

КВАНТОВОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

Э. Е. Саперштейн, С. А. Фаянс, В. А. Ходель
Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, Москва

В рамках ферми-жидкостного подхода анализируется природа низколежащих коллективных состояний атомных ядер. Показано, что в капле ферми-жидкости помимо обычной нуль-звуковой ветви колебаний вследствие спонтанного нарушения трансляционной инвариантности появляется новая коллективная ветвь возбуждений — квантовые капиллярные волны, имеющие много общего с обычными поверхностными колебаниями классической капли. Приводятся результаты конкретных расчетов, которые показывают, что первые коллективные уровни атомных ядер принадлежат к этой ветви.

The nature of low-lying collective states in atomic nuclei is analysed using the Fermi liquid approach. It is shown that due to spontaneous breaking of translational invariance in a drop of Fermi liquid there appears not only the ordinary zero sound branch but a new collective branch — quantum capillary waves whose origin and properties are in many ways similar to surface excitations of classical drop. Numerical calculations are presented which show that the first collective states of atomic nuclei belong to this new branch.

ВВЕДЕНИЕ ■

Теория коллективных возбуждений атомных ядер прошла к настоящему времени две стадии. Первоначальные представления о характере коллективных движений в ядрах формировались на основе модели жидкой капли [1, 2], которая успешно объясняет самые общие, грубые закономерности: постоянство ядерной плотности, зависимость полной энергии связи от заряда Z , массового числа A и т. п. Согласно этой модели атомное ядро можно рассматривать как каплю несжимаемой классической жидкости. Ее коллективные состояния — капиллярные волны — давно и хорошо изучены. Их основные характеристики: частоты ω_L и вероятности возбуждения $B(EL)$ определяются заданием всего одного параметра — коэффициента поверхностного натяжения σ — и плавно зависят от A и Z . Эксперимент подтверждает существо-

вание в ядрах низколежащих коллективных состояний (НКС), однако детальное сравнение теоретических предсказаний с экспериментальными данными обнаруживает целый ряд противоречий [3]. Так, классическая гидродинамика оказывается не в состоянии объяснить наблюдаемые на опыте нерегулярности в поведении частот и вероятностей возбуждения первых 2^+ - и 3^- -состояний четно-четных ядер; ее предсказания о правилах сумм для электромагнитных переходов также противоречат эксперименту. Наконец, она дает неправильные значения моментов инерции деформированных ядер.

Эти противоречия возникают из-за того, что в ядре не выполняется одно из условий применимости классической гидродинамики — требование малости длины λ_0 свободного пробега частиц по сравнению с длиной волны λ коллективного возбуждения. Эксперимент показывает, что при небольших энергиях возбуждения λ_0 превышает размеры ядра.

Этот факт объясняется принципом Паули и находит свое отражение в теории ферми-жидкости Ландау [4—6]. Один из основных результатов этой теории состоит в том, что при $T \rightarrow 0$ обычный звук перестает распространяться в ферми-жидкости, но зато возникает новая, нуль-звуковая, ветвь коллективных возбуждений. Эти возбуждения являются объемными и совсем не похожи на капиллярные волны. Впервые ферми-жидкостные представления о характере коллективного движения были перенесены в ядерную физику в работах С. Т. Беляева [7, 8]. Это были первые микроскопические работы по теории коллективных движений в ядрах. С. Т. Беляев построил аналитически решаемую модель [8], в которой ему удалось, введя эффективные двухчастичные силы «спаривание + QQ -взаимодействие», объяснить наблюдаемые нерегулярности в спектрах 2^+ -состояний четно-четных ядер. Эти работы имели широкий резонанс, и в результате интерпретация первых коллективных уровней ядер как объемных колебаний нуль-звуковой природы, предложенная в [8], стала общепринятой точкой зрения. Однако эта интерпретация целиком основана на определенной гипотезе о виде эффективных сил.

Количественная теория ядерных явлений, построенная на ферми-жидкостных принципах, — это теория конечных ферми-систем (ТКФС), созданная А. Б. Мигдалом [9]. Основной вывод, к которому приводит ТКФС, можно сформулировать так: в слабых внешних полях атомное ядро ведет себя как газ взаимодействующих квазичастиц, находящихся в «ящике», роль которого играет самосогласованный потенциал. Эффективное взаимодействие между квазичастицами в этой теории не вычисляется, а параметризуется с помощью небольшого числа универсальных констант, которые определяются из сравнения с экспериментом. Численные расчеты, выполненные на основе ТКФС, позволили описать широкий спектр

ядерных характеристик (магнитные и квадрупольные моменты, изотопические сдвиги, вероятности одночастичных переходов, дипольное фотопоглощение, ядерный β -распад, μ -захват и т. п.) и тем самым было показано, что свойства капли ферми-жидкости при низких энергиях возбуждения могут быть поняты на основе газовых представлений.

Неувязка возникла лишь при рассмотрении вопроса об изменении радиуса системы R при добавлении частиц (R можно определить как расстояние от центра симметрии до точки полуспада плотности ρ). Оказалось, что здесь газовые представления приводят к парадоксальному результату: радиус R почти не увеличивается при последовательном добавлении частиц, в то время как в капле он растет по закону $R = r_0 A^{1/3}$. Таким образом, микроскопическая квантовая теория оказалась не в состоянии объяснить то, что с легкостью получается в классической: ведь плотность капли определяется условием, что давление $p = -(\partial E/\partial V)_A \sim -(\partial E/\partial R)_A = 0$, но такого условия нет для сгустка газа квазичастиц, запертого в ящике, размеры которого — внешний параметр.

С микроскопической точки зрения $(\partial E/\partial R)_A$ можно интерпретировать как производную коллективного гамильтониана $E(R)$ по коллективному параметру R [10]. Тогда обращение $(\partial E/\partial R)_A$ в нуль — очевидное следствие структуры этого гамильтониана, являющегося квадратичной формой: $E(R) = C(R - R_0)^2/2 + BR^2/2$. То, что в классической гидродинамике радиус R оказывается коллективным параметром, а гамильтониан $E(R)$ описывает низколежащую коллективную ветвь — капиллярные волны, — хорошо известно. Но равенство $(\partial E/\partial R)_A = 0$ справедливо для любой макроскопической системы — неважно, какими законами она описывается, классическими или квантовыми. Поэтому естественно предположить, что обращение производной $(\partial E/\partial R)_A$ в нуль указывает на существование низколежащей поверхностной ветви и в капле ферми-жидкости.

На первый взгляд, появление низкочастотных поверхностных колебаний в капле ферми-жидкости кажется непонятным: ведь, создавая узкий волновой пакет в координатном пространстве, мы из-за соотношения неопределенности существенно проигрываем в кинетической энергии. Однако на поверхности капли, где плотность мала, частицы притягиваются друг к другу, поскольку взаимодействуют почти так же, как в пустоте. Поэтому проигрыш δT в кинетической энергии может быть скомпенсирован выигрышем δU в потенциальной.

Такая компенсация, как мы знаем из нашего опыта, действительно имеет место в случае перемещения системы как целого: частота дипольных колебаний центра тяжести $\omega_1 = \delta T_1 + \delta U_1 =$

$= 0$ для любой стабильной системы. Другими словами, дипольная деформация поверхности не меняет полной энергии системы. В рамках ферми-жидкостного подхода можно, рассматривая сдвиг как внешнее поле, получить формулы для δT_1 и δU_1 , включающие производные плотности ρ и самосогласованного поля U , а также зависящее от плотности эффективное взаимодействие между квази-частицами. Тогда соотношение $\omega_1 = \delta T_1 + \delta U_1 = 0$ можно трактовать как условие согласования между этими величинами, эквивалентное в макроскопической задаче соотношению $p = -(\partial E/\partial V)_A = 0$. Оказывается, что «дипольное» условие согласования ($\omega_1 = 0$) существенно удобнее «монопольного» $[(\partial E/\partial R) = 0]$.

С общей точки зрения условие согласования, вытекающее из факта обращения дипольной частоты в нуль, есть следствие спонтанного нарушения симметрии, в данном случае — трансляционной инвариантности. Для того чтобы возникла целая ветвь НКС поверхностного типа, нужно, чтобы при увеличении числа частиц A коэффициент жесткости C_L этих колебаний с мультипольностью $L \ll R/r_0$ рос медленнее, чем массовый коэффициент $B_L \sim A$. Тогда при $A \rightarrow \infty$ частота колебаний $\omega_L \sim \sqrt{C_L/B_L} \rightarrow 0$, т. е. их спектр должен становиться бесщелевым. Оказывается, что в силу общих теорем [11] это справедливо для всех систем, где нет дальнего действия типа гравитационного или кулоновского. Таким образом, мы приходим к выводу, что в капле ферми-жидкости помимо нуль-звуковой ветви должна существовать низкочастотная ветвь поверхностных колебаний.

Численные расчеты, проведенные в работах [12, 13], подтвердили этот вывод. Оказалось, что именно первые коллективные уровни ядер — те самые НКС, которые раньше считались нуль-звуковыми колебаниями, — принадлежат к этой ветви. Они во многом похожи на обычные капиллярные волны, но взаимодействие с нуль-звуковой ветвью и с отдельными неколлективными частично-дырочными возбуждениями искажает некоторые их свойства (например, в форм-факторах появляются объемные поправки, а само коллективное движение приобретает отчасти вихревой характер [13]). Такие возбуждения, которые естественно интерпретировать как квантовые капиллярные волны, были названы каптонами [14]. Их существование снимает отмеченный выше парадокс с радиусом, имевший место в ТКФС, и дает новый подход к описанию правил сумм для электромагнитных переходов [15].

Поверхностный характер НКС в атомных ядрах подтверждается также и расчетами по методу Хартри — Фока с зависящими от плотности эффективными силами *, выполненными недавно Берт-

* Этот метод впервые был применен Файбельманом [16] для описания поверхностных колебаний плоского слоя ферми-жидкости. †

чем и др. [17, 18]. Наконец, обработка [19] поставленных в последнее время прецизионных экспериментов [20] по неупругому рассеянию быстрых частиц на ядрах также приводит к выводу, что коллективное движение в первых возбуждениях четно-четных ядер имеет поверхностный характер.

Область исследования коллективных возбуждений капли, в которых отчетливо проявляются и классические, и квантовые эффекты, естественно назвать квантовой гидродинамикой. Данный обзор посвящен проблемам квантовогидродинамического описания свойств НКС атомных ядер. Основанное на микроскопическом рассмотрении, это описание синтезирует представления классической гидродинамики с ферми-жидкостными. Условия согласования рассматриваются в первых разделах. Далее подробно анализируются свойства капонов и их связь с колебаниями классической капли. Конкретные расчеты ядерных характеристик отнесены в конец обзора. Рассмотрение ведется на основе принципов ТКФС. Однако все необходимые пояснения делаются «по дороге». Предполагается только, что читатель знаком с техникой функций Грина. Основное внимание мы уделяем первым НКС ядер; исследование свойств высоколежащих состояний — различных гигантских резонансов — как в рамках ТКФС, так и другими методами подробно изложено в ряде работ [21—24]. Чтобы не перегружать обзор, мы решили не обсуждать свойства капонов в немагических ядрах, где существенную роль начинает играть спаривание, а также ангармонические эффекты; их рассмотрение на основе квантовогидродинамического подхода проведено в [25].

Авторы выражают глубокую благодарность А. Б. Мигдалу, С. Т. Беляеву, В. М. Галицкому, Б. Т. Гейликману, Б. Л. Бирбрайру, Д. П. Гречухину, Г. А. Пик-Пичаку, Б. А. Румянцеву и М. А. Троицкому за плодотворное обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе, а также Ю. Б. Иванову, Н. Н. Курилкину, В. Е. Стародубскому, А. П. Платонову и С. В. Толоконникову за оказанную помощь.

1. УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ В СИСТЕМАХ СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Большинство систем, которые изучаются в физике, являются системами со спонтанно нарушенной симметрией. При определенных преобразованиях ψ -операторов полная энергия таких систем остается неизменной, в то время как многие другие характеристики: плотность $\rho(\mathbf{r}) = \langle 0 | \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) | 0 \rangle$, самосогласованное поле $U(\mathbf{r})$ и т. п. — меняются. Если, например, взять каплю жидкости, вырезать в одном ее полушарии узкий серп жидкости и медленно переместить его в другое полушарие так, чтобы никаких изменений, кроме сдвига центра масс (ЦМ), не про-

изошло (что соответствует преобразованию $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \exp(i\mathbf{p}\delta\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{R})$), то, очевидно, внутренняя энергия капли останется прежней, а плотность изменится: $\delta\rho = -(\partial\rho/\partial\mathbf{r})\delta\mathbf{R}$, где $\delta\mathbf{R}$ — сдвиг ЦМ. С формальной точки зрения это означает, что гамильтониан H всей системы инвариантен относительно операции сдвига (коммутатор $[H, \mathbf{p}] = 0$, \mathbf{p} — оператор импульса), однако плотность неинвариантна ($[\rho, \mathbf{p}] = i\partial\rho/\partial\mathbf{r} \neq 0$). Ситуация в деформированных ядрах и в других несферических системах полностью аналогична: гамильтониан H коммутирует с оператором углового момента L , т. е. он инвариантен относительно поворота, но коммутатор L как с плотностью ρ , так и с массовым оператором Σ , или, как часто говорят, с самосогласованным полем, отличен от нуля. Список таких объектов можно расширить: кристаллы, ферромагнетики, сверхпроводники и т. п., — все это системы со спонтанно нарушенной симметрией.

Исследование их общих свойств началось сравнительно недавно [11], сейчас оно интенсивно ведется во многих областях физики, в том числе и в ядерной, так что уже накопилась обширная литература, посвященная этому вопросу [26—30]. Отличительной чертой изучаемых систем является наличие макроскопического параметра (радиуса капли, внутреннего квадрупольного момента и др.), характеризующего те компоненты плотности или самосогласованного поля, которые неинвариантны относительно данного преобразования симметрии. Как уже было сказано, это преобразование переводит систему в другое состояние, не меняя ее энергии, и поэтому основное состояние у систем со спонтанно нарушенной симметрией оказывается вырожденным. Из-за этого стандартные методы квантовой теории поля к ним непосредственно неприменимы: сначала нужно каким-то образом вырождение снять, скажем, наложив на систему слабое внешнее поле, не коммутирующее с оператором преобразования симметрии [31]. Благодаря наличию неинвариантного макропараметра это поле может быть сделано настолько малым, что оно практически никак не изменит свойств системы, и в то же время его величина оказывается достаточной, чтобы «заморозить» степень свободы, отвечающую данному преобразованию (поступательное движение ЦМ, вращение системы как целого и т. п.). Именно эта особенность систем со спонтанно нарушенной симметрией и ведет к возникновению условий согласования.

Здесь мы получим важное для дальнейшего изложения условие согласования, обусловленное спонтанным нарушением трансляционной инвариантности. Рассмотрим систему в статическом внешнем поле v_0^{st} , ограничивающем движение ЦМ. Наложим на нее еще слабое переменное поле «сдвига» $v_0(t) \sim \rho \exp(i\omega t)$ с частотой ω , близкой к частоте $\omega_{ЦМ}$ собственных колебаний, которые совершает ЦМ системы в поле v_0^{st} . Тогда весь эффект от наложения

этого переменного поля сведется к резонансной раскатке нулевых колебаний ЦМ, так что изменение массового оператора будет равно

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon, \omega) &= \tilde{\Sigma}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{R}(\omega), \mathbf{y} + \delta\mathbf{R}(\omega), \varepsilon) - \\ &- \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) \approx \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right) \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) \delta\mathbf{R}(\omega), \end{aligned} \quad (1)$$

а изменение матрицы плотности

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon, \omega) &= \tilde{\rho}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{R}(\omega), \mathbf{y} + \delta\mathbf{R}(\omega), \varepsilon) - \\ &- \tilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) \approx \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) \delta\mathbf{R}(\omega), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\delta\mathbf{R}(\omega) \sim \alpha/(\omega - \omega_{\text{ЦМ}}) \quad (3)$$

(тильда над буквой означает, что соответствующая величина берется в поле v_0^{st}). С другой стороны, изменение $\delta\Sigma$ можно найти с помощью известного уравнения [9, 32] для вершинной части T^* :

$$T = V_0 + \delta\Sigma \equiv V_0 + \mathcal{U}\delta G, \quad (4)$$

где V_0 — внешнее поле [в нашем случае $V_0 = v_0^{st} + v_0(t)$]; \mathcal{U} — четырехполюсник, неприводимый в канале частица — дырка; $\delta G = = GTG$ — изменение функции Грина G в поле V_0 . Поэтому уравнение для T можно записать также в виде

$$T = V_0 + \mathcal{U}GTG. \quad (4')$$

Частоты коллективных колебаний системы — полюсы вершинной части T — являются собственными частотами однородного уравнения

$$g = \mathcal{U}GgG, \quad (5)$$

где g — вычет T в полюсе, являющийся амплитудой рождения колебания. Согласно (1), (3) и (4), в рассматриваемом случае T имеет полюс в точке $\omega = \omega_{\text{ЦМ}}$ с вычетом $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon, \omega_{\text{ЦМ}}) \sim \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right) \times \times \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon)$. Подставляя это решение в (5), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \right) \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega_{\text{ЦМ}}) &= \int \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, |\varepsilon, \varepsilon') \times \\ &\times \tilde{G}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \varepsilon' - \frac{\omega_{\text{ЦМ}}}{2}) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_5} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_6} \right) \times \right. \\ &\times \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \varepsilon') \left. \right] \tilde{G}(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4, \varepsilon' + \frac{\omega_{\text{ЦМ}}}{2}) \times \\ &\times d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 d\mathbf{x}_5 d\mathbf{x}_6 \frac{d\varepsilon'}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (6)$$

* Для сокращения записи мы будем часто использовать символические обозначения такие же, как в книге А. Б. Мигдала [9].

Для стабильных систем конечного размера поле v_0^{st} можно сделать таким малым, что $\omega_{ЦМ}$ будет много меньше характерных частот ω_{sp} одночастичных переходов в системе*. Тогда в (6) зависимостью всех величин от $\omega_{ЦМ}$ и v_0^{st} можно пренебречь, в результате чего и возникает условие согласования:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Sigma(x_1, x_2, \varepsilon) = \int \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, \varepsilon, \varepsilon') \times \\ \times G(x_3, x_5, \varepsilon') \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6} \right) \times \right. \\ \left. \times \Sigma(x_5, x_6, \varepsilon') \right] G(x_6, x_4, \varepsilon') dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \frac{d\varepsilon'}{2\pi i}. \quad (7)$$

Это условие означает, что частота дипольных колебаний ЦМ стабильной системы равна нулю, т. е. ее дипольная жесткость $C_1 = 0$. Соотношение (7) характеризует главное различие свойств капли ферми-жидкости — системы, которая сама себя держит, — и ферми-газа, заключенного в ящик тех же размеров. Хотя их поведение и описывается одинаковыми уравнениями, однако у капли жесткость C_1 равна нулю, а у газа — нет. Отметим, что равенство нулю дипольной жесткости имеет место и в классической гидродинамике. Именно по этой причине, как уже отмечалось во введении, многие классические черты должны проявляться и в свойствах квантовой капли, в частности в атомных ядрах при низких энергиях возбуждения.

Учитывая связь $G^{-1}(x, y, \varepsilon) = \left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} \right) \delta(x - y) - \Sigma(x, y, \varepsilon)$, условие (7) можно переписать в более компактном виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Sigma(x_1, x_2, \varepsilon) =$$

* Оценить $\omega_{ЦМ}$ и v_0^{st} можно так. Поместим сферическое ядро в прямоугольную одномерную яму глубиной v_0 и шириной $2R$, где $R = r_0 A^{1/3}$ — радиус ядра. В этой яме ядро как целое будет совершать по оси x колебания с частотой $\omega_{ЦМ} = \sqrt{C/B}$ и амплитудой $x_0 = (CB)^{-1/2}$, где массовый коэффициент $B = mA$, а жесткость связана с плотностью ρ соотношением $C \approx \rho \lambda R v_0 \approx v_0 A^{1/3} r_0^{-2}$ [при смещении ядра на Δx в область действия поля v_0 попадают частицы, заключенные в объеме шарового сегмента $\approx \lambda R (\Delta x)^2$]. Поле v_0 должно быть достаточно слабым, чтобы не возбуждать внутренние степени свободы ядра; однако для того, чтобы можно было считать ЦМ зафиксированным, нужно, чтобы амплитуда колебаний x_0 в поле v_0 не превышала наименьшего характерного пространственного масштаба, на котором существенно меняются плотность, массовый оператор и т. п.

Этот характерный масштаб имеет порядок среднего расстояния между частицами r_0 . Беря $x_0 \ll r_0$, получаем $v_0 \gg (mr_0^2)^{-1} A^{-4/3} \approx \varepsilon_F A^{-4/3}$ и $\omega_{ЦМ} \gg \varepsilon_F A^{-1}$.

В то же время частоты одночастичных переходов имеют оценку $\omega_{sp} \approx \varepsilon_F A^{-1/3}$, где ε_F — энергия Ферми.

$$\begin{aligned}
 &= \int \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \varepsilon, \varepsilon') \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_4} \right) \times \\
 &\quad \times G(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \varepsilon') d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \frac{d\varepsilon'}{2\pi i}, \quad (7')
 \end{aligned}$$

или, символически, совсем кратко:

$$[\Sigma, \mathbf{p}] = \mathcal{U} [G, \mathbf{p}]. \quad (7'')$$

Для систем с нарушенной вращательной симметрией условие согласования выглядит аналогично, нужно лишь оператор $(\partial/\partial \mathbf{x} + \partial/\partial \mathbf{y})$ в (7) и (7') заменить на $(\mathbf{x} \times \partial/\partial \mathbf{x} + \mathbf{y} \times \partial/\partial \mathbf{y})$, т. е. в (7) вместо оператора импульса \mathbf{p} поставить оператор момента \mathbf{L} . Обобщая, условия согласования можно записать в виде [27]

$$[\Sigma, Q_i] = \mathcal{U} [G, Q_i], \quad (8)$$

где Q_i — оператор, отвечающий i -му преобразованию, относительно которого произошло спонтанное нарушение симметрии; в общем случае у системы может быть несколько таких нарушений, и тогда одновременно должно выполняться несколько условий (8).

Полученные соотношения можно обобщить на случай спаривания [27] и на многокомпонентные системы (ионные кристаллы, атомные ядра и т. п.); при этом G и Σ становятся матрицами. Так, для атомного ядра вместо (7) имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Sigma^n}{\partial \mathbf{R}} &= \mathcal{U}^{nn} G^n \frac{\partial \Sigma^n}{\partial \mathbf{R}'} G^n + \mathcal{U}^{pn} G^p \frac{\partial \Sigma^p}{\partial \mathbf{R}'} G^p; \\
 \frac{\partial \Sigma^p}{\partial \mathbf{R}} &= \mathcal{U}^{pn} G^n \frac{\partial \Sigma^n}{\partial \mathbf{R}'} G^n + \mathcal{U}^{pp} G^p \frac{\partial \Sigma^p}{\partial \mathbf{R}'} G^p.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь введена координата $\mathbf{R} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$; индекс n относится к нейтронам, p — к протонам.

