

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ И ПРИНЦИП ПАУЛИ

В. И. Куклин, В. Г. Неудачин, Ю. Ф. Смирнов

Научно-исследовательский институт ядерной физики
МГУ, Москва

Дан обзор современных подходов к взаимодействию составных частиц в ядерной и, отчасти, атомной физике. Основное внимание уделено проявлению принципа Паули в системах из двух и трех составных частиц. Дан вывод модифицированных уравнений Фаддеева для системы из трех составных частиц и детально обсуждается построение вариационных базисов для подобных систем. Вводится общая концепция духовых каналов и духовых состояний, как собственных состояний полного гамильтониана с симметрией, запрещенной принципом Паули. Исследуется несколько модельных примеров для систем из трех и четырех частиц, где возможно строгое микроскопическое рассмотрение, и на этих примерах иллюстрируется смысл запрещенных состояний и оптических потенциалов для рассеяния составных частиц. В качестве примера обсуждается структура ядра углерода в 3α -модели.

The modern approaches to the composite particle interactions in nuclear and (partly) atomic physics are reviewed. Main attention is paid to the Pauli principle displays in the systems of two and three composite particles. The modified Faddeev equations for three composite particles have been derived and the construction of variational bases for such systems is discussed in detail. The general concept of ghost channels and states is introduced as the eigen-states of total Hamiltonian with a symmetry forbidden by the Pauli principle. Consideration is given to several model examples of the three- and four-particle systems where rigorous microscopic approach is possible, whereupon the examples are used to illustrate the meaning of the forbidden states and optical potentials in the scattering of composite particles. The ^{12}C nucleus structure in 3α -model is discussed as an example of the considered approach.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор посвящен описанию динамики систем из двух и трех сложных частиц, состоящих из фермионов (нуклонов — в ядерной физике, электронов — в атомной), с учетом принципа Паули. Хорошо известно, что требование полной антисимметрии (по всем перестановкам) общей волновой функции подобной системы из нескольких составных частиц приводит к вычислительной схеме огромной сложности даже в рамках простых подходов, подобных методу резонирующих групп (МРГ) и методу генераторных координат (МГК) — двух наиболее широко используемых микроскопических методов анализа составных систем. Например,

прямой МРГ-расчет спектра системы из трех α -частиц требует вычисления огромного количества (около 10^{12}) обменных интегралов и занимает ~ 150 ч вычислительного времени на большой ЭВМ [1]. Вместе с тем упрощения, которые приходится делать в таком расчете для получения окончательных результатов, подчас настолько значительны, что точный учет всех обменных эффектов явно выходит за пределы точности используемой модели. Кроме того (и это основное), подобный расчет (а он включает в себя несколько следующих друг за другом программ) представляет собой род черного ящика, выходные данные которого не скоррелированы физически прозрачным образом со значениями входных параметров (скажем, с параметрами NN -взаимодействия и т. п.). Подобные же проблемы возникают и при попытке полного микроскопического описания реакции срыва (d, p) на магическом ядре или при описании реакций с кластерами типа ${}^7\text{Li} (\alpha, t){}^8\text{Be}$ и т. п.

Поэтому имеет смысл попытаться сформулировать более простые и физически оправданные подходы к рассматриваемому кругу проблем. К настоящему времени предложено и исследовано несколько таких подходов, детально описанию которых и посвящен данный обзор.

В каждом подходе такого рода эффект антисимметризации тем или иным образом включается в эффективное взаимодействие между составными частицами, причем в отличие от МРГ это эффективное взаимодействие двух составных частиц строится достаточно простым образом, так, чтобы с подобным взаимодействием можно было рассматривать системы из трех и большего числа кластеров. Подобная идеология является обычной в теоретической физике при рассмотрении систем из нескольких частиц. Например, при изучении $3N$ -, $4N$ -систем на основе уравнений Фаддеева — Якубовского обычно очень сложный NN -потенциал заменяют упрощенным сепарабельным взаимодействием, которое правильно передает основные черты истинного потенциала и вместе с тем приводит к численно решаемой схеме.

Наиболее простой моделью для взаимодействия двух кластеров является, очевидно, локальный потенциал. Однако, чтобы быть адекватной моделью, он должен приводить к волновым функциям рассеяния (и фазовым сдвигам), «похожим» на те, которые получают в микроскопическом подходе типа МРГ. Как оказалось, этого можно добиться введением в потенциальную модель запрещенных (принципом Паули) состояний. Указанные состояния, как будет показано, играют фундаментальную роль во всех рассматриваемых здесь проблемах, а их наличие и структура и будут отражать влияние принципа Паули [2—7].

Понятие запрещенного состояния появилось в квантовой механике вместе с принципом Паули. В теории релятивистского элек-

трона Дирак опирался на положение, что решения с отрицательной массой в обычных условиях не проявляются физически потому, что в состоянии вакуума все места для частиц с отрицательной массой «заняты». С появлением ядерной модели оболочек и оптического потенциала этот вопрос стал актуальным и в физике атомного ядра, причем не только в вопросах теории рассеяния, где необходимо изменение формулировки теоремы Левинсона, но и в вопросах теории реакций или более обще, при исследовании систем из нескольких составных частиц вне энергетической поверхности.

1. ЗАПРЕЩЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ В СОСТАВНЫХ СИСТЕМАХ

Качественное рассмотрение запрещенных состояний в системах двух кластеров. Если обе части системы $A + B$ — составные, то можно подозревать, что некоторая часть гильбертова пространства волновых функций этой системы недоступна для системы, т. е. запрещена принципом Паули подобно тому, как это имеет место в системе «нуклон + замкнутые оболочки». Однако в случае двух составных частиц $A + B$ разобраться в том, какие состояния разрешены, а какие запрещены и т. д., заметно сложнее. Кроме того, могут иметь место и более сложные ситуации, когда некоторые состояния являются частично разрешенными и частично запрещенными.

Но в задачах ядерной физики при рассмотрении взаимодействия кластеров друг с другом можно с неплохой точностью использовать довольные легкие понятия, как проявляется принцип Паули при взаимодействии сложных ядерных систем. Возьмем систему $\alpha + \alpha$. В низшем своем состоянии она образует ядро ${}^8\text{Be}$ с оболочечной конфигурацией $(0s)^4 (1p)^4$. Антисимметричная осцилляторная оболочечная волновая функция этой конфигурации $|s^4 p^4: L, M, S = 0, T = 0\rangle$ может быть переписана в кластерном виде [8—10]:

$$\begin{aligned} & |s^4 p^4: L, M, S = 0, T = 0\rangle = \\ & = N^{-1} \{ \hat{A} \varphi_\alpha(1, 2, 3, 4) \varphi_\alpha(5, 6, 7, 8) \Phi_{00}(\rho) \} \Psi_{000}(\mathbf{R}_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\varphi_\alpha(1, 2, 3, 4) = \exp \left[-\frac{1}{2} a \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\alpha 1})^2 \right] \chi_{S_T=0, T=0}(1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

— внутренняя волновая функция α -кластера; $\mathbf{R}_{\alpha i}$ — координата центра масс i -го α -кластера; χ_{ST} — спин-изоспиновая часть функции; $\rho = \mathbf{R}_{\alpha 1} - \mathbf{R}_{\alpha 2}$ — относительная координата двух α -кластеров; $\Phi_{00}(\rho) \equiv \Phi_{NLM}(\rho)$ — осцилляторная волновая фун-

кция взаимного движения кластеров с моментом L и его проекцией M . Последний множитель $\Psi_{000}(\mathbf{R}_0)$ — осцилляторная функция нулевых колебаний общего центра масс системы $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{R}_{\alpha 1} + \mathbf{R}_{\alpha 2})/2$. Он обязательно должен присутствовать в оболочечной волновой функции в соответствии с теоремой Эллиота и Скирма [11].

Поскольку оболочечная конфигурация s^4p^4 содержит четыре осцилляторных кванта, а внутренние функции кластеров не содержат осцилляторных квантов, то все четыре кванта этой конфигурации переносятся на волновую функцию взаимного движения кластеров $\Phi(\rho) \equiv \Phi_{4LM}(\rho)$. Таким образом, для основного состояния ядра ${}^8\text{Be}$ волновая функция $\Phi(\rho)$ совпадает с функцией $|4s\rangle$, т. е. имеет два узла. Состояния с числом квантов, меньшим четырех, в системе восьми нуклонов не реализуются (они отвечали бы запрещенным по принципу Паули конфигурациям s^3 , s^2p , s^2p^2 , s^2p^3), и, следовательно, состояния взаимного движения $\Phi_{NLM}(\rho)$ двух α -кластеров с числом квантов $N < 4$ запрещены. Иными словами, если мы подставим в (1) вместо $\Phi(\rho)$ функции $\Phi_{NLM}(\rho)$ с $N = 0, 1, 2, 3$, то под действием оператора антисимметризации правая часть (1) обратится тождественно в нуль. Итак, мы выделили в системе $\alpha + \alpha$ следующие запрещенные состояния по взаимному движению кластеров: $0s$, $2s$, $2d$; что касается состояний $1p$, $3p$, $3f$, то их следовало бы отбросить сразу, ибо ввиду статистики Бозе для α -частиц функция их взаимного движения $\Phi(\rho)$ должна быть четной. Обобщая приведенные выше рассуждения, можно дать качественное определение запрещенных состояний и описать способ их выявления. Запрещенными состояниями в системе кластеров $A_1 + A_2$ можно назвать такие состояния $\Phi_{NLM}(\rho)$ их взаимного движения, при подстановке которых кластерная функция системы $\hat{A} \{ \varphi_{N_1}(A_1) \varphi_{N_2}(A_2) \Phi(\rho) \}$ обращается в тождественный нуль. Здесь $\varphi_{N_1}(A_1)$ — внутренняя функция кластера A_1 , которая содержит N_1 осцилляторных квантов. Предполагается, что осцилляторные параметры $\hbar\omega$ кластеров A_1 и A_2 одинаковы. Частота $\hbar\omega$ связана с параметром a в функции (2) следующим образом: $u = r_0^{-2} = m\omega\hbar^{-1}$, где m — масса нуклона. Ясно, что если для системы $A_1 + A_2$ нуклонов принципом Паули разрешены состояния с числом квантов $N \geq N_{\text{мин}}$, то разрешенные состояния Φ_{NLM} должны обладать числом квантов $N \geq N_{\text{мин}} - N_1 - N_2$, а запрещены будут все состояния с $N < N_{\text{мин}} - N_1 - N_2$. Значения $N_{\text{мин}}$ нетрудно подсчитать, просуммировав осцилляторные энергии $A_1 + A_2$ нуклонов при размещении их на наименьших возможных оболочечных уровнях. Если $A_1 + A_2 \leq 4$, то $N_{\text{мин}} = 0$; при $A_1 + A_2 \leq 16$ $N_{\text{мин}} = A_1 + A_2 - 4$; при $A_1 + A_2 \leq 40$ $N_{\text{мин}} = 12 + 2(A_1 + A_2 - 16)$ и т. д. Итак, мы получили довольно простой способ для выделения запрещенных состояний. Однако он имеет тот недостаток, что справедлив только для осцил-

ляторных кластерных функций $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2)$, притом характеризующихся одинаковым «радиусом» r_0 . Кроме того, он требует уточнения даже и в этом идеализированном случае. Так, например, для системы $^{16}O + ^{16}O$, где $N_1 = N_2 = 12$, а $N_{\text{мин}} = 2 \cdot 32 - 20 = 44$, можно определенно сказать только, что запрещены состояния с $n < 20$. Однако более детальное рассмотрение [12] показывает, что в этой системе запрещены все состояния вплоть до $n = 24$. Поэтому желательно иметь четкий количественный метод выделения запрещенных состояний. Один из вариантов был предложен Фешбахом [13], а также Керманом с сотрудниками [14] и в последнее время широко использовался при рассмотрении различных кластерных систем многими авторами [2, 15—18]. Общее определение запрещенных состояний было предложено в работе [19] (см. также [20]) и обсуждается ниже.

Запрещенные состояния по Фешбаху. Пусть сталкиваются ядра A_1 и A_2 . Для простоты ограничимся одним упругим каналом и рассмотрим рассеяние этих ядер друг на друге в рамках метода резонирующих групп (МРГ) [1]. Если $\varphi(A_1)$ и $\varphi(A_2)$ — волновые функции сталкивающихся ядер, то волновая функция всей системы в МРГ имеет вид

$$\Psi \sim \hat{A} \{ \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi(\rho) \}, \quad (3)$$

где $\Phi(\rho)$ — функция взаимного движения фрагментов A_1 и A_2 . Подставляя функцию (3) в уравнение Шредингера и умножая его скалярно слева на вектор $\langle \varphi(A_1) \varphi(A_2) |$, получаем хорошо известное уравнение МРГ для функции $\Phi(\rho)$:

$$\langle \varphi(A_1) \varphi(A_2) | H - E | \hat{A} \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi(\rho) \rangle = 0. \quad (4)$$

Это уравнение является частным случаем уравнений так называемой единой теории ядерных реакций Фешбаха [13], если в последней пренебречь связью упругого канала со всеми остальными.

