

НОВЫЙ ПОДХОД В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Д. А. Киржица

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва

Г. Ю. Брючков

Институт физических исследований АН Арм.ССР, Ереван

Н. Ж. Такибаев

Институт физики высоких энергий АН Каз.ССР, Алма-Ата

Предлагается метод описания квантовой системы, основанный на законе ее эволюции с изменением не времени, как обычно, а константы связи. Применительно к задаче малого числа тел в ядерной физике низких энергий метод ведет к простым аналитическим выражениям для фаз рассеяния нейтронов на дейтоне, энергии связи тритона, вириальных коэффициентов. В задачах квантовой теории поля предлагаемый метод, будучи реализацией аксиоматической программы, ведет к особым решениям, не обладающим «ложным» полюсом (в квантовой электродинамике), неперенормируемыми расходимостями [в теории $(V - A)$ -взаимодействия] и т. п.

The special method for description of a quantum system is proposed. The method is based on an evolution law with respect not to the time as usually but to the value of the coupling constant. In a few-body problem this method leads to simple analytical expressions for phases of neutron-deuteron scattering, for binding energy of triton, for virial coefficients. In a quantum field theory the method gives the exceptional solutions providing the realization of the axiomatic program. In a quantum electrodynamics such a solution does not contain ghost pole, in a $(V - A)$ -theory this solution is renormalizable.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи и основные уравнения. Широкий круг задач теоретической ядерной физики сводится к решению следующего общего вопроса: как зависят характеристики сложной системы частиц или полей от параметров элементарного взаимодействия между ними. Роль элементарного взаимодействия играют при низких энергиях парные межнуклонные силы, при высоких энергиях — начальное взаимодействие между полями, задаваемое соответствующим лагранжианом.

Стандартные динамические схемы, в рамках которых обычно ищется ответ на поставленный вопрос (гамильтонов или лагранжев формализм, метод функционального интегрирования и т. д.),

базируются в конечном счете на законе временной эволюции

$$i \partial \Psi / \partial t = H \Psi; \quad \partial O / \partial t = i [H, O] \quad (1)$$

для волновой функции Ψ и оператора O . Здесь гамильтониан H выступает как оператор сдвига по времени.

Записывая гамильтониан системы в виде

$$H = H_0 + gV, \quad (2)$$

где H_0 — свободный гамильтониан; gV — гамильтониан взаимодействия; g — константа связи, и решая соответствующие динамические уравнения, мы и получаем возможность определить зависимость характеристик системы частиц или полей от параметров, входящих в гамильтониан взаимодействия gV . К их числу относится прежде всего константа связи g , которая либо появляется в гамильтониане сама собой (в случае кулоновского взаимодействия ее роль играет произведение зарядов взаимодействующих частиц), либо может быть введена формально, а после окончания выкладок принята равной единице.

При решении поставленного выше вопроса существует нетривиальная возможность полностью избежать проведения динамического этапа расчета, основанного на описании временной эволюции системы. Можно прямо поставить задачу описания эволюции системы с изменением не времени, а самой константы связи g : от значения $g = 0$, когда взаимодействие выключено и состояние системы известно, до реального значения g^* . Очевидно, что при этом получаем полное описание рассматриваемой системы.

Соответствующие эволюционные уравнения получаются в полной аналогии с (1) [1]:

$$i \partial \Psi / \partial g = \Gamma \Psi; \quad \partial O / \partial g = i [\Gamma, O], \quad (3)$$

где Γ — оператор сдвига по константе связи. Его легко найти, дифференцируя первые уравнения (1) и (3) соответственно по g и t и приравнявая результаты:

$$\frac{\partial \Gamma_{\Gamma}(t)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial g}, \quad \Gamma_{\Gamma}(t) = \int_{-\infty}^t dt' V_{\Gamma}(t'), \quad (4)$$

где индекс « Γ » отвечает представлению Гейзенберга. Остается найти уравнение для самого оператора Γ , или, что то же самое, для оператора V . Используя второе уравнение (3), получаем

$$\frac{dV_{\Gamma}(t)}{dg} = i \int_{-\infty}^t dt' [V_{\Gamma}(t'), V_{\Gamma}(t)]. \quad (5)$$

* Конечно, вместо константы связи можно взять любой другой параметр λ , характеризующий систему. Тогда вместо V в нижеследующие формулы будет входить величина $\partial H / \partial \lambda$.

Совокупность уравнений (3) — (5) и составляет полную систему уравнений, дающую описание произвольной квантовомеханической системы частиц или полей. Мы специально выделим важнейшую величину, характеризующую такую систему, — матрицу рассеяния (матрицу эволюции) $S(t) \equiv S(t, -\infty)$:

$$S(t) = T \exp \left[-ig \int_{-\infty}^t dt' V_{in}(t') \right],$$

действующую в пространстве «ин»-состояний (см., например, [2]). Ее дифференцирование по g с учетом соотношения $V_{\Gamma}(t) = S^+ T (V_{in}(t) S)$ дает

$$i \frac{dS(t)}{dg} = S(t) \Gamma(t) = S(t) \int_{-\infty}^t dt V_{\Gamma}(t). \quad (6)$$

Для «полной» матрицы рассеяния $S \equiv S(\infty)$ имеем

$$i \frac{dS}{dg} = S \int_{-\infty}^{\infty} dt V_{\Gamma}(t). \quad (7)$$

Особенности предлагаемого метода. Излагаемый в этой статье подход, в основе которого лежит описание эволюции с изменением константы связи (ЭКС-метод), хотя и способен заменить собой обычные динамические методы, но отнюдь им не равнозначен. ЭКС-методу присущ целый ряд особенностей, которые создают ему определенные преимущества по сравнению со стандартной методикой при решении многих проблем квантовой механики и квантовой теории поля.

Наиболее принципиальная особенность ЭКС-метода состоит в том, что соответствующие уравнения отвечают более общей, чем обычная, постановке квантовомеханической задачи. Уже много лет существует точка зрения, что известные трудности квантовой теории поля связаны с чересчур подробным и неадекватным измерительным возможностям релятивистской квантовой физики описанием процесса взаимодействия полей «от точки к точке». В соответствии с этой точкой зрения провозглашение единственно физически реальными лишь состояний системы до и после акта рассеяния, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$, должно привести к такому смягчению уравнений квантовой теории поля, что помимо (или вместо) обычных «плохих» решений появятся новые решения, свободные от трудностей. Хотя в последние годы ситуация в квантовой теории поля и существенно улучшилась, сама обсуждаемая проблема отнюдь не потеряла своего значения.

Удобно, следуя книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [3], ввести в выражение для действия $g \int d^4x L(x) = -g \int dt V_{\Gamma}(t)$

вместо константы связи g функцию «включения взаимодействия» $g(x)$, записывая его в виде $\int d^4x g(x) L(x)$; здесь $L(x)$ — плотность лагранжиана взаимодействия в представлении Гейзенберга, деленная на g . В обычной постановке задачи аксиомам квантовой теории поля (унитарность матрицы рассеяния $S\{g(x)\}$, причинность, инвариантность, принцип соответствия и т. п.) удовлетворяет матрица рассеяния при произвольной функции $g(x)$. В частности, выбор $g(x) = g\theta(t - x_0)$ соответствует матрице эволюции $S(t) \equiv S(t, -\infty)$, что отвечает обычной гамильтоновой постановке задачи.

Изложенная выше точка зрения (ее иногда называют аксиоматическим подходом) соответствует более мягким требованиям: аксиомам квантовой теории поля удовлетворяет лишь матрица рассеяния $S\{g(x)\}$ с функцией $g(x)$, бесконечно близкой к константе g . Вводя оператор

$$L(x) = -i(\delta S/\delta g(x)) S^+ \quad (8)$$

и подчиняя его условию причинности, находим

$$\delta L(x)/\delta g(y) = 0, \quad x \lessdot y,$$

а комбинируя последнее соотношение с вытекающей из условия унитарности $S^+S = 1$ формулой

$$\delta L(x)/\delta g(y) - \delta L(y)/\delta g(x) = i[L(y), L(x)],$$

получаем

$$i\delta L(x)/\delta g(y) = \theta(x - y)[L(x), L(y)]. \quad (9)$$

Разложение соотношений (8), (9) с учетом принципа соответствия в функциональный ряд по $g(x)$ ведет к аксиоматической теории возмущений, подробно рассмотренной в [3].

Если же устремить в (8), (9) функцию $g(x)$ к константе связи g , сделав замену

$$\left[\frac{\delta A}{\delta g(x)} = B(x) \right] \rightarrow \left[\frac{\partial A}{\partial g} = \int d^4x B(x) \right],$$

то вернемся к уравнениям (7), (5). Таким образом, ЭКС-метод представляет собой реализацию (притом весьма простую и эффективную) аксиоматической программы квантовой теории поля. Ниже мы действительно убедимся в том, что соответствующие уравнения применительно к квантовой электродинамике и $(V - A)$ -теории слабого взаимодействия имеют необычные решения, свободные от стандартных трудностей. Эти решения не могут быть получены в рамках обычного гамильтонова подхода, поскольку им отвечает неунитарная при $t \neq \infty$ матрица эволюции $S(t)$.

Другая особенность ЭКС-метода особенно полезна для моделей теории поля с нестандартным взаимодействием (нелокальная теория поля, теория с высшими производными, существенно нелинейные взаимодействия). В этих случаях обычное представление матрицы рассеяния в виде экспоненты, упорядоченной по времени, непригодно: либо сами понятия «раньше», «позже» теряют смысл, либо нарушается унитарность матрицы рассеяния, ее релятивистская инвариантность и т. д. Использование формулы (7) (ей отвечает матрица рассеяния в виде экспоненты, упорядоченной по константе связи) ликвидирует эти трудности, если, как это обычно и бывает, лагранжиан взаимодействия — gV_{Γ} эрмитов, релятивистски инвариантен и т. п. Не исключено, что такой подход мог бы оказаться полезным и в калибровочных теориях, где вопросы унитарности матрицы рассеяния также имеют определенную остроту и для их решения приходится вводить дополнительные нефизические частицы.

Еще одна особенность ЭКС-метода существенна для нерелятивистских задач ядерной физики низких энергий. В этом случае, как показывается ниже, решение уравнения (7) для матрицы рассеяния не вызывает трудностей и, например, для двухчастичного рассеяния элементарных или составных частиц это уравнение прямо определяет фазу рассеяния через матричный элемент оператора V . Основную сложность расчета составляет решение уравнения (5) для оператора V .

Существенно, что уже простейшие итерационные методы решения (5) оставляют оператор V на каждом этапе итераций эрмитовым и запаздывающим по времени. Это ведет к соблюдению важнейшего условия: на каждом этапе последовательных приближений матрица рассеяния остается унитарной (и причинной). А это свойство, которое нарушено в обычной теории возмущений, обеспечивает, в свою очередь, весьма быструю сходимость итерационного ряда. В рассматриваемых ниже простейших задачах теории трех тел убеждаемся в том, что уже низшая итерация достаточна.

Сказанное позволяет избежать громоздкого численного решения уравнений Фаддеева и получить решение целого ряда задач, относящихся к проблеме малого числа тел, в явной аналитической форме. Имеются в виду задачи рассеяния, определения энергии связанного состояния и вычисления высших вириальных коэффициентов. Не будем касаться здесь более частных особенностей и преимуществ ЭКС-метода. Их можно усмотреть из нижеследующего текста этой статьи.

Краткий исторический очерк. ЭКС-метод как самостоятельный квантовомеханический подход был сформулирован одним из авторов в 1965 г. [4]. Однако, начиная уже с самых первых лет существования квантовой механики, разными авторами предлагались соотношения более частного или вспомогательного характера,

которые имели дифференциальный по константе связи вид. В этом пункте мы сделаем краткий обзор соответствующих результатов.

Наиболее известное соотношение, носящее название формулы Гельмана — Фейнмана [5], дает выражение для производной по константе связи от энергии стационарного состояния E_n *

$$dE_n/dg = V_{nn}. \quad (10)$$

В действительности эта формула получена еще в 1926 г. Борном и Ферми при обосновании адиабатического принципа Эренфеста (см. изложение их работ в книге Паули [6]). Формула (10) и ее термодинамический аналог $dF/dg = \langle V \rangle$ (F — свободная энергия, скобки — символ термодинамического усреднения) находят применение при решении широкого круга задач квантовой механики и статистической физики.

К соотношениям того же характера можно отнести формулу Гелл-Мана — Лоу [8], определяющую сдвиг энергии основного состояния системы ΔE через среднее по этому состоянию значение матрицы рассеяния $\langle S \rangle$:

$$\Delta E = -(i\delta/2) d \ln \langle S \rangle / dg,$$

где δ — бесконечно малый параметр адиабатического включения взаимодействия.

Уравнения, определяющие производную по константе связи вектора состояния или матричного элемента оператора, изучались во многих работах, начиная с уже упомянутых работ Борна и Ферми [6, 9]. Однако эти уравнения использовались не с целью найти сам вектор состояния или матричный элемент, а для выяснения вопроса о том, как меняются указанные величины под влиянием различного рода воздействий.

К числу соотношений, получивших широкое распространение в последние годы, следует отнести дифференциальное уравнение ренормализационной группы — уравнение Каллана — Симанзика [10] (см. также [11]).

В большой группе работ исследовались дифференциальные по константе связи соотношения между функциями Грина (или же коэффициентными функциями в разложении матрицы рассеяния по нормальным произведениям операторов поля [12] разного порядка). Такие соотношения могут быть получены из приведенной выше формулы (7). Сюда относятся исследования группы Каяниелло [13] вопросов перенормировки в различных моделях квантовой теории поля, а также работы Д. Я. Петриной с сотрудниками по конструктивной теории поля [14]. Сюда же можно отнести исследования М. В. Терентьева [15] и одного из авторов

* Интересно отметить, что эта формула обобщается на случай периодического во времени внешнего воздействия: в левой ее части вместо E_n появляется квазиэнергия, в правой — усреднение по периоду внешнего воздействия [7].

