«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1978, том 9, вып. 5

УДК 539.182

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Дао Вонг Дык
Институт физики, Ханой

В обзоре рассматриваются некоторые вопросы конформной инвариантности в физике элементарных частиц: законы конформных преобразований полей, конформно-ковариантные двухточечные и трехточечные функции, размерные свойства тензора энергии-импульса, массовый радиус π-мезона, $\sigma\pi\pi$-вершина, взаимосвязь между масштабной и киральной инвариантностями.

In this review some problems of conformal invariance in elementary particle physics are considered: the conformal transformation laws of fields, the conformally covariant two-point and three-point functions, the dimension properties of the energy-momentum tensor, the mass radius of π-meson, the $\sigma\pi\pi$-vertex, the interplay of scale and chiral invariancis.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор посвящается некоторым вопросам конформной инвариантности в физике элементарных частиц. Теория конформной инвариантности стала привлекать особенно большое внимание со времени открытия «закона масштабности» [1] в процессах глубоко неупругого взаимодействия лептонов с адронами, хотя она давно уже нашла свое применение в некоторых теоретических расчетах [2—8]. Еще в 1963 г. М. А. Марков [9] впервые указал на возможность точечноподобного поведения полных сечений неупругого взаимодействия нейтрино с нуклоном. К настоящему времени эта идея блестяще подтверждена различными экспериментами.

На важную роль масштабных преобразований в глубоко неупругих процессах обратил внимание Н. Н. Боголюбов, который подчеркнул, что поведение форм-факторов указанных процессов находится в близкой аналогии со свойствами так называемых автомодельных решений задачи о сильном «точечном» взрыве в классической газо- и гидродинамике. Исходя из этой аналогии, В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян и А. Н. Тавхелидзе [10] сформулировали принцип автомодельности, согласно которому масштабная инвариантность представляет собой универсальное модельнонезависимое свойство всех глубоко неупругих процессов, определяемое законами физического подобия и анализом размерностей.

Соображения о применимости масштабной инвариантности к описанию релятивистских ядер высказал А. М. Балдин [11]. Им был предсказан эффект кумулятивного рождения частиц [12].

Оказывается [13—15], что в перенормируемых теориях с взаимодействием без производных масштабная инвариантность (наряду с релятивистской инвариантностью) влечет за собой инвариантность относительно более широкой группы преобразований — конформной группы. С алгебраической точки зрения конформная группа интересна тем, что она представляет собой расширение алгебры Пуанкаре на ортогональную алгебру более высокой размерности. Как группа симметрии пространства — времени конформная группа является самой общей группой, которая оставляет световой конус инвариантным. Кроме того, как было показано В. И. Огиевецким [16, 17], действие общековариантной группы можно свести к повторным действиям двух ее подгрупп: специальной линейной SL (4, R)-группы и конформной группы. Им было показано также, что гравитационное поле связано с совместными нелинейными реализациями динамических конформной и аффинной симметрией.

Много интересных идей в квантовой теории поля, а также много новых направлений в физике сильных взаимодействий были сформулированы и рассмотрены с помощью конформной группы. Требование конформной инвариантности позволило практически однозначно определить двух- и трехточечные корреляционные функции [18—21]. Г. Мак и И. Т. Тодоров для нахождения многоточечных ($n \geqslant 4$) функций Грина сформулировали «скелетную» диаграммную технику, свободную от ультрафиолетовых расходимостей [22, 23].

Очевидно, что масштабная инвариантность не может выполняться точно из-за дискретного характера спектра масс частиц. Применение масштабной инвариантности в физике высоких энергий оправдано тем, что, когда энергии всех частиц намного больше их масс, последние можно с достаточной точностью положить равными нулю. Наличие масс частиц говорит о том, что в действительности масштабная инвариантность должна быть сильно нарушена. Это означает, что токи, соответствующие масштабному и специальному конформному преобразованию, не могут быть сохраняющимися. Характер нарушения масштабной и конформной инвариантностей проявляется в выражениях дивергенций этих токов.

В заключение можно сказать, что предположение масштабной (конформной) симметрии — плодотворная физическая идея и поиск правильных способов нарушения этой симметрии может сыграть эвристическую роль в ходе построения более современных теорий.

1. КОНФОРМНАЯ ГРУППА

Конформной группой называется пятнадцатипараметрическая непрерывная группа пространственно-временных преобразований, которые включают:

неоднородные преобразования Лоренца

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu \; (g^{\mu\nu}\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma = g^{\rho\sigma}); \tag{1}$$

масштабное преобразование

$$x'_\mu = \rho x_\mu \quad (\rho > 0); \tag{2}$$

специальное конформное преобразование

$$x'_\mu = (x_\mu + c_\mu x^2)/(1 + 2cx + c^2x^2). \tag{3}$$

Генераторы этих преобразований обозначим соответственно $M_{\mu\nu}$, P_μ, D и K_μ. Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}); \tag{4}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \mathrm{i}\,(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu); \tag{5}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; \tag{6}$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0; \tag{7}$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = \mathrm{i}\,(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu); \tag{8}$$

$$[P_\mu, D] = -\mathrm{i}P_\mu; \tag{9}$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2\mathrm{i}\,(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}); \tag{10}$$

$$[D, K_\mu] = -\mathrm{i}K_\mu; \tag{11}$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0. \tag{12}$$

Если введены антисимметричные операторы J_{AB} (A, $B = 0, 1, 2, 3, 5, 6$):

$$\left.\begin{array}{l} J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}; \; J_{\mu\sigma} = (P_\mu - K_\mu)/2; \\ J_{\mu\sigma} = (P_\mu + K_\mu)/2; \; J_{56} = -D, \end{array}\right\} \tag{13}$$

то правила коммутации (4)—(12) можно объединить:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \mathrm{i}\,(g_{AD}J_{BC} + g_{BC}J_{AD} - g_{AC}J_{BD} - g_{BD}J_{AC}), \tag{14}$$

где

$$g_{AB} = \mathrm{diag}\,(+ - - -; - +).$$

Таким образом, конформная алгебра изоморфна ортогональной алгебре O (4,2). Это обстоятельство позволяет рассматривать конформную группу и как группу псевдовращений в 6-мерном пространстве.

Рассмотрим теперь преобразования полей при конформных преобразованиях. Из (1) — (3) видим, что точка $x = 0$ остается неизменной при однородных преобразованиях Лоренца, масштабном и специальном конформном преобразованиях — эти преобразования образуют малую группу конформной группы. По любому данному представлению этой малой группы можно определить полное действие генераторов конформной группы на поле $\varphi(x)$. Это проводится по методу теории индуцированных представлений следующим образом [13, 24].

Пусть

$$[M_{\mu\nu}, \varphi_\alpha(0)] = -(\Sigma^{(\varphi)}_{\mu\nu}\varphi(0))_\alpha; \tag{15}$$

$$[D, \varphi_\alpha(0)] = -(\Delta^{(\varphi)}\varphi(0))_\alpha; \tag{16}$$

$$[K_\mu, \varphi_\alpha(0)] = -(k^{(\varphi)}_\mu\varphi(0))_\alpha, \tag{17}$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$, Δ, k_μ — матрицы, удовлетворяющие аналогичным коммутационным соотношениям, что и для $M_{\mu\nu}$, D, K_μ. Нас интересуют правила коммутации $[J, \varphi_\alpha(x)]$ между элементами J конформной алгебры и полевым оператором $\varphi_\alpha(x)$. Выберем базис в пространстве индексов α так, чтобы оператор трансляции P_μ не действовал на индексы, т. е.

$$\exp(\mathrm{i}aP)\,\varphi_\alpha(x)\exp(-\mathrm{i}aP) = \varphi_\alpha(x+a). \tag{18}$$

С помощью (18) можно записать

$$[J, \varphi_\alpha(x)] = \exp(\mathrm{i}Px)\,[J', \varphi_\alpha(0)]\exp(-\mathrm{i}Px), \tag{19}$$

где

$$J' \equiv \exp(-\mathrm{i}Px)\,J\exp(\mathrm{i}Px). \tag{20}$$

Используя коммутационные соотношения (5), (6), (9) и (10), находим:

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu; \tag{21}$$

$$D' = D - x^\mu P_\mu; \tag{22}$$

$$K'_\mu = K_\mu - 2x_\mu D + 2x^\nu M_{\mu\nu} + 2x_\mu x^\nu P_\nu - x^2 P_\mu. \tag{23}$$

В результате получаем:

$$[M_{\mu\nu}, \varphi_\alpha(x)] = -\{\Sigma^{(\varphi)}_{\mu\nu} + \mathrm{i}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\}^\beta_\alpha\,\varphi_\beta(x); \tag{24}$$

$$[D, \varphi_\alpha(x)] = -\{\Delta^{(\varphi)} - \mathrm{i}x^\mu\partial_\mu\}^\beta_\alpha\,\varphi_\beta(x); \tag{25}$$

$$[K_\mu, \varphi_\alpha(x)] = -\{k^{(\varphi)}_\mu + \mathrm{i}(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu - 2\mathrm{i}x^\nu\Sigma^{(\varphi)}_{\mu\nu} + 2\mathrm{i}x_\mu\Delta^{(\varphi)})\}^\beta_\alpha\,\varphi_\beta(x). \tag{26}$$

Ограничимся здесь рассмотрением только конечномерных представлений малой группы, для которых $k_\mu = 0$. Это будет достаточно для ряда физических приложений. Напомним, что кроме указанного типа представлений существуют еще конечномерные, для которых $k_\mu \neq 0$, но нильпотентные, т. е. $k_\mu^n = 0$ при некотором целом значении n, и бесконечномерные представления.

Из коммутационных соотношений для $\Sigma_{\mu\nu}$, Δ, k_μ видно, что если матрицы $\Sigma_{\mu\nu}$ образуют неприводимое представление алгебры однородной группы Лоренца, то для $k_\mu = 0$ матрица Δ пропорциональна единичной матрице и тогда можно положить

$$\Delta^{(\varphi)} = \mathrm{i} l_\varphi; \tag{27}$$

l_φ называется масштабной размерностью поля φ. Соотношения (25) и (26) теперь принимают вид:

$$[D, \varphi(x)] = \mathrm{i}\,(l_\varphi - x^\mu \partial_\mu)\,\varphi(x); \tag{28}$$

$$[K_\mu, \varphi(x)] = \mathrm{i}\,(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu - 2\mathrm{i} x^\nu \Sigma_{\mu\nu}^{(\varphi)} - 2 l_\varphi x_\mu)\,\varphi(x). \tag{29}$$

В частности, из (28) имеем следующую формулу конечного масштабного преобразования:

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha D)\,\varphi(x)\exp(\mathrm{i}\alpha D) = \rho^{-l_\varphi}\varphi(\rho x), \quad \rho = \exp(\alpha). \tag{30}$$

Отметим также соотношение

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha D)\,P^2 \exp(\mathrm{i}\alpha D) = \rho^2 P^2, \tag{31}$$

следующее из (9). Оно показывает, что если A-состояние имеет массу m_A, то $\exp(\mathrm{i}\alpha D)\,|A\rangle$ будет состоянием с массой ρm_A. Таким образом, точная масштабная инвариантность означает, что собственные значения массового оператора или равны нулю, или дают непрерывный спектр.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТНОЙ ИНВЕРСИИ

При изучении конформной инвариантности оказывается гораздо удобнее использовать (дискретный) оператор координатной инверсии

$$R x_\mu = -x_\mu / x^2, \tag{32}$$

чем оператор специально-конформного преобразования (3). Легко проверить, что

$$R M_{\mu\nu} R = M_{\mu\nu}; \tag{33}$$

$$R P_\mu R = K_\mu; \tag{34}$$

$$R D R = -D. \tag{35}$$

Эти соотношения показывают, что из ковариантности (инвариантности) по отношению к алгебре Пуанкаре, масштабному и R-преобразованиям, вместе взятым, следует ковариантность (инвариантность) по отношению к конформной алгебре.