В формуле (4) внутренние антисимметричные функции свободных кластеров предполагаются известными и чаще всего они выбираются в гауссовой форме (2) или в виде низших осцилляторных оболочечных функций, если масса кластера > 4 . Оператор антисимметризации $\hat{A} = \sum (-1)^{P^*} P^*$, где P^* — перестановки, которые производят обмен одним, двумя и т. п. нуклонами между кластерами A_1 и A_2 . Причем внутри каждого кластера номера частиц после обмена должны быть расставлены в натуральном порядке. Число таких перестановок равно $(A_1 + A_2)! / A_1! A_2!$; для четных перестановок $P^* (-1)^{P^*} = +1$ и равно -1 для нечетных перестановок. Отметим, что из-за наличия этих перестановок, а также из-за вклада обменных сил уравнение (4) содержит нелокальные члены и является интегродифференциальным уравнением. В наличии нелокальных членов легко убедиться, рассмотрев

второе слагаемое в выражении (4):

$$\langle \varphi(A_1) \varphi(A_2) | \hat{A} \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi(\rho) \rangle \equiv (1 - \hat{K}) \Phi(\rho), \quad (5)$$

где \hat{K} — интегральное ядро перекрывания и имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{K}(\rho, \rho') = & \int d\tau \sum_{k=1}^{\min(A_1, A_2)} (-1)^{k+1} \binom{A_1}{k} \binom{A_2}{k} \times \\ & \times \langle \varphi(A_1) \varphi(A_2) | P_{A_1, A_1+A_2} P_{A_1-1, A_1+A_2-1} \dots \\ & \dots P_{A_1-k+1, A_1+A_2-k+1} | \varphi(A_1) \varphi(A_2) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $P_{r,s}$ — перестановка частиц с номерами r и s . Интегрирование по τ проводится следующим образом. Полный набор координат системы составляют координаты Якоби для кластера A_1 : $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{A_1-1}$, для кластера A_2 : $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{A_2-1}$ плюс координата $\rho = A_1^{-1} \sum \mathbf{r}_i - A_2^{-1} \sum \mathbf{r}_j$. Преобразуем этот набор, введя координату

$$\rho' = P_{A_1, A_1+A_2} \dots P_{A_1-k+1, A_1+A_2-k+1} \rho$$

(т. е. ρ' — это расстояние между группами нуклонов A_1 и A_2 после обмена k нуклонами между ними, и координата ρ' для каждого члена в сумме (6), вообще говоря, своя), а также сохранив из набора ξ_i, η_i те $A_1 + A_2 - 3$ координаты Якоби, которые вместе с ρ, ρ' образуют полный набор линейно-независимых $A_1 + A_2 - 1$ координат для системы $A_1 + A_2$. В (6) предполагается, что проведено интегрирование по координатам ξ_i ($i = 1, 2, \dots, A_1 + A_2 - 3$) и результирующее ядро \hat{K} зависит от двух переменных ρ, ρ' . Действие оператора \hat{K} на $f(\rho)$ определено обычным образом:

$$\hat{K}f(\rho) = \int d\rho' K(\rho, \rho') f(\rho'). \quad (7)$$

Ядро перекрывания K представляет самостоятельный интерес и оно будет подробнее рассмотрено ниже.

В заключение заметим, что для двух тождественных кластеров $A_1 = A_2$ выражение (6) и уравнение (4) в целом упрощаются, так как обмен всеми нуклонами в этом случае эквивалентен тождественной перестановке (если $f(\rho)$ обладает необходимой четностью: «+» для четного A_1 и «-» для нечетного A_1), обмен одним нуклоном эквивалентен обмену $A_1 - 1$ нуклонами и т. п. Таким образом, имеем

$$\langle \varphi(A_1) \varphi(A_1) | \hat{A} \varphi(A_1) \varphi(A_1) \Phi(\rho) \rangle = 2(1 - \hat{K}) \Phi(\rho). \quad (8)$$

Выражение для интегрального ядра \hat{K} аналогично (6), только индекс суммирования k принимает значения от 1 до $[A/2]$ ($[s]$ — целая часть числа s).

Согласно Фешбаху [13], ядро перекрывания K для двухкластерных систем обладает следующими общими свойствами: 1) K — эрмитово; 2) K является положительно определенным ядром; 3) $1 - K$ также положительно определенное ядро; 4) ядро K ограничено, т. е. $\iint d\rho d\rho' |K(\rho, \rho')|^2 \leq \text{const}$; 5) след ядра конечен.

Введем собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и собственные значения λ_n ядра K :

$$\hat{K}\Phi_n(\rho) = \lambda_n\Phi_n(\rho). \quad (9)$$

Тогда ядро K можно представить в виде

$$K(\rho, \rho') = \sum_n \lambda_n \Phi_n(\rho) \Phi_n^*(\rho') = \sum_n \lambda_n P_n, \quad (10)$$

где $P_n = \Phi_n \rangle \langle \Phi_n$ — оператор проектирования на состояние $\Phi_n(\rho)$. Естественно, что в разложение ядра (10) входят только те собственные векторы $\Phi_n(\rho)$, которые отвечают ненулевым собственным значениям.

Собственные значения ядра $1 - K$ равны $1 - \lambda_n$:

$$(1 - \hat{K})\Phi_n(\rho) = \mu_n\Phi_n(\rho), \quad \mu_n = 1 - \lambda_n. \quad (11)$$

Интересно обсудить смысл собственных значений и собственных функций ядра перекрывания. Фешбах [13] рассмотрел простой пример рассеяния нуклона на магическом ядре A , которое описывается волновой функцией в виде детерминанта Слетера:

$$\varphi(A) = (A!)^{-1/2} \hat{A} \{ \varphi_1(\mathbf{r}_1) \varphi_2(\mathbf{r}_2) \dots \varphi_A(\mathbf{r}_A) \}. \quad (12)$$

Подставляя эту функцию в (6) и учитывая, что $A_2 = 1$, $\varphi(A_2) = 1$ и интегрирование проводится по координатам нуклонов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A-1}$, а координаты ρ, ρ' совпадают в данном случае с координатами нуклонов: $\rho = \mathbf{r}_{A-1}$, $\rho' = \mathbf{r}_A$ (отвлекаемся на время от проблемы центра масс ядра), получаем

$$K = \int \sum_{i=1}^A \varphi_i(\rho) \varphi_i^*(\rho'). \quad (13)$$

Отсюда видно, что собственными функциями \hat{K} являются волновые функции φ_i , $i = 1, 2, \dots, A$, заполненных состояний ядра A и все они отвечают одному и тому же собственному значению $\lambda = 1$. Волновые функции незаполненных состояний φ_j , $j = A + 1, A + 2, \dots$, можно рассматривать тоже как собственные функции оператора \hat{K} , но отвечающие нулевым собственным значениям. Собственные значения $\lambda = 1$ требуют специального анализа. Для них имеем

$$(1 - \hat{K})\Phi_n = 0, \quad (14)$$

т. е.

$$\langle \varphi(A_1) \varphi(A_2) | \hat{A} \{ \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi_n \} \rangle = 0.$$

Следовательно, и

$$\langle \hat{A} \{ \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi_n \} | \hat{A} \{ \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi_n \} \rangle = 0$$

или

$$\hat{A} \varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi_n(\rho) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, состояния $\varphi(A_1) \varphi(A_2) \Phi_n(\rho)$ при антисимметризации обращаются тождественно в нуль, когда в качестве функции взаимного движения $\Phi(\rho)$ берется одна из собственных функций, отвечающих $\lambda = 1$. Следовательно, такие состояния запрещены принципом Паули. Поэтому ниже будем называть запрещенными состояниями любые собственные функции ядра перекрывания K , отвечающие его собственному значению $\lambda = 1$. Если собственное значение $\lambda = 0$, то назовем его полностью разрешенным состоянием, ибо для него оператор $1 - \hat{K}$, содержащий обменные члены, эквивалентен просто единичному оператору. Если $0 < \lambda < 1$, то такие состояния можно назвать частично разрешенными или полузапрещенными. Пример нуклона над магическим ядром показывает, что в этом случае собственные значения λ для одночастичных состояний совпадают с числами заполнения: запрещенными оказываются заполненные состояния ядра A , а незаполненные состояния являются вполне разрешенными, что согласуется с интуитивным определением запрещенных состояний, данным ранее, однако введение ядра перекрывания K позволяет провести более четкую градацию различных состояний взаимного движения фрагментов A_1 и A_2 . Таким образом, решающим для выделения запрещенных состояний в подходе Фешбаха является нахождение собственных значений и функций ядра перекрывания K . Поэтому целесообразно остановиться на этом вопросе подробнее.

Для того чтобы пояснить смысл указанных собственных значений и способ их вычисления, рассмотрим случай, когда ядра A_1 и A_2 характеризуются волновыми функциями трансляционно-инвариантной модели оболочек [8]: $|A_i N_i \alpha_i L_i S_i T_i\rangle$, $i = 1, 2$, с одной и той же частотой $\hbar\omega$ (α означает все дополнительные квантовые числа, характеризующие состояние).

Для простоты примем $L_1 = L_2 = 0$ и рассмотрим выражение

$$(1 - \hat{K}) \Phi_{NLM}(\rho) \equiv \langle A_1 N_1 \alpha_1 0 S_1 T_1;$$

$$A_2 N_2 \alpha_2 0 S_2 T_2 : ST | \hat{A} | A_1 N_1 \alpha_1 0 S_1 T_1, A_2 N_2 \alpha_2 0 S_2 T_2, NL(\rho) : LST \rangle,$$

(16)

где $\Phi_{NLM}(\rho) \equiv |NLM(\rho)\rangle$ — осцилляторная функция взаимного движения фрагментов A_1 и A_2 с тем же параметром $\hbar\omega$, что и ядер A_1, A_2 . Оператор \hat{A} диагонален по квантовым числам L, S, T и, кроме того, он не изменяет полного числа квантов в системе $N^* = N_1 + N_2 + N$. Поэтому после интегрирования по всем переменным, кроме ρ , в правой части (16) мы должны получить также осцилляторную функцию от ρ с числом квантов $N' = N^* - N_1 - N_2 = N$ и моментом $L' = L$, т. е. имеем

$$(1 - \hat{K}) \Phi_{NLM}(\rho) = (1 - \lambda) \Phi_{NLM}(\rho), \quad (17)$$

и собственными функциями ядра перекрывания K являются осцилляторные функции $\Phi_{NLM}(\rho)$. Для получения собственного значения λ следует учесть соотношение [8]:

$$\begin{aligned} & \hat{A} |A_1 N_1 \alpha_1 0 S_1 T_1, A_2 N_2 \alpha_2 0 S_2 T_2, NL : LST\rangle = \\ & = (A_1 + A_2)! (A_1! A_2!)^{-1} \sum_{\alpha} \langle A_1 + A_2 N^* \alpha LST | A_1 N_1 \alpha_1 0 S_1 T_1; \\ & \quad A_2 N_2 \alpha_2 0 S_2 T_2, NL | A_1 + A_2 N^* \alpha LST \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Комбинируя (16) и (18), находим

$$1 - \lambda = \sum_{\alpha} S_{A_1 A_2}^{\alpha}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} S_{A_1 A_2}^{\alpha} = & (A_1 + A_2)! (A_1! A_2!)^{-1} \langle A_1 + A_2 N^* \alpha LST | A_1 N_1 \alpha_1 0 S_1 T_1, \\ & A_2 N_2 \alpha_2 0 S_2 T_2, NL \rangle^2 \end{aligned} \quad (20)$$

— спектроскопический фактор для виртуального развала составного ядра в состоянии $|A_1 + A_2 N^* \alpha LST\rangle$ по каналу $A_1 + A_2$ [8]. Методика расчета генеалогических коэффициентов $\langle | \rangle$ в трансляционно-инвариантной модели оболочек (ТИМО), входящих в правые части (18) и (19), развита в [8], поэтому формулы (19) и (20) позволяют находить собственные значения λ ядра K . Обобщение этих результатов для $L_1, L_2 \neq 0$, а также на случай связанных каналов и многокластерных систем содержится в [2].

Духовые состояния как обобщение понятия запрещенных состояний. Хотя теория запрещенных состояний в ядерных системах, развитая Фешбахом [13] и Керманом с сотрудниками [14], оказалась весьма полезной, последующие исследования показали, что подобный подход содержит и существенные недостатки, связанные с появлением почти запрещенных ($\lambda_n \sim 1$) и полузапрещенных состояний. В частности, было обнаружено [15–18], что присутствие почти запрещенных состояний приводит к появлению при весьма высоких энергиях $E_{ц.м} \sim 40$ МэВ необычных резонансов, которые не имеют ясной физической интерпретации и очень напоминают хорошо известные ложные резонансы, возник-

кающие при применении вариационных принципов Кона — Хюльтена к задачам рассеяния [19]. Но гораздо более существенным недостатком является то, что теория Фешбаха — Кермана целиком основана на методе резонирующих групп или на кластерном приближении для полной волновой функции системы вида (1), т. е., по существу, на адиабатической модели (с обменом), тогда как понятие запрещенных (принципом Паули) состояний много шире и не должно быть связано, вообще говоря, с частными приближениями для волновых функций.

Поэтому представляет большой интерес исследовать, чему в строгой теории многочастичных систем соответствуют запрещенные состояния в МРГ. Такая возможность имеется и основана на строгой теории многочастичных систем Фаддеева — Якубовского. Именно, следует взять задачу для трех-четырёх нуклонов и выяснить в рамках строгой теории, какого рода запрещенные состояния появляются в таких системах. Найденное подобным (т. е. строгим) путем соответствие можно уже перенести на другие ядерные системы. Такое исследование было проделано [20, 21] для nd -рассеяния (в канале с $S = 3/2$) и для dd -рассеяния в канале с $S = 2$. Ниже кратко изложены основные результаты.

Рассмотрим сначала nd -рассеяние в квартетном канале. Поскольку спины всех трех нуклонов здесь параллельны, то орбитальная волновая функция должна быть антисимметрична при перестановке двух нейтронов, т. е. во взаимодействии двух нейтронов нужно учитывать лишь нечетные парциальные волны, а, как известно, при низких энергиях этим взаимодействием можно пренебречь. Остальные два nr -взаимодействия будут триплетными 3S . При этих условиях полная орбитальная волновая функция разбивается на сумму двух фаддеевских компонент (согласно двум nr -взаимодействиям):

$$\Psi_{c, a} = \psi_{c, a}^{(1)} \pm \psi_{c, a}^{(2)}, \quad (21)$$

где плюс отвечает пространственно-симметричной орбитальной функции (физически нереализуемой), а минус — антисимметричной, и эти знаки соответствуют индексам c и a .

Важной особенностью фаддеевского подхода является то, что для симметричной $\psi_c^{(1)}$ и антисимметричной $\psi_a^{(1)}$ фаддеевских компонент уравнения получаются разными (ядра для c - и a -случаев отличаются знаком).

Будем называть физически нереализуемый канал с симметричной орбитальной функцией духовым, а связанные состояния в этом канале — духовыми связанными состояниями, или просто духами. Отметим специфические особенности вопроса о перестановочной симметрии в рамках теории Фаддеева — Якубовского (и любой другой математически корректной теории многочастичного рассеяния). Дело в том, что, хотя полная шредингеровская функ-

ция Ψ обладает той или иной перестановочной симметрией, ее фаддеевские компоненты $\psi^{(i)}$ — а разбиение Ψ , подобное (21), на каналные компоненты имеется в любой «хорошей» теории — не обладают определенной перестановочной симметрией. И тип перестановочной симметрии решений определяется в такой теории структурой интегрального ядра, причем процедура нахождения ядра, отвечающего решению данной симметрии, включает в себя разбиение и редукцию матричного интегрального ядра на субматрицы, отвечающие неприводимым представлениям группы перестановок. В общем случае такой анализ еще не сделан, однако для частных случаев, рассматриваемых здесь, он может быть без труда выполнен [20, 21].