[16], имеющие целью использовать рекуррентные соотношения между матричными элементами различной структуры для вывода дважды логарифмической и инфракрасной асимптотик различных амплитуд.

Особого упоминания заслуживают относящиеся к тому же направлению работы Шольна [17] (модель тормозного излучения при высоких энергиях) и В. М. Мальцева с сотрудниками [18] (S -матричная модель множественной генерации адронов), в которых развит новый метод анализа неупругих адронных соударений при наличии лидирующих частиц, уносящих значительную долю энергии — импульса. Отсюда можно сделать определенные заключения о механизмах множественной генерации частиц, о распределении по множественности и т. п.

В заключение кратко коснемся работ, в которых дифференциальным по константе связи соотношениям отводилась уже существенно более конструктивная роль, чем в перечисленных выше работах. Речь идет о приложениях к теориям (нелокальная теория поля, теория с высшими производными, существенно нелинейные теории), применительно к которым стандартный аппарат квантовой теории поля сталкивается с определенными трудностями. В работе [19] (см. также [20]) и в работах Шольна [21] уравнение типа (7) систематически использовалось для описания таких взаимодействий и привело к автоматическому выполнению условия унитарности матрицы рассеяния.

Конечно, в приведенном перечне работ, примыкающих к ЭКС-методу, следовало бы обязательно упомянуть об исследованиях по аксиоматической теории поля с использованием функции включения взаимодействия [3] (см. также работу Переса [22]).

План изложения. Излагаемый в обзоре материал распределяется следующим образом. Разд. 1 (статья состоит из четырех разделов) содержит общую формулировку ЭКС-метода применительно к нерелятивистским квантовомеханическим задачам и к квантовой теории поля.

В разд. 2 дана теория ЭКС-метода в применении к задачам малого числа тел в нерелятивистской квантовой механике и в квантовой теории поля. Подробно рассматривается задача рассеяния с широким использованием аппарата функции Йоста. В разд. 3 формулируется задача трех и более тел с приложениями к проблемам рассеяния на составной частице, вычисления энергии связанных трехчастичных состояний, вывода высших вириальных коэффициентов в термодинамике адронной среды и т. д.

Наконец, в разд. 4 приведено приложение ЭКС-метода к квантовой электродинамике. Так же как и в разд. 2, особое внимание уделено возможности получения новых решений ЭКС-уравнений, не содержащих стандартных трудностей.

В статье использована система единиц, в которой $\hbar = 1$; кроме того, принята равной единице в релятивистских задачах скорость света, а в нерелятивистских — масса элементарной частицы (нуклона).

1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ РАССЕЯНИЯ

Цель настоящего раздела заключается в систематическом и последовательном выводе основных соотношений ЭКС-метода применительно к задаче рассеяния; в нерелятивистской теории сюда же включается как составная часть и задача об определении связанных состояний. Рассматривается нерелятивистская задача рассеяния, важная для дальнейшего величина — матрица эволюции при конечном t — и квантово-полевой формализм рассеяния с включением процедуры перенормировки.

Изложенный во введении вывод основных уравнений (5) и (7) носил скорее наводящий характер и был существенно нестрогим и неполным. Это относится к вопросам о граничных условиях для $\Gamma(t)$ [см. (4)], о включении в схему связанных состояний (составных частиц), о квазилокальных членах в уравнении (9). В данном разделе содержится необходимое обоснование и уточнение уравнений (5) и (7), которые приводятся к виду, удобному для приложений.

Нерелятивистская задача рассеяния. В основу нашего рассмотрения [23] положим подход, который был намечен еще в упомянутых выше работах Борна и Ферми. Рассматривается произвольная нерелятивистская квантовомеханическая система, находящаяся в стационарных внешних условиях. В состав системы могут входить как элементарные частицы, так и составленные из них комплексы. Соответствующее уравнение Шредингера имеет вид [см. (2)]

$$(H - E_v) \Psi_v^\pm = 0. \quad (11)$$

Векторы состояния Ψ_v^\pm , составляющие полную систему, нормированную на единичный объем, для непрерывного спектра отвечают расходящимся и сходящимся волнам. Как известно, соответствующие ряды теории возмущений содержат добавки $\pm i\delta$ в правила обхода особенностей. В аналогичных выражениях для дискретного спектра, для которого векторы Ψ^\pm совпадают (стоячая волна), особенности понимаются в смысле главного значения. Для унификации формул и упрощения вида уравнений излагаемого метода удобно сделать замену

$$\Psi_v^\pm = \exp(\pm i E_v / \delta) |v\rangle_\pm.$$

Вводятся обозначения

$$\langle \Psi_\mu^+ | O | \Psi_\nu^+ \rangle = \exp[i(E_\nu - E_\mu)/\delta] O_{\mu\nu}; \quad O_{\mu\nu} \equiv \langle \mu | O | \nu \rangle_+$$

для матричного элемента произвольного оператора O и

$$\langle \Psi_{\mu}^{-} | \Psi_{\nu}^{+} \rangle = \exp [i (E_{\mu} + E_{\nu}) / \delta] S_{\mu\nu}; \quad S_{\mu\nu} \equiv -\langle \mu | \nu \rangle_{+}$$

для матрицы рассеяния для перехода из состояния μ в состояние ν [2]. Отметим, что последняя величина отлична от нуля лишь на изоэнергетической поверхности $E_{\mu} = E_{\nu}$: умножая (11) слева на $-\langle \mu |$, имеем $(E_{\mu} - E_{\nu}) S_{\mu\nu} = 0$.

Дифференцируем далее (11) по g :

$$(H - E_{\nu}) d\Psi_{\nu}^{+} / dg = (dE_{\nu} / dg - V) \Psi_{\nu}^{+}.$$

Умножение этого равенства слева на $\bar{\Psi}_{\nu}^{+}$ дает соотношение Гельмана — Фейнмана

$$dE_{\nu} / dg = V_{\nu\nu}. \tag{12}$$

Умножая (11) слева на $\bar{\Psi}_{\sigma}^{+}$ с произвольным σ , получаем уравнение для вектора состояния

$$d | \nu \rangle_{+} / dg = \sum_{\sigma} V_{\sigma\nu} | \sigma \rangle_{+} / (E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta). \tag{13}$$

Учитывая далее, что по определению матрицы рассеяния $-\langle \mu | = \sum_{\sigma} S_{\mu\sigma} + \langle \sigma |$, имеем

$$\frac{d-\langle \mu |}{dg} = \sum_{\sigma, \tau} S_{\mu\sigma} V_{\sigma\tau} + \langle \tau | / (E_{\mu} - E_{\tau} + i\delta). \tag{14}$$

С помощью (13) легко найти уравнение для матричного элемента любого не зависящего явно от g оператора O :

$$\frac{dO_{\mu\nu}}{dg} = \sum_{\sigma} [V_{\mu\sigma} O_{\sigma\nu} / (E_{\mu} - E_{\sigma} - i\delta) + O_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} / (E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta)].$$

В частности, для самого оператора V получается замкнутое уравнение

$$\frac{dV_{\mu\nu}}{dg} = \sum_{\sigma} V_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\sigma} - i\delta} + \frac{1}{E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta} \right). \tag{15}$$

Наконец, с помощью (13), (14) и приведенного выше определения матрицы рассеяния находим для нее уравнение

$$\frac{dS_{\mu\nu}}{dg} = -2\pi i \sum_{\sigma} S_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \delta(E_{\sigma} - E_{\nu}), \tag{16}$$

причем, как уже подчеркивалось, величины E_{μ} и E_{ν} равны.

Совокупность уравнений (12), (15), (16) дает полное описание процесса рассеяния и связанных состояний. Сюда же нужно добавить начальные условия по g , которые обсуждаются в следующем разделе. Важно отметить, что уравнения (15) и (16) в точности совпадают с полученными во введении уравнениями (5) и (7). Чтобы

в этом убедиться, достаточно перевести последнюю пару уравнений в энергетическое представление.

Описание процессов рассеяния во многих случаях удобнее вести на языке не матрицы рассеяния, а функции Йоста [24]. С целью ее введения будем считать в уравнении (16) энергию E_{ν} свободным параметром, могущим принимать любые, в том числе комплексные значения; соответственно сама матрица рассеяния станет функцией E . Определим теперь матрицы Йоста $F_{\pm}(E)$ соотношением

$$S_{\mu\nu} = \sum (F_{+}^{-1})_{\mu\sigma} (F_{-})_{\sigma\nu} \quad (17)$$

причем матрица F_{+} считается аналитической функцией E на первом (физическом) листе энергии и стремится к единице при $E \rightarrow \infty$ на большом круге.

Подставляя (17) в (16), где принято

$$-2\pi i \delta(E_{\sigma} - E) = 1/(E_{\sigma} - E + i\delta) - 1/(E_{\sigma} - E - i\delta),$$

отождествляя член с производной dF_{+}/dg со слагаемым, в которое входит $E + i\delta$ (см. указанное выше условие аналитичности F_{+}), и беря шпур, получаем

$$\frac{d}{dg} \text{Sp} \left(F_{\pm}^{-1} \frac{dF_{\pm}}{dg} \right) = - \sum_{\nu} \frac{V_{\nu\nu}}{E - E_{\nu} \pm i\delta}.$$

Наконец, используя известную формулу для производной детерминанта, получаем окончательное уравнение

$$\frac{d}{dg} \ln \det (F_{\pm}) = - \sum_{\nu} \frac{V_{\nu\nu}}{E - E_{\nu} \pm i\delta}. \quad (18)$$

Детерминант Йоста, определяемый этой формулой, может полностью заменить матрицу рассеяния при описании самого процесса рассеяния или связанных состояний. Существуют простые способы, особенно удобные для общего многоканального рассеяния, которые позволяют извлечь из многолистной функции $\det (F_{\pm}(E))$ соответствующую физическую информацию [24].

В заключение этого пункта приведем простую общую формулу для детерминантов Йоста:

$$\det F_{\pm}(E) = \prod_{\nu} (E - E_{\nu} \pm i\delta) / \prod_{\nu} (E - E_{\nu}^0 \pm i\delta). \quad (19)$$

Знаменатель в этом выражении, отвечающий невзаимодействующим частицам, обеспечивает правильную нормировку на единицу при $E \rightarrow \infty$. Для вывода (19) проще всего использовать (18) и (12). Дальше мы рассмотрим многочисленные следствия формулы (19), здесь же ограничимся приведением простого соотношения, позво-

ляющего выразить через детерминант Йоста сумму по уровням энергии:

$$\sum_{\nu} f(E_{\nu}) = \sum_{\nu} f(E_{\nu}^0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) \frac{d}{dE} \text{Arg det } F_{+}(E). \quad (20)$$

Для вывода (20) достаточно заметить, что

$$\sum_{\nu} [\delta(E - E_{\nu}) - \delta(E - E_{\nu}^0)] = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dE} \text{Im ln det } F_{+} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dE} \text{Arg det } F_{+}.$$

Суммы типа (20) встречаются, например, в квантовой статистике (статистическая сумма).

Матрица эволюции. Во введении уже упоминалось о том, что уравнения ЭКС-метода шире обычных динамических уравнений и при определенных условиях имеют дополнительные решения, для которых матрица эволюции $S(t)$ неунитарна при конечных значениях t . В настоящем разделе получены условия, при которых эта матрица перестает быть унитарной. Излагаемый здесь материал относится как к нерелятивистской механике, так и к квантовой теории поля.

Обратимся к уравнению (16), определяющему эволюцию матрицы рассеяния. Введем обобщенную амплитуду рассеяния $f_{\mu\nu}$, определенную на изоэнергетической поверхности $E_{\mu} = E_{\nu}$:

$$S_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + 2\pi i f_{\mu\nu} \delta(E_{\mu} - E_{\nu}). \quad (21)$$

Подстановка этого выражения в (16) дает уравнение для амплитуды рассеяния

$$\frac{df_{\mu\nu}}{dg} = -V_{\mu\nu} - 2\pi i \sum_{\sigma} f_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \delta(E_{\sigma} - E_{\nu}). \quad (22)$$

Мы используем это уравнение в следующем разделе.