Закон преобразования полевого оператора при координатной инверсии R будем искать в следующем общем виде [25]:

$$U(R)\varphi(x)U^{-1}(R)=(x^2)^{l_\varphi}S^{(\varphi)}(x)\,\varphi(-x/x^2), \tag{36}$$

где $S(x)$ — некоторая матрица, которую можно определить из свойства R-преобразования

$$R^2=1 \tag{37}$$

и из связи между этим преобразованием и преобразованиями конформной группы (33) — (35). Используя (37), имеем

$$S(x)\,S(-x/x^2)=1. \tag{38}$$

Соотношение (35) с учетом (30) дает

$$S(x)\,S(-\rho x/x^2)=1. \tag{39}$$

Уравнения (38) и (39) вместе показывают, что $S(x)$ — однородная матрица нулевой степени:

$$S(\rho x)=S(x),\quad \rho>0. \tag{40}$$

Далее, при использовании (34), (18) и (26) можно вывести следующее уравнение:

$$(1+c^2x^2+2cx)^{l_\varphi}S(x)\,S(-x/x^2-c)\,\varphi([x+cx^2]/[1+2cx+c^2x^2])=$$
$$=\varphi(x)-c^\mu\{2x_\mu x^\nu\partial_\nu-x^2\partial_\mu-2l_\varphi x_\mu-2\mathrm{i}x^\nu\Sigma_{\mu\nu}\}\varphi(x)+\ldots \tag{41}$$

При сравнении членов первого порядка по c в обеих частях получаем

$$S(-x/x^2)\,\partial_\mu S(x)=2\mathrm{i}\,(x^\nu/x^2)\,\Sigma_{\mu\nu}. \tag{42}$$

Это уравнение вместе с условиями (38) и (40) позволяет нам полностью определить матрицу $S(x)$ и, следовательно, закон преобразования полей. Рассмотрим конкретные случаи.

Для бесспинового поля $\Sigma_{\mu\nu}=0$ и уравнения (38), (40) и (42) дают (с точностью до фазового множителя) $S(x)=1$. Таким образом, имеем

$$U(R)\,\varphi(x)\,U^{-1}(R)=\delta_\varphi(x^2)^{l_\varphi}\varphi(Rx),\quad |\delta_\varphi|=1. \tag{43}$$

Для спинорного поля $\psi(x)$ ищем $S(x)$ в следующем общем виде, удовлетворяющем условиям лоренц-ковариантности и однородности (40):

$$S(x)=a+b\hat{x}/(x^2)^{1/2};\quad \hat{x}\equiv x_\mu\gamma^\mu, \tag{44}$$

где a и b — некоторые постоянные.

Из уравнения (38) получим $a^2-b^2=1$; уравнение (42) с $\Sigma_{\mu\nu}=(\mathrm{i}/4)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ удовлетворяется только при $a=0$. Следовательно, имеем

$$U(R)\,\psi(x)\,U^{-1}(R)=\delta_\psi (x^2)^{l_\psi}\,[\hat{x}/(x^2)^{1/2}]\,\psi(Rx),\quad |\delta_\psi|=1. \tag{45}$$

Для векторного поля $V_\mu(x)$ ищем $S(x)$ в виде

$$S(x)^\nu_\mu=a\delta^\nu_\mu+bx_\mu x^\nu/x^2.$$

Уравнение (38) приводит к соотношениям $a^2=1$, $2ab+b^2=0$, а уравнение (42) с $(\Sigma_{\mu\nu})^\sigma_\rho=i\,(g_{\mu\rho}\delta^\sigma_\nu-g_{\nu\rho}\delta^\sigma_\mu)$ дает $ab=-2$, $2a+b=0$. Следовательно, имеем

$$U(R)\,V_\mu(x)\,U^{-1}(R)=$$
$$=\delta_V (x^2)^{l_V}(\delta^\nu_\mu-2x_\mu x^\nu/x^2)\,V_\nu(Rx),\quad |\delta_V|=1. \tag{46}$$

Для поля Рарита — Швингера $\psi_\mu(x)$, поступая аналогично, получаем

$$U(R)\,\psi_\mu(x)\,U^{-1}(R)=\delta_\psi (x^2)^{l_\psi}(\delta^\nu_\mu-2x_\mu x^\nu/x^2)\times$$
$$\times(\hat{x}/(x^2)^{1/2})\,\psi_\nu(Rx),\quad |\delta_\psi|=1. \tag{47}$$

Обобщение для поля произвольного спина представляется уже очевидным. Для тензорного оператора n-го ранга имеем

$$U(R)\,A_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\,U^{-1}(R)=\delta_A (x^2)^{l_A}(\delta^{\nu_1}_{\mu_1}-2x_{\mu_1}x^{\nu_1}/x^2)\ldots$$
$$\ldots(\delta^{\nu_n}_{\mu_n}-2x_{\mu_n}x^{\nu_n}/x^2)\,A_{\nu_1\ldots\nu_n}(Rx),\quad |\delta_A|=1. \tag{48}$$

3. КОВАРИАНТНЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ И ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Как уже упоминалось во введении, требование конформной инвариантности позволило практически однозначно определить двуточечные и трехточечные корреляционные функции. В этом разделе, исходя из закона R-преобразования, выведем общие формулы для этих функций.

Рассмотрим сначала двухточечную функцию от симметричных и бесследовых тензорных операторов $A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)$ и $B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)$ с размерностью l_A и l_B соответственно. Обозначим

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x,y)\equiv\langle 0|\,A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)\,B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)\,|0\rangle. \tag{49}$$

Условие масштабной инвариантности требует, чтобы [см. (1.30)]

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{l_A+l_B}\bar{G}^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x,y), \tag{50}$$

а условие R-инвариантности

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(Rx,Ry)=(x^2)^{-l_A}(y^2)^{-l_B}\times$$
$$\times M(x)^{\mu_1'}_{\mu_1}\ldots M(x)^{\mu_p'}_{\mu_p}M(y)^{\nu_1'}_{\nu_1}\ldots M(y)^{\nu_q'}_{\nu_q}G^{AB}_{\mu_1'\ldots\mu_p'\nu_1'\ldots\nu_q'}(x,y) \tag{51}$$

[см. (48), фазовые множители опущены].

Здесь использовано обозначение

$$M(x)_{\mu}^{\mu'} \equiv \delta_{\mu}^{\mu'} - 2x_{\mu}x^{\mu'}/x^2. \tag{52}$$

Для нахождения общего вида решения уравнений (50) и (51) будем исходить из следующих тождеств:

$$(Rx - Ry)^2 = (x-y)^2/x^2 - y^2; \tag{53}$$

$$R(Rx - Ry)_{\mu} = -x^2 M(x)_{\mu}^{\mu'} R(x-y)_{\mu'} + x_{\mu}; \tag{54}$$

$$M(x)_{\mu_1}^{\mu_1'} M(x)_{\mu_2}^{\mu_2'} g_{\mu_1'\mu_2'} = g_{\mu_1-\mu_2}; \tag{55}$$

$$M(x)_{\mu}^{\mu'} M(y)_{\nu}^{\nu'} M_{\mu'\nu'}(x-y) = M_{\mu\nu}(Rx - Ry), \tag{56}$$

вытекающих непосредственно из определений (32) и (52). Окончательно имеем

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x, y) = \delta_{pq}\delta_{l_A l_B} G^{AB}[(x-y)^2]^{l_A} \times$$
$$\times \sum_k (-1)^k k! \frac{(p-k)!}{p!} \underset{(\mu)}{S}\,\underset{(\nu)}{S}\, g_{\mu_1\mu_2} \ldots g_{\mu_{2k-1}\mu_{2k}} \times$$
$$\times g_{\nu_1\nu_2} \ldots g_{\nu_{2k-1}\nu_{2k}} M(x-y)_{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}} \ldots M(x-y)_{\mu_p\nu_q}, \tag{57}$$

где k принимает целые значения от нуля до $p/2$; $\underset{(\mu)}{S}$ и $\underset{(\nu)}{S}$ — симметризация по всем индексам μ и ν в отдельности. Можно видеть, что число членов, входящих сюда, равно $[p!\,(2k-1)!!/(2k)!]^2 \times \times [1/(p-2k)!]$. Нетрудно показать также [21], что если $A_{\mu_1\ldots\mu_p}$ или $B_{\nu_1\ldots\nu_q}$ является сохраняющимся оператором

$$\partial^{\mu} A_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = 0 \quad \text{или} \quad \partial^{\nu} B_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q} = 0,$$

то эта функция может быть отлична от нуля только при $l_A = -(p+2)$.

В простейшем случае, когда A и B — скалярные операторы, имеем

$$G^{AB}(x, y) = \langle 0 | A(x) B(y) | 0 \rangle = \delta_{l_A l_B} G^{AB}[(x-y)^2]^{l_A}. \tag{58}$$

Двухточечная функция от спинорных полей

$$\{G^{\psi\chi}(x-y)\}_{\alpha}^{\beta} \equiv \langle 0 | \psi_{\alpha}(x) \overline{\chi}^{\beta}(y) | 0 \rangle \tag{59}$$

удовлетворяет уравнениям

$$G^{\psi\chi}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{l_\psi + l_\chi} G^{\psi\chi}(x, y), \tag{60}$$

$$G^{\psi\chi}(Rx, Ry) = (x^2)^{-l_\psi}(y^2)^{-l_\chi}[\hat{x}/(x^2)^{1/2}]\, G^{\psi\chi}(x, y)\, [\hat{y}/(y^2)^{1/2}] \tag{61}$$

и, следовательно, имеет вид

$$G^{\psi\chi}(x, y) = \delta_{l_\psi l_\chi} \mathrm{i} G^{\psi\chi}[(x-y)^2]^{l_\psi} (\hat{x} - \hat{y})/[(x-y)^2]^{1/2}. \tag{62}$$

Использовано тождество

$$\hat{x}\widehat{R(x-y)}\,\hat{y}\equiv \widehat{R(Rx-Ry)}. \qquad (63)$$

Рассмотрим теперь трехточечную функцию

$$G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,\ y,\ z)\equiv$$
$$\equiv\langle 0\,|\,A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)\,B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)\,C^{(z)}_{\rho_1\ldots\rho_r}\,|\,0\rangle. \qquad (64)$$

Она удовлетворяет уравнениям

$$G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)=$$
$$=\lambda^{l_A+l_B+l_C}G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,\ y,\ z); \qquad (65)$$

$$G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(Rx,\ Ry,\ Rz)=$$
$$=(x^2)^{-l_A}(y^2)^{-l_B}(z^2)^{-l_C}M(x)^{\mu'_1}_{\mu_1}\ldots M(x)^{\mu'_1}_{\mu_p}\times$$
$$\times M(y)^{\nu'_1}_{\nu_1}\ldots M(y)^{\nu'_q}_{\nu_q}M(z)^{\rho'_1}_{\rho_1}\ldots M(z)^{\rho'_r}_{\rho_r}G^{ABC}_{\mu'_1\ldots\mu'_p\nu'_1\ldots\nu'_q\rho'_1\ldots\rho'_r}. \qquad (66)$$