Итак, система уравнений Фаддеева для компонент $\psi_{c,a}^{(i)}$ имеет вид

$$\psi_{c,a}^{(i)} = \varphi^{(i)} \pm G_0 T_i P_{12} \psi_{c,a}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

где $\psi_{c,a}^{(2)} = \pm P_{12} \psi_{c,a}^{(1)}$, причем знак плюс в (21) — (22) отвечает духовому каналу, а минус — физическому; P_{12} — оператор перестановки двух тождественных нейтронов; $G_0 \equiv (E - H_0)^{-1}$ — свободная функция Грина, а T_i — t -матрица триплетного взаимодействия в канале i , причем $T_2 = P_{12} T_1 P_{12}$. Функция начального состояния $\varphi^{(i)} = \varphi_{23}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, где φ_{23} — волновая функция дейтона, а \mathbf{q}_0 — импульс падающего нейтрона.

Далее, для задачи рассеяния важнейшее значение имеет знак и норма ядра $K = G_0 T_i P_{12}$, которая и определяет интенсивность взаимодействия. А норма ядра зависит в свою очередь от величины его собственных значений, определяемых матричным уравнением

$$\hat{K}_2(E) \hat{\chi}_n^{c,a} = \pm \alpha_n(E) \hat{\chi}_n^{c,a}, \quad (23)$$

где матричное ядро \hat{K}_2 системы (23) есть, как хорошо известно [46], оператор

$$\hat{K}_2(E) = \begin{pmatrix} 0 & G_0(E) T_1(E) \\ G_0(E) T_2(E) & 0 \end{pmatrix},$$

и $\hat{\chi}_n^{c,a}$ — двухкомпонентные столбцы, причем знак плюс в (23) отвечает индексу «с», а минус — индексу «а». Связанным состояниям в физическом канале (а-канал) отвечают собственные значения $\alpha_n(E) = -1$, а в духовом канале (с-канал) отвечают $\alpha_n(E) = +1$. И вот конкретный расчет [20] позволил обнаружить в духовом канале связанное состояние с энергией $E_G \approx -5,5$ МэВ, которое является не чем иным, как запрещенным принципом Паули квартетным тритоном со спином $3/2$ и симметричной пространственной частью волновой функции. В физическом канале (где знак ядра отвечает отталкиванию) связанных состояний нет, т. е.

ядро $K = G_0 T_1 P_{12}$ не имеет больших отрицательных собственных значений. Но поскольку система уравнений Фаддеева (22) эквивалентна исходному уравнению Шредингера, то появление единичного собственного значения фаддеевского ядра в духовом канале означает, что в полном гамильтониане системы появляется (собственное) связанное состояние запрещенной симметрии — «дух», что можно было предвидеть без всяких вычислений. Действительно, если рассмотреть систему $p + 2n$ в симметричном пространственном состоянии с двумя триплетными 3S -взаимодействиями, то совершенно ясно, что в этой системе есть связанное состояние с энергией $E_G \sim 2\epsilon_d$, где ϵ_d — энергия связи дейтрона (равенство $E_G = 2\epsilon_d$ имело бы место, если бы протон был бесконечно тяжелым).

Какое же значение играют духовые состояния в теории рассеяния?

Во-первых, с точки зрения влияния на задачу рассеяния духи играют ту же самую роль, что и физические связанные состояния. В частности, духи вызывают такую же расходимость борновского ряда (для уравнений Фаддеева—Якубовского), что и физические связанные состояния, а волновая функция рассеяния в физическом канале должна быть ортогональна к волновым функциям как физических связанных состояний, так и духов.

Во-вторых, именно духовые состояния, или их форм-факторы (интегралы перекрывания с функциями кластеров), предпочтительнее использовать в приближенных подходах типа Orthogonality Condition Model (ОСМ) вместо запрещенных состояний по Фешбаху и это, вероятно, позволит избежать ряда трудностей и неясностей, появляющихся при исключении полузапрещенных и почти запрещенных состояний из задачи рассеяния [15—18].

То же самое рассмотрение можно провести и для dd -рассеяния в квинтетном канале в рамках уравнений Якубовского, где опять имеется духовое связанное состояние (возможно, не единственное) с симметричной орбитальной волновой функцией и энергией $E_G \approx -15$ МэВ (духовая α -частица), которое приведет к расходимости борновского ряда для уравнений Якубовского и т. д. [20, 21]. Обобщение на случай произвольного числа частиц очевидно, поскольку N -частичные уравнения Фаддеева—Якубовского динамически эквивалентны N -частичному уравнению Шредингера, а спектр ядер N -частичных уравнений Фаддеева—Якубовского должен точно соответствовать спектру N -частичного гамильтониана, как это было показано выше для $3N$ -системы. Поэтому ясно, что в строгой многочастичной теории запрещенным состояниям, появляющимся в МРГ, соответствуют истинные связанные состояния полного гамильтониана с симметрией, запрещенной принципом Паули. И при таком определении всякая зависимость от конкретных приближений, сделанных для волновой функции

рассеяния, пропадает. Хотя, конечно, в практических расчетах (с $N \geq 5$) те или иные приближения будут необходимы.

Теперь сравним определение запрещенных состояний по Фешбаху (9) с тем, что следует из строгой теории (23) с $\alpha_n(E) = \pm 1$. В обоих случаях запрещенные состояния определяются как собственные функции, отвечающие единичным собственным значениям ($\lambda_n = 1$ в первом случае и $\alpha_n(E) = 1$ — во втором) некоторого интегрального ядра. Однако по МРГ эти состояния определяются чисто структурным ядром перекрывания, не зависящим ни от энергии, ни от динамики взаимодействия (скажем, от характера сил между частицами, от положения порогов и т. п.). В строгой же теории появляются собственные функции фаддеевских ядер, которые зависят и от энергии и от конкретных динамических факторов, что гораздо более предпочтительно, хотя и труднее в реализации. Поэтому в строгой теории никаких полузапрещенных состояний не возникает, ибо полный гамильтониан либо содержит, либо не содержит связанные состояния запрещенной симметрии. Возможны лишь виртуальные или резонансные запрещенные состояния; но они относятся, строго говоря, уже к континууму, а не к дискретному спектру. Появление же в ряде случаев богатого спектра полузапрещенных состояний по Фешбаху связано, вероятно, с попыткой трактовать задачу многочастичного рассеяния в конечно-мерном пространстве квадратично-интегрируемых функций, что всегда приводит к появлению сингулярностей, число которых равно размерности модельного пространства. Действительно, если написать представление для волновой функции рассеяния в вариационном принципе Кона — Хюльтена [19] в виде

$$\Psi = \Psi_{\text{асимп}} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad (24)$$

где φ_i — квадратично-интегрируемые функции, а $\Psi_{\text{асимп}}$ — асимптотическая часть волновой функции, то амплитуда рассеяния, найденная из (24), будет иметь нефизические сингулярности в точках по энергии, отвечающих собственным значениям матрицы гамильтониана $\langle \varphi_i | H | \varphi_j \rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ [19]. Совершенно аналогичные сингулярности возникают при попытке трактовать полузапрещенные состояния как истинно запрещенные [15, 18].

Укажем в заключение, что введение духовых состояний в теорию многочастичного рассеяния очень плодотворно и с практической точки зрения, поскольку позволяет объяснить рассеяние для систем типа nd , dd , $n^3\text{He}$ и т. п. в тех каналах, где доминирует принцип Паули, посредством унитарной ортогонализации плоской волны (см. ниже) к духовому связанному состоянию [20, 21]. При этом в указанных случаях можно даже написать простую аналитическую формулу для амплитуды рассеяния на и вне массовой поверхности [20, 21].

2. ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Модель ортогональных условий. В 1969 году Саито [22] предложил модель ортогональных условий ОСМ в качестве замены очень сложных обменных членов, появляющихся в МРГ. При этом он руководствовался следующими соображениями. Рассмотрим снова основное МРГ-уравнение для функции рассеяния двух кластеров $\chi(\mathbf{R})$:

$$(T_D + V_D - E)\chi(\mathbf{R}) = \langle \varphi_a \varphi_b | T + \sum_{i>j} V_{ij} - E \left| \frac{1}{N!} \sum_P (-1)^P P(\varphi_a \varphi_b \chi(\mathbf{R})) \right\rangle, \quad (25)$$

где правая часть представляет собой обменное ядро, обусловленное антисимметризацией полной волновой функции. Как раз из-за этих обменных членов в уравнении (25) появляются так называемые лишние решения $\chi_\alpha(\mathbf{R})$, отвечающие собственным функциям ядра перекрывания $K(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ с единичными собственными значениями. Выше указывалось, что эти лишние решения соответствуют запрещенным принципом Паули состояниям. Саито, а также другие исследователи [23] установили, что характерные оболочечные осцилляции радиальных волновых функций в области перекрывания кластеров появляются как раз при исключении этих лишних решений из задачи рассеяния, т. е. при ортогонализации волновой функции рассеяния ко всем $\chi_\alpha(\mathbf{R})$. Тогда естественным представляется следующий шаг, сделанный Саито, который предложил вовсе отбросить правую часть в (25), заменив ее на дополнительное условие ортогональности решения (25) с нулевой правой частью ко всем χ_α , т. е. заменив (25) на следующее уравнение:

$$(T_D + V_D - E)\chi(\mathbf{R}) = 0 \quad (26)$$

с дополнительным условием ортогональности

$$\langle \chi_\alpha | \chi \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Система (26) — (27) и представляет собой модель ортогональных условий Саито. При этом смысл решения (26) — (27) следует понимать не как выбор из всех решений однородного уравнения (26) решений, удовлетворяющих условию ортогональности, а как решение уравнения (26) в подпространстве, ортогональном к векторам χ_α , $\alpha = 1, \dots, n$, т. е. решение уравнения

$$Q(T_D + V_D - E)Q\chi = 0, \quad (28)$$

где $Q = 1 - \Gamma$ — проектор на подпространство разрешенных состояний, а $\Gamma = \sum_{\alpha=1}^n |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\alpha|$ — проектор на запрещенное подпространство.

Для решения (28) Саито предложил использовать метод множителей Лагранжа, который сводится здесь к замене (28) на соответствующее уравнение с правой частью:

$$(T_D + V_D - E)\chi = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\chi_{\alpha}\rangle, \quad (29)$$

где множители Лагранжа λ_{α} следует брать такими, чтобы решения (29) удовлетворяли требуемым условиям ортогональности к χ_{α} . Это привело Саито к результату

$$\lambda_{\alpha} = \langle \chi_{\alpha} | T_D + V_D | \chi \rangle; \quad (30)$$

и окончательно он получил для ОСМ уравнение вида [22]

$$(T_D + V_D - E)\chi = \sum_{\alpha} |\chi_{\alpha}\rangle \langle \chi_{\alpha} | T_D + V_D | \chi \rangle. \quad (31)$$

Легко убедиться, что при $E \neq 0$ любое решение (31) удовлетворяет требуемому свойству ортогональности. Однако при $E = 0$ возникает неоднозначность, поскольку в этой точке возможно примешивание (с произвольными весами) к решению χ лишних решений χ_{α} (запрещенных состояний). Это означает, что при нулевой энергии нарушается свойство ортогональности решения уравнения Саито (31) к запрещенным состояниям. Ниже мы увидим, что указанное обстоятельство является отражением более глубокого факта, а именно, что уравнение Саито несправедливо вне энергетической поверхности и что метод множителей Лагранжа неудобен для последовательного и полного учета условий ортогональности. Для решения последней задачи очень эффективен метод ортогонализирующих псевдопотенциалов, предложенный в [24]. Но прежде чем изложить технику ортогонального проектирования, обсудим кратко результаты, полученные с помощью ОСМ.

$\alpha\alpha$ -Рассеяние. Применение ОСМ к $\alpha\alpha$ -рассеянию эффективно по следующим обстоятельствам: во-первых, α -частица очень устойчива, и поэтому применение к $\alpha\alpha$ -системе метода резонансных групп, который и служит основой модели Саито, физически обоснованно; во-вторых, спектр собственных значений ядра перекрывания Фешбаха для $\alpha\alpha$ -системы (см. § 2) очень хорошо подходит для применения ОСМ, поскольку в этой системе имеются строго единичные собственные значения (СЗ), а остальные СЗ малы; в-третьих, здесь отсутствуют спиновые эффекты, усложняющие рассмотрение. Сравнение экспериментальных значений с расчетом в рамках ОСМ-подхода для $\alpha\alpha$ -фазовых сдвигов с $l=0, 2, 4$ показано на рис. 1 [25], из которого видно, что ОСМ дает весьма хорошее описание фазовых сдвигов, а также волновых функций рассеяния, причем простота и наглядность описания несоизмеримы с тем, что дает МРГ.