Уравнение (16) следует из уравнения (7), переведенного в энергетическое представление. Аналогичное уравнение (6) для матрицы эволюции, записанное в матричной форме, имеет вид

$$\frac{dS_{\mu\nu}(t)}{dg} = -i \sum_{\sigma} S_{\mu\sigma}(t) \int_{-\infty}^t dt' V_{\sigma\nu}(t').$$

Вводя соответствующий аналог (21)

$$S_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} + \frac{\exp[i(E_{\mu} - E_{\nu})t]}{E_{\mu} - E_{\nu} - i\delta} F_{\mu\nu}, \quad (23)$$

где «амплитуда рассеяния» $F_{\mu\nu}$ на изоэнергетической поверхности совпадает с $f_{\mu\nu}$, получаем уравнение

$$\frac{dF_{\mu\nu}}{dg} = -V_{\mu\nu} - \sum_{\sigma} F_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\sigma} - i\delta} - \frac{1}{E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta} \right). \quad (24)$$

Запишем теперь условие унитарности матрицы эволюции $S^+(t) S(t) = 1$ и продифференцируем его по g . Тогда условие унитарности приобретает вид

$$S^+(t) \frac{dS(t)}{dg} = \left\{ S^+(t) \frac{dS(t)}{dg} S^+(t) \right\} S(t).$$

С учетом (6) ему можно придать вид «ассоциатора» *

$$\{V(t') \{S^+(t) S(t)\}\} - \{\{V(t') S^+(t)\} S(t)\} = 0,$$

откуда, используя (23), находим

$$(E_\mu - E_\nu) \left(\sum_\sigma \sum_\tau - \sum_\tau \sum_\sigma \right) \frac{F_{\mu\tau}^+ F_{\tau\sigma} V_{\sigma\nu} + V_{\mu\tau} F_{\tau\sigma}^+ F_{\sigma\nu}}{(E_\mu - E_\sigma - i\delta)(E_\sigma - E_\tau)(E_\tau - E_\nu - i\delta)} = 0. \quad (25)$$

Это условие автоматически выполняется для полной матрицы рассеяния $S = S(\infty)$ ввиду обязательного соблюдения равенства $E_\mu = E_\nu$. Однако при конечных t , когда закон сохранения энергии $E_\mu = E_\nu$ нарушен, условие (25) требует перестановки порядка суммирования по состояниям. Известно, что для этого необходима равномерная сходимость бесконечных сумм, что, в свою очередь, предполагает достаточно быстрое убывание с энергией выражения, стоящего под знаком суммы. Далее действительно убедимся в том, что уравнения ЭКС-метода имеют решения, которые убывают при высоких энергиях недостаточно быстро, чтобы обеспечить унитарность матрицы эволюции. Как оказывается, для таких решений фаза рассеяния растет с энергией, сечение рассеяния осциллирует, обращаясь бесконечное число раз в нуль, и т. п.

Если матрица эволюции действительно неунитарна, то ей можно поставить в соответствие неэрмитово при конечных t взаимодействие $V^{\text{эф}}$. Последнее проще всего определить из обычного уравнения для матрицы рассеяния:

$$i dS(t)/dt = gV^{\text{эф}}(t) S(t).$$

Используя (23), находим

$$gV_{\mu\nu}^{\text{эф}} = -F_{\mu\nu} - \sum_\sigma F_{\mu\sigma}^+ F_{\sigma\nu} / (E_\sigma - E_\mu + i\delta). \quad (26)$$

В следующем разделе на конкретных примерах будут проиллюстрированы полученные соотношения.

Задача рассеяния в квантовой теории поля. Переходим к формулировке задачи рассеяния в релятивистской теории, имея

* По аналогии с коммутатором мы называем ассоциатором величину $\{a \{bc\}\} - \{\{ab\} c\}$, где скобки определяют порядок действий.

в виду локальную перенормируемую теорию поля без дополнительных условий. Мы не будем рассматривать трудной проблемы составных частиц, хотя именно в рамках ЭКС-метода есть уверенность, что ее можно решить в основном так же, как в нерелятивистской теории. Составные частицы можно считать включенными в полную систему «ин»-состояний системы.

Уточним приведенные во введении соотношения. Что касается уравнения для матрицы рассеяния (8), то оно имеет стандартную форму (7). Это видно после перехода к производной по g :

$$\frac{dS}{dg} = iS \int d^4x L(x). \tag{27}$$

Сложнее обстоит дело с уравнением для самого лагранжиана [3, 4, 25]. С точки зрения проведения перенормировочной процедуры важно, что правая часть (9) содержит в самих совпадающих точках $x = y$ неопределенность, которую можно ликвидировать, добавляя к этой правой части квазилокальный (отличный от нуля лишь при $x = y$) член $\Lambda(x, y)$. Это не противоречит и аксиоматическим соображениям, поскольку квазилокальный член не нарушает условий причинности и унитарности. Для оператора Λ также нетрудно написать уравнение, подобное (9), в правой части которого возникнет новый квазилокальный член. Для него, в свою очередь, можно написать уравнение с новым квазилокальным членом и т. д. В результате в общем случае возникнет бесконечная цепочка уравнений с бесконечным числом квазилокальных членов.

Однако для перенормируемой теории типа квантовой электродинамики положение существенным образом упрощается. В этом случае число квазилокальных членов конечно и на единицу больше числа видов частиц (перенормировка масс частиц и константы связи). При этом перенормировка константы связи осуществляется квазилокальным членом, для которого величина $\int d^4y \Lambda(x, y)$, возникающая при переходе от (9) к дифференциальному по g уравнению, просто пропорциональна $L(x)$. Что же касается перенормировки масс частиц, то, нумеруя виды частиц индексом j , обозначим $\int d^4y \Lambda_j(x, y) = \Lambda_j(x)$. В итоге приходим к системе перенормированных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL(x)}{dg} &= i \int d^4y \theta(x-y) [L(x), L(y)] + \alpha L(x) + \sum_j \beta_j \Lambda_j(x); \\ \frac{d\Lambda_j(x)}{dg} &= i \int d^4y \theta(x-y) [\Lambda_j(x), L(y)], \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

где постоянные β_j определяются из условий стабильности одночастичных состояний $|1_j\rangle$ *

$$S |1_j\rangle = |1_j\rangle, \quad (29)$$

а постоянная α — условием перенормировки заряда (амплитуда рассеяния на пороге или вычет амплитуды в соответствующем полюсе должны принимать заданное, определяемое экспериментально значение).

К уравнениям (27), (28) нужно еще добавить граничные условия при $g = 0$:

$$S = 1; \quad L(x) = L_{in}(x); \quad \Lambda_j(x) = \Lambda_{j, in}(x). \quad (30)$$

Здесь L_{in} — заданный лагранжиан взаимодействия в «ин»-представлении, деленный на g (например, в квантовой электродинамике это $:\psi_{in}\hat{A}_{in}\psi_{in}:;$; $\Lambda_{j, in}$ — контрчлен перенормировки массы (для бозонов это $:\varphi_{j, in}^2$; для фермионов — $:\bar{\psi}_{j, in}\psi_{j, in}:)$.

Важно подчеркнуть [1], что нам не понадобилось вводить, как в обычном формализме, специального контрчлена для перенормировки волновой функции. Так как в ЭКС-методе излишнее введение функций Грина, вершинных частей и т. п., заряд здесь перенормируется как целое без выделения отдельных вкладов функции Грина, вершин и т. п.

Для подтверждения правильности структуры контрчленов в уравнении (28) и выяснения физического смысла величин α и β_j рассмотрим обычное выражение для матрицы рассеяния

$$S = T \exp \left[i \int d^4x \left(g_0(g) L_{in}(x) + \sum_j \delta M_j(g) \Lambda_{j, in}(x) \right) \right].$$

Здесь g_0 — затравочная, g — перенормированная константы связи; δM_j — сдвиги масс (для ферми-частиц) или квадратов масс (для бозе-частиц).

Формально дифференцируя приведенное выражение по g , легко убедиться в том, что оно полностью соответствует приведенным выше уравнениям (27) и (28), если принять

$$\left. \begin{aligned} L(x) &= g'_0 S^+ T (L_{in}(x) S) + \sum_j \delta M'_j S^+ T (\Lambda_{in}(x) S); \\ \alpha &= g''_0/g'_0; \quad \beta_j = \delta M''_j - \delta M'_j g''_0/g'_0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где штрих означает производную по g .

Как и в нерелятивистской задаче рассеяния, удобно перевести (27) и (28) в энергетическое представление, переходя к матричным элементам по системе «ин»-состояний, которые с самого начала

* Кроме того, конечно, должно быть выполнено условие устойчивости вакуума $S |0\rangle = |0\rangle$ [или $L_{00} = 0$, см. (35)].

считаются не зависящими от g . Используя трансляционную инвариантность, получаем

$$\langle \mu | L(x) | \nu \rangle = \exp [i(p_\mu - p_\nu)x] L_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\nu} = \langle \mu | L(0) | \nu \rangle$$

и аналогично для Λ_j . Кроме того, вводим релятивистскую амплитуду рассеяния f :

$$S_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + (2\pi)^4 i \delta(p_\mu - p_\nu) f_{\mu\nu}. \quad (32)$$

Это дает искомые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} df_{\mu\nu}/dg &= L_{\mu\nu} + (2\pi)^4 i \sum_{\sigma} f_{\mu\sigma} L_{\sigma\nu} \delta^4(p_\sigma - p_\nu); \\ dL_{\mu\nu}/dg &= - \sum_{\sigma} L_{\mu\sigma} L_{\sigma\nu} (A_{\mu\sigma}^- + A_{\nu\sigma}^+) + \alpha L_{\mu\nu} + \sum_j \beta_j \Lambda_{\mu\nu}^j; \\ d\Lambda_{\mu\nu}^j/dg &= - \sum_{\sigma} (\Lambda_{\mu\sigma}^j L_{\sigma\nu} A_{\mu\sigma}^- + L_{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma\nu}^j A_{\nu\sigma}^+), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где введено обозначение

$$A_{\mu\nu}^{\pm} = \delta^3(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu) / (E_\mu - E_\nu \pm i\delta).$$

Граничные условия имеют вид ($g = 0$)

$$f_{\mu\nu} = g L_{\mu\nu}^{\text{in}}; \quad L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{in}}; \quad \Lambda_{j, \mu\nu} = \Lambda_{j, \mu\nu}^{\text{in}}, \quad (34)$$

и условия устойчивости (29) могут быть записаны в форме

$$L_{1j, 1j} = 0. \quad (35)$$

2. ДВУХЧАСТИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ

В этом разделе рассматриваются приложения ЭКС-метода к задачам упругого рассеяния с участием двух частиц. Точнее говоря, в нерелятивистских задачах речь идет о рассеянии двух элементарных частиц при произвольных энергиях или же о рассеянии элементарной частицы на составной (или двух составных друг на друге) ниже порога развала составной частицы. В релятивистских задачах имеется в виду рассеяние с учетом не более двух частиц в промежуточных состояниях, что отвечает первому этапу разложения по числу промежуточных частиц. Уже в таком простейшем приближении возникает целый ряд нетривиальных и поучительных результатов.

Рассмотрение ведется в с. ц. м. сталкивающихся частиц с использованием в качестве аргумента как энергии E в этой системе, так и соответствующего импульса. При рассеянии с участием составных частиц под E следует понимать кинетическую энергию. Именно эта величина, как и импульс k , не зависит от константы связи g . Предполагая выполненным разложение по шаровым

функциям, будем приводить лишь соотношения для соответствующих сферических гармоник, опуская индекс l .

Рассеяние двух нерелятивистских частиц. В рассматриваемом случае $k = (2m^*E)^{1/2}$, плотность уровней $\rho = d^3k/dE = m^*k/2\pi^2$, где m^* — приведенная масса сталкивающихся частиц. Считая их для простоты бесспиновыми, используем для амплитуды рассеяния в (21) известное выражение через фазу рассеяния δ

$$f = [\exp(2i\delta) - 1]/2ik. \quad (36)$$

Переход к сферическим гармоникам ведет к диагонализации матрицы и амплитуды рассеяния, матриц Йоста и т. п. Это позволяет решить уравнение (22) и с учетом (36) получить важное соотношение

$$d\delta/dg = -\pi\rho V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad k = k', \quad (37)$$

где подразумевается сферическая гармоника по углу между \mathbf{k} и \mathbf{k}' . В совокупности с (12) это соотношение показывает, что диагональные по энергии матричные элементы потенциала взаимодействия V имеют прямой физический смысл, определяя производную по константе связи энергии уровня (в дискретном) или фазы рассеяния (в непрерывном спектре). Сразу же, пользуясь (12), (37), укажем полезное правило сумм

$$\sum_n E_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dE (\delta - \delta^B), \quad (38)$$

где E_n — энергия связанного состояния с данным l ; индекс B отвечает борновскому приближению. Вывод (38) основан на очевидном равенстве $d \operatorname{Sp} (V)/dg = 0$, где шпур берется по состояниям с данным значением l . Правило сумм (38) было получено недавно Паффом [26] существенно более сложным способом (см. также более ранние работы [27]) *.

Упомянутая выше диагонализация матриц Йоста позволяет решить и уравнение (18). Обозначая функцию Йоста F_+ через u , получаем для нее известное выражение [24]

$$u = \prod_n \left(1 - \frac{E_n}{E}\right) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE' \delta(E')}{E - E' + i\delta} \right\}. \quad (39)$$

Представление (19), которое относится ко всем (дискретным и непрерывным) уровням с данным l , можно использовать для простого выражения фазы рассеяния через число уровней

$$\Delta N(E) = \sum_v [\theta(E - E_v) - \theta(E - E_v^0)],$$

* Можно вывести и правила сумм, содержащие отрицательные степени энергии (применительно к задаче двух тел — см. [28], трех тел — см. [29]).

пересекших энергию E в процессе включения взаимодействия

$$\delta(E) = -\text{Im} \ln u = -\pi \Delta N(E). \quad (40)$$

Отсюда прямо следует известная теорема Левинсона [30]

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \pi N, \quad (41)$$

где N — число связанных состояний, поскольку изменение полного числа уровней в силу теоремы полноты равно нулю. Соотношение (40) связано с формулой следов (см., например, [31]) *.

В некоторых случаях (например, для рассматриваемого ниже точечного взаимодействия) интеграл по энергии в (39) расходится. Для устранения этой трудности удобно ввести перенормированную функцию Йоста u , нормированную на единицу при $E = 0$:

$$\tilde{u} = \prod_n \left(1 - \frac{E}{E_n}\right) \exp \left\{ \frac{E}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE' \delta(E')}{E'(E - E' + i\delta)} \right\}. \quad (42)$$

Легко показать, что такой переход находится в полном соответствии с общей процедурой перенормировки, изложенной ранее.