Снова используя тождества (53) — (56), можно найти общее выражение для трехточечной функции $G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,\ y,\ z)$ от любых неприводимых симметричных тензорных операторов с нулевым следом [21]. В частности, для скалярных и сохраняющихся неприводимых тензорных операторов только трехточечные функции следующих типов могут иметь неисчезающее значение: при $l_A=-(p+2)$, $l_B=l_C$. Здесь k принимает целые

$$\langle 0\,|\,A(x)\,B(y)\,C(z)\,|\,0\rangle=G^{ABC}[(x-y)^2]^{(l_A+l_B=l_C)/2}[(y-$$
$$-z)^2]^{(l_B+l_C-l_A)/2}[(z-x)^2]^{(l_C+l_A-l_B)/2}; \qquad (67)$$

$$\langle 0\,|\,A_\mu(x)\,B_\nu(y)\,C(z)\,|\,0\rangle=$$
$$=G^{ABC}[(x-y)^2]^{-1/2}[(y-z)^2]^{-3/2}[(z-$$
$$-x)^2]^{-3/2}[R(x-y)-R(x-z)]_\mu[R(y-z)-R(y-x)]_\nu \qquad (68)$$

при $l_A=l_B=l_C=-3$;

$$\langle 0\,|\,A_\mu(x)\,B_\nu(y)\,C_\rho(z)\,|\,0\rangle=$$
$$=G^{ABC}[(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2]^{-1}[R(x-y)-R(x-z)]_\mu[R(y-z)-$$
$$-R(y-x)]_\nu[R(z-x)-R(z-y)]_\rho \qquad (69)$$

при $l_A = l_B = l_C = -3$;

$$\langle 0 | A_{\mu_1 \ldots \mu_p}(x) B(y) C(z) | 0 \rangle =$$

$$= G^{ABC} \sum_k \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(p-k)!}{p!} [(x-y)^2]^{-(1+k)} [(y-z)^2]^{l_B+1+k} \times$$

$$\times [(z-x)^2]^{-(1+k)} \underset{(\mu)}{S} g_{\mu_1\mu_2} \ldots g_{\mu_{2k-1}\mu_{2k}} [R(x-y) -$$

$$- R(x-z)]_{\mu_{2k+1}} \ldots [R(x-y) - R(x-z)]_{\mu_p} \tag{70}$$

при $l_A = -(p+2)$, $l_B = l_C$. Здесь k принимает целые значения от нуля до $p/2$, а число членов, входящих в $\underset{(\mu)}{S}$, равно $\frac{p!}{(2k)!\,(p-2k)!}(2k-1)!!$

Аналогично можно найти трехточечную функцию, включающую спинорные операторы:

$$\{G^{ABC}_{\rho_1 \ldots \rho_r}(x, y, z)\}^{\beta}_{\alpha} \equiv \langle 0 | A_\alpha(x) \overline{B}^{\beta}(y) C_{\rho_1 \ldots \rho_r}(z) | 0 \rangle. \tag{71}$$

В частности, имеем

$$\langle 0 | \psi(x) \overline{\psi}(y) J_\mu(z) | 0 \rangle = [(x-y)^2]^{-(2l_\psi+3)/2} \times$$

$$\times [(y-z)^2]^{-1} [(z-x)^2]^{-1} \Big\{ [R(z-x) - R(z-y)]_\mu \times$$

$$\times \left[g \frac{\hat{x}-\hat{y}}{(x-y)^2} + g' \frac{(\hat{x}-\hat{z})(\hat{y}-\hat{z})}{((x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2)^{1/2}} \right] + g'' \frac{\hat{x}-\hat{z}}{(x-z)^2} \gamma_\mu \frac{\hat{y}-\hat{z}}{(y-z)^2} \Big\} \tag{72}$$

для сохраняющегося векторного тока J_μ при $l_{J_\mu} = -3$ и

$$\langle 0 | \psi(x) \overline{\psi}(y) \phi(z) | 0 \rangle =$$

$$= [(x-y)^2]^{(2l_\psi - l_\phi + 1)/2} [(y-z)^2]^{l_\phi/2} [(z-x)^2]^{l_\phi/2} \times$$

$$\times \left\{ g \frac{\hat{x}-\hat{y}}{(x-y)^2} + g' \frac{(\hat{x}-\hat{z})(\hat{y}-\hat{z})}{((x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2)^{1/2}} \right\} \tag{73}$$

для скалярного оператора ϕ.

4. РАЗМЕРНЫЕ СВОЙСТВА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Как известно, для каждого данного лагранжиана существует канонический тензор энергии-импульса:

$$T^c_{\rho\mu} = \sum_\varphi \pi_\rho \partial_\mu \varphi - g_{\rho\mu} \mathscr{L}, \tag{74}$$

где

$$\pi_\rho \equiv \partial \mathscr{L} / \partial (\partial^\rho \varphi),$$

с помощью которого можно образовать генераторы преобразований Пуанкаре, учитывая канонические одновременные коммутационные соотношения, а именно

$$P_\mu = \int d\mathbf{x} T^c_{0\mu}; \tag{75}$$

$$M_{\mu\nu} = \int d\mathbf{x} \mathcal{M}^c_{0,\,\mu\nu}; \tag{76}$$

где

$$\mathcal{M}^c_{\rho;\,\mu\nu} \equiv x_\mu T^c_{\rho\nu} - x_\nu T^c_{\rho\mu} - i \sum_\varphi \pi_\rho \Sigma_{\mu\nu}\varphi \tag{77}$$

называют тензором момента количества движения.

В рамках канонического формализма найдем также масштабный и конформный токи, пространственные интегралы от временных компонент которых реализуют генераторы масштабного и конформного преобразований соответственно. Именно [13]:

$$\mathcal{D}^c_\mu = \sum_\varphi l_\varphi \pi_\mu \varphi - x^\nu T^c_{\mu\nu}; \tag{78}$$

$$\mathcal{K}^c_{\rho\mu} = 2x_\mu x^\nu T^c_{\rho\nu} - x^2 T^c_{\rho\mu} - \sum_\varphi \pi_\rho \left(2ix^\nu \Sigma_{\mu\nu} + 2l_\varphi x_\mu\right)\varphi. \tag{79}$$

От канонического тензора энергии-импульса перейдем к симметричному тензору Белифанта, который имеет вид

$$T^B_{\rho\mu} = T^c_{\rho\mu} + \partial^\sigma f_{\mu;\,\rho\sigma};$$
$$f_{\mu;\,\rho\sigma} \equiv \frac{i}{2} \sum_\varphi \{\pi_\sigma \Sigma_{\mu\rho}\varphi - \pi_\rho \Sigma_{\mu\sigma}\varphi - \pi_\mu \Sigma_{\rho\sigma}\varphi\}. \tag{80}$$

Тензор Белифанта $T^B_{\rho\mu}$ имеет такое же свойство сохранения, что и $T^c_{\rho\mu}$, а пространственный интеграл от $T^B_{0\mu}$ совпадает с пространственным интегралом от $T^c_{0\mu}$ и поэтому также может служить генератором трансляции. Кроме того, образующийся с его помощью тензор

$$\mathcal{M}^B_{\rho;\,\mu\nu} \equiv x_\mu T^B_{\rho\nu} - x_\nu T^B_{\rho\mu} \tag{81}$$

обладает всеми свойствами, присущими тензору момента количества движения.

Далее, как было показано Каланом, Колеманом и Джекивом [26], можно переопределить тензор энергии-импульса так, чтобы масштабный и конформный токи простым образом выражались через него. Достаточным условием для этого будет то, что $\sum_\varphi (l_\varphi \pi_\mu \varphi + i\pi^\nu_{\mu\nu}\varphi)$ можно записать в виде дивергенции некоторого тензора второго ранга $A_{\mu\nu}$:

$$\sum_\varphi (l_\varphi \pi_\mu \varphi + i\pi^\nu \Sigma_{\mu\nu}\varphi) = -\partial^\nu A_{\mu\nu}. \tag{82}$$

При этом было найдено [26]

$$\theta_{\mu\nu} = T^{B}_{\mu\nu} + \partial^{\lambda}\partial^{\rho}X_{\lambda\rho\mu\nu}/2, \tag{83}$$

где

$$X_{\lambda\rho\mu\nu} \equiv g_{\lambda\rho}A^{+}_{\mu\nu} - g_{\lambda\mu}A^{+}_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}A^{+}_{\mu\rho} + \\ + g_{\mu\nu}A^{+}_{\lambda\rho} - (g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} + g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu})\, A^{+\sigma}_{\sigma}/3; \tag{84}$$

$A^{+}_{\mu\nu}$ — симметричная часть тензора $A_{\mu\nu}$:

$$A^{+}_{\mu\nu} \equiv (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})/2. \tag{85}$$

Этот новый тензор $\theta_{\mu\nu}$ называется улучшенным тензором энергии-импульса.

Нетрудно видеть, что выражения

$$\mathcal{D}_{\rho} = -x^{\nu}\theta_{\mu\nu}; \tag{86}$$

$$\mathcal{K}_{\rho\mu} \equiv (2x_{\mu}x_{\nu} - g_{\mu\nu}x^{2})\,\theta^{\nu}_{\rho} \tag{87}$$

обладают свойствами

$$\int d\mathbf{x}\mathcal{D}_{0}(x) = \int d\mathbf{x}\mathcal{D}^{c}_{0}(x); \tag{88}$$

$$\int d\mathbf{x}\mathcal{K}_{0\mu}(x) = \int d\mathbf{x}\mathcal{K}^{c}_{0\mu}(x); \tag{89}$$

$$\partial^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} = \partial^{\mu}\mathcal{D}^{c}_{\mu} = -\theta^{\mu}_{\mu}; \tag{90}$$

$$\partial^{\rho}\mathcal{K}_{\rho\mu} = \partial^{\rho}\mathcal{K}^{c}_{\rho\mu} = 2x_{\mu}\theta^{\rho}_{\rho} \tag{91}$$

и поэтому также могут служить масштабным и конформным токами. Кроме того, их дивергенции пропорциональны следу «улучшенного» тензора энергии-импульса θ^{μ}_{μ}, и, следовательно, характер нарушения масштабной и конформной инвариантности определяется поведением этого тензора. Надежда, что масштабная (конформная) симметрия полезна приближенной симметрии, выражается в том, что θ^{μ}_{μ} является «малым» оператором, матричные элементы которого исчезают при больших энергиях.

Что касается тензора момента количества движения, то им может служить выражение, аналогичное

$$\mathcal{M}_{\rho;\,\mu\nu} = x_{\mu}\theta_{\rho\nu} - x_{\nu}\theta_{\rho\mu}. \tag{92}$$

Условие (92) выполняется для многих моделей, и обычно считают, что оно удовлетворяется. Предполагают также, что для теории гравитации тензор энергии-импульса выбирают именно так, чтобы масштабный и конформный токи выражались через него по формулам (86) и (87), а тензор момента количества движения — по формуле (92).

Отметим, что тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ называется улучшенным и в другом аспекте — матричные элементы от него конечны в любом порядке перенормированной теории возмущений [26], т. е. не зависят от обрезания в пределе большого обрезания.