Добавим, что хорошая точность, даваемая ОСМ в $\alpha\alpha$ -задаче, позволила даже поставить вопрос об извлечении константы связи σ -мезона с нуклоном из данных по $\alpha\alpha$ -рассеянию [25]. В дальнейшем модель ортогональных условий была использована и для других двухкластерных систем [23] типа $\alpha^{12}\text{C}$, $\alpha^{16}\text{O}$ и т. п., а также для трехкластерных систем, в частности, для 3α -системы [2]. Мы

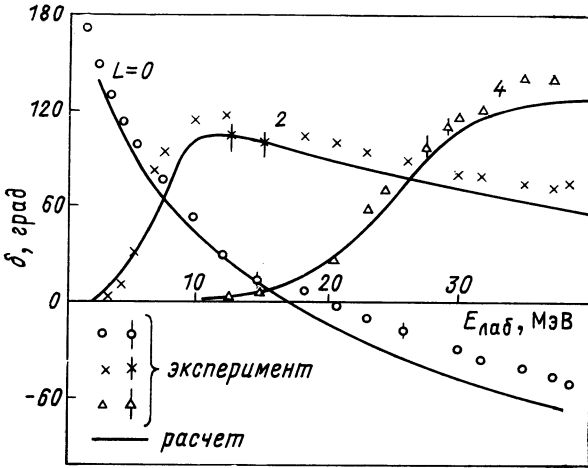


Рис. 1. Сравнение экспериментальных и рассчитанных на основе ОСМ-метода $\alpha\alpha$ -фазовых сдвигов

обсуждаем этот случай в разд. 5. Однако применение ОСМ для систем типа $\alpha^{12}\text{C}$, $\alpha^{16}\text{O}$ и других в отличие от системы $\alpha\alpha$ встречает уже некоторые затруднения, связанные с характером спектра собственных значений γ_α ядра перекрывания. Как было показано в [16, 17, 23], для системы двух кластеров с массовыми числами $A > 4$ или со значительно отличающимися осцилляторными радиусами (что и имеет место для систем типа $\alpha^{16}\text{O}$) спектр собственных значений ядра $K(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ имеет плавный характер. (см., например, рис. 2, где показан спектр собственных значений γ_N для системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$). В этом спектре нет строго запрещенных и строго разрешенных состояний, а все собственные функции соответствуют так называемым полузапрещенным состояниям, которым на оболочечном языке отвечают частично занятые состояния. К сожалению, для этих случаев модель ортогональных условий в своем первоначальном виде неприменима и, казалось бы, следует опять вернуться к громоздкому МРГ рассмотрению. Однако более детальный и строгий анализ, основанный на точных многочастичных интегральных уравнениях Фаддеева и Фаддеева —

Якубовского, показывает, что это не так, и оказалось возможным обобщить и уточнить ОСМ на большинство случаев рассеяния двух, а также и большего числа кластеров [7, 21, 28].

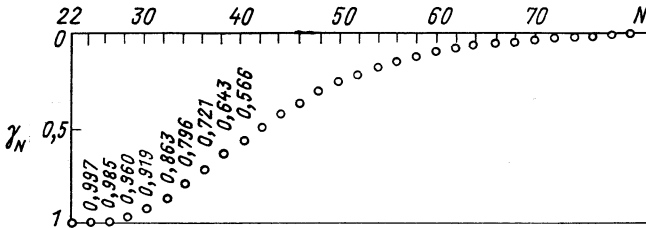


Рис. 2. Спектр собственных значений ядра антисимметризации χ_N для системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ (N — номер собственного значения)

Метод ортогонального проектирования, основанный на ортогонализующих псевдопотенциалах (ОПП). Идея ОПП-метода очень проста и тесно связана с концепцией штрафных функций в теории динамического программирования. Пусть какая-либо часть пространства (в нашем случае — это часть гильбертова пространства, а в теории оптимизации — это часть пространства параметров, по которым происходит оптимизация) является запрещенной (или недоступной для динамической системы). Тогда вместо того, чтобы непосредственно решать задачу в ортогональном подпространстве \mathcal{H}_Q полного пространства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Gamma \oplus \mathcal{H}_Q$, удобнее ввести в рассматриваемое уравнение штрафную функцию, которая при решении уравнения будет «вытеснять» динамическую систему в разрешенное подпространство \mathcal{H}_Γ . Для уравнения Шредингера (26) с дополнительными условиями (27) удобной штрафной функцией является отталкивающая сепарабельная добавка к гамильтониану

$\lambda\Gamma$, где проектор $\Gamma = \sum_{\alpha=1}^n |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\alpha|$ содержит сумму по [запрещен-

ным состояниям, а константу λ следует в конечном результате устремить к бесконечности. В результате предельного перехода $\lambda \rightarrow \infty$ получаем решение, строго ортогональное запрещенному подпространству \mathcal{H}_Q . Реализуя теперь эту программу, введем псевдогамильтониан

$$\tilde{H} = H + \lambda\Gamma$$

и найдем решение уравнения Шредингера (УШ)

$$(\tilde{H} - E)\tilde{\Psi}_E = 0. \tag{32}$$

Легко получить

$$\tilde{\Psi}_E = \Psi_E + c(\lambda)G(E)\chi_\alpha, \tag{33}$$

где константа

$$c(\lambda) = \lambda \langle \chi_0 | \Psi_E \rangle / (1 - \lambda \langle \chi_0 | G(E) | \chi_0 \rangle),$$

а $G(E) = (E - H)^{-1}$ — функция Грина (ФГ) исходного гамильтониана; для простоты мы рассматриваем случай, когда имеется всего одно запрещенное состояние χ_0 . Обобщение для нескольких запрещенных состояний очевидно. Функция Ψ_E есть решение исходного УШ. В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = -\langle \chi_0 | \Psi_E \rangle / \langle \chi_0 | G | \chi_0 \rangle,$$

а примесь функции χ_0 к решению $\tilde{\Psi}_E$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \chi_0 | \tilde{\Psi}_E \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \chi_0 | \Psi_E \rangle (1 - \lambda \langle \chi_0 | G(E) | \chi_0 \rangle)^{-1} = 0, \quad (34)$$

т. е. при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем требуемую ортогональность решения $\tilde{\Psi}_E$ к χ_0 . Тогда решение (32) можно записать в явном виде:

$$\tilde{\Psi}_E = \Psi_E - G | \chi_0 \rangle \langle \chi_0 | \Psi_E \rangle / \langle \chi_0 | G | \chi_0 \rangle = \Psi_E - G \Gamma (G \Gamma)^{-1} \Gamma \Psi_E. \quad (35)$$

Легко видеть, что уравнение Сайто дает при $E \neq 0$ то же решение для волновой функции рассеяния, что и (35). Однако, если рассматривать соответствующие операторы вне массовой поверхности, то техника проектирования с помощью ОПП приводит в отличие от ОСМ-уравнения (31) к другим результатам.

Рассмотрим для примера проектирование ФГ для уравнения (32):

$$\tilde{G}_\lambda(E) = (E - \tilde{H})^{-1} = (E - H - \lambda \Gamma)^{-1}.$$

Используя далее стандартные резольвентные тождества, находим

$$\tilde{G}_\lambda = G + \lambda G \Gamma \tilde{G}_\lambda. \quad (36)$$

В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ получаем

$$\tilde{G} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{G}_\lambda = G - G \Gamma (G \Gamma)^{-1} \Gamma G, \quad (37)$$

где обратный оператор $(G \Gamma)^{-1}$ определен только в подпространстве \mathcal{H}_Γ .

Легко убедиться, что спроектированная ФГ \tilde{G} обладает требуемым свойством ортогональности, ибо $\Gamma \tilde{G} = 0$, и при $\lambda \rightarrow \infty$ она не имеет лишних полюсов в физической области. Однако, если спроектировать исходный гамильтониан H на разрешенное подпространство \mathcal{H}_Q , как это делается в подходе Сайто, то соответствующая резольвента

$$G_S = (E - QHQ)^{-1} \quad (38)$$

удовлетворяет другому уравнению

$$G_S = G - G(\Gamma H + H \Gamma - \Gamma H \Gamma) G_S,$$

откуда получаем

$$G_S = G - GG(ΓGΓ)^{-1}GG + Γ/E = \tilde{G} + Γ/E,$$

т. е. резольвента уравнения Сайто отличается от найденной с помощью ОПП на дополнительный член $Γ/E$, который при $E = 0$ нарушает свойство ортогональности к \mathcal{H}_G . Однако, если вместо (38) обратить оператор $Q(E - H)Q$, т. е. обратить оператор $(E - H)$ в ортогональном подпространстве (а ОПП-техника как раз позволяет это сделать простым образом), то легко найдем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G} &= Q[Q(E - H)Q]^{-1}Q; \\ \tilde{G}[Q(E - H)Q] &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Последнее равенство есть аналог обычного тождества

$$(E - H)G = I$$

в ортогональном подпространстве \mathcal{H}_Q . Таким образом, излагаемая техника ортогонального проектирования дает (в отличие от проекционного формализма Фешбаха) удобный способ нахождения обратных операторов в ортогональном подпространстве. Дальнейшее обобщение этого подхода на многочастичный случай дано в последующих разделах.

Принцип Паули и редукция взаимодействия. Учет принципа Паули в задаче о рассеянии составных частиц приводит к интереснейшему физическому следствию — своеобразной редукции взаимодействия. Эта редукция проявляет себя в двух важных аспектах: во-первых, существенно ослабляется эффективное взаимодействие в системе; и второй эффект, тесно связанный с первым, состоит в значительном ослаблении чувствительности результатов (т. е. фазовых сдвигов, волновых функций и т. п.) к деталям потенциалов взаимодействия между частицами, особенно во внутренней области, т. е. там, где это взаимодействие хуже всего известно и вообще имеет смысл лишь эффективного описания. В частности, для ОСМ детальное поведение потенциала прямого взаимодействия V_D во внутренней области очень слабо сказывается на результатах. Оба эти следствия, по существу, — проявление хорошо известного фундаментального факта, что в системе фермионов принцип Паули приводит к существенному возрастанию роли кинетической энергии и соответственно ослаблению роли потенциальной энергии взаимодействия. Именно с указанным обстоятельством, в частности, связана применимость модели почти свободных электронов в теории металлов. Этот же фундаментальный факт положен в основу подходов Липмана—Шея [29] и Берка—Чандра [30], описывающих рассеяние электронов на атомах и молекулах. В задаче же рассеяния двух составных ядерных частиц, обсуждаемой здесь, это важнейшее следствие принципа Паули лучше всего проиллюстрировать следующим образом.

Запишем уравнение Липмана — Швингера, соответствующее УШ (32) для проектированной волновой функции $\tilde{\Psi}$.

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_0 + \tilde{G}_0 V \tilde{\Psi}, \quad (40)$$

где

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 - G_0 |\chi_0\rangle \langle \chi_0 | \Psi_0\rangle / \langle \chi_0 | G_0 | \chi_0\rangle$$

есть решение свбодного УШ в ортогональном подпространстве \mathcal{H}_Q , а

$$\tilde{G}_0 = G_0 - G_0 |\chi_0\rangle \langle \chi_0 | G_0 / \langle \chi_0 | G_0 | \chi_0\rangle = G_0 - G_0 \Gamma (\Gamma G_0 \Gamma)^{-1} \Gamma G_0 \quad (41)$$

— соответствующая функции $\tilde{\Psi}_0$ свободная ФГ. Отметим, что последнее выражение для \tilde{G}_0 справедливо в общем случае, т. е. когда проектор Γ имеет любую размерность. Как показывает расчет [27, 31], уже нулевое приближение $\tilde{\Psi}_0$ и соответствующая ей амплитуда

$$\tilde{A}_0 = \Gamma / \Gamma G_0 \Gamma \quad (42)$$

в ряде случаев удовлетворительно описывают точные МРГ-фазовые сдвиги и соответствующие волновые функции. К тому же амплитуда \tilde{A}_0 является унитарной, а функция $\tilde{\Psi}_0$, будучи ортогональной ко всем запрещенным состояниям (включенным в Γ), имеет нужное число узлов во внутренней области, и рассчитанный для нее фазовый сдвиг соответствует амплитуде \tilde{A}_0 . Поскольку как $\tilde{\Psi}_0$, так и \tilde{A}_0 отвечают рассеянию, вызванному наложением условий ортогональности, они получили название [31] соответственно волновой функции и амплитуды ортогонального рассеяния. Если теперь амплитуда \tilde{A}_0 , *целиком обусловленная принципом Паули*, включает в себя значительную часть полной амплитуды, то остаток, зависящий от динамики, т. е. разность $A - \tilde{A}_0$ между точной амплитудой и амплитудой ортогонального рассеяния, будет давать относительно малый вклад и, как результат, точная амплитуда будет гораздо слабее зависеть от деталей потенциалов взаимодействия, чем соответствующая амплитуда без учета условий ортогонализации. При этом существенно, что внешняя часть эффективного взаимодействия, которая слабо затрагивается ортогонализацией, может быть вычислена с достаточной точностью как в атомной, так и в ядерной физике (см. следующий раздел). Отметим далее, что поскольку для эрмитова гамильтониана волновые функции рассеяния всегда ортогональны волновым функциям дискретного спектра вне зависимости от того, запрещенные или разрешенные состояния имеются в виду, то та же техника ортогонального проектирования будет эффективна, если в проек-

тор Γ включить и известные (например, из модели оболочек) *физически наблюдаемые связанные состояния*. В этом случае чувствительность задачи рассеяния (составных частиц) к неопределенностям выбора оптического потенциала еще значительно уменьшится.

Таким образом, мы приходим к новому взгляду на взаимодействие составных частиц (или нуклона с ядром) и к соответствующему этому взгляду новому подходу, позволяющему существенно прояснить и уточнить используемые в данной области интуитивные феноменологические модели. Частично этот новый подход уже реализован в атомной физике для решения задачи о рассеянии электронов на атомах и молекулах.

Рассеяние электронов на атомах и молекулах. В 1960 г. Липман и Шей [29] предложили оптическую модель для рассеяния электронов на атомах*, аналогичную модели Сайто для ядерных частиц. В их работе сформулирован некоторый общий взгляд на проблему рассеяния электронов на составных частицах, который в своей сфере шире подхода ОСМ и который послужил основой для ряда позднейших исследований более сложных проблем, например для рассеяния электронов на молекулах (см. ниже). Липман и Шей исходили из тех же соображений, которые описаны выше в этом разделе. Именно они опираются на то, что дальнедействующая часть электрон-атомного оптического потенциала известна и равна

$$V_l(r) = V_K(r) + V_{II}(r), \quad (43)$$

где

$$V_K(r) = -e^2(1/a_0 + 1/r) \exp(-2r/a_0)$$

представляет собой экранированный кулоновский потенциал (a_0 — боровский радиус), а $V_{II}(r)$ — поляризационный потенциал:

$$V_{II}(r) = -\alpha/2r^4, \quad (44)$$

где α — известная из эксперимента дипольная поляризуемость**. Поляризационный потенциал (44) — асимптотическая часть ($r \rightarrow \infty$) поправки первого порядка (теории возмущений) к электрон-атомному потенциалу, рассчитанной в адиабатическом приближении. Поведение же оптического потенциала во внутренней области неизвестно и даже более того — в этой области строгое представление об оптическом потенциале вряд ли имеет смысл, за исключением, быть может, эффективного описания волновой функции относительного движения фрагментов во внутренней области. Поэтому вместо построения оптического потенциала в указанной

* Конкретно они рассматривали рассеяние электронов на атомах водорода.