Сепарабельное взаимодействие. Используя представление (19) для функции Йоста и формулу (12), легко получить для этой функции следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dg^2} = Au;$$

$$A = \sum_{\mu\nu} (V_{\mu\mu} V_{\nu\nu} - |V_{\mu\nu}|^2) / (E - E_\mu + i\delta)(E - E_\nu + i\delta). \quad (43)$$

Отсюда видно, что для взаимодействия $V_{\mu\nu}$, которое представляется в виде произведения двух множителей, зависящих соответственно от μ и ν , $A = 0$ и функция Йоста линейна по константе связи. Учитывая условие $u = 1$ при $g = 0$ и (40), находим

$$u = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE' \delta^B(E')}{E - E' + i\delta}, \quad (44)$$

где, согласно (37), $\delta^B = -\pi g \rho V_{kk}^0$; V^0 — потенциал V при $g = 0$.

Взаимодействие, обладающее указанным выше свойством и приводящее к уравнению (44), называется сепарабельным (расщепленным). Важнейший пример такого взаимодействия — потенциал

* Соотношение (40) нельзя понимать буквально, иначе фаза всегда была бы кратна π . На самом деле должно подразумеваться усреднение (сглаживание) по E по интервалу, большему расстояния между уровнями. Это связано с тем, что в процессе рассеяния размер коллиматора мал по сравнению с размером самой системы, т. е. расстояние между уровнями мало по сравнению с разбросом энергии в падающем волновом пакете.

Ямагучи [32], который с успехом применяется в ядерной физике низких энергий и будет использован в дальнейших расчетах. Для этого потенциала величина $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ имеет расщепленный вид

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^0 = -4\pi\gamma^3 / [(k^2 + \gamma^2)(k'^2 + \gamma^2)], \quad (45)$$

где $\gamma = 1,44$ ферми⁻¹ — обратный радиус действия сил. Соответственно фаза рассеяния в приближении Борна

$$\delta^B = gk\gamma^4 / (k^2 + \gamma^2)^2$$

и отлична от нуля только в s -состоянии. Из уравнения (45) легко показать, что расщепленность $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ следует из расщепленности $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ [ср. ниже с (48)].

Потенциал (45) описывает взаимодействие протона и нейтрона в триплетном по спину состоянии. Соответствующая функция Йоста имеет вид [см. (3.8)]

$$u = 1 - g\gamma^2 / (\gamma - ik)^2.$$

Отсюда легко найти выражение для энергии связанного состояния (дейтона), определяя нуль функции Йоста [см. (3.4)]:

$$E_0 \equiv -\kappa^2 = -\gamma^2 (g^{1/2} - 1)^2, \quad (46)$$

где $\kappa = 0,23$ ферми⁻¹ — обратная величина длины рассеяния. Безразмерная константа связи g в (45) нормирована таким образом, что $g = 1$ отвечает порог образования дейтона.

Остается найти характеристики рассеяния. Используя (40), получаем

$$\operatorname{tg} \delta = 2kg\gamma^3 / [(k^2 + \gamma^2)^2 - g\gamma^2(\gamma^2 - k^2)],$$

откуда с учетом теоремы Левинсона (41)

$$\delta = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{\kappa} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{2\gamma + \kappa} \right) - 2\operatorname{arctg} (k/\gamma). \quad (47)$$

Приведем еще выражение для производной:

$$d\delta/dg = 2k\gamma^3 / (k^2 + \kappa^2)(k^2 + (2\gamma + \kappa)^2),$$

через которую выражается точный матричный элемент потенциала

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -4\pi \left(\frac{d\delta(k)}{k dg} \frac{d\delta(k')}{k' dg} \right)^{1/2} \exp [i(\delta(k) - \delta(k'))]. \quad (48)$$

Устремляя в приведенных выше формулах γ к бесконечности, переходим к пределу точечного взаимодействия. В этом пределе $g \rightarrow 1$ и мы должны считать фиксированной величину κ , определяемую формулой (46). Для точечного взаимодействия необходимо перейти к перенормированной функции Йоста, которая имеет вид

$$\tilde{u} = 1 - ik/\kappa.$$

Фаза рассеяния теперь определяется формулой

$$\delta = \pi - \operatorname{arctg} (k/\kappa). \quad (49)$$

Рассеяние двух релятивистских частиц. Переходя к релятивистской задаче двухчастичного рассеяния [33], мы сталкиваемся с целым рядом осложняющих обстоятельств. Наиболее принципиальное из них состоит в том, что теперь число частиц в промежуточных состояниях ничем не ограничено и тем самым задача по существу с самого начала выходит за рамки задачи двух тел. Как уже говорилось, эту трудность можно обойти, отбирая только те диаграммы рассеяния, которые содержат не более двух частиц в промежуточных состояниях.

Точнее говоря, этот отбор должен иметь релятивистский характер, т. е. нужно учитывать оба типа движения частицы — вперед

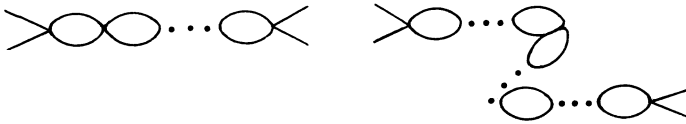


Рис. 1

и назад по времени (см. диаграммы рис. 1, относящегося к рассматриваемому ниже 4-фермионному взаимодействию). Это означает, что в соответствующих формулах функция Грина $(E - E_\mu \pm i\delta)^{-1}$ заменяется выражением

$$(E - E_\mu \pm i\delta)^{-1} + (E + E_\mu)^{-1} = 2E / (E^2 - E_\mu^2 \pm i\delta),$$

а интеграл по энергии

$$\int dE' (E - E' \pm i\delta)^{-1} (\dots) \rightarrow \int ds' (s - s' \pm i\delta)^{-1} (\dots),$$

где $s = E^2$ — переменная Манделстама.

Именно здесь ясно виден приближенный характер рассмотренного, основанного на отборе диаграмм рис. 1. Вместо кросс-симметричных выражений, зависящих от всех переменных Манделстама, мы имеем дело с зависимостью только от переменной s . В следующих приближениях, учитывающих большее число промежуточных частиц, появляется зависимость и от второй переменной Манделстама.

Ограничимся рассмотрением релятивистской задачи рассеяния, отвечающей 4-фермионному взаимодействию:

$$L_{\text{in}} = : (\bar{\psi}_{\text{in}} O \psi_{\text{in}}) (\bar{\psi}_{\text{in}} O \psi_{\text{in}}) :$$

Здесь матрицы O равны либо 1 (скалярный вариант), либо γ_5 (псевдоскалярный вариант), либо $\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) / \sqrt{2}$ [($V - A$)-взаимодействие]. В рассматриваемом приближении отсутствует перенормировка масс частиц и это позволяет положить в (33) $\Lambda = 0$.

Для перечисленных взаимодействий выполняется важное соотношение [33]

$$\sum_{\sigma}^{\prime} L_{\mu\sigma}^{\text{in}}(0) L_{\sigma\nu}^{\text{in}}(0) = \rho(s_{\sigma}) L_{\mu\nu}^{\text{in}}(0), \quad (50)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по всем переменным, кроме энергии. Входящая в (50) функция ρ является релятивистским обобщением плотности уровней, обозначенной выше той же буквой *:

$$\rho(s) = \sum_{\nu}^{\prime} L_{\nu\nu}^{\text{in}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{q_1, q_2} \delta^4(q_1 + q_2 - p) \text{Sp} [O(\hat{q}_1 \pm m_1) O(\hat{q}_2 \pm m_2)], \quad (51)$$

где $s = p^2$; $m_{1,2}$ — массы частиц в промежуточном состоянии; $\delta^4(p) = (2\pi)^4 \delta(p)$. В частности, для $(V - A)$ -взаимодействия при $s \gg m^2$ имеем $\rho(s) = -s/4 \sqrt{2} \pi^2$.

Формула (50) показывает прежде всего, что спинорная и векторная структуры L_{in} воспроизводятся при переходе к квадратичным, кубичным и т. п. комбинациям этой величины, что позволяет сразу же отделить соответствующую структуру, полагая

$$f_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{in}} \varphi(s); \quad L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{in}} \lambda(s_{\mu}, s_{\nu}), \quad (52)$$

и иметь далее дело лишь со скалярными величинами. Подстановка (52) в уравнение (33) дает представление амплитуды через фазы рассеяния

$$\varphi(s) = [\exp(2i\delta(s)) - 1]/2\pi i \rho(s) \quad (53)$$

и связь лагранжиана с фазой

$$d\delta(s)/dg = \pi \rho(s) \lambda(s, s). \quad (54)$$

Очевидна тесная аналогия с нерелятивистским случаем, все отличие от которого состоит в переходе к аргументу s и в ином выражении для функции $\rho(s)$.

Другое важное следствие, вытекающее из (50), состоит в возможности считать рассматриваемые взаимодействия сепарабельными. Нетрудно показать, используя (50), (52) и (33), что $\lambda(s, s')$ в (52) действительно распадается на произведение двух сомножителей, зависящих соответственно от s и s' . Этот факт не очень удивителен, так как 4-фермионное локальное взаимодействие представляет собой релятивистское обобщение сепарабельного точечного взаимодействия.

* Знаки \pm в (51) отвечают частице (античастице) в промежуточном состоянии.

Сказанное позволяет ожидать, что отвечающая (53) релятивистская функция Йоста *

$$u(s) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \delta(s')}{s-s'+i\delta} \right\}, \quad s_0 = (m_1 + m_2)^2$$

будет, как и в нерелятивистской теории, линейной функцией константы связи. В этом действительно легко убедиться, учитывая (54), (33). Вводя борновскую фазу $\delta^B = \pi g \rho(s)$, получаем

$$u = 1 + g \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \rho(s')}{s-s'+i\delta}.$$

Удобнее перейти к перенормированной функции Йоста, нормируя ее на порог s_0 (это значит, что перенормированный заряд определяется значением амплитуды рассеяния на пороге [1]):

$$\tilde{u} = 1 + g(s-s_0) \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \rho(s')}{(s-s'+i\delta)(s'-s_0)}. \quad (55)$$

Отсюда, в частности, следует выражение для фазы рассеяния

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u} = \pi g \rho(s) \left[1 + g(s-s_0) \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \rho(s')}{(s-s')(s'-s_0)} \right]^{-1}. \quad (56)$$

Интегралы, входящие в две последние формулы, для $(V - A)$ -взаимодействия расходятся. Это — проявление неперенормируемости такого взаимодействия.

Важно заметить, что (55) не всегда является решением исходных уравнений (33). Из последнего можно получить уравнение непосредственно для фазы рассеяния [33, 34]:

$$\delta''(s)/\delta'(s) = \frac{2}{\pi} (s-s_0) \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \delta'(s')}{(s'-s_0)(s'-s)}.$$

Отсюда следует, что функция Йоста не должна иметь ни особенностей, ни нулей (в отсутствие связанных состояний) вне разреза. Между тем выражение (55) при $\delta^B < 0$, как и совпадающий с ним результат обычной теории возмущений, может иметь нуль при $s < 0$ («ложный» полюс, см. ниже разд. 3). Такие «лишние» решения уравнения для функции Йоста, возникающие из-за дополнительного дифференцирования исходных уравнений по константе связи и противоречащие первоначальной системе аксиом, должны быть отброшены. Существенно (как будет показано ниже), что помимо этих решений в соответствующих случаях возникают особые решения, не содержащие подобных трудностей.

* Связанные состояния считаются отсутствующими [см. (67)].

Особое решение. Как уже говорилось во введении, уравнения ЭКС-метода отвечают менее жесткой постановке задачи по сравнению с обычным подходом, и потому можно ожидать появления у них особых решений, не возникающих в рамках стандартной методики. Это действительно можно подтвердить, причем особое решение во многих случаях свободно от тех трудностей, которые присущи обычным решениям.

Мы начнем рассмотрение с нерелятивистской задачи рассеяния, исходя из сепарабельного потенциала взаимодействия, для которого A в (43) равна нулю. Повторим вывод (43), не предполагая, что выражение под знаком суммы достаточно быстро убывает, и поэтому можно менять порядок суммирования. Несложные выкладки дают

$$d^2u/dg^2 = \left(\sum_{\mu} \sum_{\nu} - \sum_{\nu} \sum_{\mu} \right) V_{\mu\nu} V_{\nu\nu} / (E_{\nu} - E_{\mu}) (E - E_{\nu} + i\delta). \quad (57)$$

Сразу же переходя к перенормированной функции Йоста (что соответствует вычитанию из правой части последнего равенства ее значения при $E = 0$), вводя фазу рассеяния с помощью (37) и предполагая, что асимптотика фазы при больших импульсах имеет вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (d\delta(k)/dg)/k = C(g), \quad (58)$$

окончательно получаем уравнение

$$d^2\tilde{u}/dg^2 + C^2 k^2 \tilde{u} = 0. \quad (59)$$

Это в действительности сложное уравнение, поскольку его коэффициент самосогласован с асимптотикой его решения [см. (40)].

Уравнение (59) имеет формальное решение, отвечающее $C = 0$. Именно его мы и исследовали ранее. Здесь будет показано, что $C \neq 0$ отвечает неунитарной матрице эволюции и по этой причине рассмотренные выше решения с $C = 0$ соответствуют обычной гамильтоновой постановке задачи. Что же касается решений с $C \neq 0$, которые будут рассмотрены ниже, то они отвечают аксиоматической постановке задачи, о которой говорилось во введении.