Приведем еще одну формулу для матричных элементов от $\theta_{\mu\nu}$, которая понадобится в дальнейшем. Будем использовать нормировку

$$\langle A(\mathbf{p}', \alpha') \,|\, A(\mathbf{p}, \alpha)\rangle = (2\pi)^3 (p_0/\lambda_A)\, \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p})\, \delta_{\alpha\alpha'}, \tag{93}$$

где λ_A равно 1/2, если A — бозонная частица, и m_A, если A — фермионная частица; α, α' — другие квантовые числа, кроме импульса. Из этой нормировки следует

$$\langle A(\mathbf{p}, \alpha') \,|\, \theta_{0\nu}(0) \,|\, A(\mathbf{p}, \alpha)\rangle = \frac{p_0 p_\alpha}{\lambda_A}\, \delta_{\alpha\alpha'}. \tag{94}$$

Теперь, дифференцируя по p'_k уравнение

$$(p'-p)^\mu \langle A(\mathbf{p}, \alpha') \,|\, \theta_{\mu\nu}(0) \,|\, A(\mathbf{p}, \alpha)\rangle = 0, \tag{95}$$

следующее из условия сохранения тензора $\theta_{\mu\nu}$, и полагая $\mathbf{p} = \mathbf{p}$, получаем [с учетом (94)]:

$$\langle A(\mathbf{p}, \alpha') \,|\, \theta_{\mu\nu}(0) \,|\, A(\mathbf{p}, \alpha)\rangle = \frac{p_\mu p_\nu}{\lambda_A}\, \delta_{\alpha\alpha'}. \tag{96}$$

Эта формула показывает, в частности, что матричные элементы от компоненты $\theta_{\mu i}$ по состоянию любой покоящейся частицы равны нулю. Кроме того, имеем

$$\langle A(\mathbf{p}, \alpha') \,|\, \theta^\mu_\mu(0) \,|\, A(\mathbf{p}, \alpha)\rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \begin{cases} 2m_A^2, & A \text{ — бозон;} \\ m_A, & A \text{ — фермион.} \end{cases} \tag{97}$$

Из-за наличия масс у частиц плотность гамильтониана не может иметь определенную масштабную инвариантность, и в лучшем случае можно ожидать, что она состоит из нескольких частей с различными размерностями. Определение этих размерностей имеет большое значение особенно при изучении следствий, вытекающих из нарушенных масштабной и киральной инвариантностей, вместе взятых (см. разд. 7).

Если какая-нибудь компонента $\theta_{\mu\nu}$ имеет определенную масштабную размерность $l_{(\mu\nu)}$, то это означает, что имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$[D(x_0), \theta_{\mu\nu}(x)] = -\mathrm{i}\,(l_{(\mu\nu)} - x^\rho \partial_\rho)\, \theta_{\mu\nu}. \tag{98}$$

С другой стороны, из (86) видно, что коммутатор в левой части (98) может быть вычислен, если определены одновременные коммутаторы $[\theta_{0\rho}(x), \theta_{\mu\nu}(y)]$ вплоть до швингеровских членов первого порядка.

Из общих соображений можно написать

$$[\theta_{\mu\nu}(x), \theta_{\sigma\rho}(y)]_{x_0=y_0} = \sum_{r=0}^{n} F_{\sigma\rho;\, \mu\nu,\, k_1\ldots k_r}(y)\, \partial^{k_1} \ldots \partial^{k_r} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{99}$$

где $F_{\sigma\rho;\,\mu\nu,\,k_1\ldots k_r}$ — некоторые операторные структурные функции. Члены в правой части (99), соответствующие значениям $r = 1, 2, \ldots$, называются швингеровскими членами первого порядка, второго и т. д. Используя законы преобразований Лоренца, можно получить соотношения для этих структурных функций, которые приводят к следующим формулам [27]:

$$[\theta_{00}(x),\ \theta_{00}(y)] = -i\partial_0\theta_{00}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - 2i\theta_{0k}(y)\,\partial^k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \ldots; \tag{100}$$

$$[\theta_{00}(x),\ \theta_{0i}(y)] = -i\partial_0\theta_{0i}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \\ - i\theta_{ik}(y)\,\partial^k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\theta_{00}(y)\,\partial_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \ldots; \tag{101}$$

$$[\theta_{0i}(x),\ \theta_{00}(y)] = -i\partial_i\theta_{00}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \\ - i\theta_{ik}(y)\,\partial^k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\theta_{00}(y)\,\partial_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \ldots; \tag{102}$$

$$[\theta_{0i}(x),\ \theta_{0j}(y)] = -i\partial_i\theta_{0j}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + i\theta_{0j}(y)\,\partial_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\theta_{0i}(y)\,\partial_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \ldots, \tag{103}$$

где $x_0 = y_0$; $i, j, \ldots = 1, 2, 3, \ldots$; многоточие означает швингеровские члены начиная со второго порядка.

Чтобы найти $[\theta_{0\mu}(x),\ \theta_{jk}(y)]$, поступим аналогично. При этом исходим из найденных коммутаторов (100) — (103), используя тождества Якоби, написанные для трех операторов $\int d\mathbf{x}x^k\theta_{0\nu}(0,\ \mathbf{x})$, $\theta_{0i}(0)$ и M_{0j}.

Из (100) — (103) следует

$$[\mathscr{D}(x_0),\ \theta_{0\mu}(x)] = -i(-4 - x^\nu\partial_\nu)\,\theta_{0\mu}(x) - ig_{0\mu}\theta^\nu_\nu(x). \tag{104}$$

Это уравнение показывает, что θ_{00} не имеет определенной масштабной размерности. Если представить его в виде

$$\theta_{00}(x) = \bar\theta_{00}(x) + \sum_i u_i(x) + \mathscr{C}(x), \tag{105}$$

где $\bar\theta_{00}$ имеет размерность четыре; u_i — масштабную размерность l_i; $\mathscr{C}$ — некоторое c число, то

$$[\mathscr{D}(x_0),\ \theta_{00}(x)] = -i(-4 - x^\mu\partial_\mu)\,\theta_{00} + \\ + i\sum_i (4 + l_i)\,u_i - 4i\mathscr{C}(x) - ix^\mu\partial_\mu\mathscr{C}(x). \tag{106}$$

Из (104) и (106) следует

$$\theta^\mu_\mu(x) = \sum_i (4 + l_i)\,u_i(x) + 4\mathscr{C}(x) + x^\mu\partial_\mu\mathscr{C}(x), \tag{107}$$

что в точке $x = 0$ дает

$$\theta^\mu_\mu(0) = \sum_i (4 + l_i)\,u_i(0) + 4\mathscr{C}(0). \tag{108}$$

Это и есть теорема [28].

Из выражений (86), (87) и (92) для конформных токов и из найденных коммутационных соотношений (100) — (103) прямым вычислением можно получить следующие коммутаторы соответствующих зарядов:

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{D}(x_0)] = -i\int d\mathbf{x}\,(g_{\mu0}x_\nu - g_{\nu0}x_\mu)\,\theta_\sigma^\sigma(x); \tag{109}$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu},\ \mathcal{K}_\rho(x_0)] = i\,(g_{\nu\rho}\mathcal{K}_\mu - g_{\mu\rho}\mathcal{K}_\nu) + $$
$$+ 2i\int d\mathbf{x}\,(g_{\mu0}x_\nu - g_{\nu0}x_\mu)\,x_\rho\theta_\sigma^\sigma; \tag{110}$$

$$[\mathcal{P}_\mu,\ \mathcal{D}(x_0)] = -i\,\mathcal{P}_\mu + ig_{\mu0}\int d\mathbf{x}\,\theta_\sigma^\sigma(x); \tag{111}$$

$$[\mathcal{P}_\mu,\ \mathcal{K}_\nu(x_0)] = -2i\,(g_{\mu\nu}\mathcal{D}(x_0) + \mathcal{M}_{\mu\nu}) - 2ig_{\mu0}x_0\int d\mathbf{x}\,\theta_\sigma^\sigma(x); \tag{112}$$

$$[\mathcal{D}(x_0),\ \mathcal{K}_\mu(x_0)] = -i\mathcal{K}_\mu(x_0) + ig_{\mu0}\int d\mathbf{x}\,x^2\theta_\sigma^\sigma(x); \tag{113}$$

$$[\mathcal{K}_\mu(x_0),\ \mathcal{K}_\nu(x_0)] = 2i\int d\mathbf{x}\,(x_\nu g_{\mu0} - x_\mu g_{\nu0})\,\theta_\sigma^\sigma(x). \tag{114}$$

Отметим, что эти соотношения совпадают с первоначальными соотношениями (7) — (12) лишь в пределе $\theta_\sigma^\sigma \to 0$, когда можно считать $\mathcal{D}_\mu(x)$ и $\mathcal{K}_{\rho\mu}(x)$ сохраняющимися, что и следует ожидать.

5. МАССОВЫЙ ФОРМ-ФАКТОР И МАССОВЫЙ РАДИУС π-МЕЗОНА

Если считать тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ источником гравитационного поля, то можно судить о распределении массы внутри частицы, изучая матричные элементы между ее состояниями. Возникающие при этом форм-факторы называются массовыми (или гравитационными).

Оказывается, что в рамках теории конформной инвариантности, используя свойства тензора энергии-импульса, можно дать оценку значения массового радиуса π-мезона, который пропорционален производной соответствующего массового форм-фактора при $t = 0$. Для этого применяется метод, основанный на конформных тождествах Уорда и частичном сохранении аксиального тока (ЧСАТ). Последнее используется при выводе низкоэнергетической теоремы для матричного элемента с мягким пионом, по аналогии с методом алгебры токов.

Рассмотрим T-произведения масштабного и конформного токов и полей $\varphi_i(x)$: $T\{\mathcal{D}_\rho(x)\,\varphi_1(x_1)\ \ldots\ \varphi_n(x_n)\}$ и $T\{\mathcal{K}_{\rho\mu}(x) \times \varphi_1(x_1)\ \ldots\ \varphi_n(x_n)\}$. На основе законов преобразования полей (28) и (29) из выражений (86) и (87) для токов при помощи стандартной техники можно получить [29]:

$$\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n\theta)}(p_1, \ldots, p_n; 0) = $$
$$= -\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\left(l_j + 4 + p_j^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_j^{\nu}}\right)\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}(p_1, \ldots, p_n); \tag{115}$$

$$\frac{\partial\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n\theta)}}{\partial k^{\mu}}(p_1, \ldots, p_n; k)\Big|_{k+0} =$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\left\{(4 + l_j)\frac{\partial}{\partial p_j^{\mu}} + p_j^{\nu}\frac{\partial^2}{\partial p_j^{\nu}\,\partial p_j^{\mu}} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}p_{j\mu}\Box(p_j) + \mathrm{i}\Sigma_{\mu\nu}^{\varphi_j}\frac{\partial}{\partial p_{j\nu}}\right\}\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}(p_1, \ldots p_n), \tag{116}$$

где τ обозначаются фурье-образы вакуумных средних от соответствующих T-произведений;

$$\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}(p_1, \ldots, p_n) = \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \times$$
$$\times \exp\left[\mathrm{i}\sum_{p=1}^{n} p_j x_j\right]\langle 0 | T\{\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)\} | 0\rangle; \tag{117}$$

$$\tau^{(\varphi_1\ldots\varphi_n\theta)}(p_1, \ldots, p_n; k) =$$
$$= \int d^4x_1 \ldots d^4x_n\, d^4x \exp\left[\mathrm{i}\left(\sum_j p_j x_j + kx\right)\right] \times$$
$$\times \langle 0 | T\{\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)\,\theta_{\mu}^{\mu}(x)\} | 0\rangle. \tag{118}$$