** Для атома водорода $\alpha = 4,5$.

области целесообразно наложить на волновую функцию рассеяния условия ортогональности к точным многочастичным состояниям дискретного спектра, причем следует учитывать как разрешенные (т. е. физически наблюдаемые), так и запрещенные состояния. Так, для eH -рассеяния в s -волне следует ортогонализировать волновые функции рассеяния в триплетном канале к $1s$ -занятой

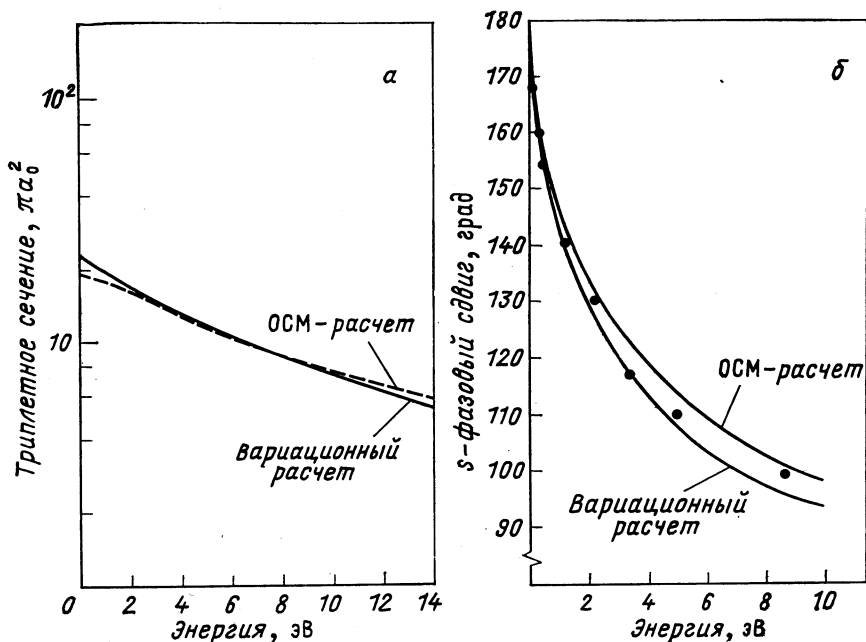


Рис. 3. Сечение eH -рассеяния в триплетном канале (а) и сравнение теоретических (кривые) и экспериментальных s -волновых фазовых сдвигов (точки) триплетного eH -рассеяния (б)

орбитали атома водорода, а в синглетном канале — к единственному связанному состоянию иона H^- . Рассеяние же в высших парциальных волнах «чувствует» лишь «хвост» оптического потенциала, который адекватно описывается конструкцией типа (43). Таким образом, приходим к очень наглядной и простой процедуре построения приближенного оптического потенциала. Причем основной смысл придается при таком подходе не столько самому оптическому потенциалу, сколько построению приближенной волновой функции рассеяния. При необходимости, и это весьма важно, полученную функцию (или соответствующую амплитуду рассеяния) можно далее уточнить с помощью какого-либо подходящего ва-

рационного принципа*, для того чтобы учесть поляризацию системы и неадиабатические эффекты. Результаты расчетов для eH -рассеяния и сравнение полученных результатов с экспериментом показаны на рис. 3, где показаны также вариационные поправки к найденной функции (и амплитуде) рассеяния. Хорошо видно, что поправки малы и основной вклад вносит ОСМ-результат.

При рассеянии электронов на молекулах приближенный учет принципа Паули с помощью ортогонализации к занятым молекулярным орбиталам совершенно необходим, поскольку даже при игнорировании эффектов обмена задача резко усложняется по сравнению с атомным случаем. Поэтому значительное усложнение уравнений из-за строгой трактовки обменных эффектов в большинстве случаев приводит к чересчур громоздким уравнениям даже для современных высокопроизводительных ЭВМ. Указанную трудность обычно обходят следующим образом. Точную трактовку обменных эффектов используют лишь в 1—2 наиболее существенных каналах. В остальных каналах эти эффекты трактуют приближенно, т. е. с помощью ортогонализации. После разложения всех потенциалов взаимодействия (падающего электрона с молекулой) и соответствующих волновых функций рассеяния по парциальным волнам приходят к следующей системе уравнений:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_i(l_i+1)}{r^2} + k^2 \right) \mathcal{U}_{l_i l_j}(r) - \sum_{l_j} V_{l_i l_j}(r) \mathcal{U}_{l_i l_j}(r) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \Phi_{l_i}^{(\alpha)}(r), \quad (45)$$

где правая часть представляет собой ортогонализирующую добавку к исходному уравнению Шредингера для волновой функции $\mathcal{U}_{l_i l_j}(r)$ рассеянного электрона в поле молекулы $V_{l_i l_j}$; $\Phi_{l_i}^{(\alpha)}(r)$ — волновые функции занятых орбиталей, а постоянные γ_{α} должны подбираться из условий ортогональности

$$\langle \Phi_{l_i}^{(\alpha)} | \mathcal{U}_{l_i l_j} \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Второй индекс решения l_j относится к переменной, описывающей ориентацию молекулы в лабораторной системе координат. Для рассеяния на атомах ортогонализирующая добавка упрощается и равна (в случае одной занятой орбитали Φ_l) $\gamma \Phi_l(r)$. Легко видеть, что описанный выше метод ортогонализации на основе ОПП приводит к точно такому же виду ортогонализирующей добавки. Действительно, в ОПП-подходе эта добавка имеет вид

$$\lambda | \Phi_l \rangle \langle \Phi_l | \mathcal{U}_l,$$

* Липман и Шей использовали принцип Кона.

где $\lambda \rightarrow \infty$ и \mathcal{U}_l — решение уравнения с ортогонализующей добавкой. Из (34) легко видеть, что перекрывание

$$\langle \Phi_l | \mathcal{U}_l \rangle = \langle \Phi_l | \chi_l \rangle / (1 - \lambda \langle \Phi_l | G | \Phi_l \rangle) \sim 0 (1/\lambda),$$

где χ_l — решение исходного уравнения Шредингера (без учета ортогонализации).

Таким образом, в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ параметр λ строго сокращается, и мы приходим к следующему виду ортогонализующей добавки:

$$- | \Phi_l \rangle \langle \Phi_l | \chi_l \rangle / \langle \Phi_l | G | \Phi_l \rangle \equiv \gamma(E) | \Phi_l \rangle,$$

т. е. строго к тому же виду, который использован в расчетах [32, 33]. Кроме того, теперь легко можем записать общую формулу для множителя Лангранжа $\gamma(E)$:

$$\gamma(E) = - \langle \Phi_l | \chi_l \rangle / \langle \Phi_l | G | \Phi_l \rangle.$$

Обобщение на случай многих занятых орбиталей очевидно. Весьма полные вычисления были сделаны в последние годы для eN_2 -рассеяния [30, 32, 33]. Эти расчеты показали, что в состояниях $^2\Sigma_g, ^2\Sigma_u, ^2\Pi_u$, где имеются занятые орбитали остова N_2 , приближенная трактовка принципа Паули с помощью ортогонального проектирования приводит к результатам, которые близки к точным*, тогда как в состоянии $^2\Pi_g$, где имеется хорошо известный резонанс при $E_e \approx 2,5$ эВ, имеющий важное значение, занятые орбитали остова отсутствуют и обменные эффекты следует учитывать путем полной антисимметризации.

3. ОПТИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕГЧАЙШИХ ЯДЕР

Феноменологический анализ. Хорошо известно, что оптическая модель в ядерной физике оказалась очень успешной и плодотворной для описания множества явлений, связанных с рассеянием нуклонов на ядрах. Оптический потенциал считают обычно локальным эквивалентом самосогласованного нелокального потенциала ядерного поля, который может быть найден из микроскопического подхода — типа теории Хартри — Фока. Показано (см., например, [34]), что если построить фазово-эквивалентный потенциал для нелокального взаимодействия нейтрона с ядром ^{16}O , рассчитанного в теории Хартри — Фока, то этот потенциал практически совпадает со стандартным потенциалом Вудса — Саксона, используемым в оптической модели для рассеяния нейтронов на ^{16}O .

* Под точными понимают расчеты, в которых тождественность частиц и принцип Паули учитываются путем полной антисимметризации волновой функции системы по всем электронам.

Обратимся теперь к рассеянию сложных частиц друг на друге, в частности, к наиболее хорошо исследованному случаю $\alpha\alpha$ -рассеяния. Уже в 50-е годы для этой системы было построено (см. экскурс в историю $\alpha\alpha$ -проблемы и полный список литературы в обзоре [35]) несколько феноменологических локальных потенциалов, хорошо описавших $\alpha\alpha$ -фазовые сдвиги при низких энергиях (до 10 МэВ). Однако все эти локальные потенциалы резко отличались от потенциалов оптической модели, поскольку содержали твердый кор значительного радиуса и их параметры зависели существенно от углового момента l . Стандартной мотивацией для включения твердого кора были аргументы, что принцип Паули не позволяет частицам проникать друг в друга. Однако последующие исследования показали, что такого рода аргументы являются слишком упрощенными даже для тяжелых частиц типа ^{12}C и ^{16}O , а для легких кластерных систем, таких, как $\alpha\alpha$, αt , $n^3\text{He}$ и т. п., просто неверны. Суть дела заключается в том, что локальная отталкивающая сердцевина, имитирующая действие принципа Паули, — всего лишь квазиклассический образ, справедливый тогда, когда нуклоны, по которым происходит антисимметризация, имеют большие радиальные квантовые числа, т. е. этот образ более или менее пригоден для средних и особенно тяжелых ядер. В случае же легких ядер, таких, как ^7Li , а тем более для обширнейшего класса ядерных процессов с участием дейтронов, тритонов и α -частиц, представления о локальной паули-отталкивающей сердцевине попросту неверны.

На это указывает уже традиционная оптическая модель, успешно описывающая рассеяние дейтронов, тритонов и α -частиц на ядрах с помощью гладкого притягивающего потенциала Вудса—Саксона со значительной глубиной $V_0 \approx 80\text{—}100$ МэВ. Поэтому те феноменологические потенциалы с отталкивающей сердцевиной для взаимодействия легких кластеров (как, например, для $\alpha\alpha$ -системы), которые были предложены и широко использовались в 50 — 60-е годы, уже с этой точки зрения не представляются адекватными. Как уже указано выше, основные представления о характере этих взаимодействий были выведены на основе МРГ-расчетов, и особенно из пионерской работы Окаи и Парка [36]. Эти авторы первыми указали на важность учета лишних решений МРГ-уравнений и на близкое соответствие волновых функций рассеяния (т. е. волновых функций относительного движения) с моделью оболочек. Из их работы стало также ясно, что в таких системах, как $\alpha\alpha$ (и подобных ей), принцип Паули проявляет себя не через затухание волновой функции в области перекрывания частиц наподобие отталкивающей сердцевины, а через оболочечного характера осцилляции этой функции. Причем характерные осцилляции проявляются лишь после исключения так называемых ложных (или лишних) решений МРГ-уравнений, а ложные решения

и являются состояниями, запрещенными принципом Паули. Сведение воедино всех этих представлений о взаимодействии составных частиц (включая и ОСМ-метод) позволило нам в 1971 г. сформулировать простой и физически ясный подход к описанию взаимодействия легких составных частиц на основе микроскопически обоснованного оптического потенциала с запрещенными состояниями (ОПЗС) [37, 38].

Идея этого подхода основана на хорошо известном факте, что для эрмитовых гамильтонианов волновые функции рассеяния ортогональны (при всех энергиях) к функциям дискретного спектра. Поэтому если построить такой достаточно глубокий локальный потенциал, нижние состояния которого будут соответствовать запрещенным принципом Паули состояниям, т. е. собственным функциям ядра антисимметризации, то требуемая ортогональность функций рассеяния к запрещенным состояниям будет автоматически обеспечена.

А поскольку структуру запрещенных состояний можно простым образом извлечь из модели оболочек, *минуя МРГ*, то фактически процедура построения ОПЗС включает в себя: 1) анализ запрещенных состояний в данной системе на основе оболочечной модели; 2) построение соответствующего локального потенциала, содержащего эти состояния в качестве своих связанных состояний; 3) уточнение параметров потенциала путем подгонки к экспериментально известным фазовым сдвигам.

Проиллюстрируем теперь, как этот подход реализуется для конкретных случаев. Возьмем для примера опять $\alpha\alpha$ -систему. На оболочечном языке ближайшими запрещенными конфигурациями будут следующие: s^8 ($L = 0$) и s^6p^2 ($L = 0, 2$)*, причем конфигурация s^8 отвечает нулю осцилляторных квантов, а s^6p^2 — два кванта. Поэтому ближайшей разрешенной конфигурацией, соответствующей основному состоянию ядра ${}^8\text{Be}$, будет конфигурация s^4p^4 ($L = 0, 2, 4$) с четырьмя квантами возбуждения. При разделении такой конфигурации на две невозбужденные α -частицы (каждая имеет конфигурацию s^4) энергия возбуждения $E^* \sim 4\hbar\omega \sim 60\text{--}70$ МэВ переходит в кинетическую энергию относительного движения α -кластеров в области их перекрывания. Ясно поэтому, что локальный потенциал, моделирующий описанную выше оболочечную картину, должен быть достаточно глубоким и широким, чтобы «вместить» $0S$ -, $2S$ - и $2D$ -запрещенные состояния (последние два в осцилляторном потенциале — вырожденные) и $4s$ -разрешенное состояние, отвечающее основному состоянию ${}^8\text{Be}$. Простые оценки сразу дают следующие параметры потенциала: глубина $V_0 \approx 120$ МэВ, ширина $R \approx 1,7$ Ферми. Последующее уточнение

* Благодаря тождественности двух α -частиц и их нулевому спину в $\alpha\alpha$ -системе допустимы только четные моменты $L = 0, 2, \dots$

по наблюдаемым $\alpha\alpha$ -фазам приводит к таким параметрам потенциала в форме Вудса — Саксона:

$$V_0 = 125 \text{ МэВ}; \quad R = 1,78 \text{ Ферми}; \quad a = 0,66 \text{ Ферми}. \quad (46)$$

Теоретические и экспериментальные $\alpha\alpha$ -фазы сравниваются на рис. 4. Соответствующие сечения упругого рассеяния показаны