Наметим прежде всего ход доказательства того факта, что сумма, стоящая в условии (25) и пропорциональная $d[S^+(t)S(t)]/dg$, действительно исчезает вместе с C^2 (см. подробное доказательство в [35]). Дело сводится к подстановке в указанную сумму представления (48) и решения уравнения для амплитуды (24), которое для сепарабельного взаимодействия имеет вид

$$F_{kk'} = \left(\frac{d\delta(k)}{dg} / \frac{d\delta(k')}{dg} \right)^{1/2} \frac{\exp[i\delta(k)] \sin \delta(k)}{\sqrt{kk'}}.$$

Легко убедиться в том, что обсуждаемая сумма сводится к сумме, стоящей в правой части (57). Завершая обсуждение этого вопроса, приведем выражение для эффективного гамильтониана, отвечающего особому решению (13) [см. (26)]:

$$V_{\text{кк}}^{\text{эф}} \sim \left(\frac{k}{k'} \frac{d\delta^{\text{B}}(k')}{dg} / \frac{d\delta(k)}{dg} \right)^{1/2} \frac{\sin \delta(k)}{k}.$$

Это выражение действительно неэрмитово, но становится самосопряженным при $C = 0$.

Отметим, что особому решению отвечает сечение, осциллирующее с ростом энергии и обращающееся в нуль бесконечное число раз. Это видно непосредственно из (58):

$$\sigma \sim \sin^2 \delta(k) \sim \sin^2 \left(k \int_0^g dg C(g) \right). \quad (60)$$

Все приведенные соотношения легко обобщаются на случай релятивистского рассеяния в приближении, которое рассматривалось в предыдущем пункте. Мы сразу же приведем соотношения, соответствующие (58), (59):

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dg^2} + (s - s_0) C^2 u = 0; \quad C = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d\delta(s)}{dg} / \sqrt{s}. \quad (61)$$

Примеры особых решений. Переходим к конкретным приложениям уравнения (59). Далее укажем общий способ определения величины C , основанный на решении обратной задачи рассеяния. Здесь же ограничимся случаями, когда вид этой величины можно угадать из простых размерных соображений.

Будем рассматривать автомодельную ситуацию, когда в теории имеется лишь один безразмерный параметр $\xi = gk^{2n}$, $n > 0$. Соответственно борновскую фазу можно записать в виде $\delta^{\text{B}} = A\xi$, причем число A для определенности считается положительным. В этом случае из размерных соображений

$$C(g) = \sigma g^{1/2n-1},$$

где σ — новая числовая постоянная. Уравнение (59) примет вид

$$\partial^2 \tilde{u} / \partial \xi^2 + \sigma^2 \xi^{1/n-2} \tilde{u} = 0,$$

а его решение

$$u(\xi) = \frac{i \operatorname{sign}(g) \pi}{\Gamma(n)} \left(\frac{\chi}{2} \right)^n H_n^{(i)}(\chi), \quad (62)$$

где $i = 1$ при $g < 0$; $i = 2$ при $g > 0$;

$$\chi = 2 \left[\frac{An\Gamma^2(n)}{\pi} |\xi| \right]^{1/2n}; \quad \sigma = \frac{\operatorname{sign}(g)}{n} \left(\frac{An\Gamma^2(n)}{\pi} \right)^{1/2n}.$$

При выводе (62) использованы граничные условия $u = 1$ при $g = 0$ и вытекающее из (59) асимптотическое условие при $k \rightarrow \infty$:

$$\tilde{u} \approx (\delta(k)/kC)^{1/2} \exp \left(-ik \int_0^g dgC(g) \right).$$

Приведем также выражение для фазы рассеяния

$$\text{tg } \delta = -\text{sign}(g) J_n(\chi)/N_n(\chi), \quad (63)$$

Здесь $H_n^{(i)}$, J_n , N_n — функции Бесселя.

Отсылая к оригинальным работам [33—35] за обсуждением вопроса о «лишних» решениях, перейдем к конкретным примерам.

Начнем со случая $n = 1/2$, который отвечает точечному взаимодействию, причем удобно в качестве константы связи выбрать величину $1/\kappa$ (длину рассеяния)*. При этом

$$\tilde{u} = \exp(-ik/\kappa),$$

а фаза равна k/κ . Можно показать, что для рассматриваемой модели этим и обычным решением [см. (49)] исчерпываются все решения ЭКС-уравнений [4].

Следующий пример отвечает $n = 3/2$; это нерелятивистский аналог неперенормируемой теории с $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^0 \sim (\mathbf{k}\mathbf{k}')$ (взаимодействие в p -состоянии). Обычное решение для данной модели содержит расходящиеся интегралы. Полагая $\delta^B = gk^3$ имеем для фазы рассеяния

$$\delta = (3g)^{1/3}k - \text{arctg}[(3g)^{1/3}k].$$

Это первый встретившийся нам пример, когда переход к аксиоматической постановке задачи был вознагражден появлением «хорошего» (в данном случае перенормируемого) решения.

В заключение рассмотрим более реальный (хотя и потерявший свое прямое значение после создания единой теории Вайнберга — Салама) пример электрон-нейтринного рассеяния в рамках теории $(V - A)$ -взаимодействия [33, 35]. В асимптотической области $s \gg m^2$; m — масса электрона; ситуация становится автотомельной с $n = 2$, отвечая $\delta^B = Gs/2 \sqrt{2}\pi$; G — константа Ферми [ср. (59) и (61)]. Приведем выражения для фазы

$$\text{tg } \delta = J_2(\chi)/N_2(\chi); \quad \chi = 2(Gs/\sqrt{2}\pi)^{1/4}$$

и сечения рассеяния

$$\sigma_{ev} = (8\pi/s) J_2^2(\chi)/[J_2^2(\chi) + N_2^2(\chi)].$$

При малых энергиях последнее совпадает со своим борновским выражением, а при больших энергиях, как это уже отмечалось

* Отметим, что для неточечных, «сглаженных» взаимодействий, убывающих с ростом энергии, особые решения вообще отсутствуют [33].

выше, испытывает осцилляции. И здесь мы получили конечный ответ для характеристик рассеяния в модели, для которой обычный метод дает расходящийся результат.

Отметим, что в последних двух случаях ответ неаналитичен по константе связи в точке $g = 0$, что делает безнадежной попытку получить его по теории возмущений.

3. ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ

Излагаемый здесь метод можно эффективно применить и к нерелятивистской проблеме малого числа (трех и более) тел для описания многочастичных столкновений и многочастичных связанных состояний. Обычно применяемый подход, основанный на уравнениях Фаддеева [36—38], сталкивается с необходимостью проведения громоздкого численного расчета. Попытки использовать для грубых полуколичественных оценок первые итерации этих уравнений (первые борновские члены) не приводят к успеху из-за сильного нарушения унитарности и расходимости борновского ряда. Последнее обстоятельство породило стремление подойти к решению проблемы, базируясь не на динамических уравнениях, а непосредственно на условиях причинности (аналитичности) и унитарности матрицы рассеяния [39]. В этом смысле ЭКС-метод носит промежуточный характер: обладая достоинствами динамического подхода (прежде всего однозначностью), он гарантирует выполнение условий причинности и унитарности на каждом этапе последовательных приближений. Неудивительно, что ряд последовательных приближений в рамках ЭКС-метода быстро сходится и ведет к несложным аналитическим выражениям для интересующих нас величин.

Выделение несвязных диаграмм. Если число частиц в системе превышает два (число частиц, прямо связанных парным взаимодействием), то процессу их рассеяния отвечают не только связанные диаграммы, когда во взаимодействие вовлечены все частицы, но и несвязные диаграммы, отвечающие свободному пролету одной или более частиц. С несвязными диаграммами была связана одна из трудностей теории рассеяния малого числа тел, преодоленная в уравнениях Фаддеева.

В рамках ЭКС-метода отделение несвязных диаграмм не только легко осуществимо, но и естественным образом ведет к сходящейся итерационной процедуре [23]. Обсуждение этого вопроса начнем с наиболее сложного уравнения (15) для матричных элементов взаимодействия V , предполагая, что в основе многочастичного взаимодействия лежит парный потенциал $V^{(2)}$. Разобьем величину $V_{\mu\nu}$ на связную и несвязную части:

$$V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}^c + U_{\mu\nu} \quad (64)$$

где $U = \sum I_i V_i^{(2)}$; $i = 1, 2, 3$ — номер свободно пролетающей частицы (и, одновременно, номер взаимодействующей пары); I_i символизирует δ -функцию закона сохранения импульса i -й частицы (рис. 2) (светлый кружок на рис. 2 отвечает потенциалу $V^{(2)}$;

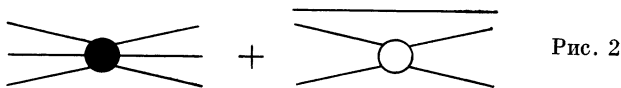


Рис. 2

темный — V^c). Подставляя (64) в (15) с учетом аналогичного уравнения для $V^{(2)}$, получаем следующее неоднородное уравнение для связной части V :

$$\frac{dV_{\mu\nu}^c}{dg} = \sum_{\sigma} \{ (U_{\mu\sigma} U_{\sigma\nu})^c + U_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu}^c + V_{\mu\sigma}^c U_{\sigma\nu} + V_{\mu\sigma}^c V_{\sigma\nu}^c \} \times \left[\frac{1}{E_{\mu} - E_{\sigma} - i\delta} + \frac{1}{E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta} \right], \quad (65)$$

где индекс c в первом слагаемом означает пропуск диагонального по номеру частицы члена $(UU)^c = \sum_{i \neq j} I_i V_i^{(2)} I_j V_j^{(2)}$ (рис. 3).

Уравнение (65), которое, конечно, не может быть решено точно, самим своим видом подсказывает итерационную процедуру для

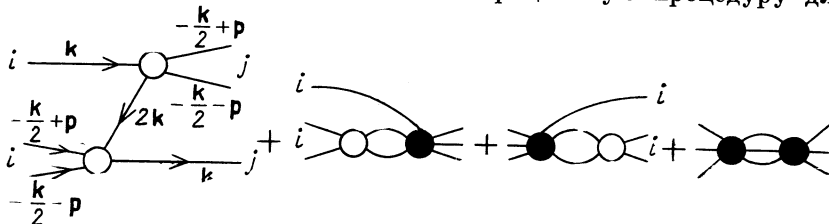


Рис. 3

решения. Нулевой итерации отвечает свободный член (65), первой — результат подстановки нулевой итерации в линейный по V^c член (65) и т. д. Важно подчеркнуть, что на каждом этапе такого итерационного процесса $V_{\mu\nu}^c$ эрмитова (по самому ее построению) и причинна (благодаря правильным условиям обхода особенности). Именно поэтому матрица рассеяния унитарна и причинна на каждом этапе последовательных приближений*.

Что же касается выделения несвязной части в матрице рассеяния, то его можно провести представлением последней в виде

* Обращаясь к (37), видим, что разлагается в ряд не амплитуда, а фаза рассеяния; это и гарантирует унитарность.

произведения связной трехчастичной матрицы и парных матриц рассеяния, отвечающих всевозможным парам частиц. Мы не будем приводить соответствующих громоздких формул [41], а прямо укажем, что для простейшего процесса одноканального рассеяния частицы на связанном состоянии ниже порога его развала можно использовать формулу (37). Для рассматриваемого ниже процесса рассеяния нейтрона на дейтоне

$$d\delta/dg = -(k/3\pi) V_{nd, nd}. \quad (66)$$

В общем случае многоканального рассеяния удобнее перейти к матрице Йоста, в детерминанте которой, как уже говорилось, заключена вся необходимая информация. Приведем без вывода простое уравнение для детерминанта связной части матриц Йоста [ср. с (18)]

$$\frac{d}{dg} \ln \det F_{\pm} = - \sum_{\nu} \frac{V_{\nu\nu}^c}{E - E_{\nu} + i\delta}. \quad (67)$$

Рассеяние нейтрона на дейтоне. Переходим к конкретному расчету — вычислению фаз упругого рассеяния нейтрона на дейтоне в области энергии ниже порога развала последнего [23]. Будут вычислены s - и p -фазы рассеяния в квартетном состоянии (суммарный спин $3/2$) и p -фаза рассеяния в дублетном состоянии (суммарный спин $1/2$). Что же касается s -фазы дублетного рассеяния, то ее вычисление представляет наиболее трудную задачу в связи с наличием связанного состояния — тритона, а также из-за известных аномалий в области малых энергий [40]*.

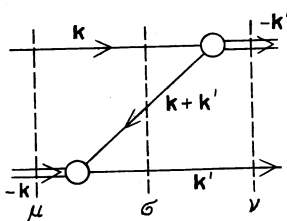


Рис. 4

Нулевой итерации уравнения (65) отвечает обменная диаграмма, изображенная на рис. 4, где двойная линия отвечает дейтону**

$$dV_{nd, nd}/dg = 2 |V_{d, np}(q)|^2 / (q^2 + \kappa^2). \quad (68)$$

* Есть основания связывать эти аномалии с виртуальным рассеянием нейтрона и протона в синглетном по спину состоянии, где имеется близкий к нулю виртуальный уровень. Именно такого рода рассеяние возникает в приводимой далее треугольной диаграмме (см. рис. 7).

** Изменение знака в этой формуле связано с обменом ферми-частиц (подробнее о такого рода коэффициентах, связанных со спином и изотоп-спином, см. [37], а также [41]).