Обсудим кратко некоторые следствия, вытекающие из полученных соотношений. Прежде всего заметим, что условия согласования нелинейны, поскольку амплитуда \mathcal{U} и массовый оператор Σ являются функционалами функции Грина G . Очевидно, что уравнения (9) имеют ненулевое решение не всегда — поверхность у системы возникает лишь при определенных условиях, в частности, только при определенных значениях пустотной амплитуды \mathcal{U}_{ex} . Чтобы почувствовать, каковы эти условия, рассмотрим грубую модель: предположим, что силы имеют нулевой радиус и не зависят от скоростей и энергии $[\mathcal{U}^{ik} = \mathcal{F}^{ik}(r_1) \delta(r_1 - r_2) \delta(r_1 - r_3) \delta(r_3 - r_4)]$. Тогда при $N = Z$ из (9) имеем

$$\partial U^+ / \partial r = \mathcal{F}^+(r) \partial \rho^+ / \partial r, \quad (10)$$

где $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^{nn} + \mathcal{F}^{np}$, $U^+ = (\Sigma^n + \Sigma^p)/2$ и $\rho^+ = (\rho^n + \rho^p)/2$. Отсюда сразу вытекает первое условие — в пустоте должно быть

притяжение, т. е. амплитуда \mathcal{F}_{ex}^+ должна быть отрицательной (производные $\partial U^+/\partial r$ и $\partial \rho^+/\partial r$ имеют разный знак на поверхности). Запишем, далее, грубое томас-фермиевское соотношение между плотностью ρ^+ и самосогласованным полем U^+ : $\rho^+(r) = [2m(\mu - U^+(r))]^{3/2}/3\pi^2 \equiv p_F^3(r)/3\pi^2$. Продифференцировав его по r и подставив в (10), получим

$$1 = -\mathcal{F}^+(r) p_F(r) m/\pi^2. \quad (11)$$

Из этого выражения видно, что при продвижении внутрь капли (ядра) притяжение должно падать, поскольку при этом плотность растет, и, следовательно, мы приходим к выводу, что если у системы есть связанное состояние, то у нее $p_F > \pi^2/|\mathcal{F}_{ex}^+| m$, т. е. ее плотность будет тем выше, чем меньше пустотная амплитуда!* Этот, на первый взгляд, парадоксальный результат подтверждается на примере ${}^3\text{He}$, где силы притяжения настолько малы, что не в состоянии обеспечить связанного состояния двух атомов. Однако относительная плотность жидкого ${}^3\text{He}$ очень велика: отношение расстояния между частицами к радиусу отталкивательного кора $\approx 0,9$, в то время как в ядре этот параметр $\approx 0,3$.

Поведение амплитуды \mathcal{F}^+ в переходной области целиком определяется многочастичными корреляциями, и его нужно изучать, рассматривая помимо соотношения (7) более сложные условия согласования между 2- и 3-частичными характеристиками системы. Получить эти условия можно из соотношения, связывающего изменение $\delta\mathcal{U}$ 2-частичного блока во внешнем поле с изменением δG функции Грина:

$$\delta\mathcal{U} = \mathcal{K}^{(3)}\delta G, \quad (12)$$

где $\mathcal{K}^{(3)}$ — шестиполюсник, т. е. блок 3-частичного взаимодействия, неприводимый в том же смысле, что и амплитуда \mathcal{U} . В нашем случае внешнее поле — это поле «сдвига» $v_0(t) \sim \mathbf{p} \exp(i\omega t)$, роль которого сводится к замене всех координат \mathbf{x}_i в \mathcal{U} и G на $\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{R}(\omega)$. Повторяя те же рассуждения, что и при переходе от соотношения (6) к условию (7), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_4} \right) \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ & = \int \frac{d\varepsilon_3}{2\pi i} d\mathbf{x}_5 d\mathbf{x}_6 \mathcal{K}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_6; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_5} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_6} \right) G(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6; \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (13)$$

* На самом деле, конечно, равновесная плотность системы определяется не только значением \mathcal{F}_{ex}^+ , но и поведением \mathcal{F}^+ во всем переходном слое. Может оказаться, что \mathcal{F}^+ слишком быстро меняет знак, становясь заметно положительной уже в самом этом слое. Тогда условие (11) не выполняется и связанного состояния не возникает.

Блок $\mathcal{K}^{(3)}$ связан условием согласования с блоком $\mathcal{K}^{(4)}$ 4-частичного взаимодействия:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_6} \right) \mathcal{K}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_6; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \\ & = \int \frac{d\varepsilon_4}{2\pi i} d\mathbf{x}_7 d\mathbf{x}_8 \mathcal{K}^{(4)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_8; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_7} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_8} \right) G(\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8; \varepsilon_4). \end{aligned} \quad (14)$$

Действуя по аналогичной схеме дальше, можно получить цепочку соотношений, связывающих между собой все более и более сложные блоки. Если на некотором этапе сделать определенные предположения о свойствах блока многочастичного взаимодействия, то, возвращаясь по этой цепочке назад, можно будет построить и 2-частичную амплитуду. Например, принимая в рамках той же грубой модели, что блок $\mathcal{K}^{(3)}$ локален и не зависит от энергии [$\mathcal{K}^{(3)} = b\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \dots \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_6)$], мы в явном виде получаем зависимость 2-частичной локальной амплитуды от плотности *:

$$\mathcal{F}(r) = a + br(r), \quad (15)$$

где a и b — некоторые постоянные. Разумеется, блок $\mathcal{K}^{(3)}$ не является строго δ -функциональным, и поэтому амплитуда \mathcal{F} , вообще говоря, зависит не только от плотности $\rho(\mathbf{r})$, но и от полной матрицы плотности $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, так что в \mathcal{F} могут появиться слагаемые, содержащие градиенты ρ (возможность появления в \mathcal{F} членов типа $(\partial\rho/\partial r)^2$ была отмечена в [34]).

Знание зависимости \mathcal{F} от ρ дает, в принципе, возможность построить уравнение состояния ядерной материи при $T = 0$, т. е. найти давление p как функцию плотности ρ . Покажем это на примере той же грубой модели. Из соотношений $\delta\Sigma/\delta\rho = \mathcal{F}(\rho)$, используя (15), получаем $\Sigma = a\rho + \frac{b}{2}\rho^2$ и находим химический потенциал $\mu = \frac{p_F^2}{2m} + \Sigma = \alpha\rho^{2/3} + a\rho + \frac{b}{2}\rho^2$, где $\alpha = (3\pi^2)^{2/3}/2m$ и m — масса нуклона. Энергия большой системы $E = Nf(N/V)$ (N — число частиц, V — объем [35]), а $\mu = (\partial E/\partial N)_V$, так что для f имеем дифференциальное уравнение, решение которого есть $f = 3\alpha\rho^{2/3}/5 + a\rho/2 + b\rho^2/6$. Переходя обычным способом [9] к безразмерным константам

$$f_{ex}^+ = p_0 t a / \pi^2, \quad f_{in}^+ - f_{ex}^+ = p_0 t \rho_0 b / \pi^2,$$

где ρ_0 и p_0 — плотность и импульс Ферми нормальной ядерной материи, и вводя безразмерную переменную $x = \rho/\rho_0$, приходим

* На необходимость учета зависимости 2-частичного взаимодействия от плотности в расчетах ядерных характеристик впервые было обращено внимание в работах [9, 33].

к уравнению состояния

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N = \left(\frac{\pi^4 \rho_0^5}{3m^3} \right)^{1/3} x^2 \left[\frac{3}{5} x^{-1/3} + \frac{1}{2} f_{ex}^+ + \frac{1}{3} (f_{in}^+ - f_{ex}^+) x \right]. \quad (16)$$

Это уравнение должно давать $p = 0$ при $x = 1$; только при этом условии оно соответствует уравнению состояния реальной ядерной материи. Отсюда получаем следующее соотношение между константами взаимодействия:

$$2f_{in}^+ + f_{ex}^+ = -18/5. \quad (17)$$

Поскольку амплитуда \mathcal{F} , кроме того, должна воспроизводить и другие характеристики ядерной материи, например давать при $\rho = \rho_0$ правильное значение химического потенциала $\mu = \mu_0$, то из формулы для μ получаем еще одну связь между константами *:

$$f_{in}^+ + f_{ex}^+ = 6m\mu_0/\rho_0^2 - 3 \approx -4,4. \quad (18)$$

(Здесь использованы значения $\mu_0 = -16$ Мэв и $r_0 = 1,18$ ферми [36].) Записывая отклонение ΔE энергии ядерной материи от равновесного значения (в расчете на одну частицу) в виде $\Delta E/N = k \cdot (x - 1)^2/2$, для сжимаемости

$$k = \rho_0^2 (\partial^2 f / \partial \rho^2)_{\rho=\rho_0} = \rho_0 (\partial \mu / \partial \rho)_{\rho=\rho_0} = ms^2$$

(s — скорость звука) в этой модели с учетом (17) и (18) имеем

$$k = \rho_0^2 (1 + f_{in}^+) / 3m = -2\mu_0 + 2\rho_0^2 / 15m \approx 41 \text{ Мэв}. \quad (19)$$

Интересно отметить, что значения констант f_{in}^+ и f_{ex}^+ , полученные в такой грубой модели, неплохо согласуются с теми значениями, которые были найдены путем сравнения ядерных характеристик, рассчитанных в рамках ТКФС [9, 38], с экспериментальными данными. Однако следует иметь в виду, что константа f_{in}^+ определяется из (17) и (18) весьма неточно, так как является разностью двух больших чисел. Как мы увидим в разд. 8, где описаны реалистические расчеты, $f_{in}^+ \approx 0,4$, и поэтому более вероятным представляется значение

$$k = 2\varepsilon_F (1 + f_{in}^+) / 3 \approx 33 \text{ Мэв}. \quad (19')$$

2. УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ МОДЫ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Как уже отмечалось, условия согласования в системе со спонтанно нарушенной симметрией отражают то, что ее жесткость C обращается в нуль по отношению к некоторому внешнему полю,

* Несколько иные ограничения на константы взаимодействия были также получены в [37] путем численного анализа условий согласования для конкретных ядер.

вовлекающему в когерентное движение заметную долю частиц, т. е. вызывающему возмущение с большим массовым коэффициентом B . Интуитивно ясно, что если незначительно изменить конфигурацию этого внешнего поля, то по отношению к нему жесткость будет не сильно отличаться от нуля, и поэтому в системе возможны коллективные колебания с малой частотой $\omega \approx \sqrt{C/B}$. Чтобы сделать эти соображения более обоснованными, обратимся к уравнению (5) для амплитуды g . Будем искать его решение при малых ω в виде

$$g_k(\omega) = g_0 f_k + \varphi_k(\omega), \quad (20)$$

где f_k — плавная функция [в случае сферической симметрии можно взять $f_k = Y_{km}(\mathbf{n})$, для плоской геометрии — $f_k = \exp(ikx)$], а φ_k — некоторая поправка, имеющая, как мы увидим, квантовое происхождение. При $\omega = 0$ решение, согласно (8), известно: $f_k = 1$, $\varphi_k = 0$ и $g_0 = [\Sigma, \hat{Q}]$.

Используем теперь то обстоятельство, что в капле ферми-жидкости блок \mathcal{U} локален и слабо зависит от энергетических переменных (область существенного изменения \mathcal{U} по импульсам $\delta q \sim \sim p_F$ и по энергии $\delta\omega \sim \varepsilon_F$; роль дальнего действия, в частности кулоновских сил $\sim q^{-2}$, обсудим несколько позже) и \mathcal{U} не содержит операторов импульса (в атомных ядрах скоростные силы малы), получим, что решение уравнения (5) зависит квадратично от частоты ω , и при малых ω

$$\begin{aligned}
 g_0 f_k + \varphi_k(0) &= \mathcal{U}(GG)_{\omega=0}(g_0 f_k + \varphi_k(0)) + \\
 &+ \omega_k^2 \left\{ \mathcal{U} \left(\frac{\partial GG}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} (g_0 f_k + \varphi_k(0)) + \right. \\
 &\left. + [\mathcal{U}(GG)_{\omega=0} - 1] \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} \right\}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Предположим, что оператор $\mathcal{U}(GG)_{\omega=0}$ строго δ -функционален. Тогда из условия согласования $g_0 = \mathcal{U}(GG)_{\omega=0} \cdot g_0$ вытекает, что $\mathcal{U}(GG)_{\omega=0}$ есть просто единичный оператор и поэтому левая часть (21) в точности сокращается с первым членом в правой части, и в результате мы получаем решение $\omega_k = 0$ при любых f_k и φ_k , т. е. спектр коллективных возбуждений в этом случае оказывается бесконечно вырожденным. Это и понятно: если система устроена так, что поле, приложенное в точке \mathbf{r} , меняет плотность только в этой же точке [из-за δ -образности $\mathcal{U}(GG)$], то частицы не будут «чувствовать» разницы между возмущениями с разными k ; лишь когда в системе возможен обмен «информацией» на расстоянии, тогда частицы способны «отличить», скажем, дипольное возмущение от квадрупольного. В действительности отклик системы не есть чистая δ -функция и спектр не является вырожденным. Во-первых, неприводимый блок 2-частичного взаимодействия \mathcal{U}

имеет ненулевой радиус, его размытие порядка r_0 , и уже из-за этого разность $\mathcal{U}(GG)_{\omega=0}g_0f_k - g_0f_k \sim k^2A^{-2/3}$. Во-вторых, частично-дырочный пропагатор $\int (GG)_{\omega=0}d\varepsilon$ тоже не является δ -функцией, он имеет две существенно различные компоненты [39], одна из которых — локальная, с таким же радиусом r_0 , что и блок \mathcal{U} , а другая — неуниверсальное квантовое дальнее действие \mathcal{A} малой амплитуды $\sim R^{-3}$, которое как раз и порождает квантовую поправку Φ_k . Для сферического ядра $g_0 \sim \partial\Sigma/\partial r$ — функция, заметно отличная от нуля в поверхностном слое шириной r_0 , и эта поправка имеет оценку $\Phi_k \sim \int \mathcal{U}Ag_0d^3r \sim \frac{\varepsilon_F}{R}[\mathcal{U} \sim \varepsilon_F r_0^3; \mathcal{A} \sim \varepsilon_F^{-1}(r_0R)^{-3}; g_0 \sim \varepsilon_F/r_0$ и еще r_0R^2 от интегрирования].

Чтобы найти частоту коллективного колебания ω_k , подействуем оператором $(g_0f_k + \Phi_k(0))(GG)_{\omega=0}$ на обе стороны уравнения (24) и проинтегрируем по всем координатам. Тогда квадрат частоты можно представить в виде $\omega_k^2 = C_k/B_k$. Мы не будем выписывать здесь явные выражения для C_k и B_k (подробности см. в разд. 5), отметим только, что при малых k вследствие условий согласования в жесткости C_k происходит сильное сокращение локальных членов, в результате чего их вклад оказывается пропорциональным k^2 , главный же вклад в C_k в больших системах дают объемные слагаемые типа $(\Phi_k\mathcal{A}\Phi_k)$ и $\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial r}\mathcal{A}\frac{\partial\Sigma}{\partial r}\right)$, содержащие дальнедействующие компоненты Φ_k и \mathcal{A} — все они имеют одинаковую оценку $\sim \varepsilon_F R/r_0^3$, так что при больших A имеем $C_k \sim \varepsilon_F A^{1/3}/r_0^2$. В то же время в массовом коэффициенте B_k никакого сокращения нет и для его оценки можно положить $g_k = g_0 \approx \partial\Sigma/\partial r$, после чего получим

$$B_k \approx B_1 = - \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial r} \frac{\partial(GG)}{\partial\omega^2} \frac{\partial\Sigma}{\partial r} \right)_{\omega=0} \sim mA. \quad (22)$$

В итоге при $A \rightarrow \infty$ имеем оценку $\omega_k \sim \varepsilon_F A^{1/3}$, откуда видно, что энергия коллективного состояния с ростом числа частиц стремится к нулю, т. е. спектр рассматриваемых возбуждений оказывается бесщелевым. Для макроскопических систем без дальнего действия, в которых произошло спонтанное нарушение симметрии, этот вывод, по существу, есть просто следствие известной теоремы Голдстоуна [11].

При наличии в системе незаэкранированных дальнедействующих сил типа гравитационных ($\mathcal{U} \sim 1/r$) оценка массового коэффициента не меняется, однако существенно изменяется жесткость — теперь при больших A главный вклад в нее дает дальнее действие и разность $\mathcal{U}(GG)_{\omega=0}g_0f_k - g_0f_k$ уже не падает с ростом A , а растет как $A^{1/3}$. Поэтому, например, для сферической системы

вклад дальнего действия в C_L оказывается равным [40]

$$C_L^{long} = \alpha \rho^2 V [3/(2L + 1) - 1] \quad (23)$$

(для ядра $\alpha = e^2$ и $\rho = Z/V$ — плотность протонов; для гравитационного взаимодействия $\alpha = -\gamma m^2$, где γ — гравитационная постоянная, и $\rho = A/V$ — плотность частиц с массой m). Этот вклад при $\rho = \text{const}$ растет линейно с объемом системы V , вследствие чего отношение C_L/B_L уже не стремится к нулю. Однако в рассматриваемой ситуации жесткость C_L не может быть положительной при всех L , и при некотором моменте L_c она становится отрицательной и система перестает быть стабильной*; в случае дальнего действующего притяжения система коллапсирует ($C_0 < 0$), а в случае отталкивания деформируется и делится ($C_2 < 0$).

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чтобы количественно описать ядерные явления, нужно решать уравнения типа (5), куда входят функция Грина G , амплитуда взаимодействия \mathcal{U} и т. п. Найти их в рамках графического подхода можно путем суммирования соответствующих диаграмм. В системах с сильным взаимодействием это очень сложная и не решенная до конца задача. Поэтому во многих микроскопических теориях присутствует элемент феноменологии: определенные совокупности диаграмм не вычисляются, а параметризуются на основе опытных данных. И здесь фундаментальную роль играет тот экспериментальный факт, что во многих явлениях ферми-системы, будь то атомные ядра, электроны металла или жидкий ${}^3\text{He}$, ведут себя подобно газу ферми-частиц. Это обстоятельство стимулировало хартри-фоковские (ХФ) расчеты, в которых функционал $E(\rho)$ ищется на классе ферми-газовых волновых функций — слейтеровских детерминантов, описывающих невзаимодействующие квази-частицы. В последнее время в этом методе вместо пустотного взаимодействия широко используются зависящие от плотности эффективные силы [42, 43], параметры которых определяются подгонкой к формуле Вайцзеккера для энергии связи ядер. Следует подчеркнуть, что процедура, в которой вместо пустотных сил используются эффективные, а волновая функция системы берется по-прежнему в виде слейтеровского детерминанта, нередко является внутренне противоречивой. Это противоречие можно увидеть на примере системы с парным гамильтонианом путем сравнения ХФ-формулы для плотности энергии

$$e_{\text{ХФ}} = t + \rho v(\rho) \rho / 2, \quad (24)$$

* Ситуация в электронейтральных средах другая — в спектре коллективных возбуждений стабильной системы в этом случае появляется щель (например, плазменная ветвь в твердом теле [41]).

где t — плотность кинетической энергии, а $v(\rho)$ — эффективный потенциал взаимодействия, с точной формулой Галицкого — Мигдала [44]:

$$e_{ГМ} = t + \frac{1}{2} \int \Sigma G \frac{d\varepsilon}{2\pi i}, \quad (25)$$

где Σ — массовый оператор, роль которого в методе ХФ играет не зависящий от энергетической переменной ε самосогласованный потенциал

$$\Sigma_{ХФ} = \rho v + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \rho. \quad (26)$$

Если подставить $\Sigma_{ХФ}$ в точную формулу (25) и учесть, что $\int G \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \rho$, то получим

$$e = t + \frac{1}{2} \rho v \rho + \frac{1}{2} \left(\rho^2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \rho + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \rho^2 \right). \quad (27)$$

Мы видим, что в плотности энергии появилось слагаемое, которое отсутствует в (24)! Этот результат показывает, что нельзя все свести к перенормировке взаимодействия, не усложняя волновой функции, — оба эффекта взаимосвязаны и в строгом подходе они должны учитываться одновременно.

От подобных противоречий свободна ТКФС [9], в основе которой лежат идеи теории ферми-жидкости [4—6]. В ТКФС функция Грина частицы представляется в виде суммы двух слагаемых: $G = aG^q + G^R$. Полюсное квазичастичное слагаемое G^q , входящее с весом $0 < a < 1$, отвечает обычному слейтеровскому детерминанту, а регулярная часть G^R описывает вклад более сложных конфигураций. Одно из главных положений ТКФС состоит в том, что при малых энергиях возбуждения (при $\omega \ll \varepsilon_F$) флуктуации в характеристиках ядер связаны с полюсными частями G^q , а регулярные части G^R дают плавный вклад. На этом основана идея перенормировки: во всех уравнениях из произведения GG выделяется произведение $G^q G^q$ полюсных частей, а остаток уходит в универсальные блоки — в локальный заряд e_q и эффективную амплитуду взаимодействия \mathcal{F} . Изложение этой процедуры для конечных систем содержится в книге А. Б. Мигдала [9]. Здесь мы приведем лишь результаты для случая, когда в \mathcal{F} можно не учитывать члены, зависящие от энергий, скоростей и спинов частиц*, а ограничиться зависимостью только от передаваемого импульса q (последнее важно, так как переходная плотность рассматриваемых возбуждений имеет поверхностный пик шириной $\sim r_0$ и импульс, проносимый в канале частица — дырка, оказывается $\sim p_F$.) Усло-

* Более общий случай рассмотрен в приложении.

вие согласования в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{r}} = \int \mathcal{F}^{ih}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \rho) A^h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega = 0) \frac{\partial U^h}{\partial \mathbf{r}_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (28)$$

Уравнение для эффективного поля [9] записывается в форме

$$V^i(\mathbf{r}; \omega) = e_q^i V_0^i(\mathbf{r}) + \int \mathcal{F}^{ih}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) A^h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) V^h(\mathbf{r}_2; \omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (29)$$

Здесь e_q^i — локальный заряд, V_0 — внешнее поле. Для амплитуды перехода g имеем уравнение

$$g^i(\mathbf{r}; \omega) = \int \mathcal{F}^{ih}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) A^h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) g^h(\mathbf{r}_2; \omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (30)$$

с условием нормировки [9]

$$\left(g \frac{dA}{d\omega} g \right) = -1. \quad (31)$$

В уравнения (28) — (31) входит пропагатор

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) &= \int G^q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon - \omega/2) G^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \varepsilon + \omega/2) \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \\ &= \sum_{\lambda\lambda'} \Phi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}_1) \Phi_{\lambda}(\mathbf{r}_1) \frac{n_{\lambda} - n_{\lambda'}}{\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'} - \omega} \Phi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}_2) \Phi_{\lambda}(\mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (32)$$

где G^q — квазичастичная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$(\varepsilon - p^2/2m^* - U(\mathbf{r}_1)) G^q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (33)$$

Здесь m^* — эффективная масса квазичастицы, U — самосогласованное поле, Φ_{λ} , ε_{λ} и n_{λ} — соответственно волновые функции квазичастиц, их энергии и числа заполнения квазичастичных уровней; $\lambda = (n, l, j, m) \equiv (v, m)$ — одночастичные квантовые числа.

4. СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для изучения квантовых капиллярных волн (капонов) удобно в амплитуде g рождения коллективного состояния выделить главную, поверхностную компоненту. Для этого преобразуем уравнение (30), предварительно отделив в нем угловые переменные. Поскольку свойства капонов в атомных ядрах определяются в основном скалярной частью амплитуды взаимодействия \mathcal{F} , то, оставляя только эту часть, для возбуждения с мультипольностью L в случае сферической симметрии имеем $g_L(\mathbf{r}; \omega) = g_L(r, \omega) \times$

× $Y_{LM}(\mathbf{n})$ и из (30) получаем

$$g_L^i(r; \omega) = \int \mathcal{F}_L^{ih}(r, r_1) A_L^h(r_1, r_2; \omega) g_L^h(r_2; \omega) r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2, \quad (34)$$

где

$$\mathcal{F}_L^{ih}(r, r') = \int \mathcal{F}^{ih}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P_L(\mathbf{nn}') \frac{dn dn'}{4\pi}; \quad (35)$$

$$A_L^h(r, r'; \omega) = \int A^h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) P_L(\mathbf{nn}') \frac{dn dn'}{4\pi}. \quad (36)$$

Условие согласования (28) при этом записывается в форме

$$\frac{\partial U^i}{\partial r} = \int \mathcal{F}_1^{ih}(r, r_1) A_1^h(r_1, r_2; \omega = 0) \frac{\partial U^h}{\partial r_2} r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2, \quad (37)$$

а сопряженное с ним уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial r} = \int A_1^i(r, r_1; \omega = 0) \mathcal{F}_1^{ih}(r_1, r_2) \frac{\partial \rho^h}{\partial r_2} r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2. \quad (38)$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial r} = \int A_1^i(r, r_1; \omega = 0) \frac{\partial U^i}{\partial r_1} r_1^2 dr_1. \quad (39)$$

Чтобы явно выделить в амплитуде g_L главную компоненту, пропорциональную $\partial U / \partial r$, разложим ядро $\mathcal{F}_L A_L$ интегрального уравнения (34) по собственным функциям уравнений (37) и (38):

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{F}_L^{ih}(r_1, r_3) A_L^h(r_3, r_2; \omega) r_3^2 dr_3 = \\ & = \kappa_L(\omega) \frac{\partial U^i}{\partial r_1} \frac{\partial \rho^h}{\partial r_2} + \mathcal{R}_L^{ih}(r_1, r_2; \omega), \end{aligned} \quad (40)$$

где \mathcal{R}_L — ортогональное дополнение к первому члену в правой части — представляет собой по существу объемную часть ядра $\mathcal{F}_L A_L$, так как определяется условием

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \mathcal{R}_L \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (41)$$

(здесь и далее круглые скобки означают интегрирование по всем координатам и суммирование по всем индексам). Из (37), (40) и (41) вытекают следующие соотношения:

$$\kappa_L(\omega) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \mathcal{F}_L A_L(\omega) \frac{\partial U}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)^{-2}; \quad (42)$$

$$\kappa_1(0) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)^{-1}; \quad (43)$$

$$\int \frac{\partial \rho^i}{\partial r_1} \mathcal{R}_1^{ih}(r_1, r; \omega = 0) r_1^2 dr_1 = \int \mathcal{R}_1^{hi}(r, r_1; \omega = 0) \frac{\partial U^i}{\partial r_1} r_1^2 dr \equiv 0. \quad (44)$$

Подставляя (40) в (34), получаем

$$g_L^i(r; \omega) = \kappa_L(\omega) \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} g_L \right) \Omega_L^i(r; \omega), \quad (45)$$

где введена функция Ω_L , удовлетворяющая уравнению

$$\Omega_L^i(r; \omega) = -\frac{\partial U^i}{\partial r} + \int \mathcal{R}_L^{ih}(r, r_1; \omega) \Omega_L^h(r_1; \omega) r_1^2 dr_1, \quad (46)$$

причем, как можно увидеть из написанных выражений,

$$\Omega_L^i(r; \omega = 0) = \partial U^i / \partial r. \quad (47)$$

Если умножить (45) на $\partial \rho^i / \partial r$, проинтегрировать по координатам и просуммировать по нейтронам и протонам, то можно получить уравнение, из которого определяются частоты ω_L коллективных колебаний:

$$\Theta_L(\omega) \equiv 1 - \kappa_L(\omega) \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_L(\omega) \right) = 0 \quad (48)$$

Следуя рассмотрению, проведенному в разд. 2, запишем

$$\Omega_L^i(r; \omega) = \partial U^i / \partial r + \phi_L^i(r; \omega). \quad (49)$$

Тогда, используя (44) и (46), получаем уравнение для ϕ_L^i :

$$\begin{aligned} \phi_L^i(r; \omega) = & \int (\mathcal{R}_L^{ih}(r, r_1; \omega) - \mathcal{R}_L^{ih}(r, r_1; \omega = 0)) \frac{\partial U^h}{\partial r_1} r_1^2 dr_1 + \\ & + \int \mathcal{R}_L^{ih}(r, r_1; \omega) \phi_L^h(r_1; \omega) r_1^2 dr_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Благодаря присутствию в этом уравнении члена, содержащего $\mathcal{R}_L^{ih}(\omega = 0)$, обеспечивается обращение поправочной функции $\phi_L^i(r; \omega)$ в нуль при $\omega = 0$ и $L = 1$, т. е. автоматически получается $g_1^i(r; 0) \sim \partial U^i / \partial r$. Как видно из (48) и (43), при этом собственная частота $\omega_1 = 0$, как и должно быть для дипольного возмущения.

Выполняя аналогичные преобразования в уравнении (29) для эффективного поля, его решение можно представить в виде

$$V_L^i(r; \omega) = v_L^i(r; \omega) + \kappa_L(\omega) \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} v_L \right) \Theta_L^{-1}(\omega) \Omega_L^i(r; \omega), \quad (51)$$

где v_L — функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_L^i(r; \omega) = e_q V_{0L}^i(r) + \int \mathcal{R}_L^{ih}(r, r_1; \omega) v_L^h(r_1; \omega) r_1^2 dr_1. \quad (52)$$

Для полноты выпишем здесь же выражения для переходной плотности и приведенной вероятности $B(EL)$. Квадрат матричного элемента перехода $0^+ \rightarrow L^\pi$, просуммированный по проекциям углового момента L в конечном состоянии, дается обычной формулой [9]

$$|M_{0L}|^2 = -\frac{1}{\pi} \text{Im} (e_q V_{0L} A_L V_L) = (e_q V_{0L} A_L g_L)^2,$$

и поэтому из (51), (45) и (31) имеем

$$\begin{aligned} |M_{0L}|^2 &= \left[\kappa_L \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} v_L \right) (e_q V_{0L} A_L \Omega_L) \left(\frac{d^{\circ} \Omega_L}{d\omega} \right)^{-1} \right]_{\omega=\omega_L} = \\ &= \left[- (e_q V_{0L} A_L \Omega_L)^2 \left(\Omega_L \frac{dA_L}{d\omega} \Omega_L \right)^{-1} \right]_{\omega=\omega_L}. \end{aligned} \quad (53)$$

Отметим, что в точке $\omega = \omega_L$ выполняется соотношение

$$\left(\Omega_L \frac{dA_L}{d\omega} \Omega_L \right) = - \left(\Omega_L A_L \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{d^{\circ} \Omega_L}{d\omega}. \quad (53')$$

Вводя в соответствии с (53) переходную плотность

$$\begin{aligned} \rho_{tr}^i(r; \omega_L) &= \left(-\Omega_L \frac{dA_L}{d\omega} \Omega_L \right)_{\omega=\omega_L}^{-1/2} \times \\ &\times \int e_q^i A_L^i(r, r_1; \omega_L) \Omega_L^i(r_1; \omega_L) r_1^2 dr_1, \end{aligned} \quad (54)$$

при $V_{0L}^i = e^i r^L Y_{LM}$ получаем выражение для $B(EL)$:

$$B(EL : 0^+ \rightarrow L^\pi) = (2L + 1) \left[\int e^i \rho_{tr}^i(r; \omega_L) r^{L+2} dr \right]^2. \quad (55)$$

5. СВОЙСТВА КАПОНОВ В АТОМНЫХ ЯДРАХ

Спонтанное нарушение трансляционной инвариантности, благодаря которому в капле ферми-жидкости возникает коллективная ветвь низколежащих поверхностных возбуждений, имеет место в широком интервале температур — от нуля до точки кипения, и поэтому такая ветвь существует как в квантовой, так и в классической области. В последней ей соответствуют обычные капиллярные волны. Их свойства при понижении температуры и переходе в квантовую область меняются из-за взаимодействия с нарождающейся нуль-звуковой ветвью, однако главная особенность — поверхностный характер колебаний — остается. Взаимодействие с нуль-звуком сильнее всего сказывается на малых величинах — жесткостях C_L и частотах ω_L , и поэтому неудивительно, что классическая модель [1, 2] в применении к ядру дает неправильное положение первых НКС, хотя соответствующие переходные плотности, как показали поставленные недавно эксперименты [19], по форме мало отличаются от классических $\rho_{tr}^{кл} \sim (\partial \rho / \partial r) Y_{LM}$.

Чтобы найти характеристики НКС в ядрах, нужно решать на ЭВМ уравнение (34) для амплитуды g совместно с условием согласования (37), т. е. реализовать схему, разработанную в предыдущем разделе. Однако многие свойства НКС можно проанализировать, не прибегая к сложным расчетам (им будет посвящен разд. 8). Из-за того что капоны формируются в основном на по-

верхности, где нуклоны притягиваются друг к другу, их частоты ω_L в противоположность нуль-звуковым возбуждениям оказываются всегда меньше соответствующих одночастичных разностей ω_{sp} . Поэтому капоны образуют самую низлежащую ветвь коллективных колебаний в ядрах и качественно их основные свойства можно изучать, пользуясь адиабатическим приближением $\omega_L/\omega_{sp} \ll 1$. Тогда, раскладывая (48) вблизи $\omega = 0$ в ряд

$$\mathcal{O}_L(\omega_L) = \mathcal{O}_L(0) + \omega_L^2 (d\mathcal{O}_L/d\omega^2)_{\omega=0},$$

получаем стандартное для адиабатики определение частоты

$$\omega_L^2 = C_L/B_L, \quad (56)$$

где

$$C_L = - \left[1 - \kappa_L(0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_L \right)_{\omega=0} \right] / \kappa_1(0); \quad (57)$$

$$B_L(0) = \left(\frac{d\mathcal{O}_L}{d\omega^2} \right)_{\omega=0} / \kappa_1(0). \quad (58)$$

Нормировка здесь выбрана так, чтобы массовый коэффициент B_L имел размерность массы. С другой стороны, если разложить \mathcal{O}_L в ряд вблизи $\omega = \omega_L$, записывая $\mathcal{O}_L(0) = \mathcal{O}_L(\omega_L) - \left(\frac{d\mathcal{O}_L}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_L} \omega_L^2$, то, используя условие $\mathcal{O}_L(\omega_L) = 0$, можно получить еще одно определение массового коэффициента:

$$B_L(\omega_L) = \left(\frac{d\mathcal{O}_L}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_L} / \kappa_1(0). \quad (58')$$

Сравнивая между собой значения $B_L(0)$ и $B_L(\omega_L)$, вычисленные согласно (58) и (58'), можно судить о точности адиабатического приближения. Это сравнение будет проведено ниже, а пока займемся жесткостями C_L . Используя (43) и (49), формулу (57) можно привести к виду

$$C_L = \frac{\kappa_L(0) - \kappa_1(0)}{\kappa_1^2(0)} + \frac{\kappa_L(0)}{\kappa_1(0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \phi_L \right)_{\omega=0}, \quad (59)$$

что с учетом условий согласования (37) — (39) и определения κ_L (42) дает

$$C_L = \left(\frac{\partial U}{\partial r} (A_L - A_1) \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\omega=0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} (\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_1) \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \\ + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} (\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_1) (A_L - A_1) \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\omega=0} + \frac{\kappa_L(0)}{\kappa_1(0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \phi_L \right)_{\omega=0}. \quad (60)$$

Оценки и численные расчеты показывают, что последние два слагаемых играют, как правило, малую роль (табл. 1), а главный вклад в C_L вносят первый и второй члены. Для их вычисления в разностях $\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_1$ и $A_L - A_1$ удобно выделить локальные

Таблица 1

Вклад в жесткость последних двух членов формулы (60)
для некоторых магических ядер

L^π	Вклад в жесткость, %		
	^{88}Sr	^{132}Sn	^{208}Pb
2^+	4,7	0,2	1,3
3^-	-5,9	-0,5	-2,5

и дальнедействующие компоненты. Взаимодействие \mathcal{F} содержит два члена — локальную ядерную амплитуду F и кулоновское дальнедействие \mathcal{F}^c для протонов. Частично-дырочный пропагатор A имеет две компоненты — локальную универсальную часть A^u с радиусом $\sim r_0$ и квантовое дальнедействие A с радиусом $\sim R$ [39]. Вклад в C_L локальных частей можно найти, если воспользоваться тем обстоятельством, что при интегрировании $A^u(r_1, r_2, 0)$ и $F(r_1, r_2)$ с $\partial\rho/\partial r$ и $\partial U/\partial r$ в первых двух членах (60) основной вклад дает область $|r_1 - r_2| \sim r_0$ и $|r_1| \sim |r_2| \sim R$, в которой $1 - x \sim \left(\frac{r_0}{R}\right)^2$, т. е. $1 - x \sim A^{-2/3}$ (здесь $x = \cos \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2$). Поэтому, когда $L \ll p_F R$, при вычислении F_L и A_L^u по формулам (35) и (36) можно использовать разложение полинома Лежандра вблизи $x = 1$, имеющее вид $P_L(x) \approx 1 - L(L+1)(1-x)/2$, и тогда

$$\left. \begin{aligned} F_L(r_1, r_2) &\approx F_0(r_1, r_2) - \pi L(L+1) \int F(r_1, r_2, x)(1-x) dx; \\ A_L^u(r_1, r_2; \omega=0) &\approx A_0^u(r_1, r_2; \omega=0) - \\ &- \pi L(L+1) \int A^u(r_1, r_2, x; \omega=0)(1-x) dx. \end{aligned} \right\} (61)$$

Подставляя эти выражения в первые два члена в (60), получаем, что вклад F и A^u в жесткость C_L равен

$$C_L^{\text{loc}} = \sigma(L(L+1) - 2), \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma = & -\pi \int \frac{\partial U}{\partial r_1} A^u(r_1, r_2, x; \omega=0) \frac{\partial U}{\partial r_2} (1-x) dx r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 - \\ & - \pi \int \frac{\partial \rho}{\partial r_1} F(r_1, r_2, x) \frac{\partial \rho}{\partial r_2} (1-x) dx r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2. \end{aligned} \quad (63)$$

Учитывая, что кулоновская гармоника

$$\mathcal{F}_L^c(r_1, r_2) = \frac{4\pi e^2}{2L+1} \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}}, \quad (64)$$

где $r_<$ ($r_>$) — меньшая (большая) из координат r_1 и r_2 , является плавной функцией, а $\partial\rho/\partial r$ — резкая функция, отличная от нуля лишь при $r \sim R$, из второго члена в (60) получаем для кулоновской части жесткости формулу, совпадающую с (23). Объединяя (62) и (23), приходим к выражению, в точности соответствующему тому, которое получается в классической гидродинамике капли:

$$C_L^{\text{кл}} = \sigma(L-1)(L+2) - (3Z^2e^2/2\pi R^3)(L-1)/(2L+1). \quad (65)$$

Чтобы найти полную жесткость, к нему следует добавить вклад квантового дальнего действия \mathcal{A} . Отметим, что с ростом L гармоники этого дальнего действия \mathcal{A}_L быстро падают, и поэтому формула (65) по существу определяет всю жесткость системы в классической области $1 \ll L \ll r_F R$. Это позволяет введенный согласно (63) параметр σ интерпретировать как коэффициент поверхностного натяжения. Количественный расчет σ по формуле (63) выполнен в [46] (подробнее см. разд. 8). Локальная часть A^u пропагатора A всегда отрицательна, и поверхностная часть изоскалярной ядерной амплитуды F^+ , дающая вклад в σ , также отрицательна (заметим, что в (63) подразумевается суммирование по нейтронам и протонам). Поэтому параметр σ — величина положительная. При $L > 1$, как видно из (65), «локальная» часть жесткости положительна, а кулоновская — отрицательна. При $L = 0$ ситуация обратная — локальный вклад отрицателен, а кулоновский — положителен. Хорошо известно, что если жесткость C_0 становится меньше нуля, то наступает коллапс. Поэтому в отсутствие кулоновского взаимодействия только квантовое дальнее действие \mathcal{A} в частично-дырочном пропагаторе A может спасти ядро от коллапса. Насколько велика роль этого дальнего действия, можно судить из данных табл. 2*, где приведены жесткости C_L для ряда маги-

Таблица 2

Жесткости магических ядер по отношению к монополярным (C_0), квадрупольным (C_2) и октупольным (C_3) возмущениям (в скобках приведены гидродинамические значения)

Ядро	^{40}Ca	^{88}Sr	^{132}Sn	^{208}Pb
C_0 ($C_0^{\text{кл}}$), $Mэв/ферми^2$	29 (3,0)	42,5 (5,7)	50,5 (6,7)	61,5 (12,3)
C_2 ($C_2^{\text{кл}}$), $Mэв/ферми^2$	18 (3,9)	8,5 (3,4)	19,7 (3,2)	28,0 (2,0)
C_3 ($C_3^{\text{кл}}$), $Mэв/ферми^2$	6,9 (0,7)	7,4 (9,9)	14,5 (9,6)	9,9 (8,0)

* Все расчеты в этом разделе проведены для самосогласованного потенциала вуде-саксоновского типа с параметрами, взятыми из [45]. Взаимодействие \mathcal{F} бралось с гауссовой радиальной зависимостью и с линейной интерполяцией по плотности (подробности см. в разд. 8).

ческих ядер. Характеристикой вклада дальнедействующей компоненты \mathcal{A} в жесткость служит разность между значениями, вычисленными по формуле (60), и гидродинамическими значениями, найденными из (65) (при этом принято, что $4\pi r_0^2 \sigma = 20,8 \text{ Мэв}$ и $r_0 = 1,18 \text{ ферми}$ [36]; напомним, что при выбранной нормировке в C_L и B_L отсутствует множитель R^2). Из табл. 2 видно, что C_0 и C_2 существенно превышают соответствующие значения $C_L^{\text{кл}}$. В то же время жесткость C_3 не столь сильно отличается от $C_3^{\text{кл}}$. Такое поведение жесткостей объясняется оболочечными эффектами. Действительно, основной вклад в C_L квантового дальнего действия \mathcal{A} проистекает из первого члена в (60) и равен $\delta C_L = \left(\frac{\partial U}{\partial r} (\mathcal{A}_L - \mathcal{A}_1) \frac{\partial U}{\partial r} \right)$; его величина, как видно из (32), зависит от энергетических разностей $\omega_{sp} = \varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}$ для одночастичных уровней λ , расположенных вблизи поверхности Ферми по разные стороны от нее. Если частота $(\omega_{sp})_L$, входящая в \mathcal{A}_L , меньше, чем $(\omega_{sp})_1$ в \mathcal{A}_1 , то величина δC_L отрицательна, если наоборот — положительна. (При $\omega = 0$ и $r_1 \approx r_2$ вклад каждого члена в сумму (32) отрицателен, а в δC_L важна лишь область $r_1 \approx r_2 \approx R$). В магических ядрах для нечетных L $(\omega_{sp})_L \sim \omega_0$, где ω_0 — расстояние между оболочками, а для четных L $(\omega_{sp})_L \sim 2\omega_0$. Поэтому при $L = 0, 2, 4, \dots$ часть жесткости, обусловленная квантовым дальним действием в пропагаторе \mathcal{A} , оказывается положительной, в результате чего C_0 и C_2 получаются намного больше гидродинамических значений. По этой же причине и в ядре с $Z = 114$ жесткость C_2 остается большой положительной величиной, хотя $C_{2..}^{\text{кл}}$ здесь уже становится близкой к нулю (табл. 3); это обстоя-

Таблица 3

Сравнение жесткости сверхтяжелых ядер C_L с гидродинамическими значениями $C_L^{\text{кл}}$ (Мэв/ферми²)

L^π	C_L (298114)	$C_L^{\text{кл}}$ (298114)	C_L (342114)	$C_L^{\text{кл}}$ (342114)
0 ⁺	70,0	17,0	73,1	14,7
2 ⁺	24,7	1,1	16,3	1,6
3 ⁻	13,0	6,7	24,1	7,3

тельство служит дополнительным аргументом в пользу существования сверхтяжелых ядер. Для нечетных L роль дальнего действия в разности $\mathcal{A}_L - \mathcal{A}_1$ менее существенна, однако, как видно из табл. 1, его вклад в жесткости C_L также положителен, и это является одной из причин, объясняющей, почему магические ядра имеют устойчивую сферическую форму.

Иначе обстоит дело с ядрами, далекими от магических. В них существенную роль играют внутриоболочечные переходы между уровнями одной четности, для которых энергетические разности ω_{sp} оказываются меньше частоты ω_0 , характерной для одночастичных переходов с нечетными L . И если в магических ядрах наибольшую роль дальноедействие играло в пропагаторе A_1 , то теперь по мере заполнения оболочки все больший вклад дальноедействие дает в A_2 и наступает момент, когда A_2 становится настолько большим, что жесткость C_2 обращается в нуль и ядро теряет сферическую форму. Первая модель этого явления была построена в [8]. Для количественного расчета жесткостей в немагических ядрах нужно последовательно учесть спаривание [8, 25]. Здесь мы не будем касаться этой задачи; соответствующие формулы можно найти в [25].

Перейдем к рассмотрению массовых коэффициентов. Вычислим сначала B_1 . Как уже не раз говорилось, при $L = 1$ имеем $\omega_1 = 0$ и $\Omega_1 = \partial U / \partial r$. В этом случае оба определения (58) и (58') совпадают, и тогда с учетом (53') получаем

$$B_1 = - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{dA_1}{d\omega^2} \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\omega=0} \quad (66)$$

Дальнейшие вычисления удобно провести в λ -представлении. Используя определения (32) и (36), находим

$$B_1 = - \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda\lambda'} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\lambda\lambda'} \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{(\epsilon_\lambda - \epsilon_{\lambda'})^3} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\lambda'\lambda} \quad (67)$$

Если теперь учесть, что $\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\lambda\lambda'} = m (\epsilon_\lambda - \epsilon_{\lambda'})^2 (r)_{\lambda\lambda'}$, то отсюда сразу вытекает

$$B_1 = 3m (N + Z) / 4\pi = 3mA / 4\pi, \quad (68)$$

что с точностью до нормировочного множителя R^2 совпадает с выражением для $B_1^{кл}$, которое получается в капельной модели. Этот результат не меняется и при учете скоростных сил [14].