С помощью трансляционной инвариантности можно преобразовать (115) и (116) к более удобному виду:

$$\Gamma^{(\varphi_1\ldots\varphi_n\theta)}\left(p_1, \ldots, p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right) =$$
$$= -\mathrm{i}\left[l_{\varphi_n} + 4(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(l_{\varphi_j} + p_j^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_j^{\nu}}\right)\right] \times$$
$$\times \Gamma^{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}(p_1, \ldots, p_{n-1}); \tag{119}$$

$$\frac{\partial\Gamma^{(\varphi_1\ldots\varphi_n\theta)}}{\partial k^{\mu}}\left(p_1, \ldots, p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j - k\right)\Big|_{k=0} =$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{(4 + l_{\varphi_j})\frac{\partial}{\partial p_j^{\mu}} + p_j^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_j^{\nu}\,\partial p_j^{\mu}} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}p_{j\mu}\Box(p_j) + \mathrm{i}\Sigma_{\mu\nu}^{(\varphi_j)}\frac{\partial}{\partial p_{j\nu}}\right\}\Gamma^{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}(p_1, \ldots, p_{n-1}), \tag{120}$$

где введены обозначения

$$\Gamma^{(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}(p_1, \ldots, p_{n-1}) \equiv \int d^4x_1 \ldots d^4x_{n-1} \times$$

$$\times \exp\left[\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j\right] \langle 0 | T \{\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \varphi_n(0)\} | 0 \rangle; \tag{121}$$

$$\Gamma^{(\varphi_1 \ldots \varphi_n \theta)}(p_1, \ldots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \exp\left[\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right] \times$$

$$\times \langle 0 | T \{\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n) \theta^\mu_\mu(0)\} | 0 \rangle. \tag{122}$$

В частности, для $n = 2$ и $\varphi_1 = \varphi_2^+ \equiv \varphi$ уравнения (119) — (123) позволяют связать $\theta\varphi\varphi^+$-вершину с соответствующим фейнмановским пропагатором

$$\widetilde{\Delta}_F(p) \equiv \int d^4x \exp(\mathrm{i}px) \langle 0 | T \{\varphi(x) \varphi^+(0)\} | 0 \rangle \tag{123}$$

и иметь

$$\Gamma^{(\varphi\varphi^+\theta)}(p-p) = -\mathrm{i}\left[2l_\varphi + 4 + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu}\right] \widetilde{\Delta}_F(p); \tag{124}$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(\varphi\varphi^+\theta)}}{\partial p'^\mu}(p, -p')\Big|_{p'=p} = \mathrm{i}\left\{(4 + l_\varphi)\frac{\partial}{\partial p^\mu} + \right.$$

$$\left. + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu p^\mu} - \frac{1}{2} p_\mu \Box(p) + \mathrm{i}\Sigma^{(\varphi)}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right\} \widetilde{\Delta}_F(p). \tag{125}$$

Эти формулы будут использованы для изучения массового форм-фактора π-мезона, к которому мы сейчас переходим.

Массовый форм-фактор π-мезона определяется как матричный элемент от θ^μ_μ между однопионными соотношениями:

$$\langle \pi^0(p) | \theta^\mu_\mu(0) | \pi^0(p') \rangle \equiv \theta(p^2, p'^2; t), \quad t \equiv (p' - p)^2. \tag{126}$$

Рассмотрим сначала (нековариантную) функцию Грина

$$T(p^2, p'^2; t) \equiv -(p^2 - m_\pi^2)(p'^2 - m_\pi) \int d_x^4 d_y^4 \exp[\mathrm{i}(px - p'y)] \times$$

$$\times \langle 0 | T \{\varphi(x) \varphi(y) \theta^\mu_\mu(0)\} | 0 \rangle, \tag{127}$$

где ϕ — полевой оператор π^0-мезона. Матричный элемент (126) получается из (127) заменой нековариантного T-произведения ковариантной T^*-функцией, которая построена по методу, изложенному в работе [30]. Для этого необходимы одновременные коммутационные соотношения между $\theta_{\mu\nu}$ и ϕ. Оказывается, что [29]

$$T^* \{\varphi(x) \varphi(y) \theta^\mu_\mu(z)\} = T \{\varphi(x) \varphi(y) \theta^\mu_\mu(z)\} +$$

$$+ \mathrm{i}l_\varphi T \{\varphi(x) \varphi(y)\} [\delta^{(4)}(z - x) + \delta^{(4)}(z - y)]. \tag{128}$$

Таким образом, $\theta(p^2,\ p'^2;\ t)$ и $T(p^2,\ p'^2;\ t)$ связаны между собой соотношением

$$\theta(p^2,\ p'^2;\ t) = T(p^2,\ p'^2;\ t) - \\ - il_\varphi (p^2 - m_\pi^2)(p'^2 - m_\pi)[\widetilde{\Delta}_F(p) + \widetilde{\Delta}_F(p')]. \qquad (129)$$

В частности, отсюда следует, что на массовой поверхности выполняется равенство

$$\theta(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ t) = T(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ t). \qquad (130)$$

Тождество (124), применяемое к функции Грина (127), дает

$$T(p^2,\ p'^2;\ 0) = i\,(p^2 - m_\pi^2)^2 \left[2l_\varphi + 4 + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu}\right] \widetilde{\Delta}_F(p). \qquad (131)$$

Используя представление Челлена — Лемана для $\widetilde{\Delta}_F(p)$:

$$\widetilde{\Delta}_F(p) = i \int da^2 \rho(a^2)/(p^2 - a^2 + i\varepsilon); \quad \rho(a^2) = \delta(a^2 - m_\pi^2) + \sigma(a^2);$$
$$\sigma(a^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_{m \neq n} \delta^{(4)}(p_n - a)\,|\langle 0|\,\varphi(0)\,|n\rangle|^2, \qquad (132)$$

перепишем (131) в виде

$$T(p^2,\ p^2;\ 0) = 2(p^2 - m_\pi^2)^2 \left\{ \frac{m_\pi^2 - (l_\varphi + 1)(p^2 - m_\pi^2)}{(p^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon)^2} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{(3m_\pi)^2}^{\infty} da^2 \frac{\sigma(a^2)}{(p^2 - a^2 + i\varepsilon)^2} [a^2 - (l_\varphi + 1)(p^2 - a^2)] \right\}. \qquad (133)$$

При $p^2 \to m_\pi^2$ и $p^2 \to 0$ отсюда можно найти

$$T(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ 0) = 2m_\pi^2; \qquad (134)$$

$$T(0,\ 0;\ 0) = 2m_\pi^2 (l_\varphi + 2) \left[1 + m_\pi^2 \int\limits_{(3m_\pi)^2}^{\infty} da^2 \frac{\sigma(a^2)}{a^2}\right]. \qquad (135)$$

Отметим, что результат (134) можно также получить сразу из (130), так как на массовой поверхности [см. (97)]

$$\langle \pi(p)\,|\,\theta_\mu^\mu\,|\,\pi(p)\rangle = 2m_\pi^2.$$

Применим теперь тождество (125). Из определения (122) и (127) имеем

$$\left.\frac{\partial \Gamma^{(\varphi\varphi\theta)}}{\partial p'^\mu}(p,\ -p')\right|_{p'=p} =$$
$$= \frac{2p_\mu}{(p^2 - m_\pi^2)^2}\,T(p^2,\ p^2;\ 0) - \frac{2p_\mu}{(p^2 - m_\pi^2)^2} \left.\frac{\partial T(p^2,\ p'^2;\ 0)}{\partial p'^2}\right|_{p'=p}. \qquad (136)$$

Уравнения (125), (131) и (136) вместе дают

$$2p_\mu \frac{\partial T}{\partial p'^2}(p^2,\ p'^2;\ 0)\Big|_{p'=p} =$$
$$= \mathrm{i}\,(p^2 - m_\pi^2)\left\{(p^2-m_\pi^2)\left[(4+l_\varphi)\frac{\partial}{\partial p^\mu} + p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu\,\partial p^\mu} - \frac{1}{2}\,p_\mu \Box\,(p)\right] + \right.$$
$$\left. + 2p_\mu\left(2l_\varphi + 4 + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu}\right)\right\}\widetilde{\Delta}_F\,(p). \tag{137}$$

Отсюда, используя представление (132), после некоторых простых преобразований можно получить

$$\frac{\partial T}{\partial p'^2}(p^2,\ p'^2;\ 0)\Big|_{p'=p^2} = \frac{\partial T}{\partial p'^2}(p'^2,\ p^2;\ 0)\Big|_{p'^2=p^2} =$$
$$= (p^2 - m_\pi^2)\int da^2 \frac{\rho\,(a^2)}{(p^2-a^2+\mathrm{i}\varepsilon)^3}\{(a^2-m_\pi^2)\,[(1-l_\varphi)\,p^2 - (3+l_\varphi)\,a^2] -$$
$$- (1+l_\varphi)\,(p^2-a^2)^2\}. \tag{138}$$

Правое равенство в (138) следует из свойства перекрестной симметрии. В частности, при $p^2 \to m_\pi^2$ и $p^2 \to 0$ имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial p^2}(m_\pi^2,\ p^2;\ 0)\Big|_{p^2=m_\pi^2} = \frac{\partial T}{\partial p^2}(p^2,\ m_\pi^2;\ 0)\Big|_{p^2=m_\pi^2} = -(l_\varphi+1); \tag{139}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p^2}(0,\ p^2;\ 0)\Big|_{p^2=0} = \frac{\partial T}{\partial p^2}(p^2,\ 0;\ 0)\Big|_{p^2=0} =$$
$$= -(l_\varphi+1) - (2l_\varphi+4)\,m_\pi^2 \int da^2 \frac{\sigma\,(a^2)}{a^2} +$$
$$+ (3+l_\varphi)\,m_\pi^4 \int da^2 \frac{\sigma\,(a^2)}{a^4}. \tag{140}$$

Перейдем теперь к оценке среднего квадратического массового радиуса π-мезона, который определяется через производную от массового форм-фактора при $t=0$:

$$\overline{r_\theta^2}/6 = \theta'\,(m_\pi^2,\ m_\pi^2,\ 0)/\theta\,(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ 0) =$$
$$= T'\,(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ 0)/T\,(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ 0). \tag{141}$$

Второе равенство в (141) следует из (130).