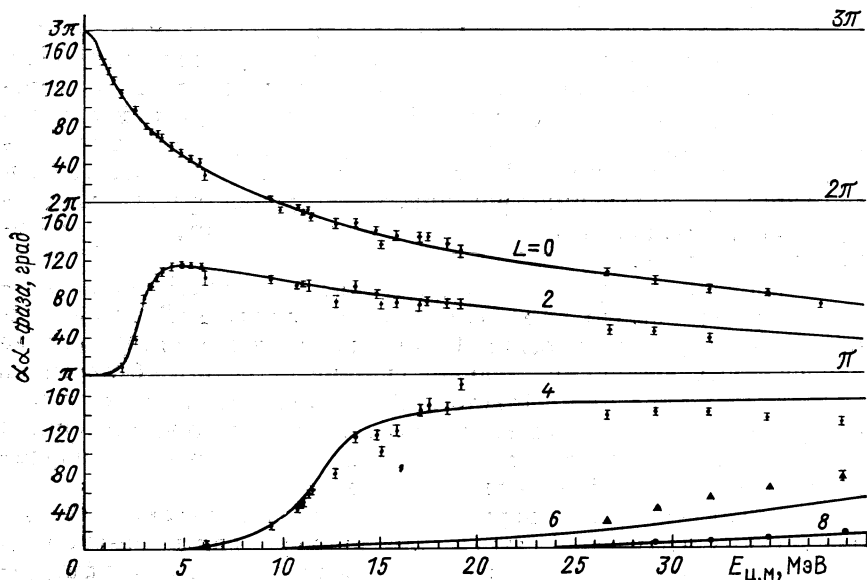


Рис. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных $\alpha\alpha$ -фаз для $L = 0, 2, 4, 6, 8$:

По оси ординат использована калибровка, следующая из обобщенной теоремы Левинсона (с учетом запрещенных состояний). Теоретические фазовые сдвиги — фазы для $\alpha\alpha$ -оптического потенциала с запрещенными состояниями (46)

на рис. 5. Видно, что очень простой l -независимый трехпараметрический потенциал хорошо описывает пять фазовых кривых в большом энергетическом интервале, а также энергию основного $^+0$ -состояния ^8Be (96 кэВ). На рис. 6 показана ОПЗС-потенциальная яма со своими уровнями. Видно, что состояния $2S - 2D$ почти вырождены и расстояние между уровнями $2S$ и $0S$, $\Delta E \approx 36$ МэВ, хорошо согласуется с энергией возбуждения $2\hbar\omega$ с $\hbar\omega = 18$ МэВ, характерной для свободной α -частицы, т. е. в целом вся картина потенциальных уровней хорошо согласуется с осцилляторной моделью оболочек. Остается добавить, что подгонка параметров производилась под фазы рассеяния, а структура дискретного спектра получилась автоматически. Это показывает, что описываемый потенциальный подход к рассеянию кластеров в отличие

от стандартных в ядерной физике феноменологических подгонок приводит к внутренне согласованной физической картине, хорошо соответствующей модели оболочек. Отметим еще один важный

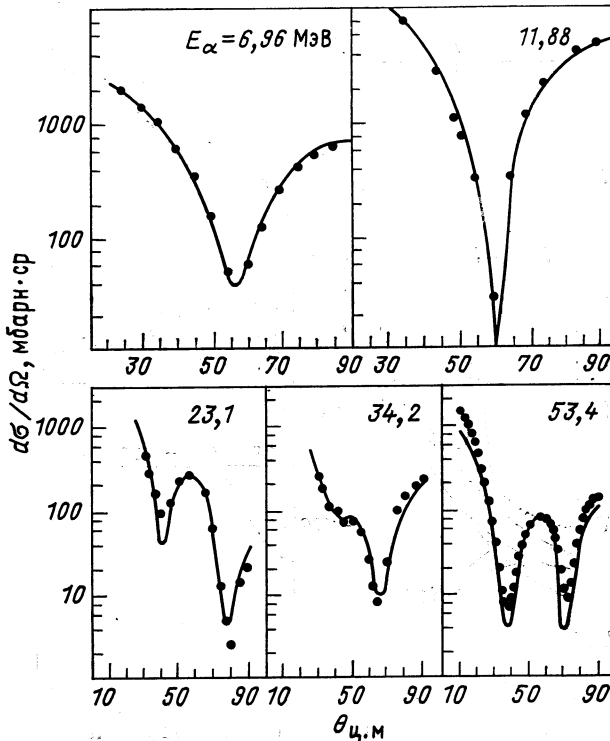


Рис. 5. Дифференциальные сечения $\alpha\alpha$ -рассеяния при разных энергиях, рассчитанные с потенциалом (46):

При $E_\alpha = 53,4$ МэВ добавлен объемный поглощающий потенциал с теми же геометрическими параметрами, что для действительной части, и глубиной $W = 5$ МэВ

аспект использования таких микроскопически-обоснованных потенциалов, связанный с теоремой Левинсона (подробности см. в следующем разделе). Дело в том, что ОПЗС автоматически приводят к обобщению теоремы Левинсона с учетом запрещенных состояний, поскольку они входят здесь на равных основах с разрешенными состояниями, и тот факт, что запрещенные состояния физически нереализуемы, должен учитываться только вне массовой поверхности.

Аналогичный анализ был проделан для большинства пар легких кластеров αd , $t^3\text{He}$, $d t$ и т. п., и были найдены оптические по-

тенциалы, которые дают весьма хорошее описание (при малом числе параметров) экспериментальных фаз и сечений (см. подробности в работах [37—40]), причем структура волновых функций рассеяния и дискретного спектра для всех рассмотренных систем находится в полном соответствии с моделью оболочек. Последую-

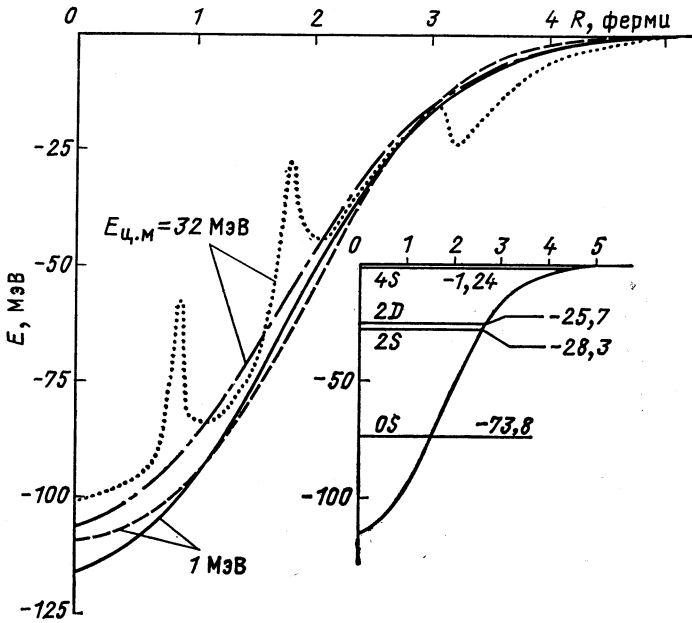


Рис. 6. Сравнение эффективных локальных потенциалов, выведенных из МРГ с оптическим $\alpha\alpha$ -потенциалом (46) при двух энергиях в с.д.м.:

Сплошная кривая — потенциал Вудса — Саксона с параметрами (46), остальные кривые — эффективные локальные МРГ-потенциалы. Вставка в правом нижнем углу показывает положение $\alpha\alpha$ -запрещенных состояний

щие исследования [6, 41] открыли, что найденные таким образом микроскопически-обоснованные потенциалы взаимодействия являются фазово-эквивалентными для нелокальных взаимодействий, фигурирующих в МРГ и ОСМ.

Отметим вместе с тем, что указанное соответствие хорошо выполняется лишь для легких кластерных систем типа $\alpha\alpha$ и ей подобных, тогда как для рассеяния тяжелых ионов, таких, как $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ и т. п., подобного рода оптический потенциал имеет мало смысла по двум причинам. Дело в том, что в строгой теории фазово-эквивалентных оптических потенциалов [34] эти потенциалы должны зависеть от энергии (даже если исходный нелокальный потенциал — статический). И та слабая энергетическая

зависимость, которая найдена для легких систем, отражает, вероятно, тот факт, что нелокальность потенциала весьма мала. На это же указывает и сравнение волновых функций в области перекрытия частиц, т. е. слабое отличие фактора подавления $A(k, r)$ от единицы [42]. Последнее не имеет места при рассеянии тяжелых ионов, о чем свидетельствует (кроме общих физических соображений) в первую очередь сильное подавление волновых функций рассеяния во внутренней области [42]. При этих условиях и с учетом того важного обстоятельства, что мнимая часть потенциала уже не мала (мнимая часть экранирует, по существу, всю внутреннюю область), так что характер осциллирующей волновой функции рассеяния во внутренней области уже не имеет большого значения, целесообразно отказаться от локального потенциала, согласованного с моделью оболочек, и перейти к феноменологическому потенциалу, который удовлетворительно описывает экспериментальные данные и приводит к гладким решениям (без частых осцилляций, обусловленных принципом Паули в области перекрытия), затухающим во внутренней области. Нет необходимости говорить о том, что такие оптические потенциалы должны быть мелкими. Именно такие мелкие потенциалы и используются обычно для описания рассеяния тяжелых ионов, подобных $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ и др. С точки зрения соответствия с истинными фазово-эквивалентными потенциалами эти феноменологические мелкие потенциалы являются типичными модельными псевдопотенциалами, очень схожими с теми, которые используются в теории твердого тела для расчета зонной структуры [43].

Обобщение теоремы Левинсона на случай рассеяния составных частиц. В любом микроскопическом подходе к взаимодействию составных частиц потенциал взаимодействия получается нелокальным (и, вообще говоря, энергетически зависящим). Поскольку самый общий случай нелокального, зависящего от энергии взаимодействия слишком сложен для аналитического исследования, то приведенные ниже результаты относятся, строго говоря, к некоторым моделям, для которых аналитическое исследование возможно. Сван был первым [44], кто высказал идею об обобщении теоремы Левинсона на случай составных частиц (как в атомной, так и в ядерной физике). На примере некоторого частного вида обменных потенциалов в рамках МРГ-подхода он показал, что запрещенные состояния должны входить в теорему Левинсона на равной основе с физически наблюдаемыми разрешенными связанными состояниями, так что обобщенная теорема Левинсона должна иметь вид

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi(n + m), \quad (47)$$

где n — число разрешенных связанных, а m — число запрещенных состояний в l -й парциальной волне. Имеется несколько

вариантов доказательства теоремы (47). Хронологически последнее доказательство принадлежит Глекле и Ле-Турно [45], которые доказали равенство (47) для ОСМ-модели. Их доказательство является прямым обобщением стандартного доказательства этой теоремы, основанного на рассмотрении аналитического поведения функции Иоста задачи в верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ [46].

Вкратце схема их доказательства такова. Пусть $G(E)$ — ФГ, отвечающая левой части уравнения (31); $f_0(k)$ — соответствующая функция Иоста. Тогда функция

$$D(k) = f_0(k) \det [G_{\alpha\beta}(E)] \equiv f_0(k) g(k)$$

$[G_{\alpha\beta}(E)]$ — матрица, составленная из элементов $\langle \chi_\alpha | G(E) | \chi_\beta \rangle$ является детерминантом Фредгольма интегрального уравнения, соответствующего уравнению Шредингера (31). Можно далее показать, что нули $D(k)$ прямо связаны с полюсами полной S -матрицы, а аргумент $D(k)$ равен фазе рассеяния $\delta(k)$ в ОСМ, т. е.

$$D(k) = |D(k)| \exp[-i\delta(k)],$$

при этом $D(k)$ не совпадает с полной функцией Иоста задачи, а отличается от нее некоторым множителем $\Delta(k^2)$. Рассматривая затем аналитические свойства матричных элементов $G_{\alpha\beta}(k)$ в верхней полуплоскости, авторы показывают, что

$$g(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} (1/k^{2n}) [1 + O(1/k^2)], \quad \text{Im } k > 0, \quad (48)$$

где n — число запрещенных принципом Паули состояний. Но поскольку исходная функция Иоста $f_0(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, $D(k) \rightarrow g(k)$ в этом пределе. Если теперь на верхней полуоси k имеется m нулей $D(k)$, отвечающих физическим связанным состояниям, то стандартный контурный интеграл [46]

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{D(k)} \frac{dD}{dk} dk = m. \quad (49)$$

Но из-за свойства (48) интеграл по верхней полуокружности равен

$$\int_C -\frac{2n}{k^{2n+1}} \left(\frac{1}{k^{2n}}\right)^{-1} dk = -2\pi i n. \quad (50)$$

Используя далее свойства $|D(-k)| = |D(k)|$ и $\delta(-k) = -\delta(k)$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{d \ln D(k)}{dk} = 2i [\delta(0) - \delta(\infty)],$$

и учитывая (49) и (50), окончательно приходим к (47). Приведем здесь другое, более простое доказательство этой теоремы, принадлежащее Померанцеву [27] и целиком основанное на свойствах полноты.