При $L \neq 1$ значения B_L , вычисляемые согласно (58) и (58'), будут, вообще говоря, отличаться друг от друга, и это отличие будет тем заметнее, чем хуже точность адиабатического приближения. Следует отметить, что в реальных ядрах это приближение, как правило, работает плохо, так как параметр адиабатичности не мал: $\omega_L / \omega_{sp} \geq 0,5$. Как видно из табл. 4, это приводит к большому различию между $B_L(0)$ и $B_L(\omega_L)$, причем всегда $B_L(\omega_L) > B_L(0)$; кроме того, оба этих массовых коэффициента существенно отличаются от гидродинамического значения:

$$B_L^{кл} = B_1 / L = 3mA / 4\pi L, \quad (69)$$

Таблица 4

Массовые коэффициенты для первых 2⁺- и 3⁻-коллективных возбуждений в магических ядрах (в скобках приведены гидродинамические значения)

Ядро	Массовые коэффициенты, $M_{\omega L}^{-1} \cdot \text{ферми}^{-2}$			
	⁴⁰ Ca	⁸⁸ Sr	¹³² Sn	²⁰⁸ Pb
$B_2(0)$	0,03	3,5	0,55	0,44
$B_2(\omega_2) (B_2^{\text{гид}})$	— (0,11)	8,53 (0,25)	4,23 (0,58)	3,48 (0,60)
$B_3(0)$	0,25	1,05	0,55	1,33
$B_3(\omega_3) (B_3^{\text{гид}})$	0,55 (0,08)	2,34 (0,17)	1,46 (0,25)	2,10 (0,40)

получающегося в капельной модели для безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. Последнее обстоятельство и объясняет, почему экспериментально наблюдаемые вероятности $B(EL)$ сильно не совпадают с предсказаниями гидродинамической модели. Чтобы пояснить это, перепишем формулу (55) для $B(EL)$ в виде

$$B(EL) = \frac{2L+1}{2\omega_L B_L(\omega_L)} \frac{(e_q V_{0L} A_L \Omega_L)_{\omega=\omega_L}^2}{\kappa_1(0) \left(\frac{\partial U}{\partial r} A_L \Omega_L \right)_{\omega=\omega_L}} \equiv \frac{2L+1}{2\omega_L B_L(\omega_L)} M_L^2. \quad (70)$$

Здесь использовано определение (58') массового коэффициента $B_L(\omega_L)$, соотношение (53') и выражение (53) для квадрата матричного элемента перехода $0^+ \rightarrow L^\pi$. Вычислим значение M_L^2 в (70), предполагая, что ненормированная переходная плотность $\int A_L^i(r, r_1; \omega_L) \Omega_L^i(r_1; \omega_L) r_1^2 dr_1$ мало отличается от классической $\partial \rho^i / \partial r$ (в случае $L=1$, как видно из (39) и (47), они точно совпадают; насколько оправдано это предположение для других L , можно судить по данным табл. 5). Тогда, вспоминая определение

Таблица 5

Ненормированные матричные элементы M_L перехода $0^+ \rightarrow L^\pi$ с возбуждением первых 2⁺- и 3⁻-состояний в магических ядрах (в скобках даны гидродинамические значения)

Ядро	⁴⁰ Ca	⁸⁸ Sr	¹³² Sn	²⁰⁸ Pb
$M_2 (M_2^{\text{гид}}, e \cdot \text{ферми})$	—	56,7 (47,6)	68,7 (71,7)	134 (137)
$M_3 (M_3^{\text{гид}}, e \cdot \text{ферми}^2)$	109 (77,8)	327 (250)	464 (431)	1072 (987)

(43), получаем $\left(\frac{\partial U}{\partial r} A_L \Omega_L\right) \kappa_1(0) \approx 1$ и при $V_0 = er^L Y_{LM}(\mathbf{n})$ имеем $M_L \approx e \int \frac{\partial \rho^p}{\partial r} r^{L+2} dr \equiv M_L^{\text{кп}}$, так что

$$B(EL) = \frac{2L+1}{2\omega_L B_L(\omega_L)} (M_L^{\text{кп}})^2 \approx \frac{2L+1}{2\omega_L B_L(\omega_L)} \left(\frac{3Ze}{4\pi} R^{L-1}\right)^2. \quad (71)$$

По форме это выражение совпадает с тем, которое получается в модели жидкой капли [2]. Из табл. 5 видно, что отношение $(M_L/M_L^{\text{кп}})^2$ не очень сильно отличается от единицы, чего нельзя сказать об отношении $B_L(\omega_L)/B_L^{\text{кп}}$, которое, как следует из табл. 4, может быть порядка 10 и даже больше.

Одна из основных причин такого большого различия между $B_L(\omega_L)$ и $B_L^{\text{кп}}$ [формулы (58') и (69)] — интерференция поверхностных волн с нуль-звуковыми колебаниями и с отдельными частично-дырочными возбуждениями, которая ведет к резкому изменению характера коллективного движения: если в классической гидродинамике это движение соответствует безвихревому течению несжимаемой жидкости, то в ядре коллективное движение становится вихревым и проникает в объем. Это подтверждается прямым расчетом тока перехода:

$$\mathbf{j}_L = \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right) \rho_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_L) \right]_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \equiv \rho_0 \mathbf{v}_L, \quad (72)$$

где

$$\rho_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_L) = \int \frac{d\epsilon}{2\pi i} d\mathbf{r}_1 G^q \left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \epsilon - \frac{\omega_L}{2} \right) \times \\ g_L(\mathbf{r}_1; \omega_L) G^q \left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'; \epsilon + \frac{\omega_L}{2} \right) \quad (73)$$

— матрица плотности перехода; \mathbf{v}_L — коллективная скорость; ρ_0 — плотность квазичастиц и $g_L = \alpha_L \Omega_L Y_{LM}(\mathbf{n})$ — амплитуда перехода с нормировочным коэффициентом

$$\alpha_L = \left[- \left(\Omega_L \frac{dA}{d\omega} \Omega_L \right)_{\omega=\omega_L} \right]^{-1/2} = \\ = \left[2\omega_L B_L(\omega_L) \left(\frac{dU}{dr} A_L \Omega_L \right) \kappa_1(0) \right]^{-1/2} \quad (74)$$

[см. (53) — (55) и (58')]. В классической гидродинамике $\alpha_L = (2\omega_L B_L^{\text{кп}})^{-1/2}$ и $\Omega_L = dU/dr$.

Коллективную скорость удобно записать в виде

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}; \omega_L) = i\omega_L \alpha_L (F_L^{(1)} \mathbf{n} + r F_L^{(2)} \nabla) Y_{LM}(\mathbf{n}). \quad (75)$$

Тогда

$$\text{rot } \mathbf{v}_L = i\omega_L \alpha_L R_L(r) Y_{LM}(\mathbf{n}), \quad (76)$$

где

$$R_L(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{d(r F_L^{(2)})}{dr} - F_L^{(1)} \right). \quad (77)$$

После отделения угловых переменных для форм-факторов $F_L^{(1)}$ и $F_L^{(2)}$ получаем

$$F_L^{(1)}(r) = \frac{1}{2m\rho_0\omega_L} \sum_{l_1 j_1 l_2 j_2} \frac{\langle j_1 l_1 \| Y_{LM} \| j_2 l_2 \rangle^2}{2L+1} \times \\ \times \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} r_1^2 dr_1 \Omega_L(r_1; \omega_L) \left[G_{j_2 l_2}^q \left(r_1, r; \varepsilon + \frac{\omega_L}{2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \times \right. \\ \times G_{j_1 l_1}^q \left(r, r_1; \varepsilon - \frac{\omega_L}{2} \right) - G_{j_1 l_1}^q \left(r, r_1; \varepsilon - \frac{\omega_L}{2} \right) \times \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial r} G_{j_2 l_2}^q \left(r_1, r; \varepsilon + \frac{\omega_L}{2} \right) \right]; \quad (78)$$

$$F_L^{(2)}(r) = \frac{1}{2m\rho_0\omega_L} \sum_{l_1 j_1 l_2 j_2} \frac{\langle j_1 l_1 \| Y_{LM} \| j_2 l_2 \rangle^2}{2L+1} \times \\ \times \frac{l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)}{L(L+1)} \frac{1}{r} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} r_1^2 dr_1 \Omega_L(r; \omega_L) \times \\ \times G_{j_1 l_1}^q \left(r, r_1; \varepsilon - \frac{\omega_L}{2} \right) G_{j_2 l_2}^q \left(r_1, r; \varepsilon + \frac{\omega_L}{2} \right). \quad (79)$$

Здесь G_{jl}^q — функция Грина радиального уравнения Шредингера

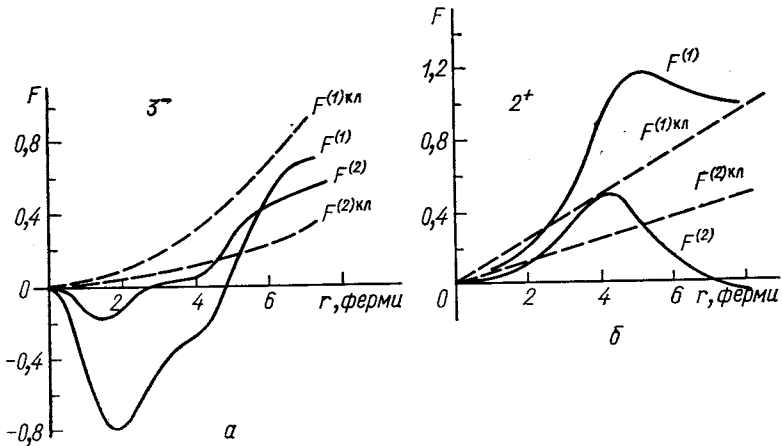


Рис. 1. Форм-факторы радиального распределения заряженного тока перехода для коллективных состояний 3^- (а) и 2^+ (б) в ^{208}Pb

(ее определение см. в разд. 8). В классической гидродинамике $\mathbf{v}^{\text{кл}} = \nabla\varphi$, где $\varphi = \frac{i\alpha_L \omega_L R}{L} \left(\frac{r}{R}\right)^L Y_{LM}(\mathbf{n})$ — потенциал скоростей, и поэтому $F_L^{(1)\text{кл}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1}$; $F_L^{(2)\text{кл}} = \frac{1}{L} \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1}$ и $\text{rot } \mathbf{v}^{\text{кл}} = 0$. Рассчитанные форм-факторы $F_L^{(1)}$ и $F_L^{(2)}$ для состояний 3^- и 2^+ в ^{208}Pb приведены на рис. 1, а распределение вихря скорости $R_L(r)$ —

на рис. 2. Мы видим, что распределение токов в квантовом случае существенно отличается от классического, в результате чего и $\text{rot } v$ оказывается заметно отличным от нуля. Это и приводит к увеличению массового коэффициента $B_L(\omega_L)$ по сравнению с $B_L^{\text{кл}}$

Различие $B_L(\omega_L)$ и $B_L^{\text{кл}}$ позволяет объяснить, почему в модели жидкой капли возникает проблема с описанием правил сумм для электромагнитных переходов в ядрах. В отсутствие скоростных

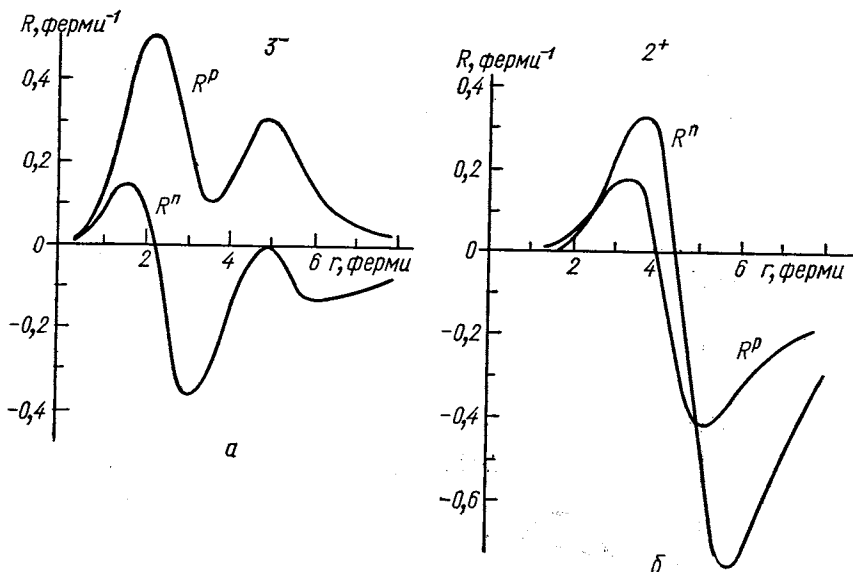


Рис. 2. Радиальное распределение вихря скорости $\text{rot } v$ коллективного движения для первых 3^- -(а) и 2^+ -(б) состояний в ^{208}Pb [см. (76)]

сил (а они не играют существенной роли при малых энергиях возбуждения ядра) сумма $S_L = \sum (E_s - E_0) |(Q_L)_{0s}|^2$ может быть вычислена через двойной коммутатор: $S_L = 1/2 \langle 0 | [Q_L, [H, Q_L]] | 0 \rangle$, и при $Q_L = e r^L Y_{L0}$ можно получить

$$S_L = Ze^2 L R^{2L-2} / 8\pi m \quad (80)$$

(см., например, [24]). С другой стороны, в классической гидродинамике, как видно из (71) и (69), $B^{\text{кл}}(EL) = (2L + 1) (M_L^{\text{кл}})^2 / (2\omega_L B_L^{\text{кл}})$ и

$$\sum_M \omega_L |(Q_L)_{0^+ \rightarrow L\pi M}|^2 = \omega_L B^{\text{кл}}(EL) / (2L + 1) = Ze^2 L R^{2L-2} / 8\pi m, \quad (81)$$

так что правило сумм (80) в модели жидкой капли полностью исчерпывается переходом в однофононное состояние. Однако опыт показывает, что первые НКС в ядрах далеко не исчерпывают S_L и это происходит именно потому, что реальное значение B_L гораздо больше $B_L^{\text{кл}}$.

Поскольку в капле ферми-жидкости помимо капиллярной ветви (капонов) есть еще и нуль-звуковая коллективная ветвь, нужно

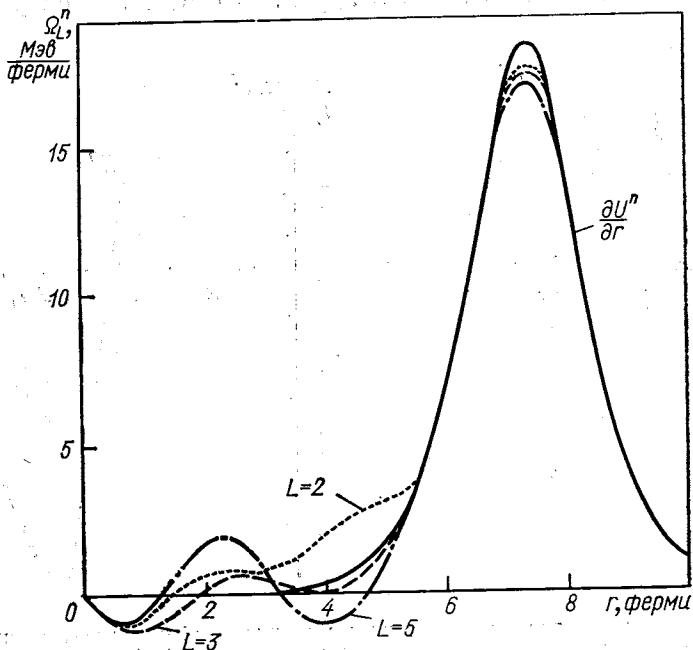


Рис. 3. Сравнение функций Ω_L^n , характеризующих радиальную зависимость нейтральной компоненты амплитуды перехода для первых коллективных уровней 3-, 2+ и 5- в ^{208}Pb , с дипольной (классической) амплитудой $\Omega_1^n = dU^n/dr$

и от нее учесть вклад в правило сумм. Оценки [15] дают, что обе ветви вносят сравнимый вклад в S_L , чем и ликвидируется парадокс с правилом сумм.

Координатная зависимость амплитуды g_L рождения капона определяется функцией Ω_L , которая весьма близка к классической амплитуде dU/dr . Это продемонстрировано на рис. 3, где сравниваются функции $\Omega_L = dU/dr$ и Ω_L для НКС в ^{208}Pb . Расчеты для других магических ядер приводят к аналогичному заключению. То же самое можно сказать и о переходных плотностях —

они имеют классический поверхностный пик $\sim \partial\rho/\partial r$ (см. разд. 8). Поэтому неудивительно, что, считая частоту ω_L и массовый коэффициент B_L (степень коллективности) эмпирическими параметрами, т. е. подбирая из эксперимента нормировку α_L (74), удается в рамках классической коллективной модели [2] качественно описать взаимодействие частиц с фононами, ответственное, в частности, за энергетическое расщепление уровней в мультиплетах [47].

Развитая здесь теория дает возможность автоматически учесть квантовые объемные поправки, которые отсутствуют в классической картине. Она позволяет самосогласованным образом построить взаимодействие частиц с фононами; как будет показано в разд. 9, при этом возникают существенные отличия от подхода, основанного на коллективной модели [2].

6. ИЗМЕНЕНИЕ РАДИУСА И ФОРМЫ ЯДЕР ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Существование низколежащих поверхностных колебаний капли ферми-жидкости — квантовых капиллярных волн — сказывается и на ее поведении в статических внешних полях. При наложении таких полей или при добавлении частиц происходит виртуальное рождение капонов, ведущее к перекачке плотности из внутренних областей на поверхность капли, что на классическом языке описывается как изменение радиуса и формы капли под действием внешних сил. Квантовогидродинамический подход позволяет количественно рассчитать эти эффекты и микроскопическим путем вывести соответствующие классические законы.

Парадокс с увеличением радиуса капли при добавлении частиц. Хорошо известно, на примере хотя бы жидкого ${}^3\text{He}$, что радиус капли ферми-жидкости растет по обычному закону $R = r_0 A^{1/3}$. Если принять для распределения плотности ρ капли простую формулу $\rho = \rho_0/[1 - \exp((r - R)/d)]$, то при добавлении одной частицы $\delta R = R/3A$ и изменение плотности

$$\delta\rho(r) = -\frac{\partial\rho}{\partial r} \delta R = \frac{\exp((r-R)/d)}{[1 + \exp((r+R)/d)]^2} \frac{\rho_0}{d} \frac{2A}{3A}, \quad (82)$$

т. е. внутри капли $\delta\rho$ — экспоненциально малая величина, а на поверхности, где $|r - R| \sim d$, $\delta\rho(r)_{\lambda_0} \sim \rho_0 A^{-2/3}$. С другой стороны, плотность добавленной в состояние λ_0 частицы $\delta\rho_0 = |\Phi_{\lambda_0}|^2 \sim 1/R^3$ — объемная функция.

В ферми-газе объемный характер имеет и полное, с учетом поляризационных эффектов, изменение плотности $\delta\rho(r)$, т. е. и в объеме, и на поверхности $\delta\rho(r) \sim 1/R^3 \sim \rho_0 A^{-1}$. Это означает, что при добавлении частицы к ферми-газовой системе увеличение радиуса $\delta R \sim r_0 A^{-1}$, в то время как для жидкости $\delta R \sim r_0 A^{-2/3}$.

В этом и заключается парадокс с радиусом, к которому приводят представления о капле ферми-жидкости как о газе взаимодействующих квазичастиц, находящихся в потенциальной яме, размеры которой являются внешним параметром задачи [9]. Но, как мы уже знаем, в капле ферми-жидкости есть ветвь низколежащих поверхностных колебаний (в газе их нет). Чтобы количественно рассчитать их вклад в увеличение радиуса системы, необходимо в уравнении ТКФС для изменения плотности (здесь мы интересуемся только сферически-симметричной частью $\delta\rho$)

$$\delta\rho = \delta_0\rho + A_0(\omega = 0) \mathcal{F}_0 \delta\rho \tag{83}$$

последовательно использовать условия согласования (37), (38). Делается это почти так же, как и в разд. 4; разница лишь в том, что ядро $A\mathcal{F}$ уравнения (83) транспонировано по отношению к ядру $\mathcal{F}A$ уравнения (34). Поэтому разбиение $A_0\mathcal{F}_0$, аналогичное (40), выглядит теперь так:

$$A_0\mathcal{F}_0 = \kappa_0 \frac{\partial\rho}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r'} + \mathcal{R}_0^+, \tag{84}$$

причем $\left(\frac{\partial U}{\partial r} \mathcal{R}_0^+ \frac{\partial\rho}{\partial r'}\right) = 0$. Константа κ_0 определяется соотношением (42) при $L = 0$.

Подставив (84) в (83), после несложных преобразований получим [аналогично (51)]

$$\delta\rho = \delta_{1\rho} + \frac{\kappa_0 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \delta_{1\rho}\right)}{1 - \kappa_0 \left(\frac{\partial\rho}{\partial r} \Omega_0\right)} \mathcal{F}_0, \tag{85}$$

где функция \mathcal{F}_0 , ответственная за увеличение плотности на поверхности капли, определяется уравнением, аналогичным (46):

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\partial\rho}{\partial r} + \mathcal{R}_0^+ \mathcal{F}_0, \tag{86}$$

а

$$\delta_{1\rho} = \delta_0\rho + \mathcal{R}_0^+ \delta_{1\rho}. \tag{87}$$

При выводе (85) мы использовали равенство $\left(\frac{\partial U}{\partial r} \mathcal{F}_0\right) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial r} \Omega_0\right)$.

Если разложить $\delta\rho$ по собственным функциям χ_n оператора $A_1(0)F_1$, одна из которых в силу условия согласования (37) $\chi_1 = \partial\rho/\partial r$, а сопряженная ей функция $\chi_1^+ = \partial U/\partial r$, и в явной форме выделить член $\sim \partial\rho/\partial r$, описывающий изменение радиуса капли R , то $\delta\rho$ можно будет представить в виде суммы объемного $\delta\rho_V$ и поверхностного слагаемых:

$$\delta\rho = \delta\rho_V - (\partial\rho/\partial r) \delta R, \tag{88}$$

причем константа δR определяется условием $\delta R = - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \delta \rho \right) / \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)$. Подставив сюда выражение (85) для $\delta \rho$, получим

$$\delta R = - \frac{\kappa_1 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \delta_{1\rho} \right)}{1 - \kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_0 \right)} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial r} \delta_{1\rho} \right) / C_0, \quad (89)$$

где C_0 — монополярная жесткость, определяемая соотношением (57) при $L = 0$.

В газе разность $\left[1 - \kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_0 \right) \right]$ порядка единицы, и поэтому $\delta R \sim r_0 A^{-1}$. В жидкости, в силу условий согласования, 1 и $\kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_0 \right)$ в этой разности почти точно сокращаются (см. разд. 5) — их разность оказывается $\sim A^{-1/3}$, поэтому $\delta R \sim r_0 A^{-2/3}$, что соответствует закону изменения радиуса жидкой капли. Так разрешается парадокс с радиусом.

Аналитическое вычисление δR из формулы (89) даже в большой системе, где хорошо работают квазиклассические методы, довольно затруднительно. Если учесть, что для большой капли основной вклад в жесткость C_0 вносит первое слагаемое (60) и пренебречь разницей между $\delta_{1\rho}$ и $\delta_{0\rho} = |\Phi_{\lambda_0}|^2$, то формулу для δR можно записать в простом виде:

$$\delta R = \kappa_1 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{v_0 v_0} / \kappa_0 (k_0 - k_1), \quad (90)$$

где $v = (n, l, j)$,

$$k_0 - k_1 = \left[\frac{\partial U}{\partial r} (A_0 - A_1) \frac{\partial U}{\partial r} \right] = \sum_{vv'} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{vv'}^2 \frac{n_v - n_{v'}}{\varepsilon_v - \varepsilon_{v'}} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right). \quad (91)$$

Формула (90) позволяет провести аналитическое вычисление δR в квазиклассическом приближении. Делается это следующим образом. Матричный элемент $(\partial U / \partial r)_{vv'}$ на основе радиального уравнения Шредингера записывается в виде (спин-орбитальным взаимодействием пренебрегаем)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{vv'} = (\varepsilon_{v'} - \varepsilon_v) (\partial / \partial r)_{vv'} + (l(l+1) / mr^3)_{vv'}. \quad (92)$$

После подстановки этого выражения в (91) и простых преобразований получаем

$$k_0 - k_1 = 2 \int \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\tilde{\rho}}{r} dr + \sum_l \int \frac{l(l+1)}{mr^3} \frac{\partial \rho_l}{\partial r} dr + \sum_{vv'} \left(\frac{l(l+1)}{mr^3} \right)_{vv'} \frac{n_v - n_{v'}}{\varepsilon_v - \varepsilon_{v'}} \left(\frac{l(l+1)}{mr^3} \right)_{v'v}, \quad (93)$$

где $\tilde{\rho} = \sum_l \rho_l$, а $\rho_l = \sum_{\nu, \nu'} n_{\nu} \chi_{\nu}^2$ ($\chi_{\nu} = R_{\nu}/r$; суммирование ведется по главному квантовому числу при фиксированном l).