Рассмотрим матричный элемент

$$\mathrm{i}\int d^4x \exp\,(\mathrm{i}px)\,\theta\,(x_0)\,\langle P\,(q)\,|\,[J_{\mu 3}^A\,(x),\ \theta_{0\nu}\,(0)]\,|\,P\,(q')\rangle,$$

где $P(q)$ — протон с импульсом q; $J_{\mu3}^A$ — третья изотопическая компонента аксиального тока. Стандартным методом с помощью редукционной техники и ЧСАТ

$$\partial^\mu J_{\mu a}^A = \frac{m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}\,\varphi_a$$

можно перейти к следующему неравенству:

$$\frac{\mathrm{i}f_\pi}{\sqrt{2}} \underset{\text{out}}{\langle P(q)\,\pi^0(p)} \,|\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, P(q')\rangle =$$

$$= -\int d^4x \exp\left[\mathrm{i}x(q'-q)\,\delta(x_0)\right] \langle P(q) \,|\, [\theta_{0\mu}(x),\ J^A_{03}(0)] \,|\, P(q')\rangle. \quad (142)$$

Используя одновременные коммутаторы [27]

$$[\theta_{00}(x),\ J^A_{0a}(y)]_{x_0=y_0} = -\mathrm{i}\partial^0 J^A_{0a}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \mathrm{i}J^A_{ka}(y)\,\partial^k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$

$$[\theta_{0i}(x),\ J^A_{0a}(y)]_{x_0=y_0} = -\mathrm{i}\partial_i J^A_{0a}(y)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{1}{3}\,\mathrm{i}l_{J_0} J^A_{0a}(y)\,\partial_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (143)$$

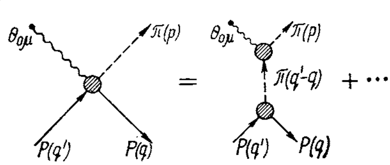
и пренебрегая при этом швингеровскими членами со второго порядка, находим, что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}f_\pi}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\text{out}\\ p\to\infty}}{\langle P(q)\,\pi^0(p)} \,|\, \theta_{00}(0) \,|\, P(q')\rangle = \mathrm{i}\,\langle P(q) \,|\, \partial^\mu J^A_{\mu 3}(0) \,|\, P(q')\rangle = \\
&\qquad\qquad = \frac{\mathrm{i}m_\pi^2}{\sqrt{2}} f_\pi \langle P(q) \,|\, \varphi_{\pi^0}(0) \,|\, P(q')\rangle; \\
&\frac{\mathrm{i}f_\pi}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\text{out}\\ p\to\infty}}{\langle P(q)\,\pi^0(p)} \,|\, \theta_{0i}(0) \,|\, P(q')\rangle = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{3}(l_{J_0}+3)(q'-q)\,\langle P(q) \,|\, J^A_{03}(0) \,|\, P(q')\rangle.
\end{aligned}\right\} \quad (144)$$

Считая, что размерность тока l_{J_0} принимает значение, близкое к каноническому, т. е. $l_{J_0} \approx -3$, из (144) получаем

$$\underset{\substack{\text{out}\\ p\to\infty}}{\langle P(q)\,\pi^0(p)} \,|\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, P(q')\rangle = g_{0\mu} \frac{m_\pi^2}{-t+m_\pi^2} \langle P(q) \,|\, \eta_\phi(0) \,|\, P(q')\rangle, \quad (145)$$

где η_ϕ — источник поля π^0-мезона: $(\square\ m_\pi^2)\,\phi = \eta_\phi$. Выделим теперь полный член по t в матричном элементе $\langle P(q)\,\pi^0(p) \times |\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, P(q')\rangle$. На диаграммном языке это означает



Нетрудно видеть, что

$$\underset{\substack{\text{out}\\ p\to\infty}}{\langle P(q)\,\pi^0(p)} \,|\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, P(q')\rangle =$$

$$= \frac{1}{-t+m_\pi^2} \langle P(q) \,|\, \eta_\phi(0) \,|\, P(q')\rangle \langle \pi^0(p) \,|\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, \pi^0(q'-q)\rangle + \ldots, \quad (146)$$

где многоточие означает члены, не содержащие полюса при $t = m_\pi^2$. Из (145) и (146) следует, что

$$\langle \pi^0(p) \,|\, \theta_{0\mu}(0) \,|\, \pi^0(q'-q) \rangle \big|_{(q'-q)^2 = m_\pi^2} = g_{0\mu} m_\pi^2. \qquad (147)$$

Формулу (147) можно использовать для вычисления $\theta(0, m_\pi^2; m_\pi^2)$. Действительно, матричный элемент $\langle \pi^0(p) \,|\, \theta_{\mu\nu}(0) \,|\, \pi(p') \rangle$ имеет следующий общий вид:

$$\langle \pi^0(p) \,|\, \theta_{\mu\nu}(0) \,|\, \pi^0(p') \rangle = c_1 g_{\mu\nu} + \\ + c_2 P_\mu P_\nu + c_3 k_\mu k_\nu + c_4 (P_\mu k_\nu + k_\mu P_\nu), \qquad (148)$$

где $P \equiv (p'+p)/2$; $k \equiv (p'-p)$; c_i — форм-факторы, зависящие от переменных p^2, p'^2; $t \equiv k^2$; $c_i = c_i(p^2, p'^2; t)$.
Сравнивая (148) с (147), можно получить

$$\left.\begin{aligned} &c_1(0, m_\pi^2; m_\pi^2) = m_\pi^2; \\ &c_2(0; m_\pi^2; m_\pi^2)/4 + c_3(0, m_\pi^2; m_\pi^2) + c_4(0, m_\pi^2; m_\pi^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

Из (148) и (149) следует

$$\theta(0, m_\pi^2; m_\pi^2) = 4m_\pi^2. \qquad (150)$$

Это соотношение вместе с (129) дает

$$T(0, m_\pi^2; m_\pi^2) = (4 + l_\phi)\, m_\pi^2. \qquad (151)$$

Теперь, использовав формулу разложения для $T(p^2, p'^2; t)$ в точке $p_0^2 = p_0'^2 = m_\pi^2$, $t_0 = 0$ при $p^2 = 0$, $p'^2 = m_\pi^2$, $t = m_\pi^2$:

$$T(0, m_\pi^2; m_\pi^2) = T(m_\pi^2, m_\varphi^2; 0) - \\ - m_\pi^2 \frac{\partial T(p^2, m_\pi^2; 0)}{\partial p^2}\bigg|_{p^2 = m_\pi^2} + m_\pi^2 \frac{\partial T(m_\pi^2, m_\pi^2; t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} + O(m_\pi^4),$$

с помощью (134), (139) и (151) получим

$$\frac{\partial \theta(m_\pi^2, m_\pi^2; t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial T(m_\pi^2, m_\pi^2; t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1 + O(m_\pi^2) \qquad (152)$$

и, следовательно,

$$\overline{r_\theta^2} \approx 3/m_\pi^2. \qquad (153)$$

Пусть аксиальные токи $J_{\mu a}^A(x)$ имеют определенное поведение при масштабном преобразовании, т. е.

$$[D(x_0), J_{\mu\alpha}^A(x)] = -\mathrm{i}\,(l_{J_{\mu a}} - x^\nu \partial_\nu)\, J_{\mu a}^A. \qquad (154)$$

Из (154) легко вывести соответствующий закон преобразования для заряда:

$$\left.\begin{aligned} [D(x_0),\ Q_a^A(x_0)] = -\mathrm{i}\,(l_{J_{0a}}+3)\,Q_a^A(x_0) + \\ + \mathrm{i}x_0 \int d\mathbf{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A; \\ Q_a^A(x_0) \equiv \int d\mathbf{x} J_{0a}^A(x). \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Дифференцируя обе части равенства (155) по времени, имеем

$$\begin{aligned} &[\dot{D}(0),\ Q_a^A(0)] + [D(0),\ \dot{Q}_a^A(0)] = \\ &= -\mathrm{i}\,(l_{J_{0a}}+3)\,\dot{Q}_a^A(0) + \mathrm{i}\int d\mathbf{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A(0,\ \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{156}$$

Подставляя в это выражение

$$\dot{D}(\mathrm{x}_0) = -\int d\mathbf{x}\,\theta_\mu^\mu(x);\quad \dot{Q}_a^A(x_0) = \int d\mathbf{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A(x),$$

а также привлекая гипотезу ЧСАТ, перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{x_0=0} d\mathbf{x}\,[\theta_\mu^\mu(x),\ Q_a^A(0)] = \\ &= \frac{\mathrm{i}m_\pi f_\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{x_0=0} d\mathbf{x}\,[l_\phi - l_{J_{0a}} - 2 - x^k\partial_k]\,\varphi_a(x) \end{aligned} \tag{157}$$

Возьмем матричный элемент обеих частей уравнения (157) между одночастичными состояниями π- и σ-мезона. Тогда после некоторых простых преобразований в правой части имеем

$$\begin{aligned} &-\int d\mathbf{x}\,\langle\sigma(q)\,|\,[\theta_\mu^\mu(x),\ Q_a^A(0)]\,|\,\pi_b(p)\rangle = \\ &= \frac{\mathrm{i}m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}\,(l_\phi + l_{J_0} + 1)\,(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,\frac{1}{-(q-p)^2+m_\pi^2}\times \\ &\times\langle\sigma(q)\,|\,\eta_a(0)\,|\,\pi_b(p)\rangle. \end{aligned} \tag{158}$$

Интересно отметить, что полученный таким образом среднеквадратический массовый радиус π-мезона значительно больше его среднеквадратического электромагнитного радиуса $\sqrt{\overline{r_\theta^2}} \approx 4\sqrt{\overline{r_{em}^2}}$.

6. $\sigma\pi\pi$-ВЕРШИНА

По поведению тока при масштабном преобразовании можно судить о характере матричных элементов соответствующих физических процессов. Покажем здесь, как можно, исходя из закона масштабного преобразования тока, получить выражение для константы $\sigma\pi\pi$-связи [31]. Разлагая матричный элемент в левой части уравнения (158) по полному набору промежуточных состояний, получаем

$$\int d\mathbf{x} \langle \sigma(q) | [\theta^\mu_\mu(x), Q^A_a(0)] | \pi_b(p) \rangle =$$
$$= \sum_m (2\pi)^3 \{\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}_m) \langle \sigma(q) | \theta^\mu_\mu(0) | m \rangle \times$$
$$\times \langle m | Q^A_a(0) | \pi_b(p) \rangle - \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_m) \times$$
$$\times \langle \sigma(q) | Q^A_a(0) | m \rangle \langle m | \theta^\mu_\mu(0) | \pi_b(p) \rangle\}. \qquad (159)$$

Для дальнейшего вычисления этого выражения будем считать, что (σ, π) преобразуется по $(1/2, 1/2)$-представлению киральной $SU(2) \times SU(2)$-группы:

$$[Q^A_a, \pi_b] = -i\sigma\delta_{ab}; \quad [Q^A_a, \sigma] = i\pi_a \qquad (160)$$

и что в сумме в правой части уравнения (159) доминирует вклад от нижайшего возможного одночастичного состояния, а именно в первом члене главный вклад дает только состояние $|m\rangle = |\sigma\rangle$, а во втором члене только состояние $|m\rangle = |\pi\rangle$. Тогда

$$-\int d\mathbf{x} \langle \sigma(q) | [\theta^\mu_\mu(x), Q^A_a(0)] | \pi_b(p) \rangle =$$
$$= 2i(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \delta_{ab} (m^2_\sigma - m^2_\pi). \qquad (161)$$

При этом было использовано равенство (97). Из (161) и (158) находим

$$\frac{m^2_\pi f_\pi}{\sqrt{2}} (l_\phi - l_{J_0} + 1) \frac{1}{-(q-p)^2 + m^2_\pi} \langle \sigma(q) | \eta_a(0) | \pi_b(p) \rangle =$$
$$= 2\delta_{ab} (m^2_\sigma - m^2_\pi). \qquad (162)$$

Определим константу связи $G_{\sigma\pi\pi}$ при помощи уравнения

$$\langle \sigma(q) | \eta_a(0) | \pi_b(p) \rangle = \delta_{ab} G_{\sigma\pi\pi} K((q-p)^2), \qquad (163)$$

где K — некоторый форм-фактор с нормировкой

$$K(m^2_\pi) = 1. \qquad (164)$$

Отметим, что константа связи $G_{\sigma\pi\pi}$, определяемая через (163), совпадает с константой связи G, определяемой через эффективный лагранжиан $\sigma\pi\pi$-взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi} = G\sigma\pi\pi/2. \qquad (165)$$