Здесь $V_{d, np}$ — матричный элемент развала дейтона, зависящий от переданного импульса $q = |\mathbf{k} + \mathbf{k}'/2| = |\mathbf{k}' + \mathbf{k}/2| = k(5/4 - \cos \theta)^{1/2}$, θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Удобно совершить перенормировку заряда, выбирая в качестве нового заряда величину κ^2 [см. (46)]. Тогда согласно (28) в правой части (68) должен возникнуть дополнительный член αV^c , где

$$\alpha = (d^2g/(d\kappa^2)^2)/(dg/d\kappa^2) \sim d^2\kappa^2/dg^2.$$

Но согласно (46) и (15) величина $d^2\kappa^2/dg^2 = -d^2E_d/dg^2$ равна $2 \sum_{\sigma} |V_{d, \sigma}|^2/(E_{\sigma} - E_d)$ и сам рассматриваемый член отвечает диаграмме рис. 5. Видно, что этот член имеет структуру более высокой итерации, и поэтому имеет смысл учитывать его на более

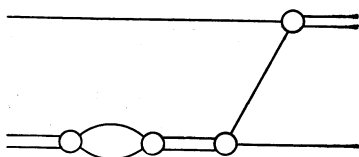


Рис. 5

позднем этапе, где он компенсирует члены аналогичной структуры, возникающие от более высоких итераций уравнения (65). Соответствующая перегруппировка итерационного ряда, сводящаяся к объединению перенормировочных членов с более высокими итерациями, значительно улучшает сходимость итерационного ряда.

Учитывая сепарабельность двухчастичного потенциала (его мы берем в форме Ямагучи), можно написать

$$|V_{d, np}|^2 = V_{dd}V_{np, np} = (4\pi/q) d\delta^{(2)}(q)/d\kappa^2; \quad V_{dd} = dE_d/d\kappa^2 = -1,$$

где $\delta^{(2)}$ — фаза двухчастичного рассеяния. При интегрировании выражений (68) и (66), в которых необходимо положить $g = \kappa^2$, следует учесть, что нулевые граничные условия по κ^2 надо задавать при $\kappa^2 \rightarrow \infty$, когда дейтон бесконечно сильно связан и не участвует ни в каких процессах, требующих его диссоциации [23]. Это ведет к окончательному выражению для фазы рассеяния нейтрона на дейтоне

$$\delta(k) = -\frac{8k}{3q} (q^2 + \kappa^2) \int_{\kappa^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \delta^{(2)}(q)}{(q^2 + \kappa^2)^2}, \quad (69)$$

где подразумевается взятие соответствующей сферической гармоники по углу θ , входящему в q .

Подстановка в (69) двухчастичной фазы [см. (47)] и учет малости параметра κ/γ ведет к следующим результатам. Длина квартетного s -рассеяния

$$a_0 = -\frac{\delta(k)}{k} \Big|_{k=0} = \frac{16}{9\kappa} \left(1 - \frac{3\kappa}{4\gamma} + \frac{3}{4} \left(\frac{\kappa}{\gamma} \right)^2 + \dots \right) = 6,75 \text{ ферми}$$

(опытное значение 6,35 ферми). Главный член разложения по параметру κ/γ выражения для квартетной s -фазы имеет вид

$$\delta(k) = -(8/3) [(3/4 + 1/3\xi^2) \arctg(3\xi/2) - (1/4 + 1/\xi^2) \arctg(\xi/2)],$$

где $\xi = k/\kappa$. Аналогичный несложный вид имеют и фазы в других состояниях по моменту и спину, ход которых изображен на рис. 6

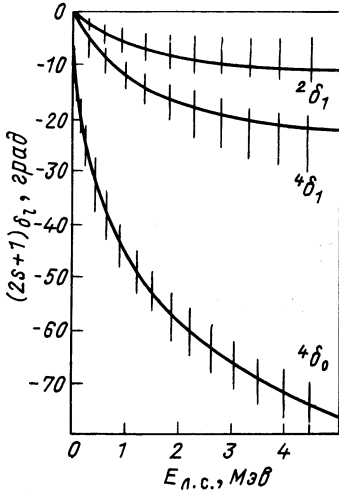


Рис. 6

сплошными линиями; заштрихованы коридоры погрешностей эксперимента (см. [38]). Налицо удовлетворительное согласие с опытом.

Представление о сходимости метода можно получить из оценки следующей итерации, которой отвечает треугольная диаграмма рис. 7 (подробности см. [41]). Ее вклад в квартет-

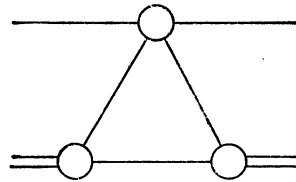


Рис. 7

ную длину s -рассеяния равен

$$(128/27\kappa) [\ln(9/8) - 1/12] \sim 0,1a_0.$$

Быстрая сходимость итерационного ряда связана с тем, что высшие итерации имеют более далекие особенности с меньшими вычетами и скачками на разрезах; при этом каждая итерация находится в соответствии с общими требованиями унитарности и причинности (аналитичности).

Подчеркнем отличия использованных диаграмм от обычных диаграмм теории возмущений: а) в первом случае разложение относится к фазе, во втором — к амплитуде рассеяния; б) в первом случае в вершине диаграммы стоит матричный элемент потенциала, во втором — амплитуда двухчастичного рассеяния; в) в первом случае появляются интегралы по g , во втором — просто степени g .

Энергия связи тритона. Из числа задач, относящихся к дублетному s -каналу, ограничимся решением одной из них — вычислением энергии E_t связанного состояния двух нейтронов и протона (тритона) [42]. Соответствующий уровень, как и дейтонный, можно считать «мелким» по сравнению с глубиной потенциальной ямы величина

$$X^2 = (3/4) (E_d - E_t), \quad (70)$$

обобщающая κ^2 для дейтона, составляет примерно $1/10$ от γ^2 . Используя это обстоятельство, будем работать в полюсном приближении, оставляя в соответствующих уравнениях лишь члены, имеющие наивысшую особенность по $(k^2 + X^2) \rightarrow 0$. В частности, это позволяет не учитывать вклад промежуточных состояний, отвечающих трем несвязанным нуклонам, поскольку лишнее интегрирование по импульсу «размажет» полюсную особенность. Отсутствие трехнуклонных процессов, в свою очередь, позволит не заниматься отделением несвязных диаграмм.

Как и ранее, осуществим переход к новой константе связи κ^2 , чему соответствует перенормировочный множитель $\alpha = -1/2 \kappa^2$. В полюсном приближении для фазы (nd)-рассеяния можно прямо взять выражение типа (49).

$$\delta^{(2)} = \pi - \text{arctg}(k/X),$$

откуда с учетом (66) получаем

$$V_{nd, nd}(k) = -3\pi (dX/d\kappa^2)/(k^2 + X^2). \quad (71)$$

Система уравнений (15), отвечающая рис. 8 (тройная линия изображает тритон), принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d}{d\kappa^2} + \frac{1}{2\kappa^2} \right) V_{tt} = \frac{8}{3} \int \frac{d^3k |V_{t, nd}|^2}{k^2 + X^2}; \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\kappa^2} + \frac{1}{2\kappa^2} \right) V_{t, nd} &= \frac{4}{3} (V_{tt} - V_{dd}) V_{t, nd} \left(\frac{i}{\delta} + \frac{1}{k^2 + X^2} \right) + \\ &+ \frac{4}{3} \int d^3k' V_{t, nd} V_{nd, nd} \left(\frac{1}{k^2 - k'^2 + i\delta} - \frac{1}{k'^2 + X^2} \right); \quad (73) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{d\kappa^2} + \frac{1}{2\kappa^2}\right) V_{nd, nd} = \frac{4}{3} V_{nd, t} V_{t, nd} \left(\frac{1}{k^2 + X^2} + \frac{1}{k'^2 + X^2}\right) + \frac{4}{3} \int d^3k'' V_{nd, nd} V_{nd, nd} \left(\frac{1}{k^2 - k''^2 - i\delta} + \frac{1}{k'^2 - k''^2 + i\delta}\right), \quad (74)$$

где $V_{t'} = dE_t/d\kappa^2$.

Нетрудно убедиться, что вблизи полюса происходит расщепление матричного элемента:

$$V_{nd, nd}(k, k') = \chi^*(k') \chi(k);$$

$$V_{t, nd} = \chi^*(k) \beta, \quad |\beta|^2 = V_{tt} - V_{dd} = -(3/4) dX^2/dg.$$

Это позволяет избежать решений всей системы (72), (73), ограничившись решением уравнений (71) и (72). Отсюда возникает окон-

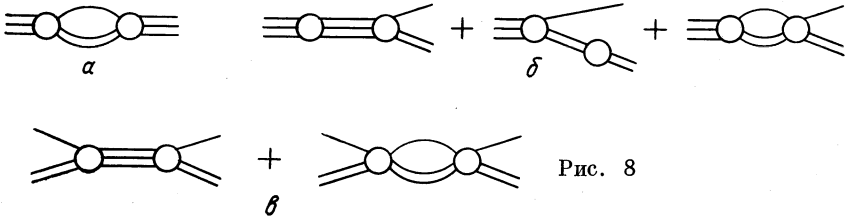


Рис. 8

чателное уравнение для X :

$$X d^2X/d\kappa^2 = -4/3. \quad (75)$$

Это уравнение имеет простое решение, отвечающее реальному случаю $\gamma/\kappa \gg 1$:

$$X = 2 \left(\frac{2}{3} \ln \frac{\gamma}{\kappa}\right)^{1/2} \kappa.$$

Отсюда с помощью (70) легко найти с той же точностью выражение для энергии тритона

$$E_t = -\kappa^2 \ln(\gamma^2/\kappa^2) = E_d \ln(\gamma^2/|E_d|). \quad (76)$$

Подстановка эмпирических значений $\gamma = 1,44$ ферми⁻¹, $E_d = -2,23$ Мэв дает $|E_t| \approx 8$ Мэв, что довольно близко к экспериментальному значению 8,5 Мэв.

Впрочем, этому согласию, вероятно, не стоит придавать слишком большого значения хотя бы потому, что из (76) следует совпадение порогов образования дейтона и тритона, на самом деле слегка различающихся. Тем не менее, учитывая ограниченную точность (76), результат следует считать разумным. Простота его вида и способа получения выгодно отличает ЭКС-метод от стандартного подхода, где E_t возникает в итоге громоздкого численного решения уравнений Фаддеева.

В заключение этого пункта укажем, что аналогично можно рассмотреть и случай большего числа связанных состояний, если все они могут считаться мелкими. Обозначая X_n (n — номер уровня) величину, аналогичную (70), имеем вместо (75)

$$X_n \left[\frac{d^2 X_n}{d\kappa^2} + \frac{dX_n}{d\kappa} \sum'_m \frac{dX_m}{d\kappa} / (X_m - X_n) \right] = -\frac{4}{3}. \quad (77)$$

Из этого уравнения следует полезное правило сумм

$$\frac{d^2}{d\kappa^2} \sum_n X_n = -\frac{4}{3} \sum_n X_n^{-1}.$$

Из уравнения (77) можно усмотреть ряд свойств, характерных для семейства уровней Ефимова [43], возникающих вблизи точки $\kappa = 0$.

Вириальные коэффициенты. ЭКС-метод имеет значительные преимущества и при решении задачи об определении вклада много-частичных эффектов (рассеяние с участием трех и более частиц, соответствующие связанные состояния) в термодинамический потенциал «горячей» системы [44]. Этот метод позволяет избежать решения уравнений Фаддеева и получить выражения для соответствующих вириальных коэффициентов в простой аналитической форме. Кроме того, он позволяет избежать особых сингулярностей для рассеяния «вперед», которые возникают в обычном подходе и устранение которых сопряжено с большими трудностями (см. [45]).

Термодинамический потенциал системы сильновзаимодействующих частиц можно записать в виде следующего вириального разложения [46]:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \sum_{N=2}^{\infty} (m_N/2\pi\beta)^{3/2} \exp(N\beta\mu) b_N, \quad (78)$$

где Ω_0 — термодинамический потенциал идеального газа; $\beta = 1/kT$ — обратная температура; m_N — суммарная масса N частиц; μ — химический потенциал*. Величина b_N — вириальный коэффициент — описывает эффекты взаимодействия N частиц и выражается в виде

$$b_N = \text{Sp}_N [\exp(-\beta H)]^c. \quad (79)$$

Здесь шпур берется по системе должным образом симметризованных волновых функций N частиц, индекс «с», как и выше, означает отбор только связанных диаграмм.

* Выражение (78) относится к системе частиц одного вида или же к системе разных частиц с одинаковой массой, представленных с одинаковой плотностью.

В выражении (79) можно сразу отделить вклад N -частичных связанных состояний, который удобно записать в виде

$$b_N^{\text{дискр}} = \sum_n (\exp(\beta |E_{nN}|) - 1), \quad (80)$$

где E_{nN} — соответствующая энергия связанного состояния. Что же касается вклада непрерывного спектра, то, дифференцируя (79) по g , учитывая формулу (12) и интегрируя по g , имеем

$$b_N^{\text{непр}} = -\beta \int_0^g dg \sum_v \exp(-\beta E_{vN}) V_{vv}^c, \quad (81)$$

где величина V^c имеет тот же смысл, что и ранее. Соответственно для ее определения можно использовать сформулированную выше итерационную процедуру.

Покажем прежде всего, что для второго вириального коэффициента получается известная формула Бета — Уленбека [46]. Учитывая формулу (37) и переходя к интегрированию по энергии, имеем

$$b_2 = \sum_n [\exp(\beta |E_n|) - 1] + \frac{\beta}{\pi} \sum_e (2l + 1) \int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \delta_l(E).$$

Если проинтегрировать здесь по частям и учесть теорему Левинсона (41), то действительно получим формулу Бета — Уленбека

$$b_2 = \sum_n \exp(\beta |E_n|) + \sum_l (2l + 1) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \frac{d\delta_l(E)}{dE}. \quad (82)$$

Прежде чем переходить к конкретным приложениям, кратко остановимся на вопросе о сингулярностях выражения (81). Эти сингулярности, чисто кинематического происхождения, возникают при совпадении начального и конечного состояний в выражении V_{vv}^c для трех и более частиц, обращая в нуль энергетический знаменатель в (15) (см. простейший пример на первой диаграмме рис. 3). Отсылая за подробностями к работе [44], отметим, что все сингулярности такого рода можно явным образом просуммировать и их сумма тождественно обратится в нуль. Поэтому указанные сингулярности можно вычеркивать по мере их появления без опасения, что при этом останется какой-либо конечный вклад.

В заключение вычислим несколько первых вириальных коэффициентов для горячего нерелятивистского нуклонного газа, в котором протоны и нейтроны имеют одинаковую плотность. Будем рассматривать две области $\xi \gg 1$ и $\xi \ll 1$, где $\xi = \beta \mu^2$; в первой из них нуклоны в основном объединены в дейтоны, во

второй, наоборот, дейтонов мало *. Используя (47) и (82) имеем

$$b_{np} = \exp(\xi), \quad \xi \gg 1; \quad b_{np} = 1/2, \quad \xi \ll 1. \quad (83)$$

Далее оценим вклад трехчастичного рассеяния двух нейтронов и протона в квартетном состоянии. Используя первую диаграмму рис. 3 и неперенормированную константу связи, получаем

$$b_{nnp} = -\beta \int_0^g dg \int d^3k d^3p \exp\left(-\beta\left(\frac{3}{4}k^2 + p^2\right)\right) V_{nnp, nnp},$$

где

$$V_{nnp, nnp} = \frac{64\pi^2}{3kp} \int_0^g dg \frac{d\delta^{(2)}(p)}{dg} \frac{d\delta^{(2)}(3k/2)}{dg} / \left(p^2 - \frac{9}{4}k^2\right).$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} b_{nnp} &= -\text{const } \xi^{1/2}, & \xi \gg 1; \\ b_{nnp} &= \text{const}, & \xi \ll 1, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

где значения констант, которые не выписываем явно, порядка единицы.

Наконец, рассмотрим вклад рассеяния нейтронов на дейтонах в квартетном состоянии. Соответствующий вириальный коэффициент (см. рис. 4) выражается формулой

$$b_{nd} = -\beta \int_0^{\kappa^2} d\kappa^2 \int d^3k \exp\left(\beta\left(\kappa^2 - \frac{3^2}{4}\right)\right) V_{nd, nd},$$

где

$$V_{nd, nd} = -\frac{16\pi}{3} \int_{\kappa^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\frac{9}{4}k^2 + \kappa^2} \frac{d\delta^{(2)}(3k/2)}{d\kappa^2}.$$

В итоге имеем

$$b_{nd} = \frac{4}{27} (\exp \xi - 1) \ln \xi. \quad (85)$$

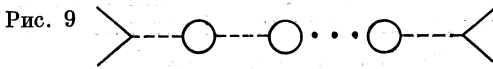
4. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ПРОБЛЕМА «ЛОЖНОГО» ПОЛЮСА

В этом заключительном разделе ЭКС-метод применяется к моделям квантовой теории поля, описывающим взаимодействие ферми-поля ψ с бозе-полем ϕ типа $L^{in} = (\psi_{in} O \psi_{in}) \phi_{in}$, где O — некоторая матрица. Мы будем рассматривать, главным образом, кван-

* Для простоты в этих рассуждениях мы отвлекаемся от спина.

товую электродинамику, хотя приведем и результаты, относящиеся к псевдоскалярной теории, а также к теории взаимодействия фермионов с векторным полем.

Перечисленные модели допускают применение ЭКС-метода в той же степени, что и рассмотренные в разд. 2 релятивистские модели 4-фермионного взаимодействия. В частности, и в излагаемой ниже теории появляются особые решения, которые (в отличие от обычных) не имеют «ложного» полюса при пространственно-подобном импульсе (проблема «нуль-заряда» [47]). Исследование особых решений требует формулировки регулярной процедуры для определения функции $C(g)$ (см. разд. 2), которая описывает



степень нарушения унитарности матрицы эволюции при конечном времени. Эта процедура совпадает с той, которая используется при решении обратной задачи теории рассеяния.

Аннигиляционное рассеяние частицы на античастице. Применительно к рассматриваемым моделям необходимый отбор диаграмм соответствует аннигиляционному рассеянию частицы на античастице, когда в промежуточных состояниях имеются либо те же объекты, что и в исходном, либо бозон (рис. 9). Это обстоятельство, усложняющее задачу по сравнению со случаем 4-фермионного взаимодействия, приведет и к более сложным выкладкам, хотя окончательный результат качественно будет тем же.

Введем 4-фермионный лагранжиан

$$L^{in} = :(\bar{\Psi}_{in} O \Psi_{in}) (\bar{\Psi}_{in} O \Psi_{in}): \tag{86}$$

(для квантовой электродинамики нужно добавить еще поперечный проекционный оператор $g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$). Тогда в полной аналогии со сказанным в разд. 2 для (86) выполняется условие (50), причем функция ρ [см. (51)] имеет для квантовой электродинамики ($O = \gamma_\mu$) следующий вид (m — масса фермиона):

$$\rho(s) = -(1/12\pi^2) (1 - 4m^2/s)^{1/2} (s + 2m^2); \tag{87}$$

для псевдоскалярной теории ($O = \gamma_5$) коэффициент $1/12$ заменяется на $1/8$, а последний множитель в (87) есть просто s .

И в рассматриваемых моделях можно свести дело к скалярным функциям, полагая подобно (52):

$$f_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{in} \Phi(s); \quad L_{\mu\nu}^{22} = L_{\mu\nu}^{in} \lambda(s_\mu, s_\nu),$$

где L^{22} — матричный элемент L для перехода двух фермионов в два фермиона. При этом связь величин Φ , λ с фазой рассеяния дается прежними формулами (53), (54). Как и в разд. 2, можно

вести функцию Йоста $u(s)$, которая содержит полную информацию о процессе рассеяния. Переходя к вопросу о ложном полюсе функции Грина $D = d(s)/(s - M^2)$ бозона массы M (в квантовой электродинамике здесь также нужно добавить поперечный оператор), приведем выражение для функции d через u

$$d(s, g) = \frac{2}{g} \int_0^g \frac{dg}{u^2(s, g)} \quad (88)$$

[см. (53), (54)].

Покажем (подробности см. [34, 48, 49]), что и обсуждаемые модели взаимодействия ферми- и бозе-полей могут считаться сепарабельными. Это понимается в том смысле, что и применительно к ним уравнение для функции Йоста имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} d^2 \tilde{u} / d\alpha^2 + C^2(\alpha)(s - M^2) \tilde{u} &= 0; \\ C(\alpha) &= \lim_{s \rightarrow \infty} (d\delta/d\alpha) / \sqrt{s}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Здесь мы перешли к перенормированной функции Йоста, обращающейся в единицу при $s = M^2$ (соответственно перенормированная константа связи отнесена к той же точке), и в качестве самой константы связи выбрали величину $\alpha = g^2/4\pi$, именно от которой (а не от g) и зависят характеристики рассеяния.

Отсылая к цитированным работам, наметим лишь ход доказательства справедливости (89). Для выбранной совокупности диаграмм в разложении операторов L и Λ по нормальным произведениям [см. (28)] существуют следующие слагаемые: в операторе L — слагаемые $l^{in}L^{22}$ и $L^{in}L^{12}$, в операторе Λ — кроме того, слагаемое $:\varphi_{in}\varphi_{in}: \Lambda^{11}$ *. Вытекающая из (28) система уравнений для функций L^{12} , L^{22} , Λ^{11} , Λ^{12} , Λ^{22} , как оказывается, соответствует следующей структуре этих функций:

$$\begin{aligned} L^{12} &= \chi(s); \quad L^{22}(s_\mu, s_\nu) = \chi^*(s_\mu) \chi(s_\nu) [b(s_\mu) + b(s_\nu)]; \\ \Lambda^{12} &= \chi(s) b(s) \Lambda^{11}; \quad \Lambda^{22}(s_\mu, s_\nu) = \chi^*(s_\mu) \chi(s_\nu) b(s_\mu) b(s_\nu) \Lambda^{11}, \end{aligned}$$

где $b(s) \sim (s - M^2)^{-1}$. Такая структура, очевидно, близка к сепарабельной. Используя приведенные результаты, теперь уже можно показать, что функция A в уравнении, аналогичном (43), действительно равна $C^2(s - M^2)$.

Обращаясь к (89), приведем сначала обычное решение, отвечающее $C = 0$. Учитывая граничное условие

$$(d\delta/d\alpha)|_{\alpha=0} = 4\pi^2\rho(s)/(s - M^2),$$

* Условия стабильности вакуума и одночастичных состояний исключают здесь нормальные произведения $1, : \psi_{in}\psi_{in} :$ и $:\varphi_{in}\varphi_{in}:$. Кроме того, условия стабильности однобозонного состояния фиксируют константу β в (28) [см. (35)].

получаем функцию Йоста в виде линейной функции α

$$\tilde{u}(s) = 1 + 4\pi\alpha (s - M^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'\rho(s')}{(s-s'+i\delta)(s'-M^2)^2}.$$

Отсюда согласно (88)

$$d^{-1}(s) = 1 - (\alpha/3\pi) \ln(-s/m^2). \tag{90}$$

Это выражение обладает «ложным» полюсом при

$$s = -m^2 \exp(2\pi/\alpha).$$

Переходим к определению особого решения. Прежде всего необходимо установить вид функции $C(\alpha)$. Далее задача будет решена в общем виде, здесь же ограничимся асимптотической областью $s \gg m^2$, где справедливо уравнение Каллана — Симанзика

$$[m\partial/\partial m + \beta(\alpha)\alpha\partial/\partial\alpha] \alpha d(s, \alpha) = 0,$$

где $\beta(\alpha) = \sigma\alpha + \dots$ — функция Каллана — Симанзика (σ — константа). Используя асимптотику функции Йоста (см. разд. 2) и (88), имеем

$$\alpha d(s) \sim \exp\left(2i\sqrt{s} \int_0^\alpha d\alpha C(\alpha)\right) - 1.$$

Отсюда получаем связь функций $C(\alpha)$ и Каллана — Симанзика [50]

$$\begin{aligned} C(\alpha) &\sim \frac{1}{m\alpha\beta(\alpha)} \exp\left(-\int_\alpha^\infty \frac{d\alpha}{\alpha\beta(\alpha)}\right) = \\ &= -\frac{1}{m\sigma\alpha^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma\alpha}\right) + \dots \end{aligned} \tag{91}$$

Основываясь на этой формуле, нетрудно получить решение уравнения (89) в виде

$$\tilde{u}(s) = i\pi\alpha\sigma H_0^{(1)}(x),$$

где

$$x = (\sqrt{s}/m\gamma) \exp(-1/2\alpha\sigma),$$

$\sigma = 1/3\pi$ в квантовой электродинамике и $1/2\pi$ в псевдоскалярной теории; $\gamma = \exp C$, C — постоянная Эйлера. Отсюда с помощью (88) находим выражение для функции Грина бозона в следующем виде:

$$d(s, \alpha) = -(i/2\pi\alpha\sigma) [1 + H_0^{(2)}(x)/H_0^{(1)}(x)]. \tag{92}$$

Это выражение не имеет «ложного» полюса, что и неудивительно, ибо его появление противоречило бы исходной системе аксиом.

Функцию Грина (92) можно также переписать в виде

$$d^{-1}(s) = d_0^{-1}(s) + \alpha \rho \Psi(x), \quad (93)$$

где d_0 — обычное решение (90);

$$\Psi(x) = (2/\pi) \ln(x\gamma/2) - N_0(x)/J_0(x)$$

— мероморфная функция своего аргумента. Она играет роль известной R -функции Кастильехо — Далица — Дайсона [51], и, таким образом, ЭКС-метод можно рассматривать как способ определенной фиксации этой функции (см. также [4]).

Отметим, что разложения в ряд по α особого и обычного решения совпадают, что связано с существенной неаналитичностью функции Ψ в (93) [типа $\exp(-1/\alpha)$] в точке $\alpha = 0$.

Определение функции $C(\alpha)$. До сих пор вид функции C находился либо из размерных соображений, либо из соотношений, пригодных лишь в асимптотической области. Здесь опишем общую процедуру определения функции $C(\alpha)$, которая позволит, в частности, найти особое решение в моделях типа квантовой электродинамики и вне асимптотической области [34, 49].

Будем исходить из уравнения (89), которое заменой переменных

$$\tilde{u} = z/\sqrt{C}; \quad \xi = \int_0^\alpha d\alpha C; \quad k^2 = s - M^2$$

сводится к виду обычного уравнения Шредингера

$$[d^2/d\xi^2 + k^2 - U(\xi)] z(k, \xi) = 0 \quad (94)$$

с «потенциалом»

$$U(\xi) = (1/\sqrt{C}) \frac{d^2}{d\xi^2} \sqrt{C} \quad (95)$$

и граничными условиями

$$z|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \sqrt{C} \left(1 - \frac{4i\pi\rho}{k^2} \int_0^\xi \frac{d\xi}{C} \right);$$

$$z|_{k \rightarrow \infty} = (k/\rho)^{1/2} \exp(-ik\xi). \quad (96)$$

Эти условия в действительности избыточны и фактически определяют потенциал (95). Его можно найти, используя известный метод решения обратной задачи теории рассеяния [24].