Заменяя $(n_{\nu} - n_{\nu'})/(\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'})$ на $dn_{\nu}/d\varepsilon_{\nu}$, и учитывая, что диагональные переходы в последнем члене (93) отсутствуют, получаем

$$\begin{aligned} & \sum \left(\frac{l(l+1)}{mr^3} \right)_{\nu\nu'} \frac{n_{\nu} - n_{\nu'}}{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}} \left(\frac{l(l+1)}{mr^3} \right)_{\nu'\nu} \approx \\ & \approx \sum_{\nu\nu'} \left(\frac{l^2}{mr^3} \right)_{\nu\nu'} \frac{dn_{\nu}}{d\varepsilon_{\nu}} \left(\frac{l^2}{mr^3} \right)_{\nu'\nu} - \sum \left(\frac{l^2}{mr^3} \right)_{\nu\nu}^2 \frac{dn_{\nu}}{d\varepsilon_{\nu}}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда квазиклассическое выражение $\chi_{\nu}^2 = a_{\nu}^2 \cos^2 \Phi_{\nu}(r)/\rho_{\nu}(r)$, где Φ_{ν} — квазиклассическая фаза, и заменяя $\cos^2 \Phi_{\nu}(r)$ на $1/2$, находим $(l^2/mr^3)_{\nu\nu} = 2(\varepsilon_{\nu} - U_0)/R$. Используя этот результат, после несложных, но громоздких вычислений получаем

$$k_0 - k_1 = 3Ap_F^2/mR^2. \quad (94)$$

Числитель в (90) легко вычисляется с помощью (92):

$$(\partial U/\partial r)_{\nu_0\nu_0} = p_F^2/mR. \quad (95)$$

Подставляя (94) и (95) в (90), находим $\delta R = R/3A$, что в точности совпадает с гидродинамическим законом. В большой системе этот закон должен выполняться и при учете тех малых поправок, которые были опущены в аналитическом расчете. Это связано со свойством насыщения ядерных сил: $\rho \rightarrow \text{const}$ при $A \rightarrow \infty$. Такое поведение ρ следует из условия согласования (37). Увидеть это можно

Таблица 6

Изменение радиуса δR_{λ_0} от добавления частицы в состояние λ_0
в ядре ^{208}Pb ($\delta R^{\text{КЛ}} \approx R/3A = 1,06$ ферми)

Нейтроны						
λ_0	$p_{3/2}$	$f_{5/2}$	$p_{1/2}$	$g_{9/2}$	$i_{11/2}$	$i_{15/2}$
δR_{λ_0} , ферми	0,95	0,97	0,97	1,01	0,95	1,23
Протоны						
λ_0	$s_{1/2}$	$d_{3/2}$	$h_{11/2}$	$h_{9/2}$	$f_{7/2}$	$i_{13/2}$
δR_{λ_0} , ферми	1,15	1,07	1,26	1,01	1,26	1,44

в простой модели с δ -взаимодействием, разобранный в разд. 1, где самосогласованный потенциал $U = a\rho + b\rho^2/2$ [$a = c_0 f_{ex}^+ < 0$, $b = (c_0/\rho_0)(f_{in}^+ - f_{ex}^+) > 0$; здесь $c_0 = (dn/d\varepsilon_F)^{-1}$]. Если при $A \rightarrow \infty$ ρ растет, то при больших A член $b\rho^2/2$ доминирует и U становится положительным, т. е. связанное состояние разрушается. Чтобы этого не произошло, плотность должна стремиться к постоянному пределу.

Полученная общая формула (89) показывает, что изменение радиуса при добавлении частиц испытывает флуктуации в зависимости от состояния, которое занимает добавленная частица (флуктуации матричного элемента силы $(\partial U/\partial r)_{v_0, v_0}$), и от ядра (флуктуации жесткости C_0). Масштаб флуктуаций δR для ядра ^{208}Pb можно оценить из табл. 6.

Закон Гука для капли ферми-жидкости. С рассмотренным вопросом близко связан и другой — расчет увеличения размеров системы во внешнем поле. Для вывода этого соотношения нам понадобится формула, связывающая изменение плотности ρ с действующим в системе эффективным полем V . Она имеет вид [9]

$$\delta\rho(r) = A_0 V_0. \tag{96}$$

Подставляя сюда выражение для V из (51) и производя операции, аналогичные тем, которые привели к формуле (89), получаем:

$$\delta R = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial r} A_0 v_0\right) \left(1 - \kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_0\right)\right) + \kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} v_0\right) \left(\frac{\partial U}{\partial r} A_0 \Omega_0\right)}{\left(1 - \kappa_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \Omega_0\right)\right) / \kappa_1}. \tag{97}$$

Пренебрегая малыми поправками, можно преобразовать это выражение к виду

$$\delta R = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} v_0\right) / C_0 = - \left(\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial r} \rho\right) / C_0. \tag{98}$$

Оно имеет вид закона Гука: изменение радиуса системы равно приложенной к ней силе $F = - \int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \rho r^2 dr$ ($f = - \partial \mathcal{V} / \partial r$ — удельная сила), деленной на жесткость.

Аналогичную формулу для параметра квадрупольной деформации поверхности можно получить, если вместо скалярного взять квадрупольное поле $V \sim Y_{2m}(n)$; $\delta R = \alpha_2 Y_{2m}(n)$, где

$$\alpha_2 = - \rho (\partial \mathcal{V}_2 / \partial r) / C_2. \tag{99}$$

7. ПЕРЕХОД К КЛАССИЧЕСКОМУ ПРЕДЕЛУ И СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ КОЛЛЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ БОРА—МОТТЕЛЬСОНА

В этом разделе мы подробно обсудим ситуацию с коллективными поверхностными колебаниями в макроскопической системе и покажем, что квантовогидродинамическое описание переходит в классическое при $L \gg 1$. Прежде всего напомним, что с ростом L вклад дальнедействующих компонент пропагатора $A(r, r'; \omega)$ в A_L падает, вследствие чего падает и величина дальнедействующих компонент оператора \mathcal{R}_L (40), определяющего величину ϕ_L квантовой поправки к амплитуде рождения капона $g_L = \alpha_L (\partial U / \partial r + \phi_L)$. Локальные компоненты \mathcal{R}_L при интегрировании с функцией $\partial U / \partial r$ вносят малый вклад $\sim L^2 / (p_F R)^2$, так как $\mathcal{R}_1 (\partial U / \partial r) = 0$ [см. соотношение (44)]. Следовательно, с ростом L $g_L \rightarrow \alpha_L \Omega_1 = \alpha_L \frac{\partial U}{\partial r}$, что совпадает с результатом модели Бора — Моттельсона [2]. Отсюда для переходной плотности $\rho_{ir}(r, \omega_L) = \int A_L(r, r'; \omega_L) g_L(r', \omega_L) r'^2 dr'$ получаем $\rho_{ir} \rightarrow \alpha_L (A_1(0) \partial U / \partial r) \equiv \alpha_L \partial \rho / \partial r$. Таким образом, при больших L все изменение плотности происходит на поверхности капли и она ведет себя, как несжимаемая. Несжимаемость означает, что

$$d\rho/dt = \partial \rho / \partial t + (\nabla \rho) \cdot v = 0. \quad (100)$$

Но $\delta \rho(r) = \alpha \partial \rho / \partial r$, т. е. $\partial (\delta \rho) / \partial t = -i \omega \alpha \partial \rho / \partial r$, а тогда из (100) следует

$$v_r(R) = \dot{\alpha}, \quad (101)$$

т. е. скорость частиц на границе совпадает со скоростью движения границы. Это и есть граничное условие классической гидродинамики.

С ростом L приближается к классическому пределу и коэффициент жесткости C_L (см. разд. 5). В приведенном там выводе формулы (65) для коэффициента поверхностного натяжения σ есть некоторая непоследовательность: она получена не из статической, а из динамической задачи при исследовании адиабатическим методом уравнения для частот ω_L коллективных колебаний. Покажем, что и в статической задаче возникает точно такой же ответ [48]. Наложим на систему (для простоты будем считать ее нейтральной) поверхностное статическое поле ($\omega = 0$) $V_0 = \lambda_L (\partial U / \partial r) Y_{LM}(n)$ и рассчитаем изменение внутренней энергии. Оно равно [48]

$$\delta E = -(V_0 A V) / 2. \quad (102)$$

При $L \gg 1$ эффектами сжимаемости можно пренебречь и заменить в формуле (51) для V_L функцию Ω_L на $\partial U / \partial r$, а \mathcal{V}_L на $V_0 \sim \partial U / \partial r$.

В результате получим $V_L = \frac{\lambda_L}{1 - \alpha_L / \alpha_1} \frac{\partial U}{\partial r}$. Соответствующее изме-

нение плотности (с той же точностью) $\delta\rho_L(r) = -\frac{\lambda_L}{1-\kappa_L/\kappa_1} \frac{\partial\rho}{\partial r}$, т. е. при наложении поля меняется только радиус системы: $\delta R_L = \lambda_L/(1-\kappa_L/\kappa_1)$. Подставляя полученное выражение для V_L в (102) и заменяя λ_L на $\delta R_L(1-\kappa_L/\kappa_1)$, находим

$$\delta E = C_L \delta R_L^2/2, \quad \text{где } C_L = -(1-\kappa_L/\kappa_1)/\kappa_1,$$

что с точностью до малых квантовых поправок совпадает с определением жесткости (59). Для больших L при вычислении κ_L можно использовать квазиклассическое приближение, что дает [см. (65)] $C_L = \sigma(L-1)(L+2)$. Подставляя C_L в формулу для δE после стандартного преобразования $\sum_L (L-1)(L+2) \delta R_L^2 \equiv \delta S$, где δS — изменение площади поверхности капли, получаем

$$\delta E = \sigma \cdot \delta S. \quad (103)$$

Таким образом, изменение энергии квантовой капли при L -й деформации поверхности, если $L \gg 1$, определяется классической формулой (103).

Перейдем теперь к массовым коэффициентам B_L и покажем, что при достаточно больших L , для которых частота $\omega_L \gg \varepsilon_F A^{-1/3}$, величина B_L обратно пропорциональна L , как и должно быть в классической гидродинамике. При таких частотах в макросистеме при вычислении пропагатора A можно использовать квазиклассические методы, заменяя суммирование по λ интегрированием. Поэтому при $L \gg 1$ для такого усредненного пропагатора \tilde{A} точка $\omega = 0$ не является особой и

$$B_L = -\left(\frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{A}_L}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0} \frac{\partial U}{\partial r'}\right) \quad (104)$$

(здесь использовано то, что при больших L $\Omega_L \approx \partial U/\partial r$).

Как уже отмечалось, главный вклад в B_L вносит дальнедействующая часть $(\partial A_L/\partial \omega^2)_0$, а вклад локальной части мал. Вид этого дальнедействия можно установить уже в бесконечной системе. Для этого запишем разложение (см., например, [32]):

$$A_\infty(k, \omega) = A_\infty(k, \omega=0) - \frac{\omega^2}{(kv)^2} \alpha(k^2),$$

т. е.

$$-(\partial A_\infty/\partial \omega^2)_0 = \alpha(k^2)/(kv)^2 = \alpha_0/k^2 + \alpha_1 + \dots$$

Первый член этого разложения при переходе в координатное представление дает дальнедействующий член

$$(\partial A_\infty(r_1, r_2; \omega)/\partial \omega^2)_0 \sim 1/|r_1 - r_2|,$$

гармоника которого с ростом L убывает как $1/L$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в конечной системе прямо в координатном представлении. Они также дают $(\partial \tilde{A}_L / \partial \omega^2)_0 \sim 1/L$, т. е. массовый коэффициент B_L при больших L падает, как и классический: $B_L \sim 1/L$.

Обсудим теперь общий вопрос о связи квантовогидродинамического описания с классическим. Мы привыкли к тому, что классическая гидродинамика описывает коллективные движения в системе, когда вследствие реальных столкновений устанавливается термодинамическое равновесие в каждом малом по сравнению с длиной волны λ объеме жидкости (т. е. $\omega \tau_{ст} \ll 1$ или $\lambda_{ст} \ll \lambda$, где $\tau_{ст}$ — характерное время столкновений, а $\lambda_{ст}$ — соответствующая ему длина свободного пробега) и, следовательно, главный источник диссипации энергии возбуждения — передача ее одночастичным степеням свободы — в значительной степени закрыт. При этом в функции $v_L(n)$, определяющей изменение функции распределения при колебании, остаются только нулевая и первая гармоники, и их подстановка в интеграл столкновений обращает его в нуль благодаря законам сохранения числа частиц и импульса. Однако гидродинамические черты у коллективных движений проявляются не только тогда, когда $\lambda_{ст} \ll \lambda$.

Так, в нейтральном сверхпроводнике из-за наличия в спектре одночастичных возбуждений щели Δ передача энергии от коллективных степеней свободы к одночастичным невозможна, пока частота $\omega_L < 2\Delta$. Скорость этих колебаний, как известно, совпадает со скоростью гидродинамического звука $c^2 = (\rho/m) \partial \mu / \partial \rho$, хотя микроскопическая картина распространения звуковых колебаний значительно сложнее обычной [49]. Такое совпадение оказывается возможным потому, что спаривание в сверхтекучей капле, как и столкновения в обычной, диагонализуют тензор потока импульса $\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik}$, после чего соотношение $c^2 = (\partial p / \partial \rho) = (\rho/m) \partial \mu / \partial \rho$ становится простым следствием основных гидродинамических уравнений: уравнений Эйлера и непрерывности.

Другой пример гидродинамического поведения коллективных возбуждений в квантовой системе — это рассмотренные здесь квантовые капиллярные волны. Характеристики этих возбуждений определяются общими законами, управляющими свойствами систем со спонтанно нарушенной симметрией, справедливыми как в квантовом, так и в классическом случае. Разумеется, ситуация в квантовой капле сложнее из-за взаимодействия капонов с нульзвуковой ветвью, а также с отдельными частично-дырочными возбуждениями. Эта интерференция убывает с ростом момента L , характеризующего число узлов волновой функции коллективного возбуждения. Таким образом, выполняется принцип соответствия Бора: коллективное движение становится классическим при $L \gg 1$.

8. КОНКРЕТНЫЕ РАСЧЕТЫ

В предыдущих разделах было установлено, что в капле фермижидкости имеется низколежащая коллективная ветвь квантовых капиллярных волн. В этом разделе собраны результаты расчетов характеристик НКС в атомных ядрах, которые убедительно показывают, что эти состояния имеют все характерные черты капонов.

Вычисления в рамках квантовогидродинамического подхода содержат ряд отличий от стандартных расчетов в ТКФС, связанных, главным образом, с необходимостью учета условия согласования (37). Как известно, ТКФС обычно имеет дело с описанием поведения систем в длинноволновых внешних полях. В таких задачах, во-первых, достаточно задать значение амплитуды \mathcal{F} при $q = 0$, а, во-вторых, удобно использовать λ -представление, поскольку матричные элементы длинноволнового эффективного поля малы для переходов между состояниями, далекими от поверхности Ферми.

Иное дело — уравнения, определяющие свойства капонов. В них входят производные $\partial U/\partial r$ и $\partial \rho/\partial r$, имеющие резкие пики в поверхностной области системы. Их фурье-образы, наоборот, являются плавными функциями импульса, меняющимися на интервале порядка p_F . Это означает, что при решении уравнений (37) и (34) мы должны каким-то образом задать поведение амплитуды \mathcal{F} как функции переданного импульса q в довольно широкой области $q \sim p_F$. Кроме того, мы должны отказаться от λ -представления. Наиболее естественный путь — это решать квантовогидродинамические уравнения прямо в координатном пространстве [12]. При этом мы обязаны также модифицировать форму эффективного взаимодействия \mathcal{F} квазичастиц.

Выбор эффективного взаимодействия. Поскольку пока не существует надежного способа расчета амплитуды \mathcal{F} через пустотное взаимодействие, мы идем по пути, принятому в ТКФС: задаем функциональный вид \mathcal{F} , а значения параметров находим из сравнения теории с экспериментом. Напомним, что рассматриваемые нами явления, связанные со свойствами капонов — НКС «нормальной» четности (2^+ , 3^- , 4^+) — определяются в основном не зависящими от спинов компонентами \mathcal{F} , ответственными также за основную (вудс-саксоновскую) компоненту U_0 самосогласованного поля в ядрах. Поэтому пока ограничимся именно этими членами. Будем также пренебрегать негравитационными гармониками \mathcal{F} (скоростными силами) — в атомных ядрах они малы. Запишем \mathcal{F} в следующем виде:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = c_0 v(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \{ \hat{f}_{ex} + (\hat{f}_{in} - \hat{f}_{ex}) \tilde{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} + \mathcal{F}^c(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (105)$$

где $c_0 = (dn/d\varepsilon_F)^{-1} = 360$ *Мэв·ферми*³; $\hat{f} = f + f'\tau_1\tau_2$; $\tilde{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция, определяющая вид «интерполяции» — перехода от внутренних констант (f_{in}, f'_{in}) к внешним (f_{ex}, f'_{ex}); $\mathcal{F}^c(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ — обычное кулоновское взаимодействие, действующее только между протонами. Обменное кулоновское взаимодействие, а также электромагнитное взаимодействие нейтронов мы не учитываем.

Для функции $\tilde{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ мы использовали следующие две формы

$$\tilde{\xi}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \xi[(\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2]; \quad (106)$$

$$\tilde{\xi}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')] \alpha, \quad (106')$$

где $\xi(x) = \rho(x)/\rho_0$ ($\rho_0 = 0,145$ *ферми*⁻³ — реальная ядерная плотность, отвечающая $r_0 = 1,18$ *ферми*). В расчетах свойств конкретных ядер $\rho(r)$ считалось фермиевской функцией: $\xi(x) = [1 + \exp((x - R - \Delta R)/d)]^{-1}$. Здесь R — радиус самосогласованного потенциала; d — параметр диффузности. ΔR определяет радиус интерполяции. При $\Delta R = 0,5 \div 0,6$ *ферми* функция $\rho_0\xi(r)$ почти повторяет реальную ядерную плотность $\rho(r)$. Переводя $v(r)$ в (105) в импульсное представление и разлагая в ряд по q^2 , имеем:

$$v = v_0(1 - r_{eff}^2 q^2/2 + r_{eff}^4 q^4/8 + \dots) \quad (107)$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения (107), получаем силы типа сил Скинра [42]. Если члены $\sim q^4$ не играют существенной роли, то любое $v(r)$, отвечающее тому же r_{eff} , что и силы Скинра, например гауссово

$$v_G = (V\sqrt{2\pi} r_{eff})^{-3} \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2r_{eff}^2] \quad (107')$$

или взаимодействие Юкавы

$$v_U = [V\sqrt{2}/(4\pi r_{eff}^3)] \exp[-\sqrt{2}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r_{eff}] \quad (107'')$$

должны приводить к одинаковым результатам. Расчеты показывают, что такая ситуация имеет место при описании свойств капюнов с небольшими L . Это легко понять на основе формул разд. 4. В результате преобразований, использующих условие согласования, взаимодействие \mathcal{F} входит только в выражения типа $(\frac{\partial \rho}{\partial r}(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_1) A_L \frac{\partial U}{\partial r})$, а такие разности содержат малый параметр $L^2/(p_F R)^2$. В таком тяжелом ядре, как ²⁰⁸Pb, приближение эффективного радиуса (при $r_{eff} \ll 1$ *ферми*) работает довольно хорошо вплоть до $L = 5$. В то же время в ⁴⁰Ca уже для $L = 3$ этот параметр близок к 1, и поэтому юкавское и гауссово взаимодействия дают существенно различные результаты (см. ниже).

Более детальные сведения о поведении $\mathcal{F}(q, \rho)$ требуются и для ряда других проблем, например, при исследовании возможности

фазовых переходов в ядерной материи. Параметризацию пустотной части \mathcal{F} можно существенно уточнить, если решить уравнение для амплитуды взаимодействия двух частиц вблизи края ядра. Его можно решать в газовом приближении, используя известные экспериментальные данные об амплитуде рассеяния нуклонов в пустоте. Что касается констант, характеризующих поведение \mathcal{F} внутри ядра, то их число может быть сокращено, если использовать условия антисимметрии полной амплитуды Γ и уравнения, связывающие ее с \mathcal{F} (подробнее об этом см. [50]).

Координатное представление для пропагатора A . При решении уравнения (34) для $g_L(r)$ или уравнения (37), определяющего условия согласования, стандартные методы, основанные на представлении собственных функций квазичастиц φ_λ , неудобны, так как в задачу входят собственные функции $g_L \sim \partial U/\partial r$ с резкой координатной зависимостью. Поэтому адекватным методом решения этих уравнений является метод, основанный на координатном представлении, в котором пропагатор $A(r, r'; \omega)$ определяется формулой (32). Запишем

$$G^q(r, r'; \varepsilon) = \sum_{\lambda} \left(\frac{n_{\lambda}}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda} - i\delta} + \frac{1 - n_{\lambda}}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda} + i\delta} \right) \varphi_{\lambda}^*(r) \varphi_{\lambda}(r'). \quad (108)$$

Здесь n_{λ} — числа заполнения; ε_{λ} — энергии, а $\varphi_{\lambda} = R_{nlj}(r) \times \Phi_{jlm}(n, s)$ — собственные функции квазичастиц. Подставляя (108) для одной из функций Грина в выражение (32) для A и замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, легко получить

$$A(r, r'; \omega) = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \varphi_{\lambda}^*(r) \varphi_{\lambda}(r') \times \\ \times [G^q(r, r'; \varepsilon_{\lambda} + \omega) + G^q(r, r'; \varepsilon_{\lambda} - \omega)]. \quad (109)$$

Далее, вводя разложение

$$G^q(r, r'; \varepsilon) = \sum_{jlm} \Phi_{jlm}^*(n, s) \Phi_{jlm}(n', s') G_{lj}^q(r, r'; \varepsilon)$$

и отделяя в (109) стандартным образом угловые переменные, из (36) для $A_L(r, r'; \omega)$ получаем

$$A_L(r, r'; \omega) = \sum_{lj'l'} B_{lj'l'}^L \sum_n k_{nlj} R_{nlj}(r) \times \\ \times R_{nlj}(r') [G_{l'l'}(r, r'; \varepsilon_{\lambda} + \omega) + G_{l'l'}(r, r'; \varepsilon_{\lambda} - \omega)]. \quad (110)$$

Здесь k_{nlj} — фактор заполнения одночастичного уровня (nlj) : $k_{nlj} = N_{nlj}/(2j + 1)$, где N_{nlj} — полное число частиц на этом

уровне. Угловой множитель

$$B_{jlj'l'}^L = \frac{1}{4\pi} (2l+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1) \times \\ \times \begin{pmatrix} l & l' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} l & j & 1/2 \\ j' & l' & L \end{Bmatrix}^2.$$

Отметим, что в (109) и (110) суммирование идет только по заполненным уровням.

Чтобы вычислить $G_{ij}^q(r, r'; \epsilon)$, запишем $G_{ij}^q = g_{ij}/(r \cdot r')$, где g_{ij} — функция Грина одномерного уравнения Шредингера

$$(\epsilon - H_{ij}) g_{ij}(r, r'; \epsilon) = \delta(r - r'). \quad (111)$$

Здесь $H_{ij} = H_0 + l(l+1)/(2mr^2)$, а H_0 — квазичастичный гамильтониан (он содержит центральный потенциал U_0 вудс-саковского типа, кулоновский — для протонов — и спин-орбитальный члены $U_{ij}^s \sim \langle \sigma \mathbf{l} \rangle_{ij}$).

Введем два независимых решения $y_1(r, \epsilon)$ и $y_2(r, \epsilon)$ уравнения (111) без правой части, удовлетворяющих граничным условиям: $y_1(0) = 0$ и $y_2(\infty)$ ограничено. Тогда

$$g_{ij}(r, r'; \epsilon) = y_1(r_<, \epsilon) y_2(r_>, \epsilon) / W(\epsilon), \quad (112)$$

где вронскиан $W(\epsilon) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ зависит только от энергии. Подстановка (112) в (110) решает поставленную задачу точного вычисления $A_L(r, r'; \omega)$.

Подробное описание схемы решения уравнений для эффективного поля в координатном представлении содержится в работах [12, 51]. Аналогичная процедура решения уравнения для эффективных полей в координатном представлении была независимо разработана также в [52].