При помощи (163) уравнение (162) перепишем в виде

$$\frac{m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}(l_\phi - l_{J_0}+1)\,G_{\sigma\pi\pi}\left.\frac{K((q-p)^2)}{-(q-p)^2-m_\pi^2}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}} = 2(m_\sigma^2 - m_\pi^2). \tag{166}$$

Устремим теперь $|\mathbf{p}|\to\infty$. Тогда из (166) получим

$$G_{\sigma\pi\pi} = \frac{2\sqrt{2}(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{(l_\phi - l_{J_0}+1)\,f_\pi K(0)}. \tag{167}$$

Естественно предположить, что форм-фактор $K(t)$ мало меняется при изменении t. Тогда можно положить

$$K(0)\approx K(m_r^2) = 1 \tag{168}$$

и получить окончательную формулу

$$G_{\sigma\pi\pi} = \frac{2\sqrt{2}(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{(l_\phi - l_{J_0}+1)\,f_\pi}. \tag{169}$$

При значениях размерностей l_{J_0} и l_ϕ, близких к каноническим, т. е. при $l_{J_0}\approx -3$, $l_\phi\approx -1$, для $m_\sigma \approx 700$ *Мэв*, $f_\pi \approx 0{,}96\ m_\pi$ уравнение (169) дает

$$g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi \approx 11, \tag{170}$$

где

$$g_{\sigma\pi\pi} \equiv G_{\sigma\pi\pi}/2m_\pi.$$

Как легко вычислить, ширина распада σ-мезона выражается через константу связи следующим образом:

$$\Gamma_\sigma \equiv \Gamma_{\sigma\to\pi^+\pi^-} + \Gamma_{\sigma\to\pi^0\pi^0} =$$
$$= \frac{3}{32\pi}\frac{1}{m_\sigma}\sqrt{1-\frac{4m_\pi^2}{m_\sigma^2}}\,G_{\sigma\pi\pi}^2, \tag{171}$$

Подставляя сюда экспериментальное значение $\Gamma_\sigma \approx 400$ *Мэв*, получаем

$$g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi \approx 10{,}4. \tag{172}$$

Таким образом, в рамках экспериментальной точности (170) и (172) хорошо согласуются друг с другом.

Равенством (153) вместе со значением $G_{\sigma\pi\pi}$, найденным выше, можно воспользоваться для оценки гравитационной константы связи σ-мезона, определяемой уравнением

$$\langle 0|\theta_{\mu\nu}(0)|\sigma(k)\rangle = \frac{1}{3}F_\sigma m_\sigma^2\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \tag{173}$$

Для этого предположим, что

$$\theta(t) \equiv \langle\pi(p)|\theta_\mu^\mu(0)|\pi(p')\rangle|_{p^2=p'^2=m_\pi^2} \equiv \theta(m_\pi^2,\ m_\pi^2;\ t)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием

$$\theta(t) = 2m_\pi^2 + \frac{t}{\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{\operatorname{Im}\theta(t')}{t'(t'-t-i\varepsilon)}. \tag{174}$$

Далее, пусть в выражении для $\operatorname{Im}\theta(t')$

$$\operatorname{Im}\theta(t') = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(p_n - p - p') \times$$
$$\times \langle 0 | \theta_\mu^\mu(0) | n\rangle \langle n | \eta_\pi(0) | \pi(p)\rangle; \qquad t' \equiv (p'+p)^2 \tag{175}$$

при малых значениях t' имеет место σ-доминантность. Тогда

$$\operatorname{Im}\theta(t') \approx \pi\delta(t' - m_\sigma^2)\, m_\sigma^2 F_\sigma G_{\sigma\pi\pi}, \tag{176}$$

получим из (6.21):

$$\theta(t) \approx 2m_\pi^2 + F_\sigma G_{\sigma\pi\pi} t/(m_\sigma^2 - t). \tag{177}$$

Отсюда следует

$$F_\sigma \approx \frac{m_\sigma^2}{G_{\sigma\pi\pi}} \frac{d\theta(0)}{dt} \approx \frac{m_\sigma^2}{G_{\sigma\pi\pi}} \approx 1{,}1 f_\pi \approx m_\pi. \tag{178}$$

7. О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ МАСШТАБНОЙ И КИРАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТЯМИ

При определенном предположении о поведении плотности гамильтониана под действием масштабного и кирального преобразований удается связать между собой следствия, вытекающие из масштабной и киральной инвариантностей. Примерами могут служить правила сумм для спектральных функций [32, 33].

Рассмотрим следующие пропагаторы для дивергенции аксиальных токов и для следа тензора энергии-импульса:

$$\Delta_a(p^2) \equiv \int d^4x \exp(ipx) \langle 0 | T\{\partial^\mu J_{\mu a}^A(x)\, \partial^\nu J_{\nu a}^A(0)\} | 0\rangle; \tag{179}$$

$$\Delta_\theta(p^2) \equiv \int d^4x \exp(ipx) \langle 0 | T\{\theta_\mu^\mu(x)\, \theta_\nu^\nu(0)\} | 0\rangle. \tag{180}$$

Соответствующие спектральные функции ρ определяются через них при помощи представления

$$\Delta(p^2) = i \int da^2 \rho(a^2)/(p^2 - a^2 + i\varepsilon). \tag{181}$$

При $p^2 = 0$ имеем

$$\Delta_a(0) = -\langle 0 | [Q_a^A(0),\ \partial^\nu J_{\nu a}^A(0)] | 0\rangle; \tag{182}$$

$$\Delta_\theta(0) = \langle 0 | [D(0),\ \theta_\nu^\nu(0)] | 0\rangle. \tag{183}$$

Правая часть (182) полностью определяется поведением гамильтониана при киральных преобразованиях, так как [35]

$$\partial^{\nu} J^{A}_{\nu a} = \mathrm{i}\,[\theta_{00},\ Q^{A}_{a}], \tag{184}$$

а правая часть (183) — размерностями l_n, фигурирующими в разложении

$$\theta_{00} = \sum_n \theta^{(n)}_{00}; \quad \theta^{\mu}_{\mu} = \sum_n (l_n + 4)\,\theta^{(n)}_{00}, \tag{185}$$

где $\theta^{(n)}_{00}$ — компонента с размерностью l_n.

Первоначальный вариант кирального гамильтониана ГМОР [35] исследовался во многих работах. Он имеет вид:

$$\theta_{00} = \tilde{\theta}_{00} + \theta'_{00}; \quad \theta'_{00} = -(u_0 + c u_8), \tag{186}$$

где $\tilde{\theta}_{00}$ инвариантно относительно киральных преобразований; u_0 и u_8 — скалярные компоненты представления $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ киральной группы, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&[Q_a,\ u_b] = \mathrm{i} f_{abc} u_c; \quad [Q_a,\ u_0] = 0;\\
&[Q^A_a,\ u_b] = -\mathrm{i} d_{abc} v_c - \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\delta_{ab} v_0;\\
&[Q^A_a,\ u_0] = -\mathrm{i}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,v_a;\\
&[Q_a,\ v_b] = \mathrm{i} f_{abc} v_c; \quad [Q_a,\ v_0] = 0;\\
&[Q^A_a,\ v_b] = \mathrm{i} d_{abc} u_c + \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\delta_{ab} u_0;\\
&[Q^A_a,\ v_0] = \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,u_a,
\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

где f_{abc} и d_{abc} — константы, фигурирующие в коммутаторах и антикоммутаторах матриц Гелл-Мана [34]:

$$[\lambda_a/2,\ \lambda_b/2] = \mathrm{i} f_{abc} \lambda_c/2;$$
$$\{\lambda_a/2,\ \lambda_b/2\} = d_{abc}\lambda_c/2 + \delta_{ab}/3.$$

В последнее время, однако, отмечаются некоторые трудности в модели (186), что обусловлено, в частности, отсутствием компоненты с изоспином 2 в так называемом σ-члене. В связи с этим стали рассматривать модели, которые прибавляют в θ'_{00} еще члены от других представлений. Среди них, по-видимому, более подходящей является модель [36, 37] с

$$\theta'_{00} = -(u_0 + c u_8 + g_8), \tag{188}$$

где g_8 — скалярная компонента представления $(1,8)+(8,1)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&[Q_a,\ g_b]=\mathrm{i}f_{abc}g_c;\ [Q_a,\ h_b]=\mathrm{i}f_{abc}h_c;\\&[Q_a^A,\ g_b]=\mathrm{i}f_{abc}h_c;\ [Q_a^A,\ h_b]=\mathrm{i}f_{abc}g_c,\end{aligned}\right\}\tag{189}$$

а также модель [38, 39] с

$$\theta'_{00}=-(u_0+cu_8+\varphi),\tag{190}$$

где

$$\varphi=\sum_{a=1}^{8}Z_{aa}-\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{3}Z_{ii}-4Z_{88}\tag{191}$$

ведет себя как член мультиплета 27 с $T=Y=0$ при $SU(3)$-преобразованиях, а Z_{ab} преобразуется по представлению (8,8) киральной группы, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&[Q_a,\ Z_{bc}]=\mathrm{i}\,(f_{abd}Z_{dc}+f_{acd}Z_{bd});\\&[Q_a^A,\ Z_{bc}]=\mathrm{i}\,(f_{abd}Z_{dc}-f_{acd}Z_{bd}).\end{aligned}\right\}\tag{192}$$

Рассмотрим случай, когда часть гамильтониана, нарушающая киральную симметрию, имеет вид (188). Вычисление по формулам (182), (184) и (187) дает

$$\Delta_\pi(0)=-\frac{\sqrt{2}+c}{3}\,\mathrm{i}\,\langle 0\,|\,u_0+\sqrt{2}\,u_8\,|\,0\rangle;\tag{193}$$

$$\Delta_K(0)=\frac{2\sqrt{2}-c}{12}\,\mathrm{i}\,\langle 0\,|-2\sqrt{2}\,u_0+u_8\,|\,0\rangle-\frac{3}{4}\,\mathrm{i}\,\langle 0\,|\,g_8\,|\,0\rangle.\tag{194}$$

Далее, пусть $\tilde{\theta}_{00}$ можно представить в виде суммы членов $\tilde{\theta}_{00}^{(n)}$ с размерностью l_n, а u и g также имеют определенную размерность l_u и l_g. Тогда из (183) и (185) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_\theta(0)=-\mathrm{i}\sum_n l_n(l_n+4)\,\langle 0\,|\,\tilde{\theta}_{00}^{(n)}\,|\,0\rangle+\mathrm{i}l_u(l_u+4)\,\langle 0\,|\,u_0+cu_8\,|\,0\rangle+\\+\mathrm{i}l_g(l_g+4)\,\langle 0\,|\,g_8\,|\,0\rangle.\end{aligned}\tag{195}$$

Используем также равенства

$$\langle 0\,|\,\theta_{00}\,|\,0\rangle=0=\langle 0\,|\,\theta_\mu^\mu\,|\,0\rangle,$$

вытекающие из требования лоренц-инвариантности вакуума.