Используя (35), можно показать, что

$$\langle \tilde{\Psi}_E | \tilde{\Psi}_{E'} \rangle = \langle \Psi_E | \Psi_{E'} \rangle \sim \delta(E - E'),$$

т. е. что при ортогонализации нормировка на δ -функцию сохраняется. Соотношение полноты для функций $\tilde{\Psi}_E$ можно получить, если учесть, что базис функций $\tilde{\Psi}_E$ совпадает с собственными функциями гамильтониана QHQ , где $Q = 1 - \Gamma$. Поэтому

$$\int |\tilde{\Psi}_E\rangle \langle \tilde{\Psi}_E| dE + \tilde{P}_B = 1 - \Gamma, \quad (51)$$

где $\tilde{P}_B = \sum_{\alpha} |\tilde{\chi}_{\alpha}\rangle \langle \tilde{\chi}_{\alpha}|$ — проектор на связанные состояния псевдогамильтониана $\tilde{H} = H + \lambda\Gamma$, причем $|\tilde{\chi}_{\alpha}\rangle$ также являются собственными функциями QHQ . Поскольку $\Gamma\tilde{P}_B = \tilde{P}_B\Gamma = 0$, то $\tilde{P}_B + \Gamma$ — полный проектор на весь дискретный спектр оператора QHQ . Затем следует ввести оператор Меллера

$$\tilde{\Omega} = \int_0^{\infty} dE |\tilde{\Psi}_E\rangle \langle \Psi_{0_E}|,$$

изометрически отображающий непрерывный спектр гамильтониана H_0 на непрерывный спектр \tilde{H} (или QHQ , что то же самое). Из (51) вытекает соотношение

$$\tilde{\Omega}^*\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}\tilde{\Omega}^* = \tilde{P}_B + \Gamma. \quad (52)$$

Далее, следуя методу Яуха [47, 48], берем шпур от равенства (52) и шпур от левой части выражаем через t -матрицу на массовой поверхности:

$$i\pi \int_0^{\infty} dE \text{Sp} \left\{ \tilde{t}^* \frac{\partial \tilde{t}}{\partial E} - \tilde{t} \frac{\partial \tilde{t}^*}{\partial E} \right\} = \tilde{N}_B + N_{\Gamma}, \quad (53)$$

где \tilde{N}_B — число связанных состояний $\tilde{\chi}_{\alpha}$; N_{Γ} — размерность Γ , причем правая часть получается благодаря тому, что след проектора равен его размерности. Если теперь воспользоваться унитарностью t -оператора и записать t -оператор в виде

$$\tilde{t}(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_l \exp[i\tilde{\delta}_l(E)] \sin \tilde{\delta}_l(E) |\chi_l\rangle \langle \chi_l|, \quad (54)$$

то после подстановки в (53) и выполнения интегрирования находим

$$\frac{1}{\pi} \left[\sum_l \tilde{\delta}_l(0) - \tilde{\delta}_l(\infty) \right] = \tilde{N}_B + N_{\Gamma}.$$

При сферически-симметричном потенциале (54) сводится к обычному разложению по парциальным волнам, а $|\chi_l\rangle \langle \chi_l| = 1$, так как энергия и момент исчерпывают все переменные. Если теперь проектор Γ инвариантен при вращениях и представляет сумму проекторов с определенным l : $\Gamma = \sum \Gamma_l$, то легко получим

$$(1/\pi) [\delta_l(0) - \delta_l(\infty)] = \tilde{N}_{V_l} + N_{\Gamma_l}.$$

Как видно, приведенное доказательство не использует явно аналитические свойства решений при комплексных k , а целиком основано на унитарности t -матрицы и свойствах полноты базиса в усеченном пространстве. Добавим, что при использовании ОПЗС обобщенная теорема Левинсона выполняется автоматически. Что касается практического значения обобщенной теоремы Левинсона, то оно заключается в предсказании больших упругих фаз при высоких энергиях для тех систем, где имеется много запрещенных состояний, число же разрешенных связанных состояний обычно мало. В частности, для $\alpha\alpha$ -рассеяния в работах [37, 39] были предсказаны большие упругие фазы при энергиях $E_{\text{отн}} \approx 200-400$ МэВ в с.д.м. Для проверки этих предсказаний группа Айго с сотрудниками провела эксперимент [49] по измерению упругого рассеяния в системе $\alpha\alpha$ при $E_{\alpha \text{ лаб}} \approx 600-800$ МэВ. Было найдено заметное упругое сечение недифракционного характера. Однако чтобы сделать окончательные выводы, необходима (шока не развитая) теория взаимодействия составных частиц при промежуточных энергиях $E_{\alpha} \approx 0,5$ ГэВ.

Модельная система взаимодействия двух кластеров. Уравнение МРГ для системы $2 + 2$. Проанализируем, как проявляются общие закономерности взаимодействия составных систем фермионов друг с другом на примере модельной системы, состоящей из двух одинаковых кластеров. Каждый кластер в свою очередь составлен из двух частиц с массами M и m . Будем называть ее системой $2 + 2$. Достоинство этой модельной системы — достаточная простота, так что для нее можно легко рассчитать все интегральные ядра МРГ и исследовать их свойства. В то же время она достаточно сложна для того, чтобы обладать нетривиальными свойствами и представлять физический интерес.

Можно рассматривать кластер $m + M$, например, как совокупность нуклона m и тяжелого остова M . Отличительной чертой этой системы является то, что при $M = m$ она идентична с системой бинейтрон — бинейтрон, которая представляет собой совокупность двух кластеров с заполненными оболочками, т. е. подобна системе $\alpha\alpha$. В пределе $M \gg m$ она становится подобной молекуле водорода. Данная модельная задача удобна тем, что варьируя отношение масс $y = M/m$, можно детально проследить эволюцию системы и на микроскопическом уровне понять, как проявляется принцип Паули в разных предельных случаях. Непосредственное

сравнение громоздких уравнений МРГ, например, для $\alpha\alpha$ и $^{16}\text{O}^{16}\text{O}$, было бы мало эффективным.

Будем рассматривать состояние системы $2 + 2$, в котором пространственная волновая функция антисимметрична относительно перестановки двух частиц с массой M (номера частиц 1 и 3), а также пары частиц с массой m (номера частиц 2 и 4), т. е. система подобна по структуре ортоводороду в триплетном состоянии. Для упрощения вычислений используем при описании каждого кластера («псевдоатома водорода») волновую функцию вида

$$\varphi(\mathbf{r}_{12}) = (\alpha/\pi)^{3/4} \exp(-\alpha r_{12}^2/2) \quad (55)$$

и гауссово взаимодействие между всеми четырьмя частицами

$$V_{ij} = -V_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2). \quad (56)$$

Задачу о рассеянии таких кластеров будем решать в одноканальном приближении МРГ. При этом волновую функцию системы ищут в виде

$$\Psi = (1 - P_{13})(1 - P_{24}) \varphi(\mathbf{r}_{12}) \varphi(\mathbf{r}_{34}) \Phi(\boldsymbol{\rho}), \quad (57)$$

где $\boldsymbol{\rho} = (y\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - y\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)/(y + 1)$, $y = M/m$. Уравнение для волновой функции взаимного движения кластеров $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ записывается следующим образом:

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_{12}) \varphi(\mathbf{r}_{34}) | H - E | (1 - P_{13})(1 - P_{24}) \varphi(\mathbf{r}_{12}) \varphi(\mathbf{r}_{34}) \Phi(\boldsymbol{\rho}) \rangle = 0. \quad (58)$$

Учитывая, что в целом кластер $m + M$ — бозон, потребуем, чтобы $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ была четной функцией от $\boldsymbol{\rho}$. При этом уравнение (58) приобретает форму

$$(T + V_D - K - E)\Phi(\boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (59)$$

Здесь V_D — прямое взаимодействие кластеров, а обменное интегральное ядро $K = K_T + K_V + EK_0$ включает в себя вклады от кинетической K_T , потенциальной K_V энергии и интегрального ядра перекрывания K_0 . Явный вид нелокальных членов K_0 , K_T , K_V и прямого взаимодействия V_D приведен в [50].

Согласно результатам предыдущего подраздела собственными функциями ядра перекрывания

$$K_0 = (\alpha/2\pi)^{3/2} (1 + y)^6 (2y)^{-3} \times \\ \times \exp\{-[\alpha(y + 1)^2/8y^2][y^2(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2 + (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}')^2]\} \quad (60)$$

являются волновые функции трехмерного гармонического осциллятора $\Phi_{nlm}(\boldsymbol{\rho})$, причем собственное значение [50]

$$\lambda_n = (y - 1)^n / (y + 1)^n \approx \exp[-2n/(y + 1)], \quad n - \text{четное}. \quad (61)$$

Отсюда ясно, что в системе $2 + 2$ при любых значениях y имеется только одно истинно запрещенное состояние $0s$ ($n = l = 0$). Интересен спектр собственных значений λ_n . При $y = 1$ только одно состояние запрещено, остальные значения $\lambda_n = 0$ соответ-

ствуют разрешенным состояниям. При $y \neq 1$ вместо скачкообразного изменения λ_n от 1 к 0 имеет место плавный экспоненциальный переход между этими предельными значениями. Состояния с $0 < \lambda_n < 1$ в этой переходной области можно назвать полузапрещенными.

Интересен предельный случай $y \gg 1$. При этом интегральные ядра МРГ в (59) становятся практически локальными. Мерой нелокальности является ширина разброса ядер по переменной $(\rho - \rho')$. Из (60) видно, что при больших y для ядра K_0 можно записать

$$K_0 f(\rho) \approx \exp[-(\alpha/2)\rho^2] f(\rho). \quad (62)$$

Аналогично приводятся к локальному виду остальные ядра МРГ. Если проделать эту процедуру, то оказывается, что все ядра приобретают вид, характерный для обменных членов в методе Гайтлера — Лондона [51]. В данном методе фиксируется расстояние между тяжелыми частицами 1 и 3, а волновая функция легких частиц составляется из орбиталей φ , отнесенных к двум тяжелым центрам 1 и 3:

$$\Psi \sim (1/\sqrt{2}) [\varphi_1(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_4) - \varphi_3(\mathbf{r}_2) \varphi_1(\mathbf{r}_4)], \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}_j) &= (\alpha/\pi)^{3/4} \exp[-(\alpha/2)(\mathbf{r}_j - \rho/2)^2]; \\ \varphi_3(\mathbf{r}_j) &= (\alpha/\pi)^{3/4} \exp[-(\alpha/2)(\mathbf{r}_j + \rho/2)^2]. \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление дает для интеграла перекрывания

$$S(\rho) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_1(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_4) \varphi_3(\mathbf{r}_2) \varphi_1(\mathbf{r}_4) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\rho^2\right), \quad (64)$$

что совпадает с локальной формой (62) ядра K_0 . Аналогичным образом находим, что среднее от оператора $(H - E)$ по функции (63) совпадает с левой частью уравнения МРГ (58) в пределе больших y . Таким образом, мы убедились, что когда одна из частиц кластера M становится значительно более тяжелой, чем вторая частица m , т. е. когда мы приближаемся к ситуации, характерной для молекул, уравнение МРГ естественным образом переходит в уравнение метода Гайтлера — Лондона, основанного на адиабатическом приближении Борна — Оппенгеймера. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & [1 - S(\rho)]^{-1} \langle \varphi_1(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_4) | H - E | \times \\ & \times [\varphi_1(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_4) - \varphi_3(\mathbf{r}_2) \varphi_1(\mathbf{r}_4)] \rangle f(\rho) = \\ & = [-(\hbar^2/M) \Delta_\rho + V_T(\rho) + V_L(\rho) + V_{13}(\rho) - E] f(\rho) = 0. \quad (65) \end{aligned}$$

Здесь

$$V_T(\rho) = \hbar^2 \alpha \rho^2 \exp(-\alpha \rho^2/2) / 4m [1 - \exp(-\alpha \rho^2/2)]$$

— отталкивающий потенциал, который отражает возрастание кинетической энергии легких фермионов в области перекрывания кластеров. При $\rho \rightarrow 0$ $V_T(\rho) \rightarrow \hbar^2 \alpha / 2m = \hbar \omega / 2$, что совпадает с избытком кинетической энергии легких фермионов в объединенной системе, где они занимают осцилляторные орбиты $1s$ и $1p$, по сравнению с их кинетической энергией на больших расстояниях ρ , где они находятся на орбите $1s$ каждый около своего центра. Потенциал $V_L(\rho)$ обусловлен взаимодействием легких частиц с тяжелыми и друг с другом; $V_{13}(\rho)$ — прямое взаимодействие тяжелых частиц 1 и 3. Конечно, проведенное выше рассмотрение носит схематический характер и отражает лишь поведение тех вкладов в потенциал взаимодействия между тяжелыми ионами, которые соответствуют обмену небольшим числом нуклонов между сталкивающимися частицами. (Однако такие обмены, по-видимому, наиболее существенны [52].) Тем не менее цитированные выше результаты работ [41, 50] позволяют понять (аналогичные выводы сделаны также в [53]), почему рассеяние достаточно тяжелых ионов передается оптическими потенциалами с отталкиванием типа межатомных потенциалов в молекуле [54—57] и почему в теории тяжелых ионов эффективны методы типа молекулярная орбиталь — линейная комбинация атомных орбиталей (МО ЛКАО) [58].

Иначе дело обстоит при $y \sim 1$, когда нелокальность потенциала игнорировать нельзя. Ниже мы рассмотрим этот случай подробнее.

Система бинейтрон — бинейтрон. Исследуем модельную систему, в которой есть только запрещенные и разрешенные состояния ($y = 1$). Анализу полузапрещенных состояний (в том числе и в системе $2 + 2$) посвящены работы [18, 59—62]. Рассмотрим рассеяние бинейтрона (со спином $S = 0$) на бинейтроне. В целом указанная система в нижнем состоянии соответствует оболочечной конфигурации $s^2 p^2$ и имеет одно запрещенное состояние

$$\Phi_0(\rho) = (2\alpha/\pi)^{3/4} \exp(-\alpha \rho^2). \quad (66)$$

Эффективное взаимодействие нуклонов, как обычно в МРГ, берем в виде [63]

$$V(\mathbf{r}) = -V_0 (W + MP^x) \exp(-\gamma r^2). \quad (67)$$

Прямой потенциал V_D в (59) имеет вид

$$V_D(\rho) = -V_0 [2\alpha/(2\alpha + \gamma)]^{3/2} (4W - 2M) \exp(-2\alpha\gamma\rho^2/(2\alpha + \gamma)), \quad (68)$$

а обменное ядро $K(\rho, \rho')$ включает в себя несколько членов: обменные интегралы для кинетической и потенциальной энергии

и интеграл перекрывания K_0 . S -волновое решение уравнения (59) не обязательно ортогонально функции Φ_0 . Однако физический смысл имеет лишь проектированная функция $\tilde{\Phi}(\rho)$, которая ортогональна $\Phi_0(\rho)$, т. е.

$$\tilde{\Phi}(\rho) = P_0 \Phi(\rho), \quad (69)$$

где проекционный оператор $P_0 = 1 - |\Phi_0\rangle \langle \Phi_0|$ выделяет только разрешенные состояния системы. Поэтому исследование уравнений МРГ будем проводить именно на основе функций $\tilde{\Phi}(\rho)$.

С помощью оператора P_0 уравнение Шредингера (59) для нашей системы можно переписать в виде

$$P_0(T_p + V_D + V_N - E)P_0\Phi(\rho) = 0, \quad (70)$$

где нелокальная обменная добавка

$$\begin{aligned} V_N\Phi(\rho) = & -V_0(4M - 2W)(2\alpha/\pi)^{3/2} \times \\ & \times \int d\rho' \exp\left[-2\alpha\left(\frac{\rho+\rho'}{2}\right)^2\right] \times \\ & \times \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)(\rho-\rho')^2\right] \Phi(\rho'). \end{aligned} \quad (71)$$

Из (70) следует, что при переходе от функции Φ произвольного вида к ортогонализированным функциям $\tilde{\Phi} = P_0\Phi$ все нелокальные ядра (кроме V_N) аннулируются. В более сложной системе, конечно, не будет такого эффекта, но часть нелокальных ядер, безусловно, исчезнет. Уравнение (70) можно переписать в ином виде:

$$(T_p + V_D + V_N - E)\Phi(\rho) = 0 \quad (72)$$

с дополнительным условием

$$\langle \Phi | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (73)$$

Соотношение (72) показывает, что отбрасывание нескольких нелокальных ядер в (59) компенсируется условием ортогональности (73). С энергетической точки зрения последнее означает, что вклад этих членов гамильтониана трансформируется в добавочную кинетическую энергию, отвечающую осциллирующей функции $\tilde{\Phi}$.

Из формулы (71) видно, что при $\alpha \gg \gamma$, когда радиус кластеров много меньше радиуса NN -сил, и при учете условия ортогональности (73) вклад интегрального ядра V_N равен нулю, ибо $V_N \rightarrow K_0$ при $\gamma \ll \alpha$.

В противоположном случае $\gamma \gg \alpha$ обменная добавка V_N превращается в локальный потенциал

$$U_N(\rho) = -V_0(4M - 2W)(2\alpha/\gamma)^{3/2} \exp(-2\alpha\rho^2),$$

и в целом сумма $U_{\text{эф}} = V_D + U_N$ выглядит как эффективный локальный потенциал

$$U_{\text{эф}} = -2V_0 (2\alpha/\gamma)^{3/2} \exp(-2\alpha\rho^2).$$

Несмотря на то что V_D может быть отталкивающим при $M > 2W$, $U_{\text{эф}}$ является потенциалом притяжения и не зависит от соотношения сил в четных и нечетных орбитальных состояниях [64]. Таким образом, уже наш простейший схематический пример показывает, что потенциал $U_{\text{эф}}$ может сильно отличаться от потенциала V_D . В общем случае, когда $\gamma \sim \alpha$, потенциал V_N существенно нелокален и играет заметную роль. Можно, однако, и при этих условиях построить локальный E -зависящий оптический потенциал $U_{\text{опт}}(\rho)$ эквивалентный нелокальному потенциалу $U_{\text{эф}}$ и с точки зрения фаз и с точки зрения количества узлов функции $\tilde{\Phi}(\rho)$ и их положения. При использовании этого потенциала уравнение (70) приобретает вид

$$P_0(T + U_{\text{эф}} - E)P_0\Phi(\rho) = 0. \quad (74)$$

Для системы $2 + 2$ оно является точным эквивалентом уравнений МРГ. Однако, как показано в разд. 2 и 5, оно является хорошим приближением к уравнениям МРГ и в более сложных случаях. В практических расчетах по ОСМ часто вместо $U_{\text{эф}}$ используют величину V_D , что не всегда оправдано, как видно из нашего рассмотрения.

Расчет эквивалентных локальных потенциалов методом Бака—Перье. Выше было показано, что в МРГ уравнение Шредингера для взаимного движения кластеров содержит, кроме прямого локального взаимодействия V_D , также нелокальные члены. К сожалению, в настоящее время задача рассеяния на нелокальных потенциалах изучена значительно хуже, чем на локальных потенциалах. Поэтому представления, основанные на опыте работы с локальными потенциалами, являются более привычными и возникает естественное стремление заменить нелокальный потенциал локальным, эквивалентным ему, например, в смысле описания фаз рассеяния. Конечно, этот эквивалентный локальный потенциал (ЭЛП) не может быть обычным локальным потенциалом, он неизбежно будет зависеть от энергии E , вероятно, также от момента количества движения l . Собственные функции ЭЛП и нелокального потенциала не могут быть идентичными во всем пространстве (эффект Перье) [65]. Поэтому ЭЛП имеют ограниченную ценность и не дают полного представления о свойствах системы. Однако они очень полезны для понимания качественных закономерностей. Более того, в ядерной физике экспериментальные данные по рассеянию кластеров друг на друге и на более тяжелых ядрах обычно интерпретируются с помощью локальных оптических потенциалов.

Существует строгий метод построения ЭЛП для заданного нелокального взаимодействия, развитый Козом, Арнольдом и Мак-Келларом [34]. Однако он страдает тем недостатком, что, прежде чем получить ЭЛП, необходимо решить сложное уравнение Шредингера с нелокальным потенциалом. При этом ЭЛП уже фактически не нужен и может служить только для иллюстративных целей. Значительно важнее развить такой подход, который позволит хотя бы приближенно восстановить ЭЛП непосредственно по нелокальному потенциалу, не решая уравнения Шредингера для последнего. Такие методы существуют, хотя и являются приближенными. Примером может служить метод Бака и Перье [64, 65], которые показали, что если имеется система, описываемая уравнением Шредингера

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - V_D + E \right] \psi_N(\mathbf{R}) = \\ & = \int U_N \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}'}{2} \right) \frac{\exp [-(\mathbf{R} - \mathbf{R}')/\beta^2]}{\pi^{3/2} \beta^3} \psi_N(\mathbf{R}') d\mathbf{R}', \end{aligned} \quad (75)$$

то, когда $U_N(\mathbf{R})$ меняется плавно и производными от потенциала можно пренебречь в сравнении с производными $\psi_N(\mathbf{R})$ (напомним, что в задачах рассеяния кластеров фигурируют быстро осциллирующие функции $\psi(\mathbf{R})$, ортогональные к запрещенным состояниям, поэтому такое допущение вполне разумно), уравнение (75) можно приближенно привести к виду

$$[(\hbar^2/2\mu) \nabla^2 + E - V_D] \psi_N(\mathbf{R}) = V'_L \psi_N(\mathbf{R}), \quad (76)$$

где V'_L получают из трансцендентного уравнения

$$V'_L(R) = \exp [(\mu\beta^2/2\hbar^2) (V'_L + V_D - E)] U_N(R). \quad (77)$$

Полный ЭЛП для (75) равен

$$V_L = V_D + V'_L. \quad (78)$$

Конечно, процедура Бака — Перье является весьма нестройной, ибо предполагается, что $\psi_N = \psi_L$ (пренебрежение фактором подавления Перье), считаются малыми градиенты потенциала $U_N(R)$ и $V'_L(R)$. Поэтому она не может, вероятно, передать тонкие детали истинного ЭЛП. Однако дает правильный результат $V'_L(R) \approx \approx U_N(R)$ в пределе малого радиуса нелокальности β и очень эффективна в практических расчетах (см. [64], где найдены ЭЛП для рассеяния нейтронов с $E_n = 14$ МэВ на ^{56}Fe). В уравнении (75) выбрана нелокальность частного гауссова вида. Это удобно для рассмотрения кластерных систем, где встречаемся с интегральными ядрами гауссова типа. Однако процедура Бака — Перье может быть обобщена и на более сложные системы. Так, в работе [67] метод Бака — Перье успешно использован для получения ЭЛП при рассеянии электрона на атоме водорода. Применим метод Бака — Перье к потенциалу V_N для системы бинейтрон —

бинейтрон. Это можно сделать, так как потенциал V_N в (71) соответствует тому типу потенциалов, которые рассматривались в указанном методе. Важно заметить, что локальный потенциал V_L , эквивалентный V_N , будучи E -зависящим, одинаков для всех рассматриваемых нами четных значений орбитального момента взаимного движения кластеров l . Мы используем обычные [62] значения параметров NN -сил:

$$V_0 = 73 \text{ МэВ}; \quad \gamma = 0,46 \text{ Ферми}^{-2}; \quad W = M = 0,5 \quad (79)$$

и $\alpha = 0,22 \text{ Ферми}^{-2}$, примерно соответствующее минимальной внутренней энергии кластера при взаимодействии (67). Тогда процедура Перье — Бака (77)—(78) с использованием функций

$$V_D(R) = -V_{0D} \exp(-\kappa_1 R^2); \quad U_N(R) = -U_{0N} \exp(-\kappa_2 R^2)$$

приводит к фазово-эквивалентному локальному потенциалу $V_L(R)$, который может быть приближенно представлен потенциалом Вудса — Саксона с параметрами:

$$V_0 = 50 \text{ МэВ}; \quad R_0 = 1,5 \text{ Ферми}; \quad a = 0,6 \text{ Ферми}.$$

В этом потенциале имеется запрещенное $0S$ -состояние с энергией связи $\sim 9 \text{ МэВ}$. Если в качестве пробной функции этого состояния взять гауссиану $\exp(-\delta R^2)$, то минимум энергии достигается при $\alpha = 0,20 \text{ Ферми}^{-2}$ у волновой функции (66) запрещенного состояния. Поэтому условие ортогональности (73) выполняется автоматически. Как раз такая ситуация имеется для всех оптических потенциалов кластер-кластерного рассеяния типа $\alpha\alpha$, αl , αd и т. п. [38].

Для энергетической зависимости фазово-эквивалентного потенциала V_L при малых энергиях получаем

$$V_{0L}(E) \approx V_{0L}^{\downarrow}(E=0) \exp(-E/E_0),$$

где $E_0 = 84 \text{ МэВ}$. Для оптического потенциала $V(R) = V_D(R) + V_L(R)$ зависимость глубины ямы V_0 от энергии имеет в области сравнительно небольших энергий $E < E_0$ вид

$$V_0(E) \approx V_0 - (1/4)E,$$

который близок к обычно используемому в ядерной оптической модели и который мы получили из анализа E -зависимости оптических потенциалов для разных пар кластеров [37, 38].

В работе [41] получен ЭЛП системы бинейтрон — бинейтрон для NN -сил Бринка — Бойкера, содержащих отталкивание на малых расстояниях. Полученный ЭЛП оказался весьма близок к описанному выше для обычных сил. Подобная независимость ЭЛП между кластерами от характера NN -сил отмечалась Тамага-

ки [63] при исследовании системы $\alpha\alpha$. Это свойство, по-видимому, является общим свойством кластерных систем. В [41] рассчитана также фаза S -рассеяния для указанного ЭЛП системы бинейтрон — бинейтрон, которая оказывается в разумном согласии с результатами точных расчетов в МРГ для той же системы [42]. При расчетах по методу Бака — Перье не учитывают фактор затухания Перье. Его можно оценить по простой формуле, полученной для потенциалов типа (75)–(78) Фидельдеем [70]: $A(\rho) \approx \exp[-(m\beta^2/8\hbar^2)V_L]$, что дает для нашей системы $A(\rho) \sim \sim 0,8$ вблизи $\rho = 0$. Поэтому фактором затухания в данном случае можно в первом приближении пренебречь.

4. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА К СИСТЕМЕ ИЗ ТРЕХ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ

Прежде всего укажем, что система из трех составных частиц — удобная модель для всей теории прямых ядерных реакций, где одна или даже две частицы могут быть элементарными (например, в dp -реакциях), или же все три частицы составные (например, в реакциях с ионами лития типа (${}^7\text{Li}$, α) и др.). Кроме того, такие легкие ядра, как ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{24}\text{Mg}$ и другие, можно с большим успехом рассматривать в рамках трехчастичной модели типа: ${}^6\text{Li} \rightarrow \alpha np$, ${}^9\text{Be} \rightarrow \alpha \alpha n$, ${}^{12}\text{C} \rightarrow 3\alpha$ и т. п., где по меньшей мере одна из частиц составная. И если дискретный спектр в таких системах можно рассчитать и с помощью вариационных методов, то для трактовки очень богатого по структуре непрерывного (и квазидискретного) спектра самой надежной основой являются интегральные уравнения Фаддеева (УФ), которые были уже неоднократно использованы для этой цели [71].

Обзор полученных к настоящему времени результатов. Прежде всего отметим резкое несоответствие в данной области между общностью предложенных трехтельных подходов (обобщенных фаддеевских уравнений) и степенью их практической реализации. В этом отношении задача о трех составных частицах намного уступает трехнуклонной задаче, где к настоящему времени не только практически использованы все предложенные методические разработки, но и имеется несколько трехчастичных расчетов с полным учетом всех физически важных состояний $3N$ -системы и всех компонент NN -потенциала (вплоть до значений углового момента $J = 2$) *.

В задаче о трех составных частицах все необходимые обобщения трехчастичного формализма осуществлены теоретически. В частности, в первой из работ [71] выведены модифицированные УФ,

* В частности, в работе [100] решена система 18 (!) двумерных (!) уравнений Фаддеева.

где учтен комплексный вид потенциала взаимодействия между составными частицами (т. е. учтена мнимая часть потенциала парного взаимодействия). В дальнейшем Ловаш [71] обобщил трехчастичные уравнения, чтобы учесть внутренние возбуждения составных частиц (например, возбуждение мишени при dp -реакции). При этом возникают интересные трехчастичные эффекты, связанные с возбуждением и девозбуждением остова (или просто участвующих в реакции составных частиц) в промежуточных состояниях.

И наконец, последнее важное недостающее звено — учет принципа Паули в системе трех составных частиц — завершено в работах [28, 79]. При этом также возникают специфические трехчастичные эффекты вроде развала дейтона только «на условии ортогональности». Однако уровень практического применения трехчастичной модели ядерных реакций по-прежнему остается относительно «низким» и соответствующим уровню середины 60-х годов в трехнуклонной задаче. Уделим здесь главное внимание учету принципа Паули в системе из трех составных частиц.

Стандартный подход с УФ заключается в использовании сепарабельных потенциалов, которые строятся с теми же форм-факторами типа Ямагучи, что и для NN -взаимодействия, и параметры которых подгоняются под экспериментальные фазовые сдвиги. Этот подход является механическим обобщением формализма, развитого для $3N$ -систем, но, будучи простым, не кажется нам физически оправданным, поскольку, как выше показано, взаимодействие составных частиц в значительной степени определяется принципом Паули и соответствующими обменными эффектами и характер, например, $\alpha\alpha$ -потенциала не похож на характер NN -взаимодействия. Тем не менее к настоящему времени выполнено уже значительное количество расчетов легких ядер на основе указанного формализма. Общая схема при этом такова. В тех парциальных волнах, где имеются околопороговые связанные состояния или резонансы двухчастичных подсистем, используют обычные сепарабельные потенциалы притяжения (