Анализ условий согласования. Как отмечалось в разд. 1, условия согласования позволяют установить довольно жесткие ограничения на эффективное взаимодействие \mathcal{F} , в частности забраковать δ -взаимодействие [12]. Эти ограничения относятся в основном к амплитуде $\mathcal{F}^+ = c_0 \cdot 2f(r, r')$, не зависящей от изоспина, поскольку она формирует главные характеристики атомных ядер: глубину потенциальной ямы U_0 и плотность ρ_0 . Для ядер же с $N = Z$, если пренебречь кулоновским взаимодействием, в условия согласования (37) вообще входит только эта компонента $\mathcal{F}^+(U^- = 0, \rho^- = 0)$:

$$\frac{\partial U^+}{\partial r} = \int \mathcal{F}^+(r, r') \frac{\partial \rho^+}{\partial r'} r'^2 dr'. \quad (113)$$

Начнем анализ условий согласования с «большого ядра» ($A^{1/3} \gg 1$, $N = Z$, кулоновское взаимодействие отсутствует). Решение уравнения (113) для такой системы [53] позволяет найти

химический потенциал μ_∞ ядерной материи — основной коэффициент формулы Вайцзеккера:

$$E_0(A) = \mu_\infty A + \gamma A^{2/3} + \beta (N - Z)^2/A + \dots, \quad (114)$$

вычислить глубину ямы U_0 и равновесную плотность ρ_0 . Уравнение (113) решалось итерациями. В качестве исходной бралась фермиевская функция $\rho^{(0)}(r)$ с радиусом $R^{(0)} = r_0^{(0)} \cdot A^{1/3}$. Далее находились самосогласованный потенциал $U^{(0)}(r) = \mathcal{F} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r}$ и плотность $\rho^{(1)}(r) = \sum_\lambda n_\lambda |\varphi_\lambda^{(0)}(r)|^2$, затем процедура повторялась:

$U^{(1)}(r) = \mathcal{F} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial r}$ и т. д. Расчет производился в ядре $A = 7000$ для взаимодействия (106). Начальное значение $r_0^{(0)}$ варьировалось в пределах от 1 до 1,3 ферми. Во всех случаях итерационная процедура сходилась. При значениях параметров $f_{in} = 0,2$, $f_{ex} = -2$, $r_{eff} = 0,9$ ферми, которые, как увидим ниже, позволяют хорошо описать экспериментальные данные по НКС, получается: $r_0 = 1,175$ ферми, $\mu = -14,3$ Мэв и $U_0 = -49,3$ Мэв (r_0 определяется из условия $R = r_0 A^{1/3}$, где R — радиус половинной плотности; μ — энергия последнего заполненного уровня; U_0 — усредненная по внутренней области глубина ямы; масштаб флуктуаций U_0 внутри ядра $\sim 0,5$ Мэв). Вычисленное отсюда значение $\epsilon_F = \frac{1}{2} p_F^2/m = (9\pi)^{2/3}/8r_0^2 m = 35,1$ Мэв совпадает с хорошей точностью с $\epsilon_F = \mu - U_0 = 35,0$ Мэв. Коэффициент $\gamma = 4\pi r_0^2 \sigma$ в формуле (114) при указанных значениях параметров \mathcal{F} получается равным 19,3 Мэв [46].

Используя полученные результаты, можно найти μ_∞ . Из формулы (114) имеем $\mu(A) = \mu_\infty + (2/3)\gamma A^{-1/3}$, откуда при $\gamma \simeq 19$ Мэв следует $\mu_\infty = -14,9$ Мэв. Если подставить значение $\epsilon_F = 35$ Мэв в формулу Мигдала

$$\beta = \epsilon_F (1 + 2f')/3 \quad (115)$$

и использовать найденное в работе [54] значение $f' = 0,8$, то получится $\beta = 30,3$ Мэв.

Рассчитанные характеристики ядерной материи (коэффициенты формулы Вайцзеккера и r_0) приведены в табл. 7.

Аналогичный расчет был проведен для магических ядер ^{208}Pb и ^{40}Ca . Теперь вместо (113) мы имеем систему уравнений (28), которую удобнее переписать в виде

$$\frac{\partial U^i}{\partial r} = \int \mathcal{F}_1^{ik}(r, r') \frac{\partial \rho^k}{\partial r'} r'^2 dr'. \quad (116)$$

Напомним, что индексы $i, k = 1, 2$ относятся к нейтронам и протонам. Здесь под \mathcal{F} уже следует понимать полную амплитуду (105). Кроме того, для получения реалистического спектра одночастичных уровней необходимо учесть спин-орбитальное взаимо-

Таблица 7

Характеристики ядерной материи

Параметры формулы Вайцзеккера	Результаты обработки экспериментальных данных		Теоретический расчет	
	[55]	[36]	хартри-фоковский [55]	наш
$\mu_{\infty}, Mэв$	-15,25	-15,98	-16,0	-14,9
$\gamma, Mэв$	17,07	20,76	19,8	19
$\beta, Mэв$	33,16	36,5	33,8	30,3
$r_0, ферми$	1,22	1,175	1,15	1,17

действие. Прямое итерационное решение (116) невозможно, так как безразмерная константа $f^* = 2f' > 1$ ($f' \approx 0,8$) и итерации расходятся. Эта расходимость устраняется с помощью процедуры «схлопывания», обычно применяемой в методе Хартри — Фока. Она заключается в следующем. Пусть в результате n -й итерации в (116) получен потенциал U_n^i , тогда для последующей итерации в качестве исходного потенциала берется не U_n^i , а комбинация $\tilde{U}_n^i = \alpha U_n^i + (1 - \alpha) U_{n-1}^i$, где $0 < \alpha < 1$. Такой способ итерирования использовался, в частности, в [56] для согласования «малых» компонент амплитуды \mathcal{F} и потенциала U (кулоновских, изовекторных и спин-орбитальных), причем основная изоскалярная компонента потенциала U бралась феноменологически — в вудс-саксоновской форме; при этом удалось довольно хорошо воспроизвести одночастичные спектры магических ядер.

Мы проводили «схлопывание» с коэффициентом $\alpha = 0,5$. Итерации сходятся достаточно быстро: после 15—16 итераций положение уровней фиксируется с точностью ~ 1 кэв. Спин-орбитальное взаимодействие выбиралось в форме, предложенной в [9], что приводит к потенциалу [56]

$$U_{LS} = c_0 r_0^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\kappa \rho^+ - 2t_3 \kappa' \rho^{-1}) \sigma_1 - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r (\kappa \rho_1^+ - 2t_3 \kappa' \rho_1^-) \right\}. \quad (117)$$

Здесь $r_0 = 1,2$ ферми, а $\rho_1^{(n,p)}$ — плотности для заполненных состояний спин-орбитальных дублетов, у которых один уровень лежит выше поверхности Ферми; константы $\kappa = 0,18$, $\kappa' = -0,10$ взяты из [56]. Кроме того, учитывалось обменное кулоновское взаимодействие, приводящее в приближении Томаса — Ферми к слагаемому в потенциале вида $U_{обм}^c = -e^2 \left[\frac{3}{\pi} \rho_p(r) \right]^{1/3} \approx -0,5$ Мэв.

На рис. 4, а, б приведены рассчитанные одночастичные спектры ядра ^{208}Pb для нескольких наборов параметров взаимодействия

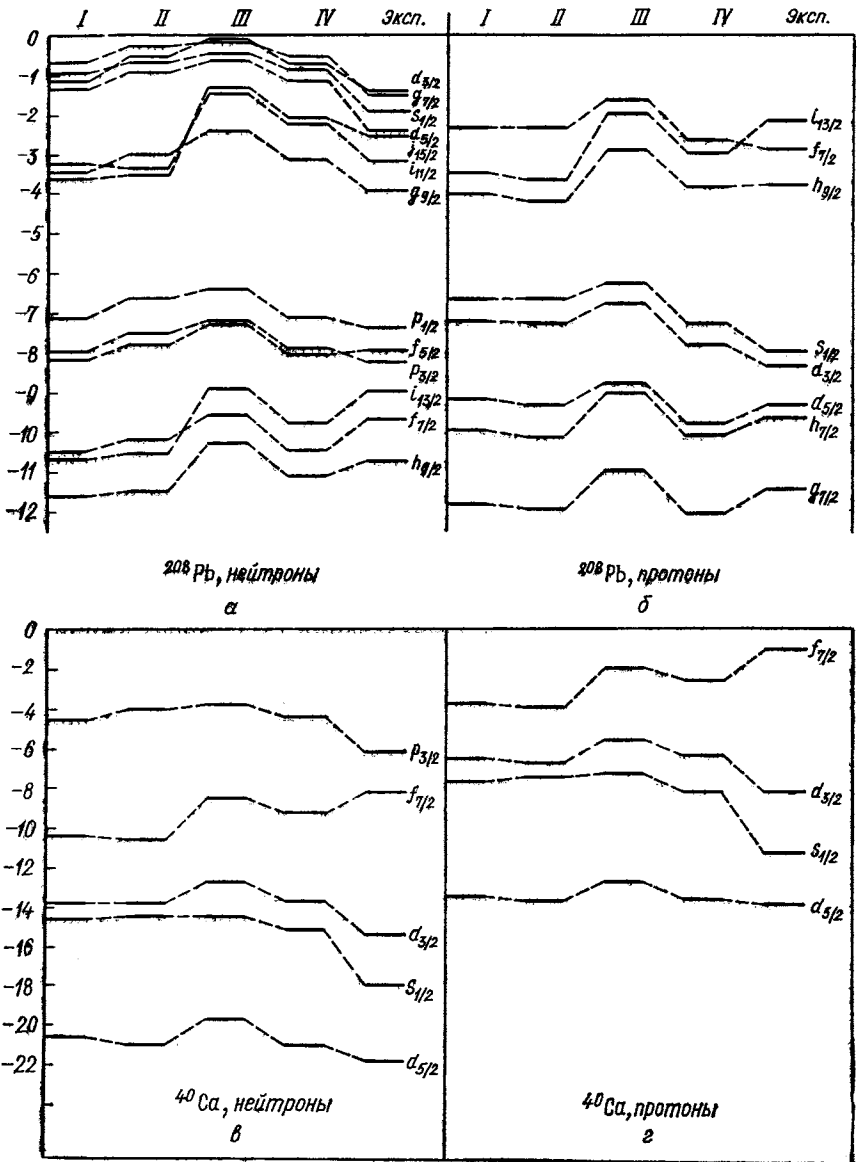


Рис. 4. Одночастичные спектры ядер ^{208}Pb и ^{40}Ca

при фиксированных значениях констант $f_{in} = 0,2$, $f'_{in} = f'_{ex} = 0,8$. Вариант I относится к гауссову взаимодействию ($f_{ex} = -2,1$), II — к юкавскому ($f_{ex} = -2,1$). Как видно, расчет неплохо воспроизводит экспериментальные схемы уровней, особенно для нейтронов. Однако уровни с большими и малыми l сдвинуты относительно экспериментальных в разные стороны. Это свидетельствует о наличии в U небольшого слагаемого, пропорционального l^2 . Существование такого члена следует из общих соображений [9] и может быть обусловлено скоростными силами. Мы брали его в простейшей форме одинаковым для нейтронов и протонов:

$$U_{l2} = c_0 r^{-2\lambda} (dp^+ / dr)^2,$$

где константа $\lambda = 5$ ферми⁵. Вариант III отличается от II добавлением U_{l2} . Видно, что относительное положение уровней заметно улучшилось, однако вся картина оказывается смещенной вверх примерно на 1—2 Мэв. Этот сдвиг устраняется небольшой вариацией константы f_{ex} : если вместо $f_{ex} = -2,10$ взять $f_{ex} = -2,15$, то экспериментальные уровни будут воспроизводиться довольно хорошо (вариант IV). На рис. 4, в, г показаны результаты аналогичных расчетов для ⁴⁰Са. Здесь согласие с экспериментом хуже.

Характеристики НКС в четно-четных ядрах. В разд. 4 уравнение ТКФС (34) для $g_L(r; \omega)$, определяющее частоты ω_L и амплитуды g_L рождения коллективного состояния, было преобразовано с помощью условия согласования (37). Через амплитуду g_L по формулам (45), (54) и (55) выражаются приведенные вероятности $B(EL)$ и переходные плотности $\rho_{tr}^{\Lambda}(r)$.

В систематических расчетах характеристик НКС мы использовали $U(r)$ и \mathcal{F} , которые не полностью согласованы друг с другом. В качестве $U(r)$ был взят потенциал из работы [45], подогнанный довольно хорошо под экспериментальные одночастичные уровни (как правило, расхождение с экспериментом не превышает 300—500 кэв). Амплитуду \mathcal{F} выбрали в форме (105), при этом произвели частичное «подсогласование» \mathcal{F} и U : параметры взаимодействия f_{in} , f_{ex} и ΔR определяли так, чтобы величина χ_1 , найденная из (42), равнялась (43). Это вместе с соотношением (50) для ϕ_L ($g_L = \alpha_L \Omega_L$, $\Omega_L = \partial U / \partial r + \phi_L$) обеспечивает автоматическое выполнение условий: $\omega_1 = 0$ и $g_1 \sim \partial U / \partial r$. Тем самым правильно задается начальная точка (духовое состояние $L^\pi = 1^-$) для полюсы капонов.

При таком способе расчета результаты очень слабо зависят от всех параметров взаимодействия, кроме эффективного радиуса r_{eff} зависимость от которого в ²⁰⁸Pb реально проявляется начиная с $L = 3$. В табл. 8 сравниваются результаты расчетов характеристик НКС в ²⁰⁸Pb и ⁴⁰Ca для гауссова и юкавского взаимодействий с двумя значениями $r_{eff} = 0,8$ и 1 ферми (такое изменение r_{eff}

Таблица 8
 Зависимость характеристик НКС от эффективного радиуса взаимодействия*

Ядро	J ^π	Частота и вероятность перехода	Экспериментальные данные [57—59]	r _{eff} Ферми [взаимодействие гауссова типа (107')]		r _{eff} Ферми [взаимодействие юкавского типа (107'')]	
				1	0,8	1	0,8
²⁰⁸ Rb	3-	ω	2,614	2,74	2,44	2,60	2,32
		B(E3) · 10 ⁻⁵	5,4 ± 0,3 (7,1 ± 0,4)	7,02	9,0	6,94	8,62
	5-	ω	3,197	3,33	3,21	3,26	3,16
		B(E5) · 10 ⁻⁸	4,62 ± 0,55	2,84	4,44	3,68	4,42
	2+	ω	4,086	4,62	4,58	4,61	4,50
		B(E2) · 10 ⁻³	2,96 ± 0,18	2,57	2,77	2,73	2,87
	4+	ω	4,323	5,03	4,91	4,96	4,85
		B(E4) · 10 ⁻⁶	7,57	8,00	6,76	9,37	13,0
6+	ω	4,425	4,33	4,26	4,27	4,22	
	B(E6) · 10 ⁻¹⁰	2,1	1,86	2,05	2,05	1,98	
⁴⁰ Ca	3-	ω	3,73	5,09	4,4	4,48	3,92
		B(E3) · 10 ⁻⁴	2,11	0,92	1,48	1,44	1,77
	5-	ω	4,48	6,05	5,83	5,73	5,53
		B(E5) · 10 ⁻⁶	—	2,7	2,4	2,36	2,50

* Здесь и в последующих таблицах энергии ω_L возбуждений даны в Мэв, а B(EL) — в e² · ферми²L.

довольно велико, так как действительный параметр r_{eff}^2 изменяется более чем на 30%). Как видно, в ²⁰⁸Rb наибольшие вариации имеют место в случае состояния 3⁻. Это неудивительно, так как состояние 3⁻ является самым коллективным в НКС в ²⁰⁸Rb, поэтому максимален сдвиг энергии по отношению к одночастичным разностям и максимальны изменения этого сдвига, вызванные модификацией взаимодействия. Что касается вычисления характеристик НКС в ⁴⁰Ca, то здесь $L(L+1)/A^{2/3} \sim 1$ уже при $L = 3$. В этом случае плохо работает приближение эффективного радиуса и возникают заметные различия при использовании гауссова и юкавского взаимодействий. Как видно из таблицы, лучшие результаты получаются при юкавском взаимодействии, которое, по-видимому, лучше описывает зависимость амплитуды \mathcal{F} от q^2 при больших q . Поэтому в дальнейших расчетах мы использовали юкавское взаимодействие. Вообще, следует отметить, что более детальное изучение НКС с большими L дает в принципе возможность точнее восстановить зависимость \mathcal{F} от q^2 при больших q .

От остальных параметров взаимодействия (105) характеристики НКС зависят очень слабо. Анализ, выполненный в [12], показал, что при описанной выше схеме расчета характеристики НКС

очень слабо зависят от значений параметров f_{in} , f_{ex} и ΔR ; при изменении f_{in} от 0,25 до 0,65 и ΔR от 0,5 до 1 ферми частоты ω_L менялись не более чем на 100 кэв; $B(EL)$ варьировались тоже очень мало. От константы f' они практически не зависят, так как даже в тяжелых ядрах НКС являются с большой точностью изоскалярными возбуждениями. Из приведенных в табл. 9 данных следует,

Таблица 9

Зависимость характеристик НКС от вида интерполяции

Ядро	J^π	Частота и вероятность перехода	Экспериментальные данные [57—59]	Вид интерполяции		
				(106)	(106'), $\alpha = 1/2$	(106'), $\alpha = 1/3$
^{208}Pb	3-	ω $B(E3) \cdot 10^{-5}$	2,614 $5,4 \pm 0,3$ ($7,1 \pm 0,4$)	2,32 8,62	2,34 8,24	2,32 8,63
	2+	ω $B(E2) \cdot 10^{-3}$	4,086 $2,96 \pm 0,18$	4,50 2,87	4,57 2,84	4,57 2,84
^{40}Ca	3-	ω $B(E3) \cdot 10^{-4}$	3,73 2,11	3,92 1,77	3,93 1,71	3,90 1,76
	5-	ω $B(E5) \cdot 10^{-6}$	4,48 —	5,53 2,50	5,55 2,80	5,52 2,13

что результаты расчетов мало чувствительны к выбранному виду интерполяции. В последующих расчетах мы использовали интерполяцию (106') с $\alpha = 0,5$. Другие параметры выбирались такими: юкавское взаимодействие с $r_{eff} = 0,9$; $f'_{in} = f'_{ex} = 0,8$; $f_{in} = 0,2$; $f_{ex} = -2$. Параметр ΔR определялся в соответствии с описанным выше рецептом. В разных ядрах он варьировался в пределах 0,5 — 0,6 ферми. Этот вариант взаимодействия является предпочтительным по всей совокупности данных. Результаты расчетов ω_L и $B(EL)$ для НКС в различных магических ядрах для этого варианта взаимодействия собраны в табл. 10. Там, где это возможно, проводится сравнение с экспериментом и с результатами работ [18, 23]. В [23] расчет проводился в рамках теории конечных ферми-систем, в [18] — в рамках подхода, основанного на теории Хартри — Фока с эффективными силами (силы Скирма и их модификации). Как видно из таблицы, в целом наши расчеты дают довольно хорошее описание эксперимента *. Однако имеется

* Следует отметить расхождение в экспериментальных значениях вероятности $B(E3)$ возбуждения уровня 3- в ^{208}Pb , извлекаемых из данных по неупругому рассеянию электронов (~32 одночастичных единицы) и по кулоновскому возбуждению (~40 одночастичных единиц). В табл. 8—10 приводятся оба значения (последнее — в скобках). Более надежными, по-видимому, следует считать электронные данные, однако недавний электронный эксперимент [60] дал промежуточное значение (~36 одночастичных единиц).

Таблица 10

Характеристики НКС в магических ядрах

Ядро	J π	Частота и вероятность перехода	Экспериментальные данные [57-59]	Теоретический расчет		
				наш	[23]	[18]
⁴⁰ Ca	3 ⁻	ω $B(E3) \cdot 10^{-4}$	3,73 2,11	4,20 1,53		3,5 1,77
	5 ⁻	ω $B(E5) \cdot 10^{-6}$	4,48 —	5,6 2,62		5,0
⁴⁸ Ca	2 ⁺	ω $B(E2) \cdot 10^{-1}$	—	3,19 2,89		
	3 ⁻	ω $B(E3) \cdot 10^{-3}$	—	4,02 6,8		
⁸⁸ Sr	2 ⁺	ω $B(E2) \cdot 10^{-2}$	1,84 8,22	1,37 7,30		
	3 ⁻	ω $B(E3) \cdot 10^{-4}$	2,74 6,2	2,16 6,8		
¹³⁸ Sn	2 ⁺	ω $B(E2) \cdot 10^{-2}$	—	4,0 6,77		
	3 ⁻	ω $B(E3) \cdot 10^{-5}$	—	4,18 1,15		
²⁰⁸ Pb	3 ⁻	ω $B(E3) \cdot 10^{-5}$	2,614	2,48	2,63	2,8
			5,4 \pm 0,3 (7,1 \pm 0,4)	7,56	5,46	6,4
	5 ⁻	ω $B(E5) \cdot 10^{-8}$	3,197	3,21	3,39	3,4
			4,62 \pm 0,55	4,50	2,85	4,6
	2 ⁺	ω $B(E2) \cdot 10^{-3}$	4,086	4,58	4,49	5,6
	4 ⁺	ω $B(E4) \cdot 10^{-7}$	2,96 \pm 0,18	2,90	3,07	3,33
4,323			4,9	4,69	6,4	
6 ⁺	ω $B(E6) \cdot 10^{-10}$	1,287	1,09	0,757	1,4	
		4,425	4,24	4,776		
		2,3	1,87	2,1		

и ряд серьезных расхождений. Это относится, в первую очередь, к состояниям 2⁺ и 4⁺ в ²⁰⁸Pb и к ядру ⁴⁰Ca. В случае ⁴⁰Ca основная причина расхождения в том, что, как отмечалось выше, плохо работает приближение эффективного радиуса. Для расхождений в ²⁰⁸Pb также видно несколько причин. Наиболее очевидные из них

следующие: 1) неточное воспроизведение одночастичных уровней используемым нами потенциалом $U(r)$; 2) адиабатические поправки (роль спиновых сил); 3) смешивание одно- и двухфононных состояний. Для того, чтобы проанализировать первую причину, мы провели расчет для состояний 3^- и 2^+ в ^{208}Pb с нелокальным потенциалом $U_{\text{нелок}}$, зависящим от l и j : для каждого (l, j) глубина

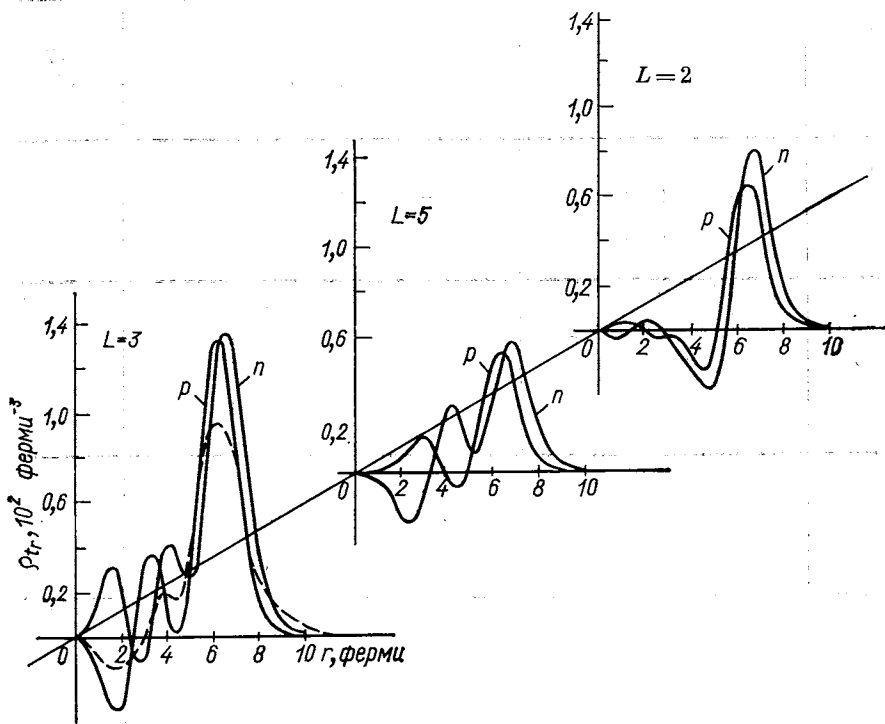


Рис. 5. Радиальные распределения переходных плотностей для первых коллективных состояний в ^{208}Pb .