Решение разбивается на два этапа. На первом решается предельная задача (соответствующие величины снабжаются индексом «0»), которой отвечает асимптотическая при $k \rightarrow \infty$ форма $\rho(k)$. Во всех интересных случаях

$$\rho_0(k) = (\kappa/4\pi^2) k^{2(n+1)}, \quad n \geq 0$$

причем в рассматриваемых здесь моделях $n = 0$. Предполагаем далее (и это потом подтвердится), что $U_0(\xi) = (n^2 - 1/4)/\xi^2$. Подстановка U_0 в (94) дает уравнение Бесселя, причем из (96) видно, что z_0 пропорциональна $H_n^{(1)}(k\xi)$. Подчиняя эту величину граничным условиям (96), можно однозначно определить функцию $C_0(\xi)$:

$$C_0(\xi) = \frac{2\kappa\Gamma^2(n+1)2^{2n}}{\pi(2n)^2} \xi^{1-2n}, \quad n \neq 0;$$

$$C_0(\xi) = \frac{2\kappa}{\pi} \xi \ln^2\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad n = 0. \tag{97}$$

Для самой функции $z_0(k, \xi)$ получается простое выражение

$$z_0(k, \xi) = (\xi k^2/8\pi)^{1/2} H_n^{(1)}(k\xi). \tag{98}$$

Отсылая за подробностями к цитированным работам, приведем результаты решения второго этапа задачи, относящегося к неасимптотической области. Основную роль здесь играет ядро Гельфанда — Левитана — Марченко $K(\xi, \xi')$, определяемое уравнением

$$K(\xi, \xi') = Q(\xi, \xi') - \int_0^{\xi \wedge \xi'} d\xi'' K(\xi, \xi'') Q(\xi'', \xi'),$$

где

$$Q(\xi, \xi') = 8\pi \int_{2m}^{\infty} \frac{dk}{k} (\sqrt{\rho(k)\rho_0(k)} - \rho_0(k)) z_0(k, \xi) z_0(k, \xi').$$

Через это ядро выражается функция $U(\xi)$ [а следовательно, согласно (95) и функция $C(\alpha)$]:

$$U(\xi) = U_0(\xi) - 2dK(\xi, \xi)/d\xi.$$

Кроме того, ядро K определяет функцию $z(k, \xi)$ и тем самым функцию Йоста задачи

$$z(k, \xi) = z_0(k, \xi) - \int_0^{\xi} d\xi' K(\xi, \xi') z_0(k, \xi').$$

Приведенные соотношения полностью решают задачу, причем из них как частный случай следуют полученные выше результаты, относящиеся к простейшим моделям.

Применим полученные соотношения к квантовой электродинамике, ставя себе цель найти особое решение, не обладающее «ложным» полюсом, вне асимптотической области. Решение предельной задачи [см. (97), (98)] с логарифмической точностью совпадает с результатами, полученными выше. Что же касается области $k\xi \sim k\kappa \ll 1$, то в ней, как будет видно из дальнейшего, отличие функции z от z_0 мало (порядка $\exp(-1/\alpha)$). Это позволяет при

проведении второго этапа изложенной процедуры считать поправочные по отношению к предельным членам малыми, что чрезвычайно облегчает решение задачи.

Ограничимся приведением окончательной формулы для функции Грина фотона [ср. с (93)]:

$$d^{-1}(s) = d_0^{-1}(s) + \frac{\alpha}{3} \Psi(x) + \Delta(x), \quad (99)$$

где

$$d_0^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} R \left[\frac{3-R^2}{2} \ln \frac{R+1}{R-1} + R - \frac{8}{3R} \right], \quad R = \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{1/2}$$

— неасимптотическая форма функции Грина, отвечающая обычному динамическому решению, и

$$\Delta(x) = -\frac{8\alpha\tau}{3\pi\gamma^2 x^2} \left(1 - \frac{1-x/2}{J_0^2(x)} \right) \exp(-3\pi/\alpha - 5/6). \quad (100)$$

Здесь

$$x = (2\sqrt{s}/m\gamma) \exp(-3\pi/2\alpha - 5/6);$$

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} dt \left[1 - \left(-1 - \frac{2}{t} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{4}{t} \right)^{1/4} \right].$$

В области $x \sim 1$, где в обычном решении находится «ложный» полюс, существенно второе слагаемое в правой части (99), которое «закрывает» этот полюс; величина (100) в этой области экспоненциально мала. В области же $x \ll 1$ (в частности, в экспериментально доступной сейчас области $s \gtrsim m^2$) экспоненциально малы оба последних члена в правой части (99) и основную роль играет обычное выражение для функции Грина.

В заключение сделаем замечание, относящееся ко всем особым решениям уравнений квантовой теории поля, которые обсуждались выше. Для всех таких решений характерно существование направлений в комплексной плоскости s , по которым амплитуда рассеяния экспоненциально нарастает. Это можно было бы рассматривать как дефект таких решений, если бы в соответствующей области для решения задачи было бы достаточно отобранных диаграмм, сумме которых соответствует обсуждаемое решение. Между тем заведомо ясно, что в области больших s существенная роль принадлежит не учтенным выше многочастичным диаграммам, у которых в промежуточных состояниях имеется более чем две частицы. Поэтому вопрос об асимптотике точных решений уравнений ЭКС-метода (и более того, о самом существовании особых решений) следует, строго говоря, считать пока открытым. Обнадеживающим в этом плане фактом служит наличие особых решений в нерелятивистских моделях (см. разд. 2), находящихся в полном соответствии со всеми общими принципами квантовой теории поля.

Распадные состояния. При рассмотрении моделей, обсуждавшихся выше, по существу предполагалось выполнение неравенства $M < 2m$, обеспечивающего стабильность бозона относительно распада на пару фермион — антифермион. Нарушение этого неравенства, имеющее место, например, в теории слабого взаимодействия, ведет к нестабильности бозона, что, в свою очередь, влечет за собой определенное видоизменение аппарата ЭКС-метода. Укажем здесь некоторые результаты [52].

Из самого факта нестабильности бозона следует, что его состояния нужно исключить из полной системы «ин»-состояний. С учетом этого обстоятельства можно показать, что все сказанное выше относительно функции Йоста остается в силе. Это относится, в частности, и к уравнению (89), определяющему функцию Йоста. Следует только учесть, что константа связи теперь должна нормироваться как вычет в полюсе, расположенном на втором листе. Кроме того, нужно, конечно, считать ширину бозонного уровня малой по сравнению с массой бозона.

Динамическое решение рассматриваемой задачи, как хорошо известно, содержит брейт-вигнеровский резонанс в области $s \approx \approx M^2$. Как видно из уравнения (89), в этой области обычное и особое его решения почти совпадают. Что же касается асимптотического поведения характеристик рассеяния, то оно определяется теми же формулами с заменой массы фермиона m наибольшей из имеющихся масс — массой бозона M .

Авторы не имеют возможности перечислить всех лиц, дискуссии с которыми способствовали выяснению вопросов, затронутых в обзоре. Исключение должно быть сделано лишь для Игоря Евгеньевича Тамма, чьи одобрение, поддержка и конструктивные замечания сыграли решающую роль в формулировке изложенного в статье метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц Д. А. В кн.: Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. М., "Наука", 1972.
2. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1976.
4. Киржниц Д. А. — "ЖЭТФ", 1965, т. 49, с. 1544.
5. Hellman H. Einführung in die Quanten Chemie. Le pzig, 1937; Feynman R. P. — "Phys. Rev.", 1939, v. 56, p. 340.
6. Паули В. Труды по квантовой теории. Пер. с нем. М., "Наука", 1972.
7. Крючков Г. Ю., Меликян А. О. Препринт ИФИ АН АрмССР (в печати).
8. Gell-Mann M., Low F. — "Phys. Rev.", 1951, v. 84, p. 350.
9. Salem L. — "Phys. Rev.", 1962, v. 125, p. 1788; Aizu K. — "J. Math. Phys.", 1963, v. 4, p. 762.
10. Callan C. C. — "Phys. Rev. D", 1970, v. 2, p. 1541; Symanzik K. — "Comm. Math. Phys.", 1970, v. 18 p. 277; 1971, 23, p. 49.

11. Овсянников Л. В. — "Докл. АН СССР", 1956, т. 109, с. 1412.
12. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
13. Caianiello E. R. In: Les problèmes mathématique de la théorie quantique des champs. Paris. 1959; Caianiello E. R., Scarpetta G. — "Nuovo cimento A", 1974, v. 22, p. 448; Marinaro M. — Ibid., 1976, v. 32, p. 355.
14. Петрина Д. Я. — "Изв. АН СССР. Сер. матем.", 1968, т. 32, с. 1052; Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л. — "ТМФ", 1974, т. 19, с. 37; — "ЭЧАЯ", 1976, т. 7, вып. 3, с. 647.
15. Терентьев М. В. — "Ядерная физика", 1969, т. 10, с. 1253.
16. Крючков Г. Ю. Препринт ИФИ АН АрмССР, № 75-17, 1975; "Изв. АН АрмССР. Сер. физ.", 1976, т. 11, с. 417.
17. Šoln J. — "Nuovo cimento", 1973, v. 16, p. 624; 1974, v. 24, p. 333; — "Phys. Rev. D", 1974, v. 9, p. 3161.
18. Душутин Н. К., Мальцев В. М., Синеговский С. И. — "Ядерная физика", 1975, т. 21, с. 1294; Препринт ОИЯИ, P2-7908, 1974; P2-8155, 1974; Мальцев В. М., Синеговский С. И. Препринт ОИЯИ P2-8878, 1975; Мальцев В. М. Препринт ОИЯИ, P2-9334, 1975.
19. Киржниц Д. А. — "ЖЭТФ", 1961, т. 41, с. 551; "УФН", 1966, т. 90, с. 129.
20. Imamura Z., Sunakawa S., Utiyama R. — "Progr. Theoret. Phys.", 1954, v. 11, p. 291.
21. Šoln J. — "Nuovo cimento", 1964, v. 32, p. 1301; 1965, v. 37, p. 122; "Phys. Rev. D", 1972, v. 6, p. 2277; 1973, v. 8, p. 1637.
22. Peres A. — "Nucl. Phys. B", 1970, v. 23, p. 125.
23. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. — "Ядерная физика", 1974, т. 25, с. 700.
24. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., "Мир", 1969.
25. Медведев Б. В., Поливанов М. К. В кн.: Международная зимняя школа теоретической физики. Т. 1. Дубна, 1964.
26. Puff R. — "Phys. Rev. A", 1975, v. 11, p. 154.
27. Гельфанд И. И., Левитан Б. М. — "Докл. АН СССР", 1953, т. 88, с. 593; Newton R. — "Phys. Rev.", 1956, v. 101, p. 1588; Фадеев Л. Д. — "Докл. АН СССР", 1957, т. 115, с. 878; p. 1588; Демков Ю. Н. Вариационные принципы в теории столкновений. М., Физматгиз, 1958.
28. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. — "Ядерная физика", 1972, т. 16, с. 435.
29. Такибаев Н. Ж. Там же, 1977, т. 26, с. 81.
30. Levinson N. — "Kgl. danske vid selskab. Mat.-phys. medd.", 1949, v. 25, p. 9.
31. Буслаев В. С., Меркурьев С. П. — "ТМФ", 1970, т. 5, с. 372.
32. Yamaguchi N. — "Phys. Rev.", 1954, v. 95, p. 1628.
33. Киржниц Д. А., Лившиц М. А. — "ЖЭТФ", 1967, т. 52, с. 804; Лившиц М. А. — "Ядерная физика", 1968, т. 8, с. 1245.
34. Киржниц Д. А., Крючков Г. Ю. — "ТМФ", 1973, т. 15, с. 227.
35. Лившиц М. А. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук, (ФИАН) М., 1969.
36. Фадеев Л. Д. — "ЖЭТФ", 1960, т. 39, с. 1459.
37. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. — "УФН", 1971, т. 103, с. 469.
38. Seagrave J. In: Three-body problem. Amsterdam — London, 1970.
39. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. — "ЭЧАЯ", 1975, т. 6, вып. 2, с. 299.
40. Van Oers W., Seagrave J., — "Phys. Lett. B", 1967, v. 24, p. 562.
41. Такибаев Н. Ж. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. (ФИАН) М., 1977.
42. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. — "Письма в ЖЭТФ", 1978, т. 27, с. 73.
43. Ефимов В. Н. — "Ядерная физика", 1970, т. 12, с. 1080.
44. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. — "ЖЭТФ", 1978, т. 75, с. 785.
45. Dashen R., Ma S. — "J. Math. Phys.", 1971, v. 12, p. 689; Буслаев В. С. — "ТМФ", 1973, т. 16, с. 247.
46. Dashen R., Ma S., Berntein H. — "Phys. Rev.", 1969, v. 187, p. 345.

47. Берестецкий В. Б.— “УФН”, 1976, т. 120, с. 439.
48. Киржниц Д. А., Крючков Г. Ю.— “ТМФ”, 1972, т. 11, с. 152.
49. Крючков Г. Ю. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. (ЕрФИ) Ереван, 1973.
50. Крючков Г. Ю. Препринт ИФИ АН АрмССР, 74-13, Ереван, 1974
51. Castillejo L., Dalitz R., Dyson F.— “Phys. Rev.”, 1956, v. 101, p. 453.
52. Крючков Г. Ю. Препринт ФИАН, 81. М., 1973; Препринт ИФИ АН АрмССР, 76-29. Ереван, 1976.
53. Киржниц Д. А.— “Письма в ЖЭТФ”, 1978, т. 28, с. 479.
54. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж.— Препринт ИФВЭ АН Каз. ССРСР, 1979.

Примечание при корректуре. После сдачи этой статьи в печать появились новые результаты приложения ЭКС-метода к проблеме трех тел [53, 54], относящиеся к дублетному рассеянию нейтрона на дейтоне, к рассеянию протона на дейтоне, к энергии связи ядер трития и гелия-3 к ядерной вершинной константе (t, nd). Все эти результаты, полученные в сотрудничестве со студентом Ф. М. Леньковым, находятся в разумном согласии с опытом и результатами численных расчетов.