Отметим, что среди $\tilde{\theta}_{00}^{(n)}$ должен существовать по крайней мере один член с отличным от нуля вакуумным средним, ибо, как нетрудно видеть, в противном случае следовало бы $\Delta_\theta(0)=0$. Интерес представляют следующие частные случаи, когда из (193) — (195) можно получить соотношение между $\Delta_\pi(0)$, $\Delta_k(0)$ и $\Delta_\theta(0)$ и, следовательно, правило сумм для спектральных функций ρ_π, ρ_k и ρ_θ:

а. Все l_n в (193) равны 4, т. е. $\widetilde{\theta}_{00}$ сохраняет одновременно и киральную, и масштабную инвариантность. Тогда имеем

$$(c+\sqrt{2})\,\Delta_\theta(0)=$$
$$=\frac{(l_n+4)(l_g+4)(l_g-l_n)}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-c)\,l_g+4(1+2\sqrt{2}c)-3(1-\sqrt{2}c)\,l_n}\times$$
$$\times[(2\sqrt{2}-c)(2\sqrt{2}c+1)\Delta_\pi(0)+4(\sqrt{2}+c)(1-\sqrt{2}c)\Delta_K^{(0)}]. \quad (196)$$

б. Среди $\widetilde{\theta}_{00}^{(n)}$ существует только один член, обозначаемый δ, с отличным от нуля вакуумным средним. Тогда имеем

$$(c+\sqrt{2})\,\Delta_\theta(0)=\frac{(l_n-l_\delta)(l_g-l_\delta)(l_g-l_n)}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-c)\,l_g-(1+2\sqrt{2}c)\,l_\delta-3(1-\sqrt{2}c)\,l_n}\times$$
$$\times[(2\sqrt{2}-c)(2\sqrt{2}c+1)\Delta_\pi(0)+4(\sqrt{2}+c)(1-\sqrt{2}c)\Delta_K(0)]. \quad (197)$$

Рассмотрим теперь случай, когда часть гамильтониана, нарушающая киральную симметрию, имеет вид (190). Вычисление по формулам (182), (184) и (192) дает:

$$\Delta_\pi(0)=-\frac{\sqrt{2}+c}{3}\,i\langle 0|\sqrt{2}u_0+u_8|0\rangle+4i\left\langle 0\left|\frac{2}{3}Z_{11}-Z_{44}\right|0\right\rangle; \quad (198)$$

$$\Delta_K(0)=\frac{2\sqrt{2}-c}{12}\,i\langle 0|-2\sqrt{2}u_0+u_8|0\rangle+$$
$$+i\langle 0|-Z_{11}+2Z_{44}+3Z_{88}|0\rangle. \quad (199)$$

При этом были учтены равенства

$$\langle Z_{11}\rangle_0=\langle Z_{22}\rangle_0=\langle Z_{33}\rangle_0; \quad (200)$$
$$\langle Z_{44}\rangle_0=\langle Z_{55}\rangle_0=\langle Z_{66}\rangle_0=\langle Z_{77}\rangle_0,\ \ldots, \quad (201)$$

вытекающие из свойства изотопической инвариантности вакуума. Вместо (195) теперь имеем

$$\Delta_\theta(0)=-i\sum_n l_n(l+4)\langle 0|\widetilde{\theta}_{00}^{(n)}|0\rangle+il_u(l_u+4)\langle 0|u_0+cu_8|0\rangle+$$
$$+il_z(l_z+4)\langle 0|\phi|0\rangle. \quad (202)$$

Для того чтобы из (198), (199) и (202) можно было получить соотношение между $\Delta_\pi(0)$, $\Delta_K(0)$ и $\Delta_\theta(0)$, сделаем одно предположение, состоящее в том, что при вычислении (198), (199) и (202) можно считать, что вакуум инвариантен относительно $SU(3)$-преобразований. Это равносильно тому, что в этих уравнениях пренебрегаем поправками за счет неинвариантности вакуума при $SU(3)$-преобразованиях по отношению к другим присутствующим членам. Тогда можно положить

$$\langle Z_{11}\rangle_0 \approx \langle Z_{44}\rangle_0 \approx \langle Z_{88}\rangle_0 \equiv Z;$$
$$\langle u_8\rangle_0 \approx 0$$

и переписать эти уравнения в виде:

$$\Delta_\pi(0) = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+c)}{3}\,\mathrm{i}\,\langle u_0\rangle_0 - \frac{4}{3}\mathrm{i}Z; \qquad (203)$$

$$\Delta_K(0) = -\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-c)}{6}\,\mathrm{i}\,\langle u_0\rangle_0 + 4\mathrm{i}Z; \qquad (204)$$

$$\Delta_\theta(0) = -\mathrm{i}\sum_n l_n(l_n+4)\langle\tilde{\theta}_{00}^{(n)}\rangle_0 + \mathrm{i}l_u(l_u+4)\langle u_0\rangle_0. \qquad (205)$$

По той же причине, о которой было сказано выше, среди $\tilde{\theta}_{00}^{(n)}$ должно существовать по крайней мере два члена с неисчезающим вакуумным средним, а также один член с размерностью $l \neq -4$, с отличным от нуля вакуумным средним.

Теперь правило сумм существует в следующих частных случаях:

в. Среди $\tilde{\theta}_{00}^{(n)}$ существует только один член, обозначаемый δ, с размерностью $l_\delta \neq -4$, т. е. имеет вид

$$\theta_{00} = \tilde{\tilde{\theta}}_{00} + \delta - (u_{00} + cu_8 + \varphi), \qquad (206)$$

где $\tilde{\tilde{\theta}}_{00}$ сохраняет одновременно и киральную и масштабную инвариантность, а δ сохраняет только киральную инвариантность. Тогда имеем

$$\Delta_\theta(0) = \frac{6}{16+5\sqrt{2}\,c}(l_\delta - l_u)(l_u+4)[3\Delta_\pi(0) + \Delta_K(0)]. \qquad (207)$$

г. Среди $\tilde{\theta}_{00}^{(n)}$ существует только два члена, обозначаемых δ_1 и δ_2, с неисчезающим вакуумным средним. Имеем

$$\Delta_\theta(0) = \frac{6}{16+5\sqrt{2}\,c}(l_{\delta_1} - l_u)(l_u - l_{\delta_2})[3\Delta_\pi(0) + \Delta_K(0)]. \qquad (208)$$

Наконец, перепишем полученные результаты (196), (197), (207) и (208) в приближении полной доминантности, т. е. при

$$\left.\begin{aligned} \rho_\theta(a^2) &\approx (F_\sigma m_\sigma^2)^2\,\delta(a^2 - m_\sigma^2); \\ \rho_\pi(a^2) &\approx (f_\pi m_\pi^2/\sqrt{2})^2\,\delta(a^2 - m_\pi^2); \\ \rho_K(a^2) &\approx (f_K m_K^2/\sqrt{2})^2\,\delta(a^2 - m_K^2), \end{aligned}\right\} \qquad (209)$$

где F_σ — гравитационная константа связи σ-мезона; $f_\pi\cos\theta$ и $f_K\sin\theta$ — константы распада π- и K-мезона; θ — угол Кабиббо.

Имеем соответственно:

$$(\sqrt{2}+c)\,F_\sigma^2 m_\sigma^2=\frac{(l_u+4)(l_g+4)(l_g-l_u)}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-c)\,l_g-(1+2\sqrt{2}\,c)\,l_\delta-3(1-\sqrt{2}\,c)\,l_u}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-c)(2\sqrt{2}c+1)\,f_\pi^2 m_\pi^2+\right.$$
$$\left.+2(\sqrt{2}+c)(1-\sqrt{2}c)\,f_K^2 m_K^2\right];\qquad(210)$$

$$(\sqrt{2}+c)\,F_\sigma^2 m_\sigma^2=\frac{(l_u-l_\delta)(l_g-l_\delta)(l_g-l_u)}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-c)\,l_g-(1+2\sqrt{2}\,c)\,l_\delta-3(1-\sqrt{2}\,c)\,l_u}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-c)(2\sqrt{2}c-1)\,f_\pi^2 m_\pi^2+2(\sqrt{2}+c)(1-\sqrt{2}c)\,f_K^2 m_K^2\right];\qquad(211)$$

$$(16+5\sqrt{2}\,c)\,F_\sigma^2 m_\sigma^2=3\,(l_\delta-l_u)(l_u+4)\,[3f_\pi^2 m_\pi^2+f_K^2 m_K^2];\qquad(212)$$

$$(16+5\sqrt{2}\,c)\,F_\sigma^2 m_\sigma^2=3\,(l_{\delta_1}-l_u)(l_u-l_{\delta_1})\,[3f_\pi^2 m_\pi^2+f_K^2 m_K^2].\qquad(213)$$

Эти результаты можно использовать для получения некоторых сведений о размерностях членов, входящих в θ_{00}, для той или иной рассматриваемой модели [33].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bjorken J. D.** «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1499.
2. **Gürsey F.** «Nuovo cimento», 1956, v. 3, p. 988.
3. **Wess J.** «Nuovo cimento», 1960, v. 18, p. 1086.
4. **Fulton T., Röhrlich F., Witten L.** «Revs. Mod. Phys.», 1962, v. 34, p. 442.
5. **Kastrup H. A.** «Phys. Rev.», 1964, v. 150, p. 1189.
6. **Castell L.** «Nuovo cimento», 1966, v. 46, p. 1.
7. **Barut A. O., Kleinert H.** «Phys. Rev.», 1967, v. 161, p. 1464.
8. **Mack G.** «Nucl. Phys. B», 1968, v. 5, p. 499.
9. **Марков М. А.** Препринт ОИЯИ Д2-1269. Дубна, 1963; Нейтрино. М., «Наука», 1964.
10. **Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.** «ЭЧАЯ», 1971, т. 2, с. 7.
11. **Балдин А. М.** Сообщения ОИЯИ Р7-5808. Дубна, 1971.
12. **Балдин А. М. и др.** Препринт ОИЯИ Р1-5819. Дубна, 1971.
13. **Mack G., Salam A.** «Ann. Phys.», 1969, v. 53, p. 174.
14. **Gross D. I., Wess J.** «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 753.
15. **Flato M., Simon I., Sterheimer D.** «Ann. Phys.», 1970, v. 61, p. 78.
16. **Ogievetsky V. I.** «Lett. Nuovo cimento», 1973, v. 8, p. 988.
17. **Борисов А. Б., Огиевецкий В. И.** Препринт ОИЯИ Е2-7864. Дубна, 1974.
18. **Поляков А. М.** «Письма в ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 538.
19. **Migdal A. A.** «Phys. Lett. B», 1971, v. 37, p. 98.
20. **Scheier E.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 980.
21. **Дао Вонг Дык.** «ТМФ», 1974, т. 20, с. 202.
22. **Mack G., Todorov I. T.** Trieste preprint IC-71-139, 1971.
23. **Тодоров И. Т.** Препринт ОИЯИ Е2-6642. Дубна, 1972.
24. **Mackey G. W.** «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 628.
25. **Дао Вонг Дык.** «ТМФ», 1974, т. 20, с. 71.
26. **Callan C. C., Coleman S., Jackiw R.** «Ann. Phys.», 1970, v. 59, p. 42.

27. **Дао Вонг Дык.** «ТМФ», 1972, т. 13, с. 75.
28. **Gell-Mann M.** Hawai Summer School Lectures, 1969.
29. **Дао Вонг Дык.** «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 424.
30. **Gross D. J., Jackiw R.** «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 269.
31. **Дао Вонг Дык.** «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 190.
32. **Kleinert H., Weisz P. H.** «Nuovo cimento», 1971, v. 3, p. 479.
33. **Дао Вонг Дык.** «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 1115.
34. **Gell-Mann M.** «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1067.
35. **Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B.** «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 2195.
36. **Mathur V. S., Rao J. S.** «Phys. Lett. B», 1970, v. 31, p. 383.
37. **Schilcher K.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 237.
38. **Brehm J. J.** «Nucl. Phys. B», 1971, v. 34, p. 269.
39. **Sirlin A., Weinstein M.** «Phys. Rev. D», 1972, v. 6, p. 3588.