Приведены заряженные (ρ) и нейтральные (n) компоненты; — — — подгонка [19] к экспериментальным данным

ямы подбирались так, чтобы ближайший к поверхности Ферми уровень имел энергию, равную экспериментальной (такой способ используется, например, в [47]). Результаты расчетов следующие: $\omega_3 = 2,68 \text{ Мэв}$; $B(E3) = 6,11 \cdot 10^5 \text{ e}^2 \cdot \text{ферми}^6$; $\omega_2 = 4,6 \text{ Мэв}$; $B(E2) = 1,89 \cdot 10^3 \text{ e}^2 \cdot \text{ферми}^4$. Как видно, в случае 2^+ ситуация не улучшилась. Наиболее существенной причиной остающегося расхождения оказывается смешивание коллективного уровня 2^+ с двухфононным уровнем $\{3^- \times 3^-\}_{2^+}$. Не содержащий новых параметров расчет смешивания, проведенный А. П. Платоновым

по методу, предложенному в [25], показал, что учет этого эффекта понижает энергию уровня 2_1^+ на величину $\Delta\omega \approx 0,5 \text{ Мэв}$, что приводит к согласию с экспериментом.

В разд. 5 приведены рассчитанные описанным способом ненормированные амплитуды Ω_L рождения капонов с $L^\pi = 3^-, 3^-$ и 5^- в ^{208}Pb (см. рис. 3). В классической гидродинамике все НКС — капиллярные волны, а соответствующие им $\Omega_L^{\text{кл}} = \partial U / \partial r$. Как видно из рис. 3, во всех случаях Ω_L содержат большие поверхностные компоненты и объемные квантовые слагаемые. То же относится и к переходным плотностям $\rho_{tr}^L(r)$ (рис. 5 и 6): здесь классический

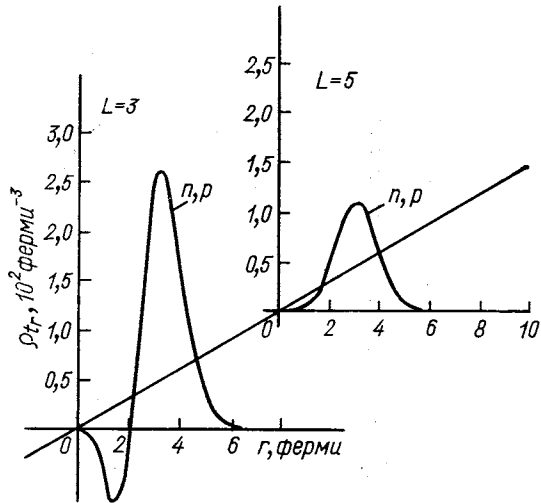


Рис. 6. Переходные плотности для коллективных состояний 3^- и 5^- в ^{40}Ca . Заряженные и нейтральные компоненты на рисунке различимы

гидродинамический результат $\rho_{tr} \sim \partial\rho/\partial r$. Для всех остальных НКС в ^{208}Pb и других ядрах имеет место аналогичная картина. Это показывает, что НКС с рассматриваемыми правилами отбора имеют характерные черты капонов. Однако нельзя считать, что все они являются чистыми капонами. Анализ показывает, что часть этих состояний представляет собой суперпозицию капона с отдельными частично-дырочными конфигурациями (например, состояния 2^+ и 5^- в ^{208}Pb). Чисто коллективными следует считать такие возбуждения, матрица плотности которых не содержит выделенного вклада какой-либо одной частично-дырочной конфигурации — это утверждение относится, разумеется, и к капонам. С этой точки зрения наиболее чистыми капонами среди НКС являются первые состояния 3^- в четно-четных ядрах.

Что касается состояний положительной четности, то, по-видимому, более явно черты капонов проявляются у изоскалярных гигантских резонансов с энергиями $\sim 10 \text{ Мэв}$, часть из которых

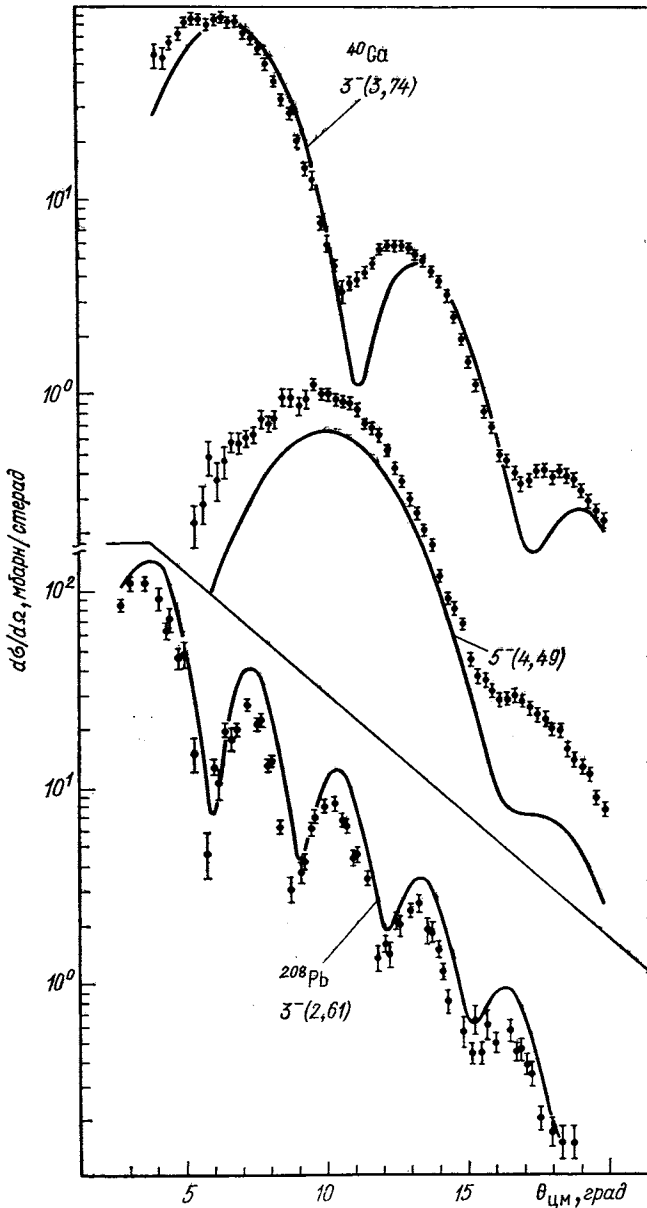


Рис. 7. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с $E_p = 1,044$ Гэв на ^{40}Ca и ^{208}Pb с возбуждением первых НКС.

Расчет взят из [61], экспериментальные данные — из [20]. Для состояния $5^-(4,49 \text{ Мэв})$ в ^{40}Ca масштаб увеличен в 10 раз

уже экспериментально обнаружена (например, резонансы 0^+ и 2^+ в ^{208}Pb). На это, в частности, указывают расчеты [18]. НКС же 2^+ с энергией 4 Мэв в ^{208}Pb связано с фрагментацией резонанса-капона 2^+ по частично-дырочным конфигурациям, среди которых из-за спин-орбитального члена в самосогласованном потенциале возникло несколько конфигураций, отвечающих меньшим энергиям возбуждения ($\sim 5 \text{ Мэв}$). Тем не менее и здесь при возбуждении состояния главную роль играет поверхностная часть фактора.

Таблица 11

Квадрупольные моменты Q основных и возбужденных состояний в ядрах—соседах ^{208}Pb

Ядро	Состояние λ_0	Q , барн (расчет)		Q , барн (эксперимент [23])
		[23]	наш	
^{209}Bi	$1h_{9/2}$	-0,425	-0,376	-0,379
	$2f_{7/2}$	-0,407	-0,379	
	$1i_{13/2}$	-0,623	-0,581	
	$2f_{5/2}$	-0,356	-0,315	
	$3p_{3/2}$	-0,231	-0,220	
^{207}Tl	$2d_{3/2}$	0,214	0,185	
	$1h_{11/2}$	0,528	0,490	
	$2d_{5/2}$	0,311	0,278	
	$1g_{7/2}$	0,331	0,298	
^{207}Pb	$2f_{5/2}$	0,198	0,193	
	$3p_{3/2}$	0,119	0,123	
	$1i_{13/2}$	0,368	0,366	
	$2f_{7/2}$	0,231	0,225	
	$1h_{9/2}$	0,225	0,251	
^{209}Pb	$2g_{9/2}$	-0,241	-0,251	-0,280 \pm 0,022
	$1i_{11/2}$	-0,284	-0,303	
	$1j_{15/2}$	-0,418	-0,409	
	$3d_{5/2}$	-0,139	-0,151	
	$2g_{7/2}$	-0,235	-0,232	
	$3d_{3/2}$	-0,099	-0,099	

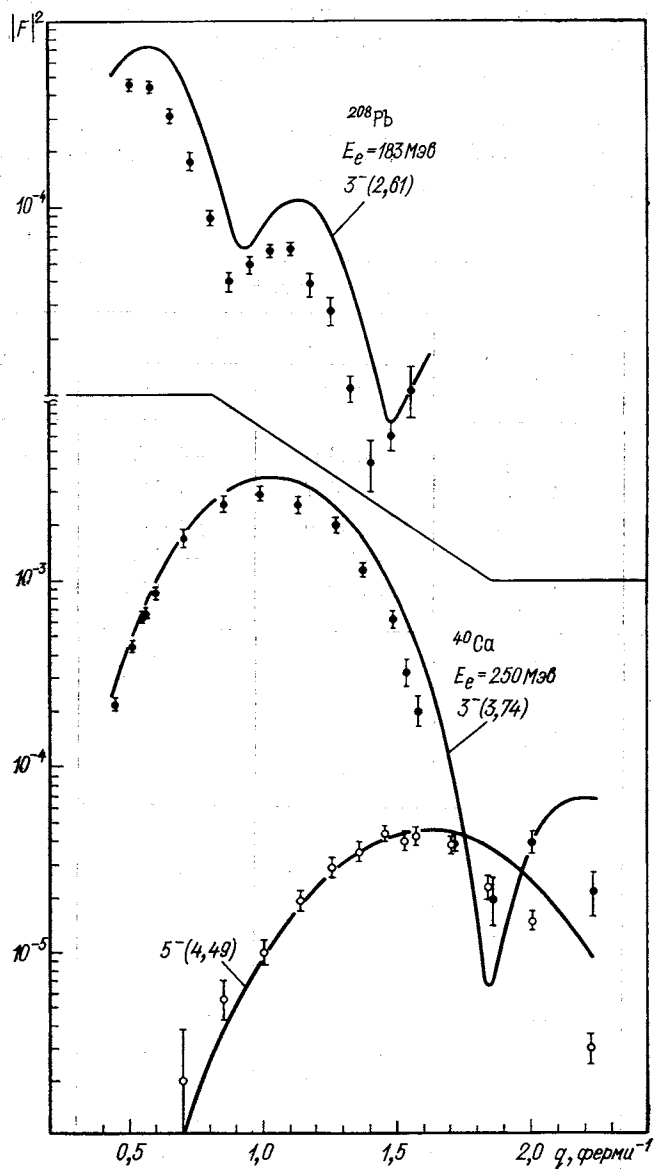


Рис. 8. Квадрат форм-фактора неупругого рассеяния быстрых электронов на ^{40}Ca и ^{208}Pb с возбуждением первых НКС. Расчет взят из [61], экспериментальные данные — из [19, 20]

На рис. 5 пунктиром изображена экспериментальная переходная плотность [19] для возбуждения состояния 3^- быстрыми электронами. Как видно, рассчитанная кривая $\rho_{\text{т}}^3$ в целом повторяет координатную зависимость экспериментальной переходной плотности. Однако в максимуме она несколько больше. Это связано с дефектами используемого нами потенциала [45], который неточно воспроизводит одночастичные уровни и дает слишком большое значение $B(E3)$. Описанный выше расчет с нелокальным потенциалом, точно воспроизводящим уровни, дает примерно на 20% меньшее значение $B(E3)$ и гораздо лучшее согласие с опытом для $\rho_{\text{т}}^3$.

На рис. 7 приведены дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega$ неупругого рассеяния быстрых протонов с энергией $E_p = 1,044 \text{ Гэв}$ на ^{208}Pb (с возбуждением уровня 3^-) и ^{40}Ca (с возбуждением 3^-

Таблица 12

Изомерные сдвиги ΔE мезоатомных линий в ядрах—соседях ^{208}Pb

Ядро	Состояние λ_0	$\Delta E, \text{ кэв}$		
		наш расчет	расчет [23]	эксперимент [23]
^{209}Bi	$2f_{7/2}$	2,71	1,115	—
	$1i_{13/2}$	7,14	8,109	$3,6 \pm 0,7$
	$1f_{5/2}$	1,55	—	—
	$3p_{3/2}$	3,12	—	—
^{209}Pb	$1i_{11/2}$	-0,48	—	—
	$3d_{5/2}$	-1,21	—	—
	$4s_{1/2}$	-2,13	—	—
	$2g_{7/2}$	+0,05	—	—
	$3d_{3/2}$	-1,33	—	—
^{207}Pb	$2f_{5/2}$	+0,19	0,675	$0,11 \pm 0,50$
	$3p_{3/2}$	-0,07	0,412	$1,52 \pm 0,50$
	$1i_{13/2}$	+1,82	—	—
	$2f_{7/2}$	+0,34	0,442	$6,3 \pm 0,8$
	$1h_{9/2}$	-0,53	—	—
^{207}Tl	$2d_{3/2}$	-0,68	—	—
	$1h_{11/2}$	5,77	—	—
	$2d_{5/2}$	0,38	—	—

Таблица 13

 $B(E2)$ для одночастичных переходов в ядрах—соседях ^{208}Pb

Ядро	$ i\rangle$	$ f\rangle$	Энергия перехода, Мэв	$B(E2)$, e ² -ферми ⁴ (расчет)		$B(E2)$, e ² -ферми ⁴ (эксперимент) [23]
				[23]	наш	
^{209}Bi	$2f_{7/2}$	$1h_{9/2}$	0,897	18	11,2	30 ± 3
	$2f_{5/2}$	$1h_{9/2}$	2,822	672	296	480 ± 170
	$2f_{5/2}$	$2f_{7/2}$	1,295	66	46,8	
	$3p_{3/2}$	$2f_{7/2}$	1,219	725	560	900 ± 600
	$3p_{3/2}$	$2f_{5/2}$	0,294	99	83	
^{207}Tl	$2d_{3/2}$	$3s_{1/2}$	0,351	199	156	280 ± 40
	$2d_{5/2}$	$3s_{1/2}$	1,003	230	174	
	$2d_{5/2}$	$2d_{3/2}$	1,797	70	50	
	$1g_{7/2}$	$2d_{5/2}$	1,800	24	12,9	
	$1g_{7/2}$	$2d_{3/2}$	3,123	335	126	
^{209}Pb	$1i_{11/2}$	$2g_{9/2}$	0,778	2,5	2,5	
	$3d_{5/2}$	$2g_{9/2}$	1,566	145	132	185 ± 45
	$4s_{1/2}$	$3d_{5/2}$	0,466	128	123	156 ± 8
	$2g_{7/2}$	$2g_{9/2}$	2,493	17,4	10,2	
	$2g_{7/2}$	$3d_{5/2}$	1,127	7,9	7,2	
	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$	0,973	23,4	22,1	
	$3d_{3/2}$	$4s_{1/2}$	0,507	42,9	37,7	
	$3d_{3/2}$	$2g_{7/2}$	0,046	148	130	
	$2g_{7/2}$	$1i_{11/2}$	1,577	206	128	
^{207}Pb	$2f_{5/2}$	$3p_{1/2}$	0,570	85,7	71,2	71 ± 3
	$3p_{3/2}$	$3p_{1/2}$	0,898	82,3	76,6	62 ± 3
	$3p_{3/2}$	$2f_{5/2}$	0,328	33,8	28,9	
	$2f_{7/2}$	$2f_{5/2}$	1,170	17,7	12,8	
	$2f_{7/2}$	$3p_{3/2}$	1,442	119	93	
	$1h_{9/2}$	$2f_{5/2}$	2,839	196	79	
	$1h_{9/2}$	$2f_{7/2}$	1,069	7,1	4,1	

и 5-) [20]. Расчет выполнен В. Е. Стародубским по методу Глаубера [61] с использованием наших переходных плотностей.

На рис. 8 приводятся также расчеты В. Е. Стародубского для возбуждения тех же состояний быстрыми электронами. Как видно, во всех случаях согласие с опытом довольно хорошее.

Одночастичные характеристики нечетных ядер. Разработанный метод решения уравнения для $g_L(r)$ автоматически переносится и на эффективное поле $V_L(r)$, которое определяет статические моменты и вероятности одночастичных переходов в нечетных ядрах. Уравнения для V_L приведены в разд. 4 [формулы (51),

Таблица 14

Квадрупольные моменты Q основных состояний околomagических ядер

Ядро	Состояние λ_0	Q , ферми ²	
		Расчет	Эксперимент
²⁰⁹ Bi	$1h_{9/2} (p)$	-37,6	-37,9
²⁰⁹ Pb	$2g_{9/2} (n)$	-25,1	-28,0 ± 2,2
⁸⁹ Sr	$2d_{5/2} (n)$	-80,6	—
⁸⁷ Sr	$1g_{9/2} (n^{-1})$	49,1	—
⁸⁷ Rb	$2p_{3/2} (p^{-1})$	20,7	12,9 ± 0,4
⁴¹ Sc	$1f_{7/2} (p)$	-14,1	—
⁴¹ Ca	$1f_{7/2} (n)$	-6,3	—
³⁹ Ca	$1d_{3/1} (n^{-1})$	+3,1	—
³⁹ K	$1d_{3/2} (p^{-1})$	6,3	6,16 ± 0,35

(52)]. В ядрах — соседях ²⁰⁸Pb мы рассчитали квадрупольные моменты Q , $B(E2)$ и изомерные сдвиги ΔE мезоатомных линий. При расчете ΔE был использован грубый метод [60], в котором ΔE выражается через $\Delta \langle r^2 \rangle$ — изменение среднеквадратичного радиуса заряда при возбуждении. Результаты приведены в табл. 11—13. Как видно, наибольшие расхождения с опытом имеют место в случае изомерного сдвига. Это очень тонкая ядерная характеристика, являющаяся разностью матричных элементов $V_\lambda [f(r)] - V_{\lambda_0} [f(r)]$ ($f(r)$ — электрическое поле, создаваемое мезоном; λ_0 отвечает основному состоянию, λ — возбужденному), причем ответ оказывается гораздо меньше каждого матричного элемента в отдельности. Поэтому любые малые поправки здесь могут оказаться существенными — не исключено, в частности, что в изомерных сдвигах велика роль примесей низколежащих фононов, вклад которых мы не учитывали. В табл. 14 приведены квадрупольные моменты околomagических ядер. Согласие с экспериментальными данными удовлетворительное.

9. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ С НИЗКОЛЕЖАЩИМИ КОЛЛЕКТИВНЫМИ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ

В коллективной модели [2] считается, что изменение ядерной плотности ρ , обусловленное коллективным возбуждением, приводит к соответствующему адиабатическому изменению $\delta U = (\delta U / \delta \rho) \delta \rho$ самосогласованного потенциала U , в котором движутся частицы, и взаимодействие H^{int} частиц с колебаниями находится из одночастичного уравнения Шредингера

$$(p^2/2m + U + \delta U) \tilde{\varphi}_\lambda = \varepsilon_\lambda \tilde{\varphi}_\lambda, \quad (118)$$

Для капли несжимаемой жидкости принимается, что $U = U(r - R_0 - \delta R(\theta, \varphi))$ и при малых колебаниях формы относительно сферы радиусом R_0 в δU оставляется лишь линейный

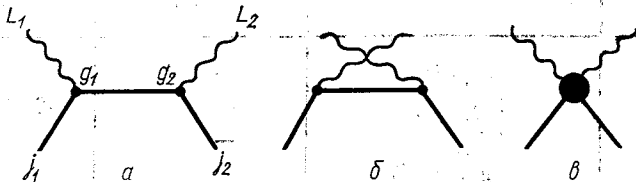


Рис. 9. Диаграммы второго порядка, дающие вклад в энергетический сдвиг членов мультиплета «квазичастица + фонон».

Диаграмма в не включает первых двух диаграмм а и б.

по малой деформации δR член $\delta U = (\partial U / \partial R) \delta R = -R_0 \times (\partial U / \partial r) \sum_{LM} Y_{LM}^* \alpha_{LM}$, который после процедуры квантования и берется в качестве H^{int} , а величина $g_{LM} \sim \alpha_{LM} (\partial U / \partial r) Y_{LM}$ трактуется как амплитуда рождения фонов с квантовыми числами LM . Аналогично в этой модели получается $\delta \rho = (-\partial \rho / \partial r) \delta R$, что соответствует переходной плотности ρ_{tr} для классических капиллярных волн.

При рассмотрении эффектов второго порядка, например при расчете сдвига уровней в мультиплетах «частица + фонон», в коллективной модели обычно учитывают только простейшие диаграммы типа показанных на рис. 9, а, б. В последнее время были сделаны попытки [47] рассчитать более сложные диаграммы, однако согласия с экспериментом достигнуто не было, что неудивительно, поскольку в задаче фактически нет малого параметра и пользоваться теорией возмущения нельзя. Это означает, что перенормировка «затравочного» взаимодействия H^{int} оказывается порядка единицы и поэтому для получения правильного результата нужно учитывать все диаграммы. Проиллюстрируем это утверждение на простом примере.

Пусть в системе появился дипольный фонон, амплитуда которого $g_1 = (\partial U / \partial r_k) \delta R_k$ ($L = 1$ и $\omega = 0$). Тогда, очевидно, энергия ε_λ частицы от взаимодействия с этим фононом не должна меняться во всех порядках по δR , так как такая ситуация соответствует сдвигу ядра как целого. Если же рассмотреть вклад первых двух диаграмм на рис. 9, используя в качестве вершин $H^{\text{int}} = \delta U = = g_1$, то изменение энергии $\delta \varepsilon_\lambda$ не будет равняться нулю. Чтобы устранить это противоречие, нужно добавить вклад локальной диаграммы *в*. В рассматриваемом примере он вычисляется просто: диаграмме *в* соответствует член второго порядка в разложении δU по сдвигу δR , равный $\delta^2 U = (\partial^2 U / \partial R_i \partial R_k) \delta R_i \delta R_k / 2$. Полный ответ может быть найден из (118). Имеем

$$\delta \varepsilon_\lambda = \delta R_i \delta R_k \left\{ \sum_{\lambda'} \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)_{\lambda \lambda'} \frac{1}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} \left(\frac{\partial U}{\partial r_k} \right)_{\lambda' \lambda} + + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_k} \right)_{\lambda \lambda'} \right\}. \quad (119)$$

Теперь уже, используя соотношение

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)_{\lambda \lambda'} = (\varepsilon_{\lambda'} - \varepsilon_\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)_{\lambda \lambda'},$$

приходим к правильному результату $\delta \varepsilon_\lambda = 0$. Итак, правильный ответ получается только после суммирования всех диаграмм. Для реальных фононов ситуация остается такой же — ведь они, как здесь показано, во многом похожи на дипольный фонон, который принадлежит той же ветви поверхностных возбуждений.

Сформулируем микроскопический метод расчета эффектов взаимодействия частиц с фононами. Важной чертой этого метода является то, что в нем не вводится гамильтониан H^{int} коллективной модели, а в качестве вершин на диаграммах рис. 9, *a* и *б* используются амплитуды рождения капонов g_L , которые находятся из решения уравнений (5) и (34). Диаграммы, показанные на рис. 9, можно интерпретировать как изменение функции Грина частицы во втором порядке по внешнему полю, создаваемому фононами. Изменение G в поле одного фонона

$$(\delta G)_1 = G g_{L_1} G.$$

В поле другого фонона меняется уже δG :

$$(\delta^2 G)_{12} = (\delta G)_2 g_{L_1} G + G g_{L_1} (\delta G)_2 + G (\delta g)_{12} G.$$

Используя тот факт, что здесь $(\delta G)_2 = G g_{L_2} G$, получаем

$$(\delta^2 G)_{12} = G g_{L_2} G g_{L_1} G + G g_{L_1} G g_{L_2} G + G (\delta g)_{12} G. \quad (120)$$

Отсюда находим изменение массового оператора частицы

$$(\delta^2 \Sigma)_{12} = g_{L_1} G g_{L_2} + g_{L_2} G g_{L_1} + (\delta g)_{12}. \quad (121)$$

Среднее значение этого выражения, взятое по соответствующим волновым функциям, и дает энергетический сдвиг уровней в мультиплетах. Последний член в (121) описывает изменение амплитуды рождения фонона в поле другого фонона. Варьируя (5), приходим к следующему уравнению

$$(\delta g)_{12} = \frac{1}{2} [\delta \mathcal{U}_2 (\delta G)_1 + \delta \mathcal{U}_1 (\delta G)_2] + \mathcal{U} (\delta^2 G)_{12}. \quad (122)$$

Обратим внимание на присутствие в этом уравнении члена с вариацией $\delta \mathcal{U}$, представляющей собой изменение локального блока двухчастичного взаимодействия \mathcal{U} в результате возбуждения фонона. Эта вариация может быть найдена из соотношения (12), куда входит блок трехчастичного взаимодействия $\mathcal{K}^{(3)}$. Записывая $\delta \mathcal{U} = \mathcal{K}^{(3)} G g_L G$, где $g_L = \alpha_L \Omega_L Y_{LM} \approx \alpha_L (\partial U / \partial r) Y_{LM}$, и используя тот факт, что $\mathcal{K}^{(3)}$ — локальный блок, находим, что с хорошей точностью $\delta \mathcal{U} = \alpha_L Y_{LM} \mathcal{K}^{(3)} \partial \rho / \partial r$. Это с учетом условия согласования (13) дает $\delta \mathcal{U} = \alpha_L (\partial U / \partial r) Y_{LM} = \alpha_L (\partial \mathcal{U} / \partial \rho) (\partial \rho / \partial r) Y_{LM}$. После перенормировки производная $\partial \mathcal{U} / \partial \rho$ заменяется на $\partial \mathcal{T} / \partial \rho$. В результате получается замкнутая система уравнений, решая которую можно самосогласованно рассчитать все эффекты второго порядка по взаимодействию частиц с фононами.

В табл. 15 приведены результаты расчета спектра уровней мультиплета ($h_{9/2} \times 3^-$) ядра ^{209}Bi — традиционного объекта

Таблица 15

Смещение ΔE_I (мэв) уровней мультиплета ($h_{9/2} \times 3^-$) I^π по отношению к невозмущенному значению $\omega = 2614$ мэв

I^π	Вклад полюсных слагаемых	Вклад спин-орбитального взаимодействия	Вклад неполюсных диаграмм	Суммарное ΔE_I	Эксперимент
3/2 ⁺	42,6	14,7	128,4	185,7	-120
5/2 ⁺	-3,5	-5,5	57,2	48,2	4
7/2 ⁺	9,4	4,5	15,2	29,1	-29
9/2 ⁺	-93,4	-17,8	51,5	-59,7	-49
11/2 ⁺	-44,9	-26,8	60,0	-11,7	-14
13/2 ⁺	-62,3	72,8	14,9	25,4	-14
15/2 ⁺	153,1	0	77,6	230,7	130

подобных вычислений (см., например, [47]). В отличие от аналогичных работ других авторов, мы последовательно учитываем вклад всех неполюсных диаграмм рассеяния фонона.

Расчет проводится с использованием нелокального одночастичного потенциала, введенного Хамамото (см. разд. 8), а также с учетом спин-орбитальных сил. Теоретические и экспериментальные значения ΔE_I можно сравнить, обратившись к последним колон-

кам таблицы. При этом следует иметь в виду, что к энергии уровня с $I = 3/2$ надо добавить отрицательное слагаемое порядка 200 *кэв*, поскольку в этом случае состояние частица + фонон сильно смешивается с состоянием $^{210}\text{Po}(O^+) d_{5/2}^-$ [47]. Похожая ситуация имеет место и для другого состояния мультиплетта ($h_{9/2} \times 3^-$) с моментом $I = 13/2$: оно сильно смешивается с одночастичным состоянием $i_{13/2}$. И в этом случае требуется уточнение формул теории возмущений. Анализ показывает, что неприменимость стандартной теории возмущений является одной из главных причин расхождения теории с экспериментом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПЕРЕНОРМИРОВКА УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАНИЯ

Идеология ферми-жидкостного подхода заключается в явном выделении в уравнениях теории вклада одночастичных степеней свободы, поскольку именно они, а точнее те из них, энергия которых примыкает к энергии Ферми, ответственны за флуктуации в характеристиках атомных ядер. Это означает, что все нерегулярности возникают при интегрировании полюсных частей Gq функции Грина G в окрестности точки $\varepsilon = \mu$. Поэтому в основных уравнениях ТКФС, описывающих отклик системы на внешнее поле или эффективное взаимодействие квазичастиц, произведение функций Грина GG разбивается на две части:

$$GG = A + B, \tag{П.1}$$

где B — регулярная универсальная для всех ядер часть GG , а A содержит и неуниверсальные компоненты. Поскольку произведение $GqGq$ является резкой функцией в окрестности точки $\varepsilon = \mu$, его можно записать в виде ряда

$$Gq(\varepsilon) Gq(\varepsilon + \omega) = \delta(\varepsilon - \mu) \int GqGq \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i} - \delta'(\varepsilon - \mu) \int (\varepsilon_1 - \mu) GqGq \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i} + \dots \tag{П.2}$$

Во втором и следующих членах этого разложения вклад области интегрирования, примыкающей к поверхности Ферми, мал, и их можно безобязательно включить в B , т. е. считать, что $A = A^{(0)}$:

$$A^{(0)} = \delta(\varepsilon - \mu) \int GqGq \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i}. \tag{П.3}$$

Это и есть стандартный способ введения $A(r_1, r_2; \omega)$ в ТКФС [9], если использовать обычное определение $Gq(r_1, r_2; \varepsilon)$:

$$a^{-1}(\varepsilon - Hq) Gq = \delta(r_1 - r_2), \tag{П.4}$$

справедливое, когда перенормировочный множитель $a = (1 - \partial\Sigma/\partial\varepsilon)^{-1}$ можно считать не зависящим от r . На самом деле a всегда зависит от r , переходя от значения a_{in} внутри системы к a_{ex} вне ее. В реальных ядрах $a_{in} \approx 0,9$ [23], и поэтому во многих расчетах учет зависимости a от r дает незначительные поправки. Но в некоторых случаях, в частности при анализе условий согласования, где роль поверхностной области велика, этот учет может

оказаться существенным. Прежде всего заметим, что, если $a \neq \text{const}$, нельзя ввести не зависящий от энергии квазичастичный гамильтониан H^q . Действительно, разлагая оператор $G^{-1} = \varepsilon - \varepsilon_p^0 - \Sigma$ вблизи точки $\varepsilon = \mu$, получаем стандартное уравнение для G^q [9]:

$$[\varepsilon - \varepsilon_p^0 - \Sigma^q(\varepsilon)] G^q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (\text{П.5})$$

где

$$\Sigma^q(\varepsilon) = \Sigma(\mu) + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \cdot (\varepsilon - \mu)$$

Если бы величина $a^{-1} = 1 - \partial \Sigma / \partial \varepsilon$ не зависела от \mathbf{r} , то ее можно было бы вынести за скобки и тем самым свести (П.5) к (П.4). Тогда $H^q = a \left[\varepsilon_p^0 + \Sigma(\mu) - \mu \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon} \right]$. Разложив в этом случае $G^q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)$ по собственным функциям $\varphi_\lambda(\mathbf{r})$ гамильтониана $H^q(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, получили бы обычное выражение (108):

$$G^q = a \sum_{\lambda} \left(\frac{n_{\lambda}}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda} - i\delta} + \frac{1 - n_{\lambda}}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda} + i\delta} \right) \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}_1) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}_2). \quad (\text{П.6})$$

Но производная $\partial \Sigma / \partial \varepsilon$ зависит от \mathbf{r} , и вынесение $a(\mathbf{r})$ за скобки в (П.5) ничего не дает. Если попытаться получить теперь разложение G^q , аналогичное (П.6), то увидим, что $\varphi_{\lambda}(\mathbf{r})$ являются собственными функциями оператора H' [9]:

$$H'(\varepsilon) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \varepsilon) = [\varepsilon_p^0 + \Sigma(\mu) - \mu \partial \Sigma / \partial \varepsilon + \varepsilon \partial \Sigma / \partial \varepsilon] \varphi_{\lambda} = E_{\lambda}(\varepsilon) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \varepsilon), \quad (\text{П.7})$$

явно содержащего переменную ε . В результате получается

$$G^q = \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}_1, \varepsilon) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}_2, \varepsilon) / (\varepsilon - E_{\lambda}(\varepsilon) - i\delta \theta_{\lambda}). \quad (\text{П.8})$$

Квазичастичные энергии — полюса функции G^q — определяются равенством $\varepsilon_{\lambda} = E_{\lambda}(\varepsilon_{\lambda})$, а вычеты $a_{\lambda} = [1 - \partial \Sigma / \partial \varepsilon]_{\varepsilon_{\lambda}}^{-1}$.

Различные волновые функции φ_{λ} , как видно из (П.7), теперь неортогональны между собой. Неортогональность возникает благодаря зависимости от \mathbf{r} члена $\partial \Sigma / \partial \varepsilon$, и даже для сильно отличающихся состояний мала ($\sim A^{-1/3}$).

Матрица плотности, отвечающая функции Грина (П.8), имеет вид:

$$\tilde{\rho}^q = \int G^q \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \sum_{\lambda} n_{\lambda} a_{\lambda} \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}_1, \varepsilon_{\lambda}) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}_2, \varepsilon_{\lambda}). \quad (\text{П.9})$$

Чтобы максимально приблизиться к формулам для случая $a = \text{const}$, введем среднее значение перенормировочного множителя $a = \Sigma n_{\lambda} a_{\lambda} / \Sigma n_{\lambda}$ и матрицу плотности квазичастиц, равную $\rho^q = \tilde{\rho}^q / a$:

$$\rho^q = \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}}{a} n_{\lambda} \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}_1, \varepsilon_{\lambda}) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}_2, \varepsilon_{\lambda}). \quad (\text{П.10})$$

Как легко видеть, матрица плотности ρ^q нормирована на число частиц:

$$\int \rho^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}) d^3 r = \sum_{\lambda} a_{\lambda} n_{\lambda} / a = \sum_{\lambda} n_{\lambda}.$$

Вводя по аналогии с (П.4) H^q , получаем

$$\varepsilon_{\lambda} = (a_{\lambda} / a) (H^q)_{\lambda \lambda}. \quad (\text{П.11})$$

Как видно, роль самосогласованного потенциала квазичастиц у поверхности Ферми играет величина

$$U^q = a (\Sigma - \mu \partial \Sigma / \partial \varepsilon). \quad (\text{П.12})$$

Перейдем теперь к перенормировке условия согласования (7). Разбивая GG на A и B согласно формулам (II.1) и (II.3), получим:

$$\partial\Sigma(\varepsilon)/\partial\mathbf{R} = \Gamma^\omega(\varepsilon, \mu) A \partial\Sigma(\mu)/\partial\mathbf{R}', \quad (\text{II.13})$$

где

$$\Gamma^\omega(\varepsilon, \varepsilon') = \mathcal{U}(\varepsilon, \varepsilon') + \int \mathcal{U}(\varepsilon, \varepsilon'') B(\varepsilon'') \Gamma^\omega(\varepsilon'', \varepsilon') \frac{d\varepsilon''}{2\pi i}. \quad (\text{II.14})$$

Попытаемся теперь преобразовать (II.13) к виду, максимально близкому к (113). Для этого перейдем к квазичастичным характеристикам Σq и ρ^a . Из (II.13) имеем:

$$\partial\Sigma q(\mu)/\partial\mathbf{R} = \Gamma^\omega(\mu, \mu) A \partial\Sigma q(\mu)/\partial\mathbf{R}' \quad (\text{II.15})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} \left(\frac{\partial\Sigma q}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} = \left(\frac{\partial\Gamma^\omega(\varepsilon, \mu)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} A \frac{\partial\Sigma(\mu)}{\partial\mathbf{R}'}. \quad (\text{II.16})$$

Перепишем теперь (II.13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma q(\varepsilon)}{\partial\mathbf{R}} &= \Gamma^\omega(\varepsilon, \mu) \int Gq(\varepsilon_1) \frac{\partial\Sigma q(\varepsilon_1)}{\partial\mathbf{R}'} Gq(\varepsilon_1) \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i} - \\ &- \Gamma^\omega(\varepsilon, \mu) \int Gq(\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial\mathbf{R}'} \left[\frac{\partial\Sigma q(\varepsilon_1)}{\partial\varepsilon_1} \right]_{\varepsilon_1=\mu} (\varepsilon_1 - \mu) Gq(\varepsilon_1) \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int Gq(\varepsilon) \frac{\partial\Sigma q(\varepsilon)}{\partial\mathbf{R}} Gq(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \int \frac{\partial Gq(\varepsilon)}{\partial\mathbf{R}'} \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \frac{\partial\tilde{\rho}q}{\partial\mathbf{R}},$$

а также соотношение (II.16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma q(\varepsilon)}{\partial\mathbf{R}} &= \Gamma^\omega(\varepsilon, \mu) \frac{\partial\tilde{\rho}q}{\partial\mathbf{R}'} - \Gamma^\omega(\varepsilon, \mu) \int Gq(\varepsilon_1) Gq(\varepsilon_1) \times \\ &\times \left(\frac{\partial\Gamma^\omega}{\partial\varepsilon_1} \right)_{\varepsilon_1=\mu} (\varepsilon_1 - \mu) \frac{d\varepsilon_1}{2\pi i} \int Gq(\varepsilon_2) Gq(\varepsilon_2) \frac{d\varepsilon_2}{2\pi i} \frac{\partial\Sigma q(\mu)}{\partial\mathbf{R}'}. \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру, приходим к условию

$$\partial\Sigma q(\varepsilon)/\partial\mathbf{R} = \tilde{\Gamma}^\omega(\varepsilon, \mu) \partial\tilde{\rho}q/\partial\mathbf{R}', \quad (\text{II.17})$$

где амплитуда $\tilde{\Gamma}^\omega(\varepsilon, \mu)$ подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \varepsilon, \mu) &= \Gamma^\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \varepsilon, \mu) - \\ &- \int K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) \tilde{\Gamma}^\omega(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \mu, \mu) d^3r_5 d^3r_6 \quad (\text{II.18}) \end{aligned}$$

с ядром

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) &= \int d^3r_7 d^3r_8 \left(\frac{\partial\Gamma^\omega}{\partial\varepsilon}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \right)_{\varepsilon=\mu} \times \\ &\times \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} (\varepsilon - \mu) Gq(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_5; \varepsilon) Gq(\mathbf{r}_8, \mathbf{r}_6; \varepsilon). \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

Как видно из (II.19) и из определения a , ядро K при малых $(a - 1)$ пропорционально $(a - 1)$, но дополнительной малости $\sim A^{-1/3}$ у этого ядра нет. Чтобы максимально приблизить (II.17) к виду (113), осуществим переход

к квазичастицам так же, как и в формуле (П.10): с помощью среднего перепорировочного множителя a . Введем по аналогии с обычным определением $\mathcal{F} = a^2 \Gamma^{\omega}(\mu, \mu)$ амплитуду $\tilde{\mathcal{F}} = a^2 \tilde{\Gamma}^{\omega}(\mu, \mu)$. Тогда для потенциала квази-частиц, определяемого соотношением (П.12), имеем:

$$\partial U q / \partial R = (\tilde{\mathcal{F}} - \mu \partial \tilde{\mathcal{F}} / \partial \varepsilon) \partial r q / \partial R', \quad (\text{П.20})$$

где $\tilde{\mathcal{F}}$ связано с \mathcal{F} соотношением такого же вида, что и (П.18):

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + K \mathcal{F}. \quad (\text{П.21})$$

Мы видим, что окончательный вид условий согласования в ТКФС (П.20) по форме очень похож на обычное условие согласования (113). Однако имеется очень важное отличие: амплитуда $\tilde{\mathcal{F}} - \mu \partial \tilde{\mathcal{F}} / \partial \varepsilon$, играющая роль эффективного взаимодействия в этом уравнении, не совпадает с амплитудой \mathcal{F} , определяющей характеристики низколежащих состояний. Удовлетворительное согласие наших расчетов с опытом говорит о малости членов, содержащих $\partial \mathcal{F} / \partial \varepsilon$. Однако в ряде проблем учет таких членов играет существенную роль. К ним принадлежит задача о нахождении полной энергии ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh. The Theory of Sound. London, 1877; Bohr N., Kalcker F. «Mat.-fys. medd. Kgl danske vid. selskab», 1937, Bd 14, N 10, S. 1.
2. Bohr A. Ibid., 1952, Bd 26, N 14, S. 1; Bohr A., Mottelson B. R. Ibid., 1953, Bd 27, N 16, S. 1.
3. Лейн А. Теория ядра. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1967.
4. Ландау Л. Д. «ЖЭТФ», 1956, т. 30, с. 1058.
5. Ландау Л. Д. Там же, 1957, т. 34, с. 59.
6. Ландау Л. Д. Там же, 1958, т. 35, с. 97.
7. Belyaev S. T. «Mat.-fys. medd. Kgl danske vid. selskab», 1959, Bd 31, N 11, S. 1.
8. Беляев С. Т. «ЖЭТФ», 1960, т. 39, с. 1387.
9. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., «Наука», 1965.
10. Ходель В. А. «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 16, с. 410.
11. Goldstone J., Salam A., Weinberg S. «Phys. Rev.», 1962, v. 127, p. 962.
12. Саперштейн Э. Е., Фаянс С. А., Ходель В. А. Препринт ИАЭ-2580. М., 1976.
13. Саперштейн Э. Е. и др. «Письма в ЖЭТФ», 1976, т. 23, с. 220.
14. Ходель В. А. Там же, 1973, т. 18, с. 126; «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 792.
15. Ходель В. А. «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 670.
16. Feibelman P. J. «Ann. Phys.», 1968, v. 48, p. 369.
17. Bertsch G., Tsai S. F. «Phys. Lett.», 1974, v. 50B, p. 319; «Phys. Repts C.», 1975, v. 18, p. 125.
18. Liu K. F., Brown G. E. «Nucl. Phys.», 1976, v. A265, p. 385.
19. Rothhaas H. e.a. «Phys. Lett.», 1974, v. 51B, p. 23.
20. Alkhasov G. D. e.a. Ibid., 1975, v. 52B, p. 40; Nagao M., Torizuka Y. Ibid., 1971, v. 37B, p. 383; Bertini R. e.a. Ibid., 1973, v. 45B, p. 119; Barnett A. R. e.a. Ibid., 1974, v. 48B, p. 290.
21. Борзов И. Н., Камерджиев С. П. Препринт ФЭИ-580. Обнинск, 1975.
22. Электромагнитные взаимодействия ядер при малых и средних энергиях. Труды III семинара. М., дек. 1975. М., «Наука», 1976.
23. Ring P., Speth J. «Nucl. Phys.», 1974, v. A235, p. 315; Speth J., Werner E., Wild W. «Phys. Repts C», 1977, v. 33, p. 3.
24. Satchler G. R. «Phys. Repts C», 1974, v. 14, p. 97.

25. Ходель В. А. «Ядерная физика», 1976, т. 23, с. 282; Там же, т. 24, с. 704.
26. Mikeska H. J., Brenig W. «Z. Phys.», 1969, Bd 220, S. 321.
27. Фаянс С. А., Ходель В. А. «Письма в ЖЭТФ», 1973, т. 17, с. 633.
28. Birbaire V. L. «Phys. Lett.», 1973, v. 46B, p. 152.
29. Пятов Н. И. Препринт ОИЯИ Р4-8380. Дубна, 1974.
30. Гриб А. А., Дамаскинский В. В., Максимов В. М. «УФН», 1970, т. 102, с. 587.
31. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. ОИЯИ, Дубна, Д-781, 1961; 2-е изд. Р-511, 1963.
32. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
33. Бунатян Г. Г., Микулинский М. А. «Ядерная физика», 1965, т. 1, с. 38.
34. Bochnacki Z., Holban I. M., Mikhailov I. N. «Nucl. Phys. A», 1967, v. 97, p. 33.
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
36. Myers W. D., Swiatecki W. J. «Ann. Phys.», 1969, v. 55, p. 395.
37. Nopre H., Werner E. «Z. Phys.», 1972, Bd 254, S. 345; Ibid., Bd 257, S. 410.
38. Осадчиев В. М. и др. Препринт ИАЭ-2240. М., 1972.
39. Саперштейн Э. Е., Ходель В. А. «Ядерная физика», 1970, т. 10, с. 744.
40. Блатт Д., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М., Изд-во иностран. лит., 1954.
41. Anderson P. W. «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 439.
42. Skyrme T. H. R. «Nucl. Phys.», 1959, v. 9, p. 615.
43. Vautherin D., Brink D. «Phys. Rev.», 1972, v. C5, p. 626.
44. Галицкий В. М., Мигдал А. Б. «ЖЭТФ», 1958, т. 34, с. 139.
45. Чепурнов В. А. «Ядерная физика», 1967, т. 6, с. 955.
46. Иванов Ю. Б. «Ядерная физика», 1977, т. 26, с. 36.
47. Hamamoto I. «Phys. Repts», 1974, v. 10, p. 63.
48. Ходель В. А. Препринт ИАЭ-2548. М., 1975.
49. Вакс В. Г., Галицкий В. М., Ларкин А. И. «ЖЭТФ», 1956, т. 41, с. 1956.
50. Саперштейн Э. Е., Ходель В. А. «Ядерная физика», 1970, т. 11, с. 760.
51. Саперштейн Э. Е., Толоконников С. В., Фаянс С. А. Препринт ИАЭ-2571. М., 1975.
52. Shlomo S., Betsch G. «Nucl. Phys. A», 1975, v. 243, p. 507.
53. Саперштейн Э. Е., Ходель В. А. «Письма в ЖЭТФ», 1977, т. 25, с. 22.
54. Осадчиев В. М., Троицкий М. А. «Ядерная физика», 1967, т. 6, с. 971.
55. Köhler H. S. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 258, p. 301.
56. Бирбраир Б. Л., Садовникова В. А. «Ядерная физика», 1974, т. 10, с. 645.
57. Ziegler J. F., Peterson G. A. «Phys. Rev.», 1968, v. 165, p. 1337.
58. Schmorak M. R., Auble R. L. «Nucl. Data», 1971, v. 85.
59. Eisenstein R. A. e.a. «Phys. Rev.», 1969, v. 188, p. 1815.
60. Sasao M., Torizuka Y. «Phys. Rev. C», 1977, v. 15, p. 217.
61. Starodubsky V. E. «Nucl. Phys. A», 1974, v. 219, p. 525.
62. Walter H. K. Ibid., v. 234, p. 504.