты, связанные с конгруэнцией, определены неоднозначно. Общий произвол в выборе подобных коорди-

* Напомним, что кривая $\gamma : x^\mu = x^\mu(r)$ называется геодезической, если касательный вектор dx^μ/dr переносится вдоль нее параллельно, т. е. $D(dx^\mu/dr)/Dr = \alpha(r) dx^\mu/dr$. Параметр r на кривой γ называется аффинным, если при выборе этого параметра множитель α обращается в нуль. Аффинный параметр вдоль кривой определяется с точностью до преобразования $r \rightarrow \tilde{r} = ar + b$.

** Более подробное обсуждение свойств светоподобных поверхностей и геометрического смысла оптических скаляров ρ и σ , а также доказательство приведенных утверждений можно найти, например, в работах [19, 21—23].

*** Т. е. такое семейство кривых, что через каждую точку пространства или поверхности проходит только одна кривая.

**** Заметим, что вообще говоря, не всегда возможно ввести гладкие координаты, связанные конгруэнцией на всем многообразии. Однако это всегда можно сделать локально в окрестности любой точки. Таким образом, с данной конгруэнцией связан целый набор координатных систем (карт).

нат описывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x^A \rightarrow \tilde{x}^A = f^A(x^A) & \quad (\text{изменение «нумерации»} \\ & \quad \text{геодезических}); \\ u \rightarrow \tilde{u} = B(x^A)(u + A(x^A)) & \quad (\text{изменение выбора} \\ & \quad \text{аффинного параметра} \\ & \quad \text{вдоль геодезических}). \end{aligned} \right\} (19)$$

В пространстве Пенроуза $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$ поверхности \mathcal{Y}^\pm , определяемые уравнением $\Omega = 0$, являются светоподобными. Векторное поле $\hat{n}^\mu = \hat{g}^{\mu\nu}\Omega_{,\nu}$ является касательным к образующим поверхностей \mathcal{Y}^\pm . Если обозначить u аффинный параметр вдоль образующих, то на поверхностях \mathcal{Y}^\pm можно ввести координаты (u, x^A) ($A = 2, 3$), связанные с конгруэнцией образующих. Так как \mathcal{Y}^\pm имеют топологию $R^1 \times S^2$, то сечения этих поверхностей $u = \text{const}$ диффеоморфны сфере S^2 и поэтому в качестве координат x^A можно выбрать любые координаты на сфере например, сферические θ и φ или комплексные стереографические координаты $(\zeta, \bar{\zeta})$, $\zeta = \text{ctg}(\theta/2) \exp[(i\varphi)/2]$. Произвол в выборе указанных координат (u, x^2, x^3) на \mathcal{Y}^+ описывается формулой (19).

Метрика асимптотически-плоского пространства в окрестности \mathcal{Y}^\pm . Координаты Бонди. Используем теперь введенные выше координаты (u, x^2, x^3) на \mathcal{Y}^\pm , чтобы построить координаты в окрестности \mathcal{Y}^\pm в пространстве Пенроуза. Для этого мы, во-первых, продолжим координаты (u, x^2, x^3) с поверхности \mathcal{Y}^\pm на некоторую ее окрестность и, во-вторых, дополним эти координаты четвертой координатной функцией r , выбрав ее таким образом, чтобы коэффициенты метрической формы \hat{g} имели в окрестности \mathcal{Y}^\pm наиболее простой вид.

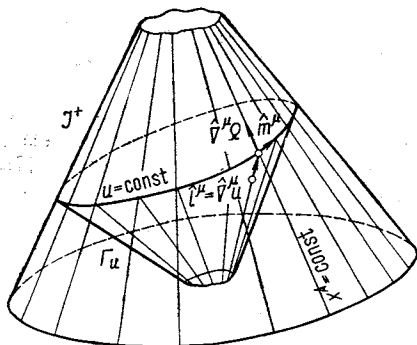


Рис. 4.

Выберем произвольное сечение $u = u_0$ на \mathcal{Y}^\pm . Через каждую точку этого двумерного пространственно-подобного сечения проходят две световые геодезические, пересекающие его ортогонально, одной из которых является образующая \mathcal{Y}^\pm , а другая не лежит на \mathcal{Y}^\pm (рис. 4). Световые геодезические, ортогональные сечению $u = u_0$ и не лежащие в \mathcal{Y}^\pm , являются образующими некоторой светоподобной поверхности, которую мы обозначим Γ_{u_0} . Для того чтобы определить координаты точки p , лежащей в окрестности

\mathcal{Y}^\pm , найдем светоподобную поверхность Γ_u , проходящую через эту точку, и пусть γ_u — образующая Γ_u , проходящая через p . Мы припишем точке p координаты (u, x^2, x^3) , если эта образующая пересекает \mathcal{Y}^\pm в точке с координатами (u, x^2, x^3) . В качестве четвертой координаты \hat{r} выберем конформный множитель Пенроуза *

$$\hat{r} = \Omega. \tag{20}$$

Из процедуры построения координат (\hat{r}, u, x^2, x^3) следует, что эти координаты определяются однозначно, если только выбрать координаты (u, x^2, x^3) на поверхности \mathcal{Y}^\pm .

Условие постоянства координат x^A вдоль образующих поверхностей Γ_u и светоподобность Γ_u позволяют заключить, что

$$\hat{g}^{0A} \equiv \hat{g}^{\mu\nu} U_{,\mu} x^A_{,\nu} = 0; \quad \hat{g}^{00} \equiv \hat{g}^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu} = 0,$$

и поэтому в координатах (\hat{r}, u, x^2, x^3) метрика \hat{g} имеет вид

$$\|\hat{g}^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & \hat{g}^{01} & 0 \\ \hat{g}^{01} & \hat{g}^{11} & \hat{g}^{1A} \\ 0 & \hat{g}^{1A} & \hat{g}^{AB} \end{pmatrix}; \quad \|g_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} \hat{g}_{00} & \hat{g}_{01} & \hat{g}_{0A} \\ \hat{g}_{01} & 0 & 0 \\ \hat{g}_{0A} & 0 & \hat{g}_{AB} \end{pmatrix}; \tag{21}$$

где $\hat{g}^{AB} \hat{g}_{BC} = \delta^A_C$; $\hat{g}_{01} = (\hat{g}^{01})^{-1}$; $\det \hat{g}_{\mu\nu} = -\hat{g}_{01}^2 \det \hat{g}_{AB}$.

Выражение для метрики (21) можно упростить, если вспомнить, что существует неоднозначность в выборе пространства Пенроуза, соответствующего исходному физическому пространству — времени. Действительно, нетрудно проверить, что данному пространству — времени наряду с пространством Пенроуза $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$ соответствует целый класс пространств $(\hat{M}, \omega^2 \hat{g}, \omega \Omega)$, где $\omega > 0$ — произвольная ограниченная гладкая функция на \hat{M} . В частности, выбором ω (т. е. выбором определенного представителя из данного класса пространства Пенроуза) можно добиться, чтобы

$$\det \|\hat{g}_{AB}\| = h(x^A), \tag{22}$$

где $h(x^A)$ — определенная фиксированная функция, выбор которой диктуется соображениями удобства.

На поверхности \mathcal{Y}^\pm , которая в используемой нами системе координат определяется уравнением $\hat{r} = 0$:

$$0 = \hat{g}^{\mu\nu} \Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu} |_{\mathcal{Y}^\pm} = \hat{g}^{11} |_{\mathcal{Y}^\pm};$$

$$\hat{g}^{1A} |_{\mathcal{Y}^\pm} = \hat{g}^{\mu\nu} \Omega_{,\mu} x^A_{,\nu} = 0,$$

* Так как на \mathcal{Y}^\pm $\Omega_{,\mu} \neq 0$ и $\hat{g}^{\mu\nu} \Omega_{,\mu} U_{,\nu} \neq 0$, то можно показать, что, по крайней мере, в некоторой окрестности \mathcal{Y}^\pm координатные функции \hat{r}, u, x^2, x^3 независимы.

и поэтому на \mathcal{Y}^\pm

$$\begin{aligned} \|\hat{g}^{\mu\nu}\| |_{\mathcal{Y}^\pm} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{g}^{01} & 0 \\ \hat{g}^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}^{AB} \end{pmatrix}; \\ \|\hat{g}_{\mu\nu}\| |_{\mathcal{Y}^\pm} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{g}_{01} & 0 \\ \hat{g}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}_{AB} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Более полную информацию о поведении коэффициентов метрической формы \hat{g} в окрестности \mathcal{Y}^\pm можно получить, если учесть, что метрика \hat{g} удовлетворяет в этой окрестности уравнениям Эйнштейна в пустоте. Это означает, что метрика \hat{g} удовлетворяет в окрестности \mathcal{Y}^\pm уравнению (см. приложение 2):

$$\hat{r}^2 \hat{G}_{\alpha\beta} - 2\hat{r} \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \hat{r} + (2\hat{r} \hat{\nabla}^\rho \hat{\nabla}_\rho \hat{r} - 3\hat{\nabla}_\rho \hat{r} \hat{\nabla}^\rho \hat{r}) \hat{g}_{\alpha\beta} = 0.$$

При условии регулярности метрики \hat{g} и используемом нами выборе конформного множителя Пенроуза $\Omega = \hat{r}$ имеют место следующие равенства [24]:

$$\hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \hat{r} |_{\mathcal{Y}^\pm} = 0; \quad \hat{\nabla}_\alpha \hat{r} \hat{\nabla}^\beta \hat{r} |_{\mathcal{Y}^\pm} = 0. \quad (24)$$

Первое равенство означает, что поверхность \mathcal{Y}^\pm является бессдвиговой ($\sigma = 0$) и расширение ее образующих равно нулю ($\rho = 0$). Оба эти свойства являются следствием соотношения (22) или, что то же, следствием использованного выше выбора конформного множителя Ω . Равенства (24) позволяют также показать, что с помощью преобразований координат (19) можно добиться, чтобы на поверхности \mathcal{Y}^\pm выполнялись соотношения [ср. с (4)]:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00} = \hat{g}_{0A} = 0; \quad \hat{g}_{01} = 1; \\ \partial_{\hat{r}} \hat{g}_{00} = \partial_{\hat{r}} \hat{g}_{0A} = \partial_{\hat{r}} \hat{g}_{01} = 0; \\ \hat{g}_{AB} = g_{AB}; \quad g_{AB} dx^A dx^B = -dl^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где dl^2 — элемент длины на поверхности сферы единичного радиуса. В комплексных стереографических координатах

$$dl^2 = d\zeta d\bar{\zeta} / P_0^2; \quad P_0 = (1 + \zeta\bar{\zeta})/2. \quad (26)$$

Введенная выше координатная система получила название конформных координат Бонди [24]. Группа совместных преобразований координат и конформного множителя Ω , оставляющая усло-

вия (25) и (26) на \mathcal{J}^\pm инвариантными, имеет вид [ср. с (6) — (8)]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}' &= K(u + \alpha(\zeta, \bar{\zeta})); \\ \zeta' &= (a\zeta + b)/(c\zeta + d), \quad ab - bc = \pm 1; \\ \hat{r}' &= K\hat{r}; \quad \Omega' = K\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ — произвольная гладкая функция на сфере и

$$K = K(\zeta, \bar{\zeta}) = (1 + \zeta\bar{\zeta}) [(a\zeta + b)(\bar{a}\bar{\zeta} + \bar{b}) + (c\zeta + d)(\bar{c}\bar{\zeta} + \bar{d})]^{-1}.$$

Дополнительная геометрическая структура, возникающая на поверхности \mathcal{J}^\pm в случае, когда ее образующие не обладают сдвигом и расширением, получила название *сильной геометрии* [5]. Поэтому группа преобразований от одних конформных координат Бонди к другим совпадает с группой преобразований, сохраняющих сильную геометрию на \mathcal{J}^\pm .

В конформных координатах Бонди регулярная метрика \hat{g} в окрестности \mathcal{J}^\pm представляется в виде

$$ds^2 = V\hat{r}^2 du^2 + 2(1 + B\hat{r}^2) du d\hat{r} + 2\hat{r}^2 U_A du dx^A + g_{AB} dx^A dx^B,$$

где $V = 1 - 2M\hat{r} + O(\hat{r}^2)$; $B = O(1)$; $U_A = O(1)$; $h_{AB} = g_{AB} + O(\hat{r})$. Поэтому при больших значениях $r = \hat{r}^{-1}$ метрика g асимптотически-плоского пространства имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 \hat{ds}^2 = V du^2 - 2(1 + B/r^2) du dr + \\ &+ 2U_A du dx^A + r^2 h_{AB} dx^A dx^B, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$V = 1 - 2M/r + O(r^{-2}); \quad B = O(1); \quad U_A = O(1); \quad h_{AB} = g_{AB} + O(r^{-1}). \quad (29)$$

Коэффициенты метрики в этом выражении удовлетворяют условию равномерной гладкости, т. е. разложение (29) можно дифференцировать, причем

$$\partial_r O(r^{-N}) = O(r^{-(N+1)}); \quad \partial_u O(r^{-N}) = \partial_A O(r^{-N}) = O(r^{-N}). \quad (30)$$

Требование существования координатной системы (u, r, x^2, x^3) , в которой асимптотическое поведение метрики имеет вид (28) — (29), может быть положено в основу определения асимптотически-плоского пространства — времени [9].

5. ГРУППА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ

В асимптотически-плоском пространстве при удалении от источников гравитационное поле уменьшается и метрика пространства — времени приближается к метрике пространства Минковского. Поэтому естественно ожидать, что асимптотически-плоское

пространство обладает некоторой группой приближенных симметрий, такой что при удалении от источников преобразования из этой группы все меньше и меньше отличаются от точных симметрий. Подобную группу называют *группой асимптотических симметрий*. Важным и, на первый взгляд, неожиданным обстоятельством является то, что в общем случае (при наличии гравитационного излучения) эта группа не совпадает с группой Пуанкаре, а значительно шире, хотя и содержит ее в качестве подгруппы. В этом разделе мы дадим точное определение группы асимптотических симметрий. Структура, свойства и представления этой группы, а также причины ее отличия от группы Пуанкаре будут рассмотрены в следующем разделе.

Группа изометрий пространства — времени и законы сохранения. Группа преобразований $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\mu)$, действующая на пространственно-временном многообразии (M, g) и сохраняющая расстояние между произвольными парами точек, называется группой изометрии пространства — времени. Векторы поля $\xi^\mu(x)$, порождающие бесконечно малое преобразование изометрии $x \xrightarrow{\mu} \tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x)$, удовлетворяют следующему уравнению (уравнению Киллинга):

$$2\xi_{(\mu; \nu)} \equiv (\xi_{\mu; \nu} + \xi_{\nu; \mu}) = 0; \quad \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu})/\varepsilon = 0, \quad (31)$$

где $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ — производная Ли поля $g_{\mu\nu}$ вдоль векторного поля ξ^μ . Если задана метрика g , то множество векторных полей Киллинга ξ^α [решений уравнения (31)] образует алгебру Ли, соответствующую группе изометрий пространства — времени. В случае, когда вместо соотношения (31) выполняется уравнение

$$\xi_{(\mu; \nu)} = \xi(x) g_{\mu\nu}, \quad (32)$$

говорят, что пространство — время допускает группу *конформных изометрий*. Преобразования этой группы сохраняют углы между произвольной парой векторов в точке. Функцию $\xi(x)$ в соотношении (32) можно найти, домножив обе части (32) на $g^{\mu\nu}$:

$$\xi(x) = \xi^\mu_{; \mu} / 4.$$

Если ξ^μ является векторным полем Киллинга в пространстве (M, g) , то в пространстве $(M, \hat{g} = \Omega^2 g)$ оно является *конформным векторным полем Киллинга*, т. е. удовлетворяет уравнению вида (32):

$$\hat{\nabla}^{(\nu} \xi^{\mu)} = \Omega, \alpha \xi^\alpha \hat{g}^{\mu\nu} / \Omega. \quad (33)$$

Это утверждение легко доказывается, если воспользоваться выражением (П.11) для $\hat{\nabla}_\nu \xi^\mu$.

Если пространство — время обладает m -параметрической группой изометрий, то в соответствии с теоремой Нётер имеется m сохраняющихся величин (инвариантов):

$$P_a = P[\xi_{(a)}] = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} \xi_{(a)}^{\mu} d\Sigma^{\nu}, \quad (34)$$

где $\xi_{(a)}^{\mu}$ ($a = 1, \dots, m$) — линейно-независимые векторные поля Киллинга; $T_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии — импульса. Величины P_a сохраняются (не зависят от выбора полной поверхности Коши Σ) и в том случае, когда $\xi_{(a)}^{\mu}$ являются конформными векторными полями Киллинга, если $T_{\mu}^{\mu} = 0$.

Приближенная симметрия, слабое гравитационное поле и группа Пуанкаре. Группа Пуанкаре является максимальной (десятипараметрической) группой изометрии плоского пространства — времени. Наличие даже слабого (всегда присутствующего) гравитационного поля приводит к тому, что группа Пуанкаре, играющая такую важную роль в физике элементарных частиц, строго говоря, перестает быть группой точных изометрий. Чтобы оценить соответствующую степень нарушения симметрии, можно поступить следующим образом. При движении пробной частицы в пространстве Минковского сохраняется ее импульс $P = \xi_{\mu} u^{\mu}$, где $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ и ξ^{μ} — соответствующее векторное поле Киллинга. При наличии слабого гравитационного поля скорость изменения импульса P при движении частицы по геодезической ($u^{\nu} u_{;\nu}^{\mu} = 0$)

$$dP/d\tau = u^{\nu} (\xi_{\mu} u^{\mu})_{;\nu} = u^{\mu} u^{\nu} \xi_{\mu;\nu}.$$

Поэтому характерное собственное время, в течение которого наличие гравитационного поля приведет к изменению импульса ΔP порядка величины самого импульса, есть $T \sim u^{\mu} \xi_{\mu} / u^{\mu} u^{\nu} \xi_{(\mu;\nu)}$. Пусть L — расстояние, проходимое частицей за это время. Если L много больше размеров l лаборатории, то наблюдаемое нарушение симметрии мало: $l/L \ll 1$. В асимптотически-плоском пространстве величина L растет при удалении от источника гравитационного поля и поэтому нарушение точной симметрии, присущей плоскому пространству — времени, становится все меньше и меньше. Для точного определения понятия асимптотической симметрии удобно, как обычно, начать с соответствующего рассмотрения в пространстве Пенроуза.

Асимптотические симметрии и группа конформных изометрий на \mathcal{I}^{\pm} . Наличие асимптотических симметрий означает, что в физическом пространстве — времени должны существовать векторные поля ξ^{μ} , такие, что при удалении от источников гравитационного поля соотношения (31) выполняются со все большей точностью. Поэтому в соответствующем пространстве Пенроуза ($\hat{M}, \hat{g}, \hat{\Omega}$) эти

векторные поля в окрестности \mathcal{Y}^\pm должны удовлетворять уравнению (33), и можно дать следующее определение. Диффеоморфизм пространства Пенроуза, порождаемый векторным полем ξ^μ , удовлетворяющим на \mathcal{Y}^\pm уравнению [24]

$$[\hat{\nabla}^{(\nu}\xi^{\mu)} - \Omega_{,\alpha}\xi^\alpha\hat{g}^{\mu\nu}/\Omega] |_{\mathcal{Y}^\pm} = 0, \tag{35}$$

называется преобразованием *асимптотической симметрии*. Если сравнить (35) с (33), то видно, что подобные преобразования являются *конформными изометриями* на поверхности \mathcal{Y}^\pm . Непосредственным следствием уравнения (35) и регулярности ξ^μ и $\hat{g}^{\mu\nu}$ на поверхности \mathcal{Y}^\pm является обращение в нуль на \mathcal{Y}^\pm величины $\Omega_{,\alpha}\xi^\alpha$, и, следовательно, векторное поле ξ^α является касательным к поверхности \mathcal{Y}^\pm . В конформных координатах Бонди $\Omega = \hat{r}$ и $0 = \Omega_{,\alpha}\xi^\alpha |_{\mathcal{Y}^\pm} = \xi^1 |_{\mathcal{Y}^\pm}$. Раскрывая на \mathcal{Y}^\pm неопределенность $\Omega_{,\alpha}\xi^\alpha/\Omega$, имеем $\Omega_{,\alpha}\xi^\alpha/\Omega = \xi^1/\hat{r} = \partial_{\hat{r}}\xi^1$, поэтому уравнение (35) можно записать в виде

$$(\hat{g}^{\mu\rho}\xi_{,\rho}^\nu + \hat{g}^{\nu\rho}\xi_{,\rho}^\mu - \hat{g}^{\mu\nu}\xi_{,\rho}^\rho - 2\hat{g}^{\mu\nu}\partial_{\hat{r}}\xi^1) |_{\mathcal{Y}^\pm} = 0.$$

Система уравнений, которой удовлетворяет векторное поле ξ^α на \mathcal{Y}^\pm , покомпонентно записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \partial_{\hat{r}}\xi^0 = 0; \text{ б) } \partial_u\xi^0 = \partial_{\hat{r}}\xi^1; \text{ в) } \partial_{\hat{r}}\xi^A = -\hat{g}^{AB}\partial_B\xi^0; \\ \text{г) } \partial_u\xi^1 = 0; \text{ д) } \partial_u\xi^A = 0; \text{ е) } \hat{g}^{AB}\partial_{\hat{r}}\xi^1 = \xi^{(A:B)}. \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

Здесь $\partial_A \equiv \partial/\partial x^A$ и двоеточие означает ковариантную производную на двумерной поверхности с метрикой \hat{g}_{AB} .

Интегрирование этой системы проводится следующим образом. Дифференцируя уравнение б) по u и используя г), имеем $\partial_u^2\xi^0 = 0$. Поэтому с учетом а) получаем $\xi^0 = F(x^A)(u + \alpha(x^A))$. Соотношения б) и е) дают $F = \xi^A_{;A}/2$ и $\xi^{(A:B)} = \hat{g}^{AB}\xi^C_{;C}/2$. Из д) следует, что ξ^A не зависит от u . Таким образом, на поверхности \mathcal{Y}^\pm векторное поле ξ^μ , порождающее преобразования асимптотических симметрий, имеет вид:

$$\xi^1 = 0; \xi^0 = 1/2\xi^A_{;A}(u + \alpha(x^A)); \xi^A = \xi^A(x^B), \tag{37}$$

причем функции ξ^A удовлетворяют уравнению

$$\xi^{(A:B)} = \hat{g}^{AB}\xi^C_{;C}/2. \tag{38}$$

Оставшиеся неиспользованными уравнения системы (36) позволяют определить величины $(\partial_{\hat{r}}\xi^\alpha) |_{\mathcal{Y}^\pm}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{r}}\xi^0 = 0; \partial_{\hat{r}}\xi^1 = \xi^A_{;A}/2; \\ \partial_{\hat{r}}\xi^B = -(\xi^A_{;A}(u + \alpha)/2)^B. \end{aligned} \tag{39}$$

Вторые и более высокие производные по \hat{r} от ξ^μ уравнением (35) не фиксируются, и поэтому зависимость ξ^μ от \hat{r} вне \mathcal{Y}^\pm в общем случае произвольна. Элементами группы асимптотических симметрий являются классы преобразований асимптотических симметрий, совпадающих на \mathcal{Y}^\pm .

Выясним теперь, от каких параметров зависят преобразования этой группы. В используемых нами конформных координатах Бонди метрика $\hat{g}_{AB} |_{\mathcal{Y}^\pm}$ совпадает с метрикой на поверхности единичной сферы и уравнение (38), аналогичное (32), определяет генераторы конформных преобразований на этой сфере [см. (58)]. Как известно [9, 25], группа конформных изометрий сферы локально-изоморфна (шестипараметрической) собственной группе Лоренца. Полная группа асимптотических симметрий наряду с функциями $\xi^A(x^B)$ содержит в качестве параметров произвольную функцию $\alpha(x^A)$ на сфере и, следовательно, является бесконечномерной группой. Эта группа получила название группы Бонди — Метцнера — Сакса (сокращенно группа БМС).

Из сравнения (37) с (27) вытекает, что группа БМС изоморфна группе преобразований от одних конформных координат Бонди к другим.

Асимптотические симметрии в физическом пространстве — времени. Равенства (37) — (39) показывают, что регулярные векторные поля ξ^α , порождающие асимптотические симметрии, в окрестности \mathcal{Y}^\pm :

$$\begin{aligned} \xi^{\hat{r}} &= \xi^A_{;A} \hat{r}/2 + O(\hat{r}^2); \quad \xi^0 = \xi^A_{;A} (u + \alpha(x_B))/2 + O(\hat{r}^2); \\ \xi^B &= \xi^B(x^A) - [\xi^A_{;A} (u + \alpha(x^B))]^{;B} \hat{r}/2 + O(\hat{r}^2). \end{aligned}$$

В координатах (u, r, x^2, x^3) , $(r = 1/\hat{r})$ в физическом пространстве — времени при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \xi^r &= -\xi^A_{;A} r/2 + O(1); \quad \xi^0 = \xi^A_{;A} (u + \alpha(x^B))/2 + O(r^{-2}); \\ \xi^B &= \xi^B(x^A) - [\xi^A_{;A} (u + \alpha(x^C))]^{;B} r^{-1} + O(r^{-2})/2. \end{aligned}$$

Если воспользоваться теперь выражением (28) для асимптотического поведения коэффициентов метрики, то можно показать, что в координатах (u, r, x^2, x^3) величины $\bar{\delta}g_{\mu\nu} \equiv -\xi_{(\mu;\nu)}$, характеризующие отклонение от точной симметрии, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}g_{11} &= \bar{\delta}g_{1A} = g^{AB} \bar{\delta}g_{AB} = 0; \quad \bar{\delta}g_{00} = O(r^{-1}); \\ \bar{\delta}g_{0A} &= O(1); \quad \bar{\delta}g_{01} = O(r^{-2}); \quad \bar{\delta}g_{AB} = O(r). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Выполнение этих асимптотических уравнений Киллинга может быть положено в основу определения асимптотических симметрий (см., например, [9]). Преобразования ξ^μ , удовлетворяющие условиям (40), сохраняют асимптотический вид метрики (28). Можно также убедиться, что параметр $L \sim T \sim u^\mu \xi_\mu / u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu}$, характеризующий размер области, где нарушение точной симметрии становится порядка 1, для векторных полей ξ^μ , удовлетворяющих уравнениям (40), неограниченно растет при $r \rightarrow \infty$.

6. СТРУКТУРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ БОНДИ — МЕТЦНЕРА — САКСА

В предыдущих разделах было показано, что асимптотически-плоское пространство допускает приближенные симметрии, характеризистическим свойством которых является сохранение вида метрики в окрестности световых бесконечностей \mathcal{I}^\pm . Нетрудно проверить, что эти преобразования на \mathcal{I}^+ (для \mathcal{I}^- все результаты аналогичны) — $(u, \zeta, \bar{\zeta}) \rightarrow (u', \zeta', \bar{\zeta}')$ — образуют группу асимптотических симметрий БМС [9, 14]:

$$\left. \begin{aligned} \zeta' &= (a\zeta + b)/(c\zeta + d); \quad u' = K_g(\zeta, \bar{\zeta})(u + \alpha(\zeta, \bar{\zeta})); \\ g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C); \\ K_g(\zeta, \bar{\zeta}) &= \frac{1 + |\zeta|^2}{(|a\zeta + b|^2 + |c\zeta + d|^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Здесь $\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ — дважды дифференцируемая действительная функция $\zeta = \exp(i\varphi) \operatorname{ctg} \theta/2$, где θ, φ — угловые координаты на S^2 . Для сравнения напомним, что группа Пуанкаре \mathcal{P} , которая описывает симметрии пространства Минковского, индуцирует на \mathcal{I}^+ преобразование (см. разд. 1)

$$\begin{aligned} \zeta' &= \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}; \quad u' = K_g(\zeta, \bar{\zeta}) \left(u + a^0 + a^1 \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{(1 + |\zeta|^2)} + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(1 + |\zeta|^2)} + a^3 \frac{|\zeta|^2 - 1}{(1 + |\zeta|^2)} \right), \end{aligned} \quad (42)$$

где a^μ — вектор трансляции, а $\zeta \rightarrow \zeta'$ индуцируется лоренцевыми поворотами.

Преобразование (42) является, очевидно, частным случаем преобразования (41), т. е. группа БМС содержит преобразования, индуцированные на \mathcal{I}^\pm группой Пуанкаре.

Почему группа БМС шире группы Пуанкаре? Этот вопрос возникает потому, что и пространство Минковского и асимптотически-плоское пространство на бесконечности «устроены одинаково»:

на \mathcal{Y}^\pm , где сравниваются группы БМС и \mathcal{F} , они порождают одну и ту же вырожденную метрику:

$$dl^2 = d\zeta d\bar{\zeta} / (1 + |\zeta|^2). \tag{43}$$

Это кажущееся противоречие можно разъяснить, если напомнить, что группа \mathcal{F} определяется жестким условием сохранять вид метрики $\eta^{\mu\nu}$ во всем пространстве Минковского, группа БМС определяется из требования сохранения (с некоторой заданной точностью) вида метрики $g^{\mu\nu}$ асимптотически-плоского пространства лишь в окрестности световых бесконечностей \mathcal{Y}^\pm . Естественно, что еще более широкой должна быть группа, сохраняющая вид метрики только на \mathcal{Y}^\pm [см. (43)]. Действительно, нетрудно проверить, что эта группа определяется преобразованием (группа Ньюмана — Унти [18, 26]) $(u, \xi, \bar{\xi}) \rightarrow (u', \xi', \bar{\xi}')$:

$$\zeta' = (a\zeta + b)/(c\zeta + d); \quad u' = G(u, \zeta, \bar{\zeta}),$$

где по-прежнему матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C)$, а G — произвольная гладкая вещественная функция. Соображения, приведенные выше, можно пояснить на простом примере [27], который одновременно демонстрирует степень нетривиальности такого понятия, как асимптотически-плоское пространство. Рассмотрим вначале группу изометрий двумерной плоскости E^2 с обычной положительно определенной метрикой $g^{ij}(x)$, которая в полярных координатах $(x^1 = r, x^2 = \theta)$ имеет вид $g^{ij}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$. В этом случае уравнения Киллинга (31) имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \omega^{(a, b)}(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta; \\ \xi^2 &= c + r^{-1} \omega_2^{(a, b)}(\theta), \end{aligned} \tag{44}$$

где a, b и c — константы интегрирования. Три линейно-независимых поля $\xi^i(a), \xi^i(b)$ и $\xi^i(c)$ определяют инфинитезимальную группу изометрических движений плоскости E^2 , причем параметры a и b определяют трансляции, а c — вращения.

Рассмотрим теперь двумерное риманово многообразие R^2 с положительно определенной метрикой $g^{ij}(x)$. Пусть $r(x), \theta(x)$ — вещественные дифференцируемые функции на R^2 , которые задают новые координаты, удовлетворяющие условиям «полярности»:

$$g^{ij} r_{,i} r_{,j} = 1; \quad g^{ij} r_{,i} \theta_{,j} = 0. \tag{45}$$

В этих координатах $(\tilde{x}^1 = r, \tilde{x}^2 = \theta)$ метрический тензор $g^{ij}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\theta, r) \end{pmatrix}$, где $f(\theta, r)$ — дифференцируемая функция. Наложим теперь на метрику условия, которые бы моделировали нам асимптотически-плоское пространство [ср. с (28)]:

- 1) карта $\{r, \theta\}$ покрывает все многообразие R^2 , за исключением некоторой ограниченной области $0 < r_0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$;
 2) при $r_0 \leq r$ $f(r, \theta) = r^{-2} + O(r^{-\lambda})$, причем $\lambda > 2$;
 3) при $r_0 \leq r$ выполняются условия равномерной гладкости [ср. с (30)]: $\partial_r [f(r, \theta) - r^{-2}] = O(r^{-q})$; $\partial_\theta f(r, \theta) = O(r^{-q})$, $q \geq \lambda$. В декартовых координатах $g^{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{ij}$.

Заметим теперь, что у R^2 , вообще говоря, нет нетривиальных изометрий. Это непосредственно следует из того, что уравнения Киллинга в этом случае не имеют ненулевых решений. Однако если интересоваться *асимптотическими изометриями*, для которых метрика сохраняется лишь асимптотически ($r \geq r_0$) *:

$$\mathcal{L}_\xi g^{11} = 0; \quad \mathcal{L}_\xi g^{12} = \mathcal{L}_\xi g^{21} = 0; \quad \mathcal{L}_\xi g^{22} = Q_\lambda(r, \theta), \quad (46)$$

то нетривиальные решения (46) существуют, причем при больших r они не зависят от конкретного вида члена $Q_\lambda(r, \theta)$, а определяются лишь «скоростью» стремления метрики $g^{ij}(r, \theta)$ к плоской метрике. Действительно, из первых двух уравнений (46) следует, что при $r_0 < r$

$$\xi^1 = \omega(\theta); \quad \xi^2 = \pi(\theta) + r^{-1}\omega_{,2}(\theta) + O(r^{-\mu}), \quad \mu > 1, \quad (47)$$

где $\omega(\theta)$, $\pi(\theta)$ — произвольные дифференцируемые функции. Из третьего уравнения (46) получаем

$$2r^{-2}\pi_{,2}(\theta) + 2r^{-3}[\omega_{,22}(\theta) + \omega(\theta)] + O(r^{-q}) = Q_\lambda(r, \theta), \quad q \geq \lambda. \quad (48)$$

Из (48) при $r \rightarrow \infty$ следует, что $\pi(\theta) = c$. В то же время если $2 < \lambda \leq 3$, то, в отличие от «плоского» случая E^2 , мы не получаем никаких условий на функцию $\omega(\theta)$:

$$\xi^1 = \omega(\theta); \quad \xi^2 = c + r^{-1}\omega_{,2}(\theta) + O(r^{-\mu}), \quad 1 < \mu \leq 2. \quad (49)$$

Сравнивая (49) с (44), видим, что двухпараметрическое семейство «трансляций» $\omega^{(a,b)}(\theta)$ в случае асимптотических изометрий асимптотически-плоского пространства R^2 : $2 < \lambda \leq 3$, расширяется до бесконечнопараметрического семейства «супертрансляций» $\omega(\theta)$. То же происходит в случае асимптотически-плоского пространства — времени [ср. (41) и (42)].

Заметим теперь, что если в условиях 2), 3) $\lambda > 3$, тогда решение уравнений Киллинга (46) для больших $r > r_0$ имеет вид [ср. с (44)]:

$$\xi^1 = \omega^{(a,b)}(\theta); \quad \xi^2 = K + r^{-1}\omega_{,2}^{(a,b)}(\theta) + O(r^{-\mu}), \quad \mu > 2. \quad (50)$$

Следовательно, если метрика с ростом r становится плоской «слишком быстро» (в настоящем примере $\lambda > 3$, а для физического пространства — времени это соответствует отсутствию гравитацион-

* Здесь $Q_\lambda(r, \theta)$ — произвольная функция, которая при $r \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(r^{-\lambda})$.

ного излучения на бесконечности [27, 28]), то группа асимптотических изометрий не расширяется и совпадает с асимптотическими изометриями плоского пространства. Таким образом, в случае асимптотически-плоского пространства — времени, как оно было определено выше (разд. 3), из-за «медленного» стремления метрики $g^{\mu\nu}(x)$ к метрике плоского пространства $\eta^{\mu\nu}$ происходит расширение группы асимптотических симметрий до группы БМС. Преобразования (41) вида $(u, \zeta, \bar{\zeta}) \rightarrow (u' = u + \alpha(\zeta, \bar{\zeta}), \zeta, \bar{\zeta})$ образуют абелеву подгруппу супертрансляций A , а «супертрансляции», для которых

$$\alpha(\zeta, \bar{\zeta}) = a^0 + a^1(\zeta + \bar{\zeta})/(1 + |\zeta|^2) + a^2(\zeta - \bar{\zeta})/i(1 + |\zeta|^2) + a^3(|\zeta|^2 - 1)/(1 + |\zeta|^2), \quad (51)$$

образуют в группе БМС 4-параметрическую абелеву подгруппу трансляций V .

Структура группы БМС [9, 27]. 1. Полупрямое произведение. Отсутствии локальной компактности. Из определения группы БМС (41) следует, что она имеет структуру полупрямого произведения супертрансляций A и группы $G = SL(2, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{B} = A \otimes_T G. \quad (52)$$

Здесь T указывает на то, что полупрямое произведение берется по отношению к автоморфизму $A \xrightarrow{T(G)} A$, т. е. на A задано представление $T(G)$ группы G [ср. с (41)]:

$$\left. \begin{aligned} (T(g)\alpha)(\zeta, \bar{\zeta}) &= K_g(\zeta, \bar{\zeta})\alpha(\zeta g, \bar{\zeta} g); \\ g \in G; \quad \zeta g &\equiv (a\zeta + b)/(c\zeta + d). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Группа \mathcal{B} состоит из элементов $A \times G$ со следующим законом композиции:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1, g_1)(\alpha_2 g_2) &= (\alpha_1 + T(g_1)\alpha_2, g_1 g_2); \\ \alpha_1, \alpha_2 \in A; \quad g_1, g_2 \in G. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Если $g = \pm I$, т. е. принадлежит центру Z_2 группы G , то $T(\pm I) = I$. Фактор-группа $L_{\dagger} = G/Z_2$ изоморфна собственной ортохронной группе Лоренца L_{\dagger} , поэтому наряду с универсальной накрывающей группой \mathcal{B} (52) можно ввести собственную группу $\mathcal{B}_{\dagger} = A \otimes_T L_{\dagger}$. Наконец, группа Пуанкаре \mathcal{P} (42) также имеет структуру полупрямого произведения

$$\mathcal{P} = V \otimes_T G, \quad (55)$$

где V — 4-параметрическая подгруппа трансляции $V \subset A$, поэтому $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. Заметим теперь, что, в отличие от 10-параметрической группы \mathcal{P} , группа \mathcal{B} является бесконечно параметрической,

поскольку элементы α группы A принадлежат гильбертову пространству функций, квадратично интегрируемых на двумерной сфере S^2 . Следовательно, подгруппа $A \otimes_T I$ (в естественной топологии) локально изоморфна гильбертову пространству, поэтому группа \mathcal{R} не является локально-компактной. Отсутствие локальной компактности у группы БМС означает, что проблема нахождения ее неприводимых унитарных представлений более нетривиальна, чем в случае группы Пуанкаре.

2. А л г е б р а \mathcal{L} и. Алгебра инфинитезимальных операторов для группы \mathcal{R} строится с помощью явных формул для преобразования БМС (41) по обычным правилам [9]. Напомним только, что в качестве полного ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве супертрансляций A можно выбрать нормированные сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Тогда произвольный элемент $\alpha(\theta, \varphi) \in A$ можно представить в виде разложения *

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi); \\ a_{lm} &= a_{l-m}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Для группы A линейно-независимый набор инфинитезимальных операторов имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} P_{lm} &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \partial/\partial u; \\ P_{lm} &= P_{l-m}^*; \quad P_{lm} = 0; \quad |m| > l, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

а общая линейная комбинация

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} P_{lm} = \beta(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (58)$$

Для 6-параметрической собственной конформной подгруппы генераторы L^{ab} (соответствующие инфинитезимальным поворотам в плоскости $\{x^a, x^b\}$ пространства Минковского) удобно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} L^{12} &= \partial/\partial\varphi \equiv L_z; \quad L^{30} = \sin\theta (\partial/\partial\theta) + u \cos\theta (\partial/\partial u) \equiv R_z; \\ L^{\pm} &= \pm iL^{23} + L^{13} = \exp(\pm i\varphi) [\partial/\partial\theta \pm i \operatorname{ctg}(\partial/\partial\varphi)]; \\ R^{\pm} &= \mp iL^{20} + L^{10} = \\ &= -\exp(\pm i\varphi) [\cos\theta (\partial/\partial\theta) \pm i \operatorname{cosec}\theta (\partial/\partial\varphi) - u \sin\theta (\partial/\partial u)]. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

* Напомним, что $\alpha(\theta, \varphi)$ — дважды дифференцируемая функция на S^2 .

Из (58), (59) можно найти коммутационные соотношения для алгебры Ли группы БМС (или \mathcal{R}):

$$\left. \begin{aligned} [L^{ab}, L^{cd}] &= -\eta^{ad}L^{bc} - \eta^{bc}L^{ad} + \eta^{ac}L^{bd} + \eta^{bd}L^{ac}; \\ [L^{ab}, \alpha\partial/\partial u] &= \{(L^{ab}\alpha) - \alpha(\theta, \varphi)W(L^{ab})\}\partial/\partial u, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где $W(L^{ab})$ определяется из соотношения

$$\partial(L^{ab}f)/\partial u = L^{ab}\partial f/\partial u + W\partial f/\partial u; \quad (61)$$

здесь $f(u)$ произвольная гладкая функция.

3. Нормальные подгруппы. Важным свойством любой группы Γ , определяющим ее представления (а иногда и способ их нахождения), является наличие у Γ нормальных подгрупп (нормальных делителей). Множество $N \subset \Gamma$ является нормальной подгруппой, если для произвольного $g \in \Gamma$ из $n \in N$ следует $g^{-1}ng \in N$. В случае группы БМС из определения (53) и (54) следует, что супертрансляции $A \otimes_T I$ образуют нормальную абелеву подгруппу группы \mathcal{R} , а фактор-группа $\mathcal{R}/A \otimes_T \mathbb{Z}_2$ изоморфна собственной ортохронной группе Лоренца. Далее, из представления (56) следует, что пространство супертрансляций A является ортогональной суммой трансляций V и собственно супертрансляций Σ :

$$A \approx V \oplus \Sigma; \quad (62)$$

$$\begin{aligned} V: v(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= a^0 + a^1 \sin \theta \cos \varphi + a^2 \sin \theta \sin \varphi + a^3 \cos \theta; \end{aligned}$$

$$\Sigma: \sigma(\theta, \varphi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Трансляции V коммутируют с супертрансляциями Σ и, как нетрудно проверить с помощью коммутационных соотношений (59), инвариантны относительно действия представления $T(G)$ конформной группы G (53). Следовательно, трансляции $V \otimes_T I$ также образуют нормальную абелеву подгруппу, которая является 4-параметрической. Замечательно, однако [9, 27], что $V \otimes_T I$ является единственной 4-параметрической нормальной абелевой подгруппой группы \mathcal{R} (или \mathcal{R}^\dagger). Это свойство $V \otimes_T I$ однозначно выделяет подгруппу трансляций из группы БМС, что очень важно при построении квантовой теории в асимптотически-плоских пространствах (см., например, [34, 35]).

Унитарные представления группы БМС и их свойства. 1. Метод индуцированных представлений [36—38]. Метод индуцированных представлений — эффективное средство построения унитарных представлений групп, которые являются полупрямым произведением $N \otimes_T H$, причем N — нормальная абелева подгруппа. Таковыми являются, как мы видели, группа

Пуанкаре и группа БМС, унитарные представления которых будем сравнивать ниже. Напомним, как строятся индуцированные представления.

Вначале строятся непрерывные неприводимые представления подгруппы N , эти представления одномерны и образуют дуальную к N абелеву группу \hat{N} (характеры). Действие группы H на N определяет действие H и на \hat{N} . Для заданного характера $\chi \in \hat{N}$ наибольшая подгруппа $H_\chi \subset H$, оставляющая χ неподвижным, называется малой группой для χ , а множество $\mathcal{O}_\chi = H_\chi \chi$ характеров, которые можно получить из χ действием группы H , называется орбитой χ . Основное утверждение [36, 37] заключается в том, что заданный характер χ и представление U малой группы H_χ однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) определяют представление группы $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ — унитарное, если на орбите \mathcal{O}_χ задана квазиинвариантная относительно действия группы H мера. Такое представление $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ называется *представлением, индуцированным U и χ* . Если $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ локально компактна и U неприводимо, тогда индуцированное представление неприводимо. Если полупрямое произведение $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ регулярно в смысле Макки [36], то любое неприводимое представление $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ является индуцированным. Таким образом, неприводимые представления $N \otimes_{\mathcal{T}} H$ классифицируются по неприводимым представлениям U_s малой группы H_χ и соответствующей орбите \mathcal{O}_χ .

2. Представления группы Пуанкаре \mathcal{P} является регулярным полупрямым произведением V и G (55), поэтому все неприводимые представления \mathcal{P} являются индуцированными. Характеры \hat{V} определяются точками дуального к V векторного пространства (пространства импульсов) $V' \ni p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$: $\chi_p = \exp [i(pv)]$. Действие G на χ_p сохраняет величину $p^2 = m^2$, т. е. в данном случае имеются только три малые группы G_χ , соответствующие трем типам характеров: $\chi_{p^2 > 0}$, $\chi_{p^2 = 0}$, $\chi_{p^2 < 0}$ — и, соответственно, три орбиты \mathcal{O}_χ , на которые расслаивается пространство характеров \hat{V} . Неприводимые унитарные представления малых групп $G_\chi \rightarrow U_s$ вместе с типом орбиты определяют все неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре \mathcal{P} , причем индекс s задает спин представления (табл. 1).

Таблица 1

\mathcal{O}_χ	G_χ	s
$p^2 = m^2 > 0$; $\text{sign } p^0 = \pm 1$	$SU(2)$	Дискретный Непрерывный, но есть дискретный подкласс
$p^2 = m^2 = 0$; $\text{sign } p^0 = \pm 1$	Δ	
$p^2 = m^2 < 0$	$SU(1, 1)$	Непрерывный

В табл. 1 Δ состоит из треугольных матриц, диагональные элементы которых по модулю равны единице, а $SU(1,1)$ — некомпактная группа псевдоунитарных матриц. Представления U_s с непрерывным спином обычно отбрасываются как нефизические.

3. Индуцированные представления группы БМС. Группа БМС также является полупрямым произведением (52), однако о регулярности его ничего неизвестно. Поэтому индуцированные представления могут не исчерпывать всех возможных неприводимых унитарных представлений группы \mathcal{B} . Кроме того, группа \mathcal{B} не является *локально-компактной*, поэтому индуцированные представления, построенные по описанному выше методу, не обязательно должны приводить к неприводимым представлениям. Однако Маккарти [30—33] построил все индуцированные унитарные представления группы \mathcal{B} и показал, что они неприводимы.

Для абелевой группы супертрансляций A неприводимые представления так же, как и для V , одномерны и образуют группу характеров $\hat{A} \ni \chi_\Phi = \exp(i \langle \Phi, \alpha \rangle)$, где $\Phi \in A$ определяет функционал в дуальном пространстве A' относительно скалярного произведения $\langle \Phi, \alpha \rangle$ на сфере S^2 : $\langle \Phi, \alpha \rangle = \int_{\hat{S}^2} d\mu(x) \Phi(x) \alpha(x)$;

$x \in S^2$; $d\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$. Маккарти показал, что для \mathcal{B} малые группы G_x определяются из условия [см. (53) и (41)]

$$(T_g \Phi_0)(\zeta, \bar{\zeta}) = K_g^{-3}(\zeta, \bar{\zeta}) \Phi_0(\zeta g, \bar{\zeta} g), \tag{63}$$

и что все они компактны. Следовательно, все неприводимые унитарные представления \mathcal{B} не содержат нефизических представлений с *непрерывным спином*. Эта особенность группы БМС делает ее с точки зрения физики более приемлемой для описания элементарных частиц, чем группу Пуанкаре [30]. Может показаться странным, что, хотя $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, малые группы, соответствующие \mathcal{B} , не содержат малых групп Пуанкаре, среди которых есть и некомпактная. Дело в том, что для группы \mathcal{F} пространство импульсов V' , дуальное к трансляциям V (относительно скалярного произведения в пространстве Минковского), инвариантно относительно действия группы G . Для группы БМС в пространстве A' , дуальном к супертрансляциям A относительно скалярного произведения на сфере S^2 , подпространство импульсов $V' \subset A'$ не является G -инвариантным. Оно возникает лишь как фактор-пространство A'/V^0 , где V^0 является G -инвариантным аннулятором V , соответствующим ортогональному разложению $A' \approx \Sigma^0 \oplus V^0$:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \varphi) = & (p^0 + p^1 \sin \theta \cos \varphi + p^2 \sin \theta \sin \varphi + p^3 \cos \theta) + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Как показал Маккарти [27], группа БМС является наименьшим расширением группы Пуанкаре, которое приводит к исчезновению неприводимых унитарных представлений с непрерывным спином.

Приведем таблицу орбит и малых групп для \mathcal{B} , аналогичную той, которая была приведена для \mathcal{F}^* :

Таблица 2

Φ_0	G_{χ}	\mathcal{O}_{χ}
$\Phi_0(\xi, \bar{\xi})$	Z_2	$G\Phi_0 \approx G/Z_2 \approx L_+^{\uparrow}$
$\Phi_0 = \xi(\xi)$	Γ	$G\Phi_0 \approx G/\Gamma \approx L_+^{\uparrow}/SO(2)$
$\Phi_0 = K(\text{const})$	$SU(2)$	$G\Phi_0 \approx G/SU(2) \approx L_+^{\uparrow}/SU(2)$

Здесь для характеристики орбит мы воспользовались тем, что каждая $\mathcal{O}_{\chi(\Phi_0)}$ является однородным пространством по отношению к действию G , поэтому она гомеоморфна соответствующему факторпространству по малой группе $G/G_{\chi(\Phi_0)}$. Малые группы и орбиты однозначно классифицируют индуцированные унитарные представления группы БМС (за подробностями мы отсылаем к работам [29—33]).

7. БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ В АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Введенное выше понятие асимптотически-плоского пространства оказывается весьма удобным при обсуждении задачи рассеяния безмассовых полей. Универсальный характер поведения этих полей в асимптотической области позволяет с помощью конформного преобразования перейти от задачи рассеяния в физическом пространстве — времени к задаче с начальными данными на светоподобной поверхности \mathcal{I} в пространстве Пенроуза. При этом оказывается, что из регулярности поведения конформно преобразованного поля на \mathcal{I} вытекает важное свойство асимптотического вырождения (ср. с разд. 4). Как уже указывалось, наиболее удобным для описания безмассовых полей является спинорный формализм. Изложение спинорного анализа в искривленном пространстве — времени и применение его для описания свойств безмассовых полей в асимптотически-плоском пространстве можно найти в работах [3, 7, 22, 23].

Спинорный формализм в искривленном пространстве. Спиноры в каждой точке пространства — времени вводятся так же, как

* Для несвязанных малых групп аналогичную таблицу можно найти в работах [31—33].

и в плоском случае. Специфика искривленного пространства — времени проявляется при переходе от точки к точке. Связь тензоров и спиноров осуществляется с помощью эрмитовых величин σ_{AB}^μ , но теперь они зависят от x . Они обладают следующими основными свойствами:

$$\sigma_{AB}^\mu \sigma_{CD}^\nu g_{\mu\nu} = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD}^{\dot{\cdot}};$$

$$\sigma_\mu^{A\dot{B}} \sigma_\nu^{C\dot{D}} g^{\mu\nu} = \varepsilon^{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}^{\dot{\cdot}};$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \sigma_\mu^{A\dot{B}}(x) \sigma_\nu^{C\dot{D}}(x) \varepsilon_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}^{\dot{\cdot}}.$$

Здесь $\|\varepsilon_{AB}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Определяется производная $\nabla^{A\dot{B}} = \sigma_\mu^{A\dot{B}} \nabla^\mu$, и постулируется, что ковариантная производная действует на матрицы $\varepsilon_{A\dot{B}}$ и $\sigma_\mu^{A\dot{B}}$ следующим образом: $\nabla_\mu \varepsilon_{A\dot{B}} = 0$, $\nabla_\mu \sigma_\mu^{A\dot{B}} = 0$.

Безмассовые поля спина s . Безмассовое поле произвольного спина s описывается, как и в плоском случае, симметричным спинором $\varphi_{A_1 \dots A_s}$, удовлетворяющим уравнению

$$\nabla^{A_1\dot{B}} \varphi_{A_1 \dots A_{2s}} = 0 \tag{64}$$

(для высших спинов возникают известные трудности при интерпретации этого уравнения в искривленном пространстве — времени). Скалярное безмассовое поле φ подчиняется уравнению

$$(\square - \alpha R) \varphi \equiv (\nabla_\mu \nabla^\mu - \alpha R) \varphi = 0, \tag{65}$$

где α — некоторая константа; R — кривизна. Хорошо известно, что уравнения (64) конформно-инвариантны (уравнение (65) конформно-инвариантно при $\alpha = -1/6$). Свойства различных величин при конформном преобразовании $g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ обсуждаются в Приложении 2.

Асимптотическое вырождение. Если потребовать, чтобы поле $\varphi_{A_1 \dots A_{2s}}$ было *асимптотически-регулярным*, т. е. чтобы конформно преобразованное поле $\hat{\varphi}_{A_1 \dots A_{2s}} = \hat{\varphi}^{-1} \varphi_{A_1 \dots A_{2s}}$ было непрерывным на \mathcal{U} [это соответствует поведению $\varphi \sim \Phi r^{-1}$, $r \rightarrow \infty$ (ср. с разд. 1)], то можно доказать, что для любой световой геодезической γ и спинорового базиса o^A, i^A , параллельно переносимого вдоль γ со спинором o^A , касательным к γ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^k \varphi_{A_1 \dots A_{2s}} o^{A_1} \dots o^{A_k}) = 0; \tag{66}$$

здесь r — аффинный параметр на γ . Условие (66) означает, что по крайней мере $2s - k + 1$ главных световых направления $\varphi_{A_1 \dots A_{2s}}$ совпадают с точностью до $O(r^{-(k+1)})$.

Для асимптотически-регулярного поля $\Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$ существует предел вдоль световой геодезической γ :

$$\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} (r\Phi_{A_1 \dots A_{2s}} t^{A_1} \dots t^{A_{2s}}), \quad (67)$$

причем значение этого предела одно и то же для всех световых геодезических γ , оканчивающихся в одной и той же точке на \mathcal{J} . Величины Φ называют образом поля $\Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$ на \mathcal{J} . В частности, для скалярного поля

$$\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} (r\phi) = \hat{\phi}|_{\mathcal{J}}. \quad (68)$$

Замечания. 1. Отметим, что для излагаемой теории (в частности, для применения техники пространства Пенроуза) важна не столько конформная инвариантность (она отсутствует при $\alpha \neq \neq 1/6$), сколько универсальность поведения поля при $r \rightarrow \infty$.

2. Если рассматривать поле ϕ в метрике Шварцшильда (16), то при $r \rightarrow \infty$ $\phi(r, u, \theta, \varphi) \sim \Phi(u, \theta, \varphi)/r$, где $u = t - r - 2m \ln |r - 2m|$. Логарифм является аналогом кулоновской фазы при рассеянии на кулоновском потенциале в квантовой механике и возникает из-за медленного спадания гравитационного поля в асимптотической области [$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1})$].

3. Нетрудно проверить инвариантность уравнений Янга — Миллса (см. приложение 2):

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_{\mu\nu}^a &= g f^{abc} F_{\nu\lambda}^b A^{c,\lambda}; \\ F_{\mu\nu}^a &= \nabla_\mu A_\nu^a - \nabla_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned}$$

при конформном преобразовании $g \rightarrow \hat{g}$, $A_\mu^a \rightarrow \hat{A}_\mu^a = A_\mu^a$. Было бы интересно проанализировать теорию Янга — Миллса более подробно в духе идей, излагаемых в настоящем обзоре.

Асимптотические инварианты. Если $\xi_{(i)}^\mu$ — генераторы преобразований симметрии пространства — времени, то связанные с ними инварианты записываются в виде (35):

$$P_i = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} \xi_{(i)}^\mu d\Sigma^\nu.$$

Это выражение можно тождественно переписать следующим образом:

$$P_i = \int_{\Sigma} \hat{T}_{\mu\nu} \hat{\xi}_{(i)}^\mu d\hat{\Sigma}^\nu, \quad (69)$$

где $\hat{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$ и $d\hat{\Sigma}^\mu = \Omega^2 d\Sigma^\mu$ — элемент объема на Σ в метрике $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \hat{g}_{\mu\nu}$.

Рассмотрим теперь пространство Пенроуза $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$, соответствующее данному асимптотически-плоскому пространству (M, g) ,

$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. Выберем в качестве Σ поверхности светоподобных бесконечностей \mathcal{I} , и пусть $\hat{T}_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$ — предельное значение $\Omega^{-2} T_{\mu\nu}$ на \mathcal{I} . В этом случае величины P_i , определяемые формулой (69), где $\xi_{(i)}^\mu$ — генераторы БМС группы асимптотических симметрий на \mathcal{I} , будем называть *асимптотическими инвариантами*.

В простейшем случае скалярного безмассового поля, действие для которого

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \alpha R \varphi^2) \sqrt{-g} d^4x \quad (70)$$

и соответствующий метрический тензор энергии — импульса

$$T_{\mu\nu} = (2\alpha + 1) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1+4\alpha}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + 2\alpha \varphi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + \alpha/2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} R \right) \varphi^2, \quad (71)$$

вычисления, приведенные в приложении 3, позволяют получить для асимптотических инвариантов следующее выражение (ср. разд. 2):

$$P_i = P[\xi_{(i)}] = \int_{\mathcal{I}} [(2\alpha + 1) \partial_u \Phi \xi_{(i)}^\mu \partial_\mu \Phi + 2\alpha \Phi \xi_{(i)}^\mu \partial_\mu \partial_u \Phi] du d\sigma. \quad (72)$$

Здесь Φ — образ поля φ на \mathcal{I} ; $\xi_{(i)}^\mu$ — генераторы преобразований асимптотических симметрий и $d\sigma$ — элемент площади поверхности единичной сферы.

8. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ В АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Как уже отмечалось в разд. 1, проблема квантования состоит из двух задач: во-первых, необходимо найти перестановочные соотношения операторов поля (построить операторную алгебру); во-вторых, нужно найти реализацию алгебры операторов в определенном пространстве состояний, определив при этом, в частности, вакуумное состояние. Мы начнем с рассмотрения первой задачи, оставив обсуждение вопроса о выборе вакуума до следующего раздела.

Динамический принцип Швингера. Квантовая теория свободного поля в искривленном пространстве — времени. Для простоты*, как и раньше, будем рассматривать теорию скалярного поля φ , действие для которого

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int (K^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \alpha R \varphi^2 \sqrt{-g}) d^4x, \quad (73)$$

* Аналогичное рассмотрение для электромагнитного поля и гравитационных возмущений можно найти в работе [60].

где $K^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$. Соответствующее уравнение движения, возникающее при варьировании этого действия по φ :

$$D[\varphi] = \square \varphi - \alpha R \varphi \equiv (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu (K^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) - \alpha R \varphi = 0, \quad (74)$$

при $\alpha = -1/6$ является конформно-инвариантным.

Для нахождения коммутационных соотношений удобно воспользоваться формализмом, развитым Швингером [39]. Для этого заметим, что с помощью введения дополнительных переменных Φ_μ можно перейти от (73) к действию, линейному по производным от полевых переменных (к формализму первого порядка). Непосредственная проверка показывает, что действие

$$W[\varphi, \Phi_\mu] = \frac{1}{2} \int d^4x [K^{\mu\nu} \Phi_\mu \partial_\nu \varphi - K^{\mu\nu} \Phi_\mu \Phi_\nu - \varphi \partial_\mu (K^{\mu\nu} \Phi_\nu) + \alpha R \varphi^2 \sqrt{-g}] \quad (75)$$

при варьировании по Φ_μ и φ приводит к системе уравнений

$$\Phi_\mu = \partial_\mu \varphi; \quad \partial_\mu (K^{\mu\nu} \Phi_\nu) - \alpha R \sqrt{-g} \varphi = 0, \quad (76)$$

эквивалентной уравнению (74) для поля φ . Вариация действия $\delta W[\varphi, \Phi_\mu]$ при ненулевых значениях вариаций полевых переменных $\delta\varphi$ и $\delta\Phi_\mu$ на гиперповерхностях Коши Σ_0 и Σ_1 , ограничивающих четырехмерный объем V^4 , при учете уравнений движения (76) имеет вид

$$\delta W[\varphi, \Phi_\mu] = G_{\Sigma_1} - G_{\Sigma_0},$$

где]

$$G_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma K^{\mu\nu} (\Phi_\mu \delta\varphi - \varphi \delta\Phi_\mu) d\Sigma_\nu \quad (77)$$

являются генераторами бесконечно малых преобразований полевых переменных. Поэтому коммутационные соотношения на поверхности Σ определяются из следующих уравнений:

$$[\varphi, G_\Sigma] = i\delta\varphi/2; \quad [\Phi_\mu, G_\Sigma] = i\delta\Phi_\mu/2, \quad (78)$$

где поля φ , Φ_μ и вариации $\delta\varphi$, $\delta\Phi_\mu$ рассматриваются на поверхности Σ . Отметим, что для получения из уравнений (78) коммутационных соотношений для полей следует выразить вариации $\delta\varphi$ и $\delta\Phi_\mu$ в (77) через независимые вариации на поверхности Σ .

Квантование на пространственно-подобных гиперповерхностях. Рассмотрим сначала случай, когда поверхность Σ является *пространственно-подобной*. В качестве данных Коши на Σ можно выбрать две независимые функции $\varphi|_\Sigma$ и $\partial_\alpha \varphi|_\Sigma$ или, что эквивалентно, $\varphi|_\Sigma$ и $\pi|_\Sigma = K^{0\mu} \partial_\mu \varphi|_\Sigma$. Выбрав координаты таким образом, чтобы $x^0 = \text{const}$ на Σ , получим ($d\Sigma_\mu = \delta_\mu^\alpha d^3x$):

$$G_\Sigma = \int_{x^0=\text{const}} \frac{1}{2} (\pi \delta\varphi - \varphi \delta\pi) d^3x.$$

Переписав соотношения (78) в виде

$$[\varphi, G_2] = i\delta\varphi/2; \quad [\pi, G_2] = i\delta\pi/2$$

и учтя независимость вариаций $\delta\varphi$ и $\delta\pi$ на Σ , нетрудно получить следующие канонические коммутационные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)]_{x^0=y^0} &= [\pi(x), \pi(y)]_{x^0=y^0} = 0; \\ [\varphi(x), \pi(y)]_{x^0=y^0} &= i\delta^{(3)}(x-y). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Построив обычным образом гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma} d^3x (\pi(x) \partial_0 \varphi(x) - \mathcal{L}(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x^0=\text{const}} d^3x \left[\frac{\pi^2}{V^{-g} g^{00}} - 2 \frac{\pi g^{0i}}{g^{00}} \varphi_{,i} + \right. \\ &\left. + V^{-g} \left(\frac{g^{0i} \varphi_{,i}}{g^{00}} \frac{g^{0j} \varphi_{,j}}{g^{00}} - g^{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} - \alpha R \varphi^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (80)$$

можно убедиться, что гамильтоновы уравнения движения

$$\partial_0 \pi = i[H, \pi]; \quad \partial_0 \varphi = i[H, \varphi] \quad (81)$$

полностью эквивалентны лагранжеву уравнению (74). Начальные данные для этого уравнения $\varphi(x^0, \mathbf{x})$ и $\pi(x^0, \mathbf{x})$ должны удовлетворять коммутационным соотношениям (79). Для нахождения решения операторных уравнений (81) [или, что то же, гейзенбергова уравнения (74)] обычно поступают следующим образом. Рассмотрим комплексные c -числовые решения f уравнения (74). В пространстве \mathcal{F} этих решений можно ввести индефинитное скалярное произведение

$$\langle f_1, f_2 \rangle = i \int_{\Sigma} \bar{f}_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_2 d\Sigma^\mu \equiv i \int_{\Sigma} (\bar{f}_1 \partial_\mu f_2 - f_2 \partial_\mu \bar{f}_1) d\Sigma^\mu. \quad (82)$$

Независимость скалярного произведения решений f_1 и f_2 от выбора поверхности Коши Σ устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} i \left[\int_{\Sigma_1} - \int_{\Sigma_0} \right] \bar{f}_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_2 d\Sigma^\mu &= i \int_{\Sigma_0}^{\Sigma_1} d^4x \partial_\nu [K^{\nu\mu} (\bar{f}_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_2)] = \\ &= \int_{\Sigma_0}^{\Sigma_1} V^{-g} d^4x \{ \bar{f}_1 D[f_2] - D[\bar{f}_1] f_2 \} = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Введенное скалярное произведение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha f_1, \beta f_2 \rangle &= \bar{\alpha} \beta \langle f_1, f_2 \rangle; \\ \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle &= -\langle f_1, f_2 \rangle; \\ \langle \overline{f_1}, f_2 \rangle &= \langle f_2, f_1 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Предположим, что в пространстве решений $\mathcal{F} = \{f\}$ имеется нормированный базис, т. е. набор решений $\{f_\alpha, \bar{f}_\alpha\}$, такой, что

$$\langle f_\alpha, f_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle f_\alpha, \bar{f}_\beta \rangle = 0, \quad (85)$$

и произвольная функция f из \mathcal{F} представима в виде

$$f = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} f_{\alpha} + b_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}). \quad (86)$$

В этом случае операторное решение уравнения (74) следующее:

$$\Phi = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} f_{\alpha} + a_{\alpha}^* \bar{f}_{\alpha}), \quad (87)$$

где

$$a_{\alpha} = \langle f_{\alpha}, \Phi \rangle, \quad a_{\alpha}^* = -\langle \bar{f}_{\alpha}, \Phi \rangle \quad (88)$$

— постоянные операторы. Чтобы найти перестановочные соотношения этих операторов, заметим, что коммутационные соотношения (79) можно записать в эквивалентном виде

$$\langle \Phi(f), \Phi(g) \rangle = \langle g, \bar{f} \rangle, \quad (89)$$

где $\Phi(f) = \langle f, \Phi \rangle$; f и g — произвольные комплексные c -числовые решения (74)*. Поэтому, если выбрать в качестве f и g базисные решения, нетрудно получить

$$[a_{\alpha}, a_{\beta}] = [a_{\alpha}^*, a_{\beta}^*] = 0; \quad [a_{\alpha}, a_{\beta}^*] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (90)$$

Таким образом, общее решение операторного уравнения (74) с начальными данными (79) имеет вид (87), где операторы a_{α} и a_{α}^* удовлетворяют перестановочным соотношениям (90).

Квантование на светоподобных гиперповерхностях. Если поверхность Σ — светоподобная, то начальные данные $\pi|_{\Sigma} = -K^{0\mu}\partial_{\mu}\Phi|_{\Sigma}$ и $\Phi|_{\Sigma}$ не являются независимыми. В этом проще всего убедиться, если выбрать на Σ координаты (r, x^A) , связанные с конгруэнцией образующих Σ ** . В этих координатах $\pi|_{\Sigma} = \sqrt{-g}\partial_r\Phi|_{\Sigma}$. Поэтому вариации $\delta\pi$ и $\delta\Phi$ на Σ не являются независимыми. Чтобы выразить генераторы G_{Σ} только через независимые вариации $\delta\Phi$, преобразуем выражение (77) следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\Sigma} &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{-g} (\partial_r\Phi\delta\Phi - \Phi\delta\partial_r\Phi) dr d^2x = \\ &= \int_{\Sigma} \partial_r\tilde{\Phi}\delta\Phi dr d^2x - G_b(r_0, r_1), \end{aligned} \quad (91)$$

* Коммутационные соотношения (89) являются частным случаем] общего выражения для коммутаторов гейзенберговских операторов, удовлетворяющих линейным уравнениям (см., например, [61]).

** Об определении координат, связанных с конгруэнцией, см. разд. 4.

где $\tilde{\varphi} = \sqrt[4]{-g} \varphi$;

$$G_b(r_0, r_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [\tilde{\varphi}(r_1, x^A) \delta\varphi(r_1, x^A) - \tilde{\varphi}(r_0, x^A) \delta\tilde{\varphi}(r_0, x^A)] d^2x, \quad (92)$$

а $r_0 = r_0(x^A)$ и $r_1 = r_1(x^A)$ — (конечные или бесконечные) значения аффинного параметра r , соответствующие началу и концу образующих Σ .

Рассматривая вариации $\delta\tilde{\varphi}$, такие, что $\delta\tilde{\varphi}(r_1) = \delta\varphi(r_0) = 0$, из соотношений (78) получаем

$$[\tilde{\varphi}(r, x^A), \partial_r \tilde{\varphi}(r', x'^A)] = (i/2) \delta(r-r') \delta(x^A - x'^A).$$

Интегрируя это равенство по r' и определяя «постоянную» интегрирования из условия антисимметрии коммутатора, находим

$$[\tilde{\varphi}(r, x^A), \tilde{\varphi}(r', x'^A)] = (-i/2) \varepsilon(r-r') \delta(x^A - x'^A), \quad (93)$$

где $\varepsilon(x) = [\theta(x) - \theta(-x)]/2$, т. е. коммутационные соотношения полей φ на светоподобной поверхности Σ имеют вид

$$\begin{aligned} [\varphi(r, x^A), \varphi(r', x'^A)] &= \\ &= (-i/2) \varepsilon(r-r') \delta(x^A - x'^A) / \sqrt[4]{-g} \sqrt[4]{-g'}. \end{aligned} \quad (94)$$

Используя полученные коммутационные соотношения, можно убедиться, что для вариаций, не обращающихся в нуль на концах образующих поверхности Σ , должно выполняться условие

$$[\tilde{\varphi}, G_b(r_0, r_1)] = 0,$$

т. е.
$$\delta\tilde{\varphi}(r_0, x^A) + \delta\tilde{\varphi}(r_1, x^A) = 0,$$

и вариации на концах не являются независимыми.

Заметим, что полученные нами с помощью метода Швингера коммутационные соотношения на светоподобных поверхностях в искривленном пространстве — времени согласуются, в частности, с коммутационными соотношениями на световом конусе в пространстве Минковского, приведенными в работе [9, 40].

Несложный расчет показывает, что, как и в случае пространственно-подобной поверхности Σ , коммутационные соотношения (93) можно представить в виде (95)

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = \langle g, \bar{f} \rangle, \quad (95)$$

где f и g — произвольные функции на Σ , а $\langle g, \bar{f} \rangle$ — скалярное произведение функций g и \bar{f} на светоподобной поверхности Σ , определяемое формулой (82).

Конформные преобразования и коммутационные соотношения на \mathcal{J}^\pm . В квантовой теории поля, как и в классической теории,

наряду с задачей Коши представляет интерес задача определения поля по его образу на \mathcal{J}^\pm (задача рассеяния). Как обычно, вместо асимптотического поведения удобно рассмотреть локальные характеристики поля на \mathcal{J}^\pm в пространстве Пенроуза. С этой целью выясним прежде всего, каким образом изменятся полученные в предыдущем разделе соотношения, если произвести конформное преобразование метрики $g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$.

Нетрудно проверить, что если скалярное поле f при конформном преобразовании изменяется по закону

$$f \rightarrow \hat{f} = \Omega^{-1}f, \tag{96}$$

то скалярное произведение (83) остается инвариантным, т. е.

$$\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle \equiv i \int_{\Sigma} \hat{f}_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \hat{f}_2 d\hat{\Sigma}^\mu = \langle f_1, f_2 \rangle, \tag{97}$$

где $d\hat{\Sigma}^\mu = \Omega^2 d\Sigma^\mu$. Поэтому коммутационные соотношения (95) в пространстве (M, g) приводят к тому, что в пространстве (M, \hat{g}) выполняются аналогичные соотношения

$$[\hat{\Phi}(\hat{f}), \hat{\Phi}(\hat{g})] = \langle \hat{g}, \hat{f} \rangle, \tag{98}$$

где $\hat{\Phi} = \Omega^{-1}\Phi$ и $\hat{\Phi}(\hat{f}) = \langle \hat{f}, \hat{\Phi} \rangle$.

Рассмотрим теперь пространство Пенроуза $(\hat{M}, \hat{g}, \Omega)$ и выберем в качестве Σ поверхность световой бесконечности \mathcal{J}^\pm . Обозначая, как обычно, образы функций на \mathcal{J}^\pm соответствующими заглавными буквами, получаем *

$$\Phi = (\Omega^{-1}\Phi)|_{\mathcal{J}}, \quad F = (\Omega^{-1}f)|_{\mathcal{J}}.$$

Из коммутационных соотношений (98)

$$[\Phi(F), \Phi(G)] = \langle G, \bar{F} \rangle_{\mathcal{J}}, \tag{99}$$

где $\Phi(F) = \langle F, \Phi \rangle_{\mathcal{J}}$ и

$$\langle A, B \rangle_{\mathcal{J}} = i \int_{\mathcal{J}} \hat{g}^{\mu\nu} \bar{A} \overleftrightarrow{\partial}_\mu B d\hat{\Sigma}_\nu. \tag{100}$$

В конформных координатах Бонди (u, r, x^2, x^3) (см. разд. 4) выражение для скалярного произведения на \mathcal{J} имеет следующий

* В случаях, когда это не может вызвать недоразумения, будем иногда опускать индексы in и out у образов на \mathcal{J}^\pm , одновременно опуская соответствующие индексы «+», «-» у \mathcal{J}^\pm . Поэтому, например, $\Phi = (\Omega^{-1}\Phi)|_{\mathcal{J}}$ означает следующие два равенства: $\Phi_{\text{out}} = (\Omega^{-1}\Phi)|_{\mathcal{J}^+}$ и $\Phi_{\text{in}} = (\Omega^{-1}\Phi)|_{\mathcal{J}^-}$.

простой вид:

$$\langle A, B \rangle_{\mathcal{Y}} = i \int_{-\infty}^{+\infty} du \int d\sigma \bar{A} \overleftrightarrow{\partial}_u B. \quad (101)$$

Если $\{F_\alpha, \bar{F}_\alpha\}$ — образ на \mathcal{Y} нормированного базиса $\{f_\alpha, \bar{f}_\alpha\}$ в пространстве (M, g) , то образ поля Φ на \mathcal{Y}

$$\Phi = \sum_{\alpha} (F_{\alpha} a_{\alpha} + \bar{F}_{\alpha} a_{\alpha}^*), \quad (102)$$

и операторы a_{α} и a_{α}^* удовлетворяют перестановочным соотношениям (90). Выражение (102) в этом случае представляет собой «начальные данные» для задачи рассеяния.

Установим теперь явный вид коммутатора оператора Φ на \mathcal{Y} . Для этого заметим, что при конформном преобразовании поле Φ не изменяется:

$$\tilde{\Phi} \equiv \sqrt[4]{-g} \Phi = \sqrt[4]{-\tilde{g}} \hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi},$$

поэтому из соотношения (93) на поверхности \mathcal{Y} в пространстве Пенроуза в координатах Бонди получаем

$$\begin{aligned} & [\Phi(u, x^A), \Phi(u', x'^A)] = \\ & = (-i/2) \varepsilon(u - u') \delta(x^A - x'^A) / \sqrt{\det \|g_{AB}\|}, \end{aligned} \quad (103)$$

где $\sqrt{\det \|g_{AB}\|} dx^2 dx^3$ — элемент площади на поверхности единичной сферы в координатах x^2, x^3 .

Генераторы группы асимптотических симметрий в представлении вторичного квантования. При построении квантовой теории поля в плоском пространстве важную роль (в частности, при выборе вакуума) играют операторы энергии — импульса и момента. Эти операторы реализуют представление алгебры генераторов группы Пуанкаре (группы изометрий пространства Минковского) (см. разд. 1). В настоящем разделе мы построим соответствующее представление для генераторов группы асимптотических симметрий. Пусть ξ^μ — генераторы асимптотических симметрий на \mathcal{Y} . Обозначим L_{ξ} дифференциальный оператор:

$$L_{\xi} = i [\xi^\mu \partial_\mu + \hat{\nabla}_\nu \xi^\mu / 4] |_{\mathcal{Y}} \equiv i [\xi^\mu \partial_\mu + \xi_{:A}^A / 2] |_{\mathcal{Y}}. \quad (104)$$

Операторы L_{ξ} (в отличие от $i\xi^\mu \partial_\mu$) являются эрмитовыми относительно скалярного произведения (100) на \mathcal{Y} :

$$\langle F, L_{\xi} G \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle L_{\xi} F, G \rangle_{\mathcal{Y}}. \quad (105)$$

Простая проверка показывает, что

$$[L_{\xi}, L_{\eta}] \equiv L_{\xi} L_{\eta} - L_{\eta} L_{\xi} = i L_{[\xi, \eta]}, \quad (106)$$

где $[\xi, \eta]^\mu = \xi^\nu \eta_{,\nu}^\mu - \eta^\nu \xi_{,\nu}^\mu$, и, следовательно, в эрмитовых операторах L_ξ реализуется представление алгебры Ли, соответствующей группе БМС.

Рассмотрим теперь операторы *

$$P_\xi = \langle \Phi, L_\xi \Phi \rangle / 2. \quad (107)$$

С помощью непосредственных вычислений можно убедиться, что

$$[P_\xi, \Phi] = L_\xi \Phi. \quad (108)$$

Это равенство позволяет доказать, что

$$[P_\xi, P_\eta] = P_{[\xi, \eta]} / i, \quad (109)$$

т. е. построенные операторы P_ξ являются искомыми выражениями для генераторов асимптотических симметрий в представлении вторичного квантования. Доказательство соотношения (109) проведем следующим образом. Последовательно применяя (108), получаем

$$[P_\xi, [P_\eta, \Phi]] = L_\eta L_\xi \Phi; \quad [P_\eta, [P_\xi, \Phi]] = L_\xi L_\eta \Phi.$$

Вычитая эти два равенства и применяя тождество Якоби $[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]$, находим

$$[[P_\xi, P_\eta], \Phi] = [L_\mu, L_\xi] \Phi = L_{[\xi, \eta]} \Phi / i = [P_{[\xi, \eta]} / i, \Phi].$$

Таким образом, оператор $[P_\xi, P_\eta] - P_{[\xi, \eta]} / i$ коммутирует с Φ и с любыми операторами, построенными из Φ . Из полноты операторной алгебры следует (105).

В заключение этого раздела отметим, что операторы асимптотических инвариантов (72)

$$P[\xi] = \int_{\mathcal{Y}} du d\sigma [(2\alpha + 1) \partial_u \Phi \xi^\mu \partial_\mu \Phi + 2\alpha \Phi \xi^\mu \partial_\mu \partial_u \Phi] \quad (110)$$

с помощью операции интегрирования по частям по координате u могут быть приведены к виду, совпадающему с выражением для P_ξ :

$$P[\xi] = P_\xi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Y}} du d\sigma (\partial_u \Phi \xi^\mu \partial_\mu \Phi - \Phi \xi^\mu \partial_\mu \partial_u \Phi). \quad (111)$$

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАКУУМА

Перейдем ко второй части задачи квантования — определению и интерпретации вакуума и n -частичных состояний в искривленном пространстве — времени.

* Мы оставляем пока в стороне вопрос о доопределении операторов. Заметим лишь, что соответствующее доопределение в рассматриваемых ниже случаях достигается с помощью операции нормального упорядочения (см. разд. 10) и сводится как обычно, к вычитанию «нулевых колебаний».

Понятие вакуума в искривленном пространстве — времени. Обычно определение вакуума связывают с наличием группы симметрий. В частности, если пространство — время допускает глобальное времениподобное поле Киллинга (или, в случае безмассовых частиц, конформное времениподобное поле Киллинга), то вакуумом называют низшее собственное состояние генератора трансляций (гамильтониана) вдоль этого поля. При этом существует инвариантное разбиение на положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения (74) и вакуум обращается в нуль под действием оператора уничтожения, соответствующего отрицательным частотам. В общем случае такое глобальное поле Киллинга отсутствует и определение вакуума становится неоднозначным. Эта неоднозначность соответствует физической неоднозначности отделения виртуальных частиц от реальных и проявляется в неоднозначности разделения на положительные и отрицательные частоты.

Выше речь шла о глобальном вакууме. Напомним, однако (см. разд. 2), что вакуум, как и все другие состояния, определяется на поверхностях Коши Σ . В [41] было показано, что на светоподобных гиперповерхностях Коши для достаточно широкого класса пространств можно естественным образом определить вакуум, используя аффинные свойства таких гиперповерхностей.

Для определения вакуума на Σ (см. разд. 2) не обязательно требовать, чтобы рассматриваемая система была глобально инвариантна относительно группы Пуанкаре (в плоском случае); достаточно, чтобы в некоторой окрестности Σ была приближенная инвариантность (см. обсуждение этого понятия в разд. 5), и чем меньше отклонение симметрии от точной, тем ближе свойства вакуума на Σ $|0; \Sigma\rangle$ к свойствам обычного плоского вакуума $|0\rangle$. Поэтому в искривленном пространстве — времени можно, естественно, определить вакуум на таких гиперповерхностях, в окрестности которых пространство — время можно с хорошей точностью считать плоским.

Вакуум на \mathcal{J} . В асимптотически-плоском пространстве — времени такими гиперповерхностями являются, как мы знаем \mathcal{J}^- и \mathcal{J}^+ , на которых заданы два описанных выше представления алгебры Бонди — Метцнера — Сакса с однозначно выделенными генераторами трансляций $P_{in, \mu}$ и $P_{out, \mu}$. Вакуум на \mathcal{J}^+ $|0, out\rangle$ (соответственно на \mathcal{J}^- $|0; in\rangle$) можно теперь определить условием

$$P_{out, \mu} |0; out\rangle = 0 \quad (P_{in, \mu} |0; in\rangle = 0) \quad (112)$$

или, что эквивалентно, условием

$$a_{out, \alpha} |0; out\rangle = 0 \quad (a_{in, \alpha} |0; in\rangle = 0),$$

где $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} = \langle f_\alpha, \Phi \rangle$ и f_α — любое решение волнового уравнения (74), имеющее образ на \mathcal{Y}^+ , равный

$$F_{\text{out}, \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \exp(-i\omega u) \mathcal{F}_k(\omega) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \alpha = (k, l, m), \quad (113)$$

т. е. содержащий только отрицательные частоты] относительно запаздывающего времени u . Операторы $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}$ и $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^* = -\langle \bar{f}_\alpha, \Phi \rangle$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}, \mathbf{a}_{\text{out}, \beta}^*] &= \delta_{\alpha\beta}; \\ [\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}, \mathbf{a}_{\text{out}, \beta}] &= [\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^*, \mathbf{a}_{\text{out}, \beta}^*] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Аналогично определяются операторы $\mathbf{a}_{\text{in}, \alpha}$, $\mathbf{a}_{\text{in}, \alpha}^*$, также удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям. n -Частичные in- и out-состояния задаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n; \text{in}\rangle &= \mathbf{a}_{\text{in}, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{\text{in}, \alpha_n}^* |0; \text{in}\rangle; \\ |\alpha_1, \dots, \alpha_n; \text{out}\rangle &= \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha_n}^* |0; \text{out}\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

и соответствуют частицам, приходящим с \mathcal{Y}^- -бесконечности и уходящим на \mathcal{Y}^+ -бесконечность. Соответствующие гильбертовы пространства обозначим \mathcal{H}_{in} и \mathcal{H}_{out} .

Операторы $\mathbf{a}_{\text{in}, \alpha}$ и $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}$ связаны линейным каноническим преобразованием, поскольку выражаются через решения одного и того же линейного уравнения (74):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} &= \sum_{\beta} (A_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\text{in}, \beta} + B_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\text{in}, \beta}^*); \\ \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^* &= \sum_{\beta} (\bar{A}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\text{in}, \beta}^* + \bar{B}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\text{in}, \beta}). \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Здесь $A_{\alpha\beta} = \langle f_\alpha, p_\beta \rangle$; $B_{\alpha\beta} = \langle f_\alpha, \bar{p}_\beta \rangle$, где p_β — решения (74) с отрицательно-частотными образами на \mathcal{Y}^- относительно опережающего времени v .

10. S-МАТРИЦА В АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Используя введенные выше in- и out-состояния, в этом разделе получим выражения для S -матрицы и для потоков на \mathcal{Y} .

Функциональное выражение для S -матрицы. Если предположить, что операторы $\mathbf{a}_{\text{in}, \alpha}$ и $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}$ образуют полный набор и пространства \mathcal{H}_{in} и \mathcal{H}_{out} совпадают, то должен существовать унитарный оператор S , называемый S -матрицей, обладающий свойством

$$\begin{aligned}
 S^* \mathbf{a}_{in, \alpha} S &= \mathbf{a}_{out, \alpha}. \text{ Очевидно, } |0; in\rangle = S |0; out\rangle \text{ и} \\
 S_{\beta_1 \dots \beta_n; \alpha_1 \dots \alpha_m} &\equiv \langle \beta_1, \dots, \beta_n; out | \alpha_1, \dots, \alpha_m; in \rangle = \\
 &= \langle 0; out | \mathbf{a}_{out, \beta_1} \dots \mathbf{a}_{out, \beta_n} S \mathbf{a}_{out, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{out, \alpha_n}^* | 0; out \rangle. \quad (117)
 \end{aligned}$$

Оператор S осуществляет линейное каноническое преобразование, и нетрудно получить выражение для него через величины $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ (116). Проще всего это выражение записать, если использовать функциональное представление [42] операторов вторичного квантования.

Напомним, что каждому оператору, записанному в нормальной форме:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \sum_{\substack{m, n \\ (\alpha), (\beta)}} A_{mn} (\alpha_1, \dots, \alpha_m | \beta_1, \dots, \beta_n) \times \\
 &\times \mathbf{a}_{out, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{out, \alpha_m}^* \mathbf{a}_{out, \beta_1} \dots \mathbf{a}_{out, \beta_n},
 \end{aligned}$$

ставится в соответствие функционал

$$A(a^*, a) = \sum_{\substack{m, n \\ (\alpha), (\beta)}} A_{mn} (\alpha_1, \dots, \alpha_m | \beta_1, \dots, \beta_n) a_{\alpha_1}^* \dots a_{\alpha_m}^* a_{\beta_1} \dots a_{\beta_n},$$

вектору

$$\Phi = \sum_{n, (\alpha)} \Phi_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathbf{a}_{out, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{out, \alpha_n}^* | 0; out \rangle$$

$$\text{— функционал } \Phi(a^*) = \sum_{n, (\alpha)} \Phi_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n) a_{\alpha_1}^* \dots a_{\alpha_n}^*$$

и скалярное произведение записывается в виде континуального интеграла

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \overline{\Phi_1(a^*)} \Phi_2(a^*) \exp(-a^* a) Da^* Da. \quad (118)$$

Здесь и далее использованы обозначения $a^* a = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^* a_{\alpha}$ и т. д.

Функциональное выражение для S -матрицы имеет вид (см. приложение 4):

$$\begin{aligned}
 S(a^*, a) &= [\det(A^* A)]^{-1/4} \exp \{ [a \bar{B} A^{-1} a + \\
 &+ 2a^* (A^{-1} - I) a - a^* A^{-1} B a^*] / 2 \}, \quad (119)
 \end{aligned}$$

а соответствующий оператор

$$\begin{aligned}
 S &= [\det(A^* A)]^{-1/4} \times \\
 &\times \exp(-a^* A^{-1} B a^* / 2) : \exp[a^* (A^{-1} - I) a] : \exp(a \bar{B} A^{-1} a / 2), \quad (120)
 \end{aligned}$$

где «: :» означает нормальное упорядочение относительно out-вакуума. Поэтому матричные элементы S -матрицы (117) можно записать через вариационные производные от производящего функ-

ционала (см. приложение 4):

$$S_{\beta_1, \dots, \beta_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m} = (\delta^n / \delta j_{\beta_1} \dots \delta j_{\beta_n}) (\delta^m / \delta j_{\alpha_1}^* \dots \delta j_{\alpha_m}^*) \exp [i\omega(j, j^*)] / |_{j=j^*=0}, \quad (121)$$

где

$$\exp [i\omega(j, j^*)] = [\det(A^*A)]^{-1/4} \exp [(-jA^{-1}Bj + j^*\bar{B}A^{-1}j^* + 2j^*A^{-1}j) / 2]. \quad (122)$$

Приведем еще другое выражение для S -матрицы (которое может оказаться полезным в приложениях), основанное на *background-формализме* [43, 44].

В плоском пространстве — времени матричные элементы S -матрицы с действием $W[\varphi]$ можно представить в виде

$$S_{p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_m} = [\delta^m / \delta a(k_1) \dots \delta a(k_m)] [\delta^n / \delta b(p_1) \dots \delta b(p_n)] \times Z(a, b) |_{a=b=0}, \quad (123)$$

где $Z(a, b) = \int \exp(iW[\varphi]) D\varphi$ и интегрирование ведется по всем функциям с асимптотиками

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\sim \int a(k) \exp[i\{\omega(k)x^0 - kx\}] d^3k + \text{к. с.}, \quad x^0 \rightarrow -\infty; \\ \varphi(x) &\sim \int b(p) \exp\{-i\{\omega(p)x^0 - px\}\} d^3p + \text{к. с.}, \quad x^0 \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Если действие $W[\varphi]$ квадратично по φ , то интеграл легко вычисляется и $Z(a, b) = c \exp iW[\varphi_{\text{кл}}]$, где $\varphi_{\text{кл}}$ — решение классических уравнений движения с асимптотиками (124).

Обобщение на случай асимптотически-плоского пространства — времени очевидно:

$$S_{\beta_1, \dots, \beta_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m} = (\delta^n / \delta F_{\text{out}, \beta_1} \dots \delta F_{\text{out}, \beta_n}) \times (\delta^m / \delta \bar{F}_{\text{in}, \alpha_1} \dots \delta \bar{F}_{\text{in}, \alpha_m}) c \exp iW[\varphi_{\text{кл}}]_{\substack{F_{\text{in}}=0, \\ F_{\text{out}}=0}}. \quad (125)$$

где $\varphi_{\text{кл}}$ — решение уравнений поля (74) с асимптотиками $\varphi_{\text{кл}}(v, r, \theta, \varphi) \sim F_{\text{in}, \alpha}(v, \theta, \varphi) r^{-1} + \text{к. с.}, r \rightarrow \infty, v, \theta, \varphi$ — фиксированы; $\varphi_{\text{кл}}(u, r\theta, \varphi) \sim \bar{F}_{\text{out}, \alpha}(u, \theta, \varphi) r^{-1} + \text{к. с.}, r \rightarrow \infty, u, \theta, \varphi$ — фиксированы, $F_{\text{in}, \alpha}$ и $F_{\text{out}, \alpha}$ — положительно-частотные базисы на \mathcal{J}^\pm (113).

Вычисление потоков на \mathcal{J} . Чтобы избавиться от расходимостей, связанных с нулевыми колебаниями, введем для операторов на \mathcal{J} операцию нормального упорядочения

$$\mathcal{N}_{\text{out}}^{\text{in}}(A) = A - \langle 0; \text{out} | A | 0; \text{in} \rangle. \quad (126)$$

Конечные операторы $\mathcal{N}_{\text{out}}(\mathbf{P}_i)$, где \mathbf{P}_i дается выражением (110), являются операторами потока энергии — импульса на \mathcal{J}^+ . Поэтому, в частности, поток энергии — импульса частиц, родившихся в гравитационном поле из вакуума

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \langle 0; \text{in} | \mathcal{N}_{\text{out}}(\mathbf{P}_i) | 0; \text{in} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int d\sigma \langle 0; \text{in} | \mathcal{N}_{\text{out}}(T_i(\Phi_{\text{out}}, \Phi_{\text{out}})) | 0; \text{in} \rangle, \end{aligned} \quad (127)$$

где

$$T_i(A, B) = (2\alpha + 1) \partial_u A \xi_{(i)}^\mu \partial_\mu B + 2\alpha A \xi_{(i)}^\mu \partial_\mu \partial_u B \quad (128)$$

и $\xi_{(i)}^\mu$ — генераторы подгруппы трансляций на \mathcal{J}^+ .

Если прибор отдаленного наблюдателя (наблюдателя на \mathcal{J}^+) регистрирует вылетающие частицы только в интервале запаздывающего времени (u_1, u_2) , то измеренный поток энергии — импульса в течение этого интервала [35]

$$P_i^f = \int dud\sigma f(u) \langle 0; \text{in} | \mathcal{N}_{\text{out}}(\mathbf{P}_i) | 0; \text{in} \rangle, \quad (129)$$

где функция разрешения прибора $f(u)$ равна единице в интервале (u_1, u_2) и обращается в нуль вне его. Подставляя разложение (102) в (127) и учитывая, что члены, содержащие два оператора рождения или два оператора уничтожения, после интегрирования по u исчезают, получаем

$$\begin{aligned} P_i &= \int dud\sigma \sum_{\alpha, \beta} [T_i(\bar{F}_{\text{out}, \alpha}, F_{\text{out}, \beta}) + \\ &+ T_i(F_{\text{out}, \beta}, \bar{F}_{\text{out}, \alpha})] \langle 0; \text{in} | \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^* \mathbf{a}_{\text{out}, \beta} | 0; \text{in} \rangle = \\ &= \int dud\sigma \sum_{\alpha, \beta, \lambda} [T_i(\bar{F}_{\text{out}, \alpha} F_{\text{out}, \beta}) + \\ &+ T_i(F_{\text{out}, \beta}, \bar{F}_{\text{out}, \alpha})] \bar{B}_{\alpha\lambda} B_{\beta\lambda}. \end{aligned} \quad (130)$$

Оператор \mathbf{n}_α числа частиц в состоянии α на \mathcal{J}^+ равен

$$\mathbf{n}_{\text{out}, \alpha} = \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^* \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}$$

поэтому среднее значение числа частиц, рожденных из вакуума в этом состоянии:

$$\mathbf{n}_{\text{out}, \alpha} = \langle 0; \text{in} | \mathbf{n}_{\text{out}, \alpha} | 0; \text{in} \rangle = \sum_{\beta} \bar{B}_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}. \quad (131)$$

11. КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

В этом разделе покажем, каким образом развитый ранее формализм применяется в чрезвычайно важном случае, когда источником гравитационного поля является *коллапсирующее сферически-симметричное тело* (рис. 5) [34] (см. также [35, 45, 47—53].

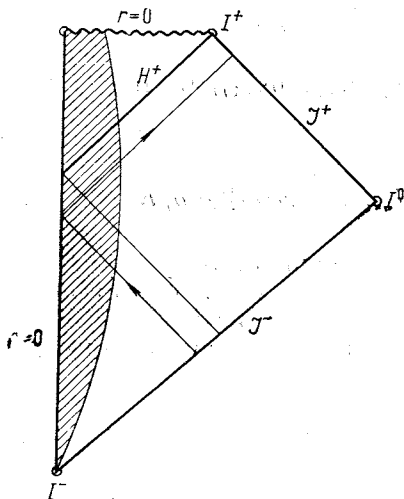


Рис. 5.

Вычисление наблюдаемых на \mathcal{J}^+ при наличии горизонта событий. Матрица плотности. Важной особенностью подобной задачи является возникновение в результате коллапса тела горизонта событий H^+ *. Это приводит к тому, что хотя поверхность \mathcal{J}^- по-прежнему является полной Коши-поверхностью для безмассовых полей, однако полная Коши-поверхность в будущем уже не совпадает с \mathcal{J}^+ . В качестве подобной полной Коши-поверхности в будущем можно выбрать, например, $\mathcal{J}^+ \cup H^+$ (безмассовые частицы или вылетают на бесконечность

или падают в черную дыру). В соответствии с этим в качестве базиса в будущем можно выбрать набор $(f_\alpha, q_\alpha, \bar{f}_\alpha, \bar{q}_\alpha)$, где базисные функции f_α и q_α определяются условиями:

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha|_{H^+} = 0; \quad Q_{out, \alpha} = 0; \\ F_{out, \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \frac{\exp(-i\omega u)}{\sqrt{2\omega}} \mathcal{F}_k(\omega) Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Здесь u — аффинный параметр на \mathcal{J}^+ (время Бонди). Конкретный выбор положительно-частотного базиса q_α и определение положи-

* Горизонт событий является световой поверхностью, ограничивающей область пространства — времени, откуда невозможен выход сигналов к наблюдателю, находящемуся в окрестности световой бесконечности \mathcal{J}^+ . Формальное определение горизонта событий H^+ выглядит следующим образом [46]: $H^+ = \partial(\mathcal{J}^-[\mathcal{J}^+])$, где $\mathcal{J}^- [A]$ — «причинное прошлое» множества событий A и ∂K — граница множества K .

тельно-частотных функций на H^+ , связанных с выбором вакуума $|0; H^+\rangle$, как мы увидим, оказываются несущественными при нахождении матричных элементов от наблюдаемых на \mathcal{I}^+* .

Разложение поля Φ по базисным функциям имеет вид

$$\Phi = \sum_{\alpha} (f_{\alpha} \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} + \bar{f}_{\alpha} \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^* + q_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha} + \bar{q}_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha}^*), \quad (133)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} &= \langle f_{\alpha}, \Phi \rangle = \langle F_{\text{out}, \alpha} \Phi_{\text{out}} \rangle \mathcal{I}^+; \\ \mathbf{b}_{\beta} &= \langle q_{\beta}, \Phi \rangle = \langle q_{\beta}, \Phi \rangle_{H^+} \end{aligned}$$

— операторы уничтожения частиц в состоянии α на \mathcal{I}^+ и в состоянии β на H^+ соответственно. Вакуумное состояние в будущем $|0; \text{out}\rangle$, определяемое условиями

$$\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} |0; \text{out}\rangle = \mathbf{b}_{\beta} |0; \text{out}\rangle = 0, \quad (134)$$

представляется в виде

$$|0; \text{out}\rangle = |0; \mathcal{I}^+\rangle |0; H^+\rangle, \quad (135)$$

где соответствующие вакуумы на \mathcal{I}^+ и H^+ удовлетворяют условиям

$$\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha} |0; \mathcal{I}^+\rangle = 0; \mathbf{b}_{\beta} |0; H^+\rangle = 0.$$

Вектор полного гильбертова пространства состояний в будущем \mathcal{H}_{out} записывается в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{m, n} \Psi_{m, n} |n; \mathcal{I}^+\rangle |m; H^+\rangle, \quad (136)$$

где

$$\begin{aligned} |n; \mathcal{I}^+\rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n; \mathcal{I}^+\rangle = \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha_1}^* \dots \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha_n}^* |0; \mathcal{I}^+\rangle; \\ |m; H^+\rangle &= |\beta_1, \dots, \beta_m; H^+\rangle = \mathbf{b}_{\beta_1}^* \dots \mathbf{b}_{\beta_m}^* |0; H^+\rangle. \end{aligned}$$

Наблюдаемые α на \mathcal{I}^+ являются функциями операторов $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}$ и $\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^*$: $\alpha = \alpha(\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}, \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^*)$. Рассмотрим теперь вопрос о вычислении среднего значения этой наблюдаемой в произвольном in-состоянии Ψ :

$$\alpha_{\Psi} = \langle \Psi | \alpha(\mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}, \mathbf{a}_{\text{out}, \alpha}^*) | \Psi \rangle. \quad (137)$$

* В работах [41, 47] показано, что положительно-частотные функции на H^+ естественным образом определяются, как функции, содержащие только положительные частоты относительно аффинного параметра вдоль образующих горизонта событий H^+ . Соответствующее определение вакуума является частным случаем определения \mathcal{H} -вакуума, введенного в работе [41]. Выбор вакуума $|0; H^+\rangle$ крайне важен при обсуждении вопроса об обратном влиянии рожденных частиц на метрику пространства — времени.

Используя разложения (136) этого in-состояния Ψ по out-базису, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{\Psi} &= \sum_{\substack{m, n \\ m', n'}} \Psi_{mn} \bar{\Psi}_{m'n'} \langle H^+; m' | m; H^+ \rangle \langle n'; \mathcal{J}^+ | \alpha | n; \mathcal{J}^+ \rangle = \\ &= \sum_{n, n'} R_{n'n} \langle n'; \mathcal{J}^+ | \alpha | n; \mathcal{J}^+ \rangle, \end{aligned} \quad (138)$$

где $R_{n'n} = \sum_m \bar{\Psi}_{mn'} \Psi_{mn}$.

Если ввести матрицу плотности

$$\rho = \sum_{n, n'} |n'; \mathcal{J}^+ \rangle R_{nn'} \langle n; \mathcal{J}^+|, \quad (139)$$

то соотношение (138) можно записать следующим образом [48]:

$$\alpha_{\Psi} = \text{Sp}_{\mathcal{J}^+} (\rho \alpha), \quad (140)$$

где $\text{Sp}_{\mathcal{J}^+} (\mathbf{B})$ означает сумму диагональных матричных элементов оператора \mathbf{B} по полной системе состояний на \mathcal{J}^+ . Появление матрицы плотности в рассматриваемой задаче вызвано тем, что в этой задаче полностью игнорируется информация о частицах, падающих в черную дыру.

Можно убедиться, что матрица плотности ρ не зависит от выбора вакуума на H^+ . Действительно, при переходе к новому вакуумному вектору $|0'; H^+\rangle$ на H^+ коэффициенты Ψ_{mn} в формуле (136) испытывают унитарное преобразование $\Psi_{mn} \rightarrow \Psi'_{m'n} = \sum_m C_{m'm} \Psi_{mn}$.

Однако величины $R_{n'n} = \sum_m \bar{\Psi}_{mn'} \Psi_{mn}$ в силу унитарности матрицы $C_{m'm}$ не изменяются, и поэтому при подобном преобразовании матрица плотности ρ остается неизменной.

Эффект Хокинга. Тепловой характер излучения от черных дыр. Вычислим теперь поток излучения от черной дыры, возникающей в результате коллапса невращающегося тела. Для величины потока энергии E рожденных из вакуума частиц через сферу большого радиуса (поток на \mathcal{J}^+) в интервале (запаздывающего) времени (u_1, u_2) можно воспользоваться формулой (130):

$$\begin{aligned} E(u_1, u_2) &= \int_{u_1}^{u_2} dud\sigma \langle 0; \text{in} | \mathcal{N}_{\text{out}} (\partial_u \Phi_{\text{out}} \partial_u \bar{\Phi}_{\text{out}}) | 0; \text{in} \rangle = \\ &= 2 \int_{u_1}^{u_2} dud\sigma \sum_{\alpha, \alpha', \beta} \partial_u \bar{F}_{\text{out}, \alpha} \partial_u F_{\text{out}, \alpha'} \bar{B}_{\alpha\beta} B_{\alpha'\beta}. \end{aligned} \quad (141)$$

Таким образом, для нахождения $E(u_1, u_2)$ требуется вычислить величины

$$B_{\alpha\beta} = \langle f_\alpha, \bar{p}_\beta \rangle. \quad (142)$$

В силу сферической симметрии рассматриваемой задачи удобно в качестве базисных функций f_α и p_α ($\alpha = \omega, l, m$) выбрать

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{out}, \alpha} &\equiv F_{\text{out}; \omega, l, m} = (2\pi)^{-1/2} [\exp(-i\omega u) / \sqrt{2\omega}] \times \\ &\quad \times Y_{lm}(\theta, \varphi); \\ P_{\text{in}, \alpha} &\equiv P_{\text{in}; \omega, l, m} = (2\pi)^{-1/2} [\exp(-i\omega v) / \sqrt{2\omega}] \times \\ &\quad \times Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \right\} (143)$$

где u (v) — аффинный параметр на \mathcal{Y}^+ (\mathcal{Y}^-). Условия нормировки для этих базисов имеют вид

$$\begin{aligned} \langle f_{\omega lm}, f_{\omega' l' m'} \rangle &= \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}; \\ \langle p_{\omega lm}, p_{\omega' l' m'} \rangle &= \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (144)$$

Так как скалярное произведение (142) не зависит от выбора поверхности Коши Σ , на которой оно вычисляется, то можно в качестве Σ выбрать поверхность \mathcal{Y}^- . В этом случае

$$\begin{aligned} B_{\alpha, \alpha'} &\equiv B_{\omega lm, \omega' l' m'} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int dv d\sigma \bar{F}_{\text{in}, \omega lm} \overleftrightarrow{\partial}_v \frac{\exp(i\omega' v)}{\sqrt{2\omega'}} \bar{Y}_{l' m'} \end{aligned} \quad (145)$$

и для определения $B_{\alpha\alpha'}$ требуется найти образ $F_{\text{in}, \alpha}$ на \mathcal{Y}^- такого решения уравнения, образ которого на \mathcal{Y}^+ выражается формулой (143). Этот образ на \mathcal{Y}^- можно записать в виде суммы

$$F_{\text{in}, \alpha} = F_{\text{in}, \alpha}^{(1)} + F_{\text{in}, \alpha}^{(2)}, \quad (146)$$

где $F_{\text{in}, \alpha}^{(1)} = (4\pi\omega)^{-1/2} \alpha_{\omega l} \exp(-i\omega v) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ соответствует рассеянию монохроматической волны, испущенной с \mathcal{Y}^+ , на потенциальном барьере гравитационных и центробежных сил. При вычислении $F_{\text{in}, \alpha}^{(2)}$ можно воспользоваться приближением геометрической оптики [34], поскольку вблизи горизонта событий эффективная длина волны стремится к нулю. Поэтому

$$F_{\text{in}, \alpha}^{(2)} = \beta_{\omega l} (2\pi)^{-1/2} \exp[-i\omega W(v)] (2\omega)^{-1/2} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (147)$$

где $u = W(v)$ — момент запаздывающего времени, в который световой луч, испущенный с \mathcal{Y}^- в момент опережающего времени v , попадает на \mathcal{Y}^+ . Величины $\alpha_{\omega l}$ и $\beta_{\omega l}$ — коэффициенты отражения и прохождения для волны f_α в гравитационном поле черной дыры.

Простой анализ [34] распространения световых лучей в гравитационном поле коллапсирующего тела показывает, что при больших значениях u функция $u = W(v)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} W(v) &= -4m \ln(v_0 - v) + W_0; \\ F_{\text{in}, \alpha}^{(2)}(v) &= \theta(v_0 - v) F_{\text{in}, \alpha}^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

где m — масса черной дыры (для нестационарного случая см. [35]). (Световой сигнал, посланный с \mathcal{I}^- в момент времени v_0 , после прохождения через центр коллапсирующего тела распространяется вдоль горизонта событий.) Если учесть, что $F_{\text{in}, \alpha}^{(1)}$ — положительно-частотная функция и вклад в $B_{\alpha\beta}$ не дает, то из (145) нетрудно получить

$$\begin{aligned} B_{\alpha\alpha'} &= -\delta_{ll'} \delta_{mm'} \bar{\beta}_{\omega l} \exp[i(v\omega' + W_0\omega)] (2\pi)^{-1} \times \\ &\times (\omega'/\omega)^{1/2} \Gamma(1 - 4im\omega) (i\omega')^{4im\omega - 1}. \end{aligned} \quad (149)$$

Поэтому

$$\sum_{\beta} \bar{B}_{\alpha\beta} B_{\alpha'\beta} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} |\beta_{\omega l}|^2 \omega \delta(\omega - \omega') [\exp(8\pi m\omega) - 1]^{-1}. \quad (150)$$

При выводе этой формулы полезно иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dt t^{-(1+4im\omega)} &= \frac{1}{4m} \delta(\omega); \\ \Gamma(1 + ix) \Gamma(1 - ix) &= \pi x / \text{sh } \pi x. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение (150) в (141), окончательно получаем

$$\frac{dE}{du} = \frac{E(u_1, u_2)}{(u_2 - u_1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l, m} |\beta_{\omega l}|^2 \frac{\omega}{\exp(8\pi m\omega) - 1}, \quad (151)$$

т. е. после образования черной дыры (при больших u) последняя становится источником стационарного потока излучения, причем спектр этого излучения (если пренебречь рассеянием излучения на гравитационном поле) имеет тепловой характер с эффективной температурой $\theta = \hbar c^3 / 8\pi Gm$. Этот факт согласуется с тем, что в рассматриваемой задаче соответствующая матрица плотности (139) является тепловой, т. е.

$$\rho = \exp \left\{ -\theta^{-1} \sum_{\omega l m} (\omega \mathbf{a}_{\text{out}}^*, \omega l m \mathbf{a}_{\text{out}}, \omega l m) \right\}. \quad (152)$$

Последнее выражение для матрицы плотности в задаче об образовании черной дыры можно получить и непосредственным вычислением [49—52, 60].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Асимптотическое поведение безмассового поля в пространстве Минковского

В этом приложении дано доказательство теоремы об асимптотике решений волнового уравнения на \mathcal{J}^\pm . Использован наиболее удобный, на наш взгляд, метод для обсуждения подобных вопросов — преобразование Радо на [54] (другие подходы изложены в [55, 56]).

Теорема. Пусть $\varphi(t, x)$ — решение волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - \Delta)\varphi(t, x) = 0, \quad x \in R^3$$

с начальными данными $\varphi|_{t=0} = f_1(x)$, $\dot{\varphi}|_{t=0} = f_2(x)$. Предположим, что $f_1, f_2 \in C^2(R^3)$ и энергия конечна:

$$\int (|\nabla f_1|^2 + f_2^2) dx < \infty.$$

Пусть

$$\Phi(u, \sigma) = \frac{1}{4\pi} [\partial_u R_1(u, \sigma) - R_2(u, \sigma)],$$

где

$$R_i(u, \sigma) = \int_{S^2} f_i(x) \sigma(x\sigma - u) d\sigma; \quad \sigma \in S^2; \quad |\sigma| = 1;$$

$d\sigma$ — элемент поверхности на S^2 ; $i = 1, 2$. Тогда, если $\Phi(u, \sigma)$ имеет компактный носитель, то существует $\lim_{r \rightarrow \infty} \{\varphi(u+r, r\sigma) = \Phi(u, \sigma)\}$.

Решение φ определяется по функции Φ однозначно:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int \Phi'(x\sigma, \sigma) d\sigma; \\ f_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \Phi''(x\sigma, \sigma) d\sigma; \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1})$$

здесь штрих означает производную Φ по первому аргументу.

Доказательство основано на следующем представлении решений волнового уравнения:

$$\varphi(t, x) = \int K(x\sigma - t, \sigma) d\sigma,$$

где

$$K(u, \sigma) = -\frac{1}{2\pi} \partial_u \Phi(u, \sigma). \quad (\text{П.2})$$

Отсюда $\varphi(u+r, r\sigma) = \int K(r(\sigma v - 1) - u, v) dv$. Поскольку функция K имеет компактный носитель, при $r \rightarrow \infty$

$$r \int K(r(\sigma v - 1), v) dv \rightarrow r \int K(r(\sigma v - 1), \sigma) dv =$$

$$= 2\pi r \int_{-1}^{+1} K(r(z-1)-u, \sigma) dz \rightarrow 2\pi \int_0^{\infty} K(\rho-u, \sigma) d\rho = \Phi(u, \sigma).$$

Для доказательства представления (П.2) используется известное равенство

$$\Delta^2 \int |(x, \sigma)| d\sigma = -16 \pi^2 \delta^{(3)}(x),$$

в силу которого для любой $f \in C_0^\infty(R^3)$

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \int R(x\sigma, \sigma) d\sigma,$$

где $R(u, \sigma) = \int f(x) \delta(x\sigma - u) dx$. Отсюда следует, что пара функций $\{f_1(x), f_2(x)\}$ находится во взаимнооднозначном соответствии с функцией

$$K(u, \sigma) = \frac{1}{8\pi^2} [\partial_u^2 R_1(u, \sigma) + \partial_u R_2(u, \sigma)],$$

т. е. мы имеем разложение начальных данных по плоским волнам. Формула (П.2) получается затем сдвигом по t .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Конформные преобразования

Конформное отображение римановых пространств. Наряду с исходным римановым пространством (M, g) рассмотрим пространство (M, \hat{g}) , где

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}; \quad \hat{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2} g^{\alpha\beta}. \tag{П.3}$$

Будем обозначать все величины, относящиеся к пространству (M, \hat{g}) , теми же символами, что и для пространства (M, g) , добавляя крышечку сверху. Обозначим $\Omega_\alpha = \hat{\nabla}_\alpha \Omega$;

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega} &= \hat{g}^{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta / \Omega^2; \quad \hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \Omega / \Omega; \\ \hat{\sigma} &= \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \square \Omega / \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{П.4}$$

Имеет место следующая связь между соответствующими символами Кристоффеля, тензорами кривизны и другими аналогичными величинами в пространствах (M, g) и (M, \hat{g}) (см., например, [20]):

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha - \Omega^{-1} (\delta_{\beta}^\alpha \Omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \Omega_\beta - \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{g}^{\alpha\tau} \Omega_\tau); \tag{П.5}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Omega^{-2} [\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \hat{g}_{\alpha\delta} \hat{\sigma}_{\beta\gamma} - \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_{\alpha\delta} + \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{\sigma}_{\beta\delta} + \\ &+ \hat{g}_{\beta\delta} \hat{\sigma}_{\alpha\gamma} + \hat{\omega} (\hat{g}_{\alpha\delta} \hat{g}_{\beta\gamma} - \hat{g}_{\alpha\gamma} \hat{g}_{\beta\delta})]; \end{aligned} \tag{П.6}$$

$$R_{\beta\gamma} = \hat{R}_{\beta\gamma} - 2\hat{\sigma}_{\beta\gamma} + (3\hat{\omega} - \hat{\sigma}) \hat{g}_{\beta\gamma}; \tag{П.7}$$

$$R = \Omega^2 (\hat{R} - 6\hat{\sigma} + 12\hat{\omega}); \tag{П.8}$$

$$G_{\beta\gamma} \equiv R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R / 2 = \hat{G}_{\beta\gamma} - 2\hat{\sigma}_{\beta\gamma} + (2\hat{\sigma} - 3\hat{\omega}) \hat{g}_{\beta\gamma}; \tag{П.9}$$

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}, \tag{П.10}$$

где $C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля.

Используя соотношение (П.5), нетрудно, в частности, убедиться, что

$$\nabla_{\mu} \xi^{\nu} = \hat{\nabla}_{\mu} \xi^{\nu} - \Omega^{-1} (\Omega_{\mu} \xi^{\nu} + \delta_{\mu}^{\nu} \Omega_{\alpha} \xi^{\alpha} - \xi_{\mu} \hat{g}^{\nu\tau} \Omega_{\tau}). \tag{П.11}$$

Пусть кривая $\gamma: x^{\mu} = x^{\mu}(r)$ является световой геодезической в (M, \hat{g}) , тогда она одновременно является и световой геодезической в метрике \hat{g} . Если r — аффинный параметр вдоль γ в метрике g , то

$$\hat{r} = \int dr \Omega^2 (x^{\mu}(r))$$

является аффинным параметром вдоль этой кривой в метрике \hat{g} . Доказательство приведенного утверждения следует из соотношения (П.11), если учесть, что касательный к световой геодезической вектор $l^{\mu} = dx^{\mu}/dr$ удовлетворяет уравнению $l^{\mu} \nabla_{\mu} l^{\nu} = 0$.

Конформная инвариантность уравнений. Пусть поле (или набор полей) φ удовлетворяет уравнению $D_g[\varphi] = 0$, коэффициенты которого зависят от метрики g . Рассмотрим конформное преобразование метрики вида (П.3). Говорят, что уравнение для φ является конформно-инвариантным, если существует такое преобразование $\varphi \rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi, \Omega)$, что $\hat{\varphi}$ является решением уравнения $D_{\hat{g}}[\hat{\varphi}] = 0$ тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет уравнению $D_g[\varphi] = 0$.

Уравнение скалярного безмассового поля

$$(\square + R/6) \varphi = 0 \tag{П.12}$$

является конформно-инвариантным, причем $\hat{\varphi} = \Omega^{-1} \varphi$. Заметим, что из соотношений (П.8) и (П.11)

$$\square \varphi = \Omega^3 (\hat{\square} \hat{\varphi} - 2\hat{\omega} \hat{\varphi} + \hat{\sigma} \hat{\varphi}); \quad R\varphi = \Omega^3 (\hat{R} - 6\hat{\sigma} + 12\hat{\omega}) \hat{\varphi},$$

поэтому

$$\square \varphi + R\varphi/6 = \Omega^3 (\hat{\square} \hat{\varphi} + \hat{R} \hat{\varphi}/6).$$

Уравнения Максвелла и уравнения поля Янга — Миллса конформно-инвариантны. Конформная инвариантность уравнений Максвелла

$$F_{[\mu\nu, \lambda]} = 0, \quad F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{П.13}$$

устанавливается непосредственно, если положить, что $\hat{A}_{\mu} = \hat{A}_{\mu}$ или, что то же, $\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Первое из уравнений (П.13) при этом преобразовании остается неизменным, а второе можно записать в виде

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} \equiv (g)^{-1/2} \partial_{\nu} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{-g} F_{\alpha\beta}) = 0.$$

Инвариантность этого уравнения при конформном преобразовании следует из равенства $\hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}^{\nu\beta}\sqrt{-\hat{g}} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g}$.

Конформная инвариантность уравнений Янга — Миллса проверяется совершенно аналогично, если положить $\hat{A}_\mu^a = A_\mu^a$.

Конформные преобразования спинорных величин. Считая, что символы Ван-дер-Вардена — Инфельда σ_{AA}^μ , осуществляющие изоморфизм между пространством Минковского и пространством двухиндексных эрмитовых спиноров, при конформном преобразовании не изменяются, из равенства

$$g^{\mu\nu} = \sigma_{AA}^\mu \cdot \sigma_{BB}^\nu \cdot \varepsilon^{AB} \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}$$

получаем

$$\hat{\varepsilon}^{AB} = \Omega^{-1} \varepsilon^{AB}, \quad \hat{\varepsilon}_{AB} = \Omega \varepsilon_{AB}. \tag{П.14}$$

Спинорная ковариантная производная $\hat{\nabla}_{AA} \cdot = \hat{\sigma}_{AA}^\mu \cdot \hat{\nabla}_\mu$ в пространстве (M, \hat{g}) следующим образом связана со спинорной ковариантной производной $\nabla_{AA} \cdot$ в пространстве (M, g) :

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{AA} \cdot T_{BB}^{DD} &= \nabla_{AA} \cdot T_{BB}^{DD} \dots - \Gamma_{BA} \cdot T_{AB}^{DD} \dots - \\ &- \Gamma_{AB} \cdot T_{BA}^{DD} \dots + \varepsilon_{AA}^D \cdot \Gamma_{FA} \cdot T_{BB}^{FD} \dots + \varepsilon_{AA}^{\dot{D}} \cdot \Gamma_{AF} \cdot T_{BB}^{\dot{D}} \dots, \end{aligned} \tag{П.15}$$

где

$$\Gamma_{AA} \cdot = \Omega^{-1} \nabla_{AA} \cdot \Omega. \tag{П.16}$$

Уравнение безмассового поля спина s в спинорной форме имеет вид

$$\nabla^{A_1 \dot{A}} \Phi_{A_1 \dots A_{2s}} = 0, \tag{П.17}$$

где $\Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$ — симметричный спинор. Используя соотношение (П.15), нетрудно проверить, что если поле $\Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$ при конформном преобразовании (П.3) преобразуется по закону $\hat{\Phi}_{A_1 \dots A_{2s}} = \Omega^{-1} \Phi_{A_1 \dots A_{2s}}$, то уравнение (П.17) является конформно-инвариантным.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление асимптотических инвариантов

Вычислим асимптотические инварианты в случае скалярного безмассового поля, действие для которого задается формулой (70). Для этого прежде всего выразим $\hat{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$, где $T_{\mu\nu}$ имеет вид (71), через величины $\hat{\varphi} = \Omega^{-1} \varphi$ и \hat{g} :

$$\hat{T}_{\mu\nu}(\hat{\varphi}, \hat{g}) = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}(\varphi = \Omega \hat{\varphi}, g = \Omega^{-2} \hat{g}). \tag{П.18}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Omega^{-2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \varphi, \alpha\varphi, \beta = \hat{g}_{\mu\nu} [\Omega^{-2} \hat{g}^{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta \hat{\varphi}^2 + \\ + 2\Omega^{-1} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\varphi}, \alpha \Omega_\beta \hat{\varphi} + \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\varphi}, \alpha \hat{\varphi}, \beta]; \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi = \Omega \hat{\nabla}_\beta \hat{\nabla}_\alpha \hat{\varphi} + \hat{\varphi} \hat{\nabla}_\beta \hat{\nabla}_\alpha \Omega + 2 \hat{\nabla}_\alpha \hat{\varphi} \hat{\nabla}_\beta \Omega + 2 \hat{\nabla}_\beta \hat{\varphi} \hat{\nabla}_\alpha \Omega + \\ + 2 \hat{\nabla}_\alpha \Omega \hat{\nabla}_\beta \Omega / \Omega + \hat{g}_{\alpha\beta} (\hat{\nabla}_\lambda \Omega \hat{\nabla}^\lambda \Omega \hat{\varphi} / \Omega + \hat{\nabla}^\lambda \Omega \hat{\nabla}_\lambda \hat{\varphi}). \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Поэтому для $\hat{T}_{\mu\nu}(\hat{\varphi}, \hat{g})$ в области, где $R_{\mu\nu} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu}(\hat{\varphi}, \hat{g}) = (2\alpha + 1) [\Omega^{-2} \Omega_\mu \Omega_\nu \hat{\varphi}^2 + \Omega^{-1} \Omega_\mu \hat{\varphi}, \nu \hat{\varphi} + \Omega^{-1} \Omega_\nu \hat{\varphi}, \mu \hat{\varphi} + \\ + \hat{\varphi}, \mu \hat{\varphi}, \nu] - [(1 + 4\alpha)/2] \hat{g}_{\mu\nu} [\hat{\omega} \hat{\varphi}^2 + 2\Omega^{-1} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\varphi}, \alpha \Omega_\beta \hat{\varphi} + \\ + \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\varphi}, \alpha \hat{\varphi}, \beta] + 2\alpha \hat{\varphi} [\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \hat{\varphi} + \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{\varphi} + 2(\Omega_\mu / \Omega) \hat{\nabla}_\nu \hat{\varphi} + \\ + 2(\Omega_\nu / \Omega) \hat{\nabla}_\mu \hat{\varphi} + 2(\Omega_\mu \Omega_\nu / \Omega^2) \hat{\varphi} - \hat{g}_{\mu\nu} (\hat{\omega} \hat{\varphi} + \Omega_\nu \hat{\nabla}^\lambda \hat{\varphi} / \Omega)]. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Вычисление асимптотических инвариантов

$$P[\xi] = \int_{\mathcal{Y}} \hat{T}_{\mu\nu} \xi^\mu d\xi^\nu \quad (\text{П.22})$$

удобно проводить в конформных координатах Бонди (u, \hat{r}, x^2, x^3) . В этих координатах $\Omega = \hat{r}$, в пределе $\hat{r} \rightarrow 0$ (на поверхности \mathcal{Y}) имеем (см. разд. 4, 5):

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \Omega = 0; \\ \text{б) } \hat{g}^{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta / \Omega = 0; \\ \text{в) } \Omega_\alpha \xi^\alpha = \xi^1 = 0; \\ \text{г) } \Omega_\alpha \xi^\alpha / \Omega = \partial_{\hat{r}} \xi^{(1)} = \xi_{;A}^A / 2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.23})$$

Так как $d\hat{\Sigma}^\mu$ в интеграле (П.22) равно $\hat{g}^{\mu\alpha} \Omega_\alpha d\mu d\sigma$ ($d\sigma$ — элемент площади на поверхности единичной сферы), то с учетом (П.23) получаем

$$P[\xi] = \int_{\mathcal{Y}} d\mu d\sigma [(2\alpha + 1) \partial_u \hat{\varphi} \xi^\mu \partial_\mu \hat{\varphi} + 2\alpha \hat{\varphi} (A\hat{\varphi} + \hat{\nabla}^\mu \Omega \xi^\nu \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \hat{\varphi})],$$

где $A = \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} [\Omega^{-1} \hat{\nabla}^\mu \Omega \xi^\nu \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \Omega]$.

Покажем теперь, что величина A обращается на \mathcal{Y} в нуль. Для этого заметим, что уравнение (36) на \mathcal{Y} позволяет записать

$$\hat{\nabla}^\mu \Omega \hat{\nabla}^\nu \Omega \hat{\nabla}_\mu \xi_\nu / \Omega = (\Omega_\alpha \xi^\alpha / \Omega) \hat{g}^{\lambda\nu} \Omega_\lambda \Omega_\nu / \Omega = 0.$$

Поэтому

$$A = \hat{\nabla}^\mu \Omega \hat{\nabla}_\mu (\xi^\nu \Omega_\nu) / \Omega = \hat{\nabla}^\mu \Omega \hat{\nabla}_\mu (\xi^\nu \Omega_\nu / \Omega) = \partial_u (\partial_{\hat{r}} \xi^1) = 0.$$

Используя равенство (П.23а), можно преобразовать выражение $\widehat{\nabla}^\mu \Omega \xi^\nu \widehat{\nabla}_\mu \widehat{\nabla}_\nu \Phi$ к виду $\xi^\nu \widehat{\nabla}_\nu (\Omega_\mu \widehat{\nabla}^\mu \Phi) = \xi^\nu \partial_\nu \partial_\mu \widehat{\Phi}$. Если обозначить, как обычно, образ функции \mathcal{F} на \mathcal{Y} через $\Phi: \Phi = \widehat{\Phi} | \mathcal{Y}$, то окончательно получим

$$P[\xi] = \int_{\mathcal{Y}} dud\sigma [(2\alpha + 1) \partial_\mu \Phi \xi^\mu \partial_\mu \Phi + 2\alpha \Phi \xi^\mu \partial_\mu \partial_\mu \Phi]. \tag{П.24}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Производящий функционал для S -матрицы

Приведем здесь вывод выражения (122) для производящего функционала S -матрицы. Удобно наряду с функционалом $A(a^*, a)$, соответствующим оператору A , использовать функционал $\widetilde{A}(a^*, a) = A(a^*, a) \exp(a^* a)$.

Если вектор $\Psi = A\Phi$, то соответствующие функциональные представления связаны следующим образом:

$$\Psi(a^*) = \int \widetilde{A}(a^*, b) \Phi(b^*) \exp(-b^* b) Db^* Db.$$

Поэтому матричный элемент S -матрицы равен

$$\begin{aligned} S_{\beta_1, \dots, \beta_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m} &= \int S(a^*, b) \exp(-b^* b - a^* a) a_{\beta_1} \dots a_{\beta_n} \times \\ &\quad \times b_{\alpha_1}^* \dots b_{\alpha_m}^* Db^* Db Da^* Da = \\ &= (\delta^n / \delta j_{\beta_1} \dots \delta j_{\beta_n}) (\delta^m / \delta j_{\alpha_1}^* \dots \delta j_{\alpha_m}^*) \exp[iw(j, j^*)] |_{j=0, j^*=0}, \end{aligned}$$

где

$$\exp[iw(j, j^*)] = \int S(a^*, b) \exp(-b^* b - a^* a + ja + j^* b^*) Da^* Da Db^* Db.$$

Последнее выражение вычисляется с применением формулы

$$\int \exp[-(F, AF)/2 + (\varphi, F)] Df^* Df = (\det AA^*)^{-1/4} \exp[(\varphi, A^{-1}\varphi)/2],$$

где $F = \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eardley D., Sachs R. K. «J. Math. Phys.», 1973, v. 14, p. 209.
2. Schmidt B. G. «Commun. Math. Phys.», 1974, v. 36, p. 73.
3. Пенроуз Р. Структура пространства — времени. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
4. Penrose R. «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 10, p. 66.
5. Пенроуз Р. В кн.: Гравитация и топология. Пер. с англ. М., «Мир», 1966, с. 84.

6. Penrose R. «Proc. Roy. Soc. A», 1965, v. 284, p. 159.
7. Penrose R. «Ann. Phys.», 1960, v. 10, p. 171.
8. Infeld L., van der Waerden B. L. Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-math. Kl., 1933, S. 380.
9. Sachs R. K. «Phys. Rev.», 1962, v. 128, p. 2851.
10. Chernicov N. A., Tagirov E. A. «Ann. Inst. Henri Poincaré», 1968, v. 9, p. 109.
11. Callan C. G., Coleman S., Jackiw R. «Ann. Phys.», 1970, v. 59, p. 42.
12. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Гостехиздат, 1955.
13. Trautman A. Lectures in General Relativity. Kings College, London University, 1958.
14. Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 269, p. 21.
15. Сакс Р. К. В кн.: Гравитация и топология. М., «Мир», 1966, с. 84.
16. Арновитт Р., Дезер С., Мизнер К. В. Динамика общей теории относительности. — В кн.: Эйнштейновский сборник. 1967, М., «Наука», 1967.
17. Newman E., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 566.
18. Newman E., Unti T. W. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 891.
19. Sachs R. K. «Proc. Roy. Soc. A», 1961, v. 264, p. 809.
20. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
21. Jordan P., Ehlers J., Sachs R. «Acad. Wiss. Mainz Abh. Math.-Naturwiss.», 1961, N 1, 2.
22. Pirani F. A. E. Lectures on General Relativity. Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics. V. 1, 1964, p. 249.
23. Фролов В. П. «Труды Физ. ин-та АН СССР», 1977, т. 96, с. 72.
24. Tamburino L. A., Winicour J. H. «Phys. Rev.», 1966, v. 150, p. 1039.
25. Held A., Newman E. T., Posades R. «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, p. 3145.
26. Schmidt B., Walker M., Sommers P. «GRG», 1975, v. 6, p. 489.
27. Mc-Carthy P. J. «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, p. 1837.
28. Newman E. T., Penrose R. Ibid., 1966, v. 7, p. 863.
29. Cantoni V. «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, p. 1700.
30. Mc-Carthy P. J. «Proc. Roy. Soc. A», 1972, v. 330, p. 517.
31. Mc-Carthy P. J. «J. Math. Phys.», 1973, v. 333, p. 317.
32. Mc-Carthy P. J., Crampin M. Ibid., 1973, v. 335, p. 301.
33. Crampin M., Mc-Carthy P. J. Ibid., 1976, v. 351, p. 55.
34. Hawking S. W. «Commun. Math. Phys.», 1975, v. 43, 199.
35. Волович И. В., Зарубнов В. А., Фролов В. П. «ТМФ», 1976, т. 29, с. 191.
36. Mackey G. N. Induced representations of groups and quantum mechanics. N.Y. — Amsterdam, Benjamin, 1968.
37. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М., «Наука», 1972.
38. Менский М. Б. Метод индуцированных представлений. М., «Наука», 1976.
39. Швингер Ю. Теория квантованных полей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
40. Komar A. «Phys. Rev. B», 1964, v. 134, p. 1430.
41. Frolov V. P., Volovich I. V., Zagrebnoy V. A. Preprint N 13, 1977. (P. N. Lebedev Phys. Institute.); «ТМФ», 1977, т. 3, с. 3.
42. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1966.
43. De Witt B. S. Dynamical Theory of Groups and Fields. N.Y., Gordon and Breach, 1965; «Phys. Rev.», 1967, v. 162, p. 1195.
44. Арефьева И. Я., Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. «ТМФ», 1974, т. 21, с. 311.
45. De Witt B. S. «Phys. Reports C», 1975, v. 19, p. 295.
46. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространство-времени. Пер. с англ. М., «Мир», 1977.

47. Unruh W. G. «Phys. Rev. D», 1976, v. 14, p. 870.
48. Hawking S. W. Ibid., 1976, v. 13, p. 191.
49. Israel W. «Phys. Lett. A», 1976, v. 57, p. 107.
50. Gibbons G. W., Perry M. J. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 36, p. 935.
51. Wald R. M. «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 3176.
52. Parker L. Ibid., 1975, v. 12, p. 1519.
53. Фролов В. П. «УФН», 1976, т. 118, с. 473.
54. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
55. Friedlander F. G. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 269, p. 53.
56. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Пер. с англ. М., Мир, 1974.
57. Walker M. Asymptotically flat space-time. Preprint Max-Planck-Inst. Phys. und Astrophys. Munchen, 1972.
58. Goldberg J. N., Kerr R. P. «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 172.
59. Ludwig G. «GRG», 1976, v. 7, p. 293.
60. Frolov V. P. Preprint ICTP, IC/77/46, Trieste.
61. Сигал И. Е. Математические проблемы релятивистской физики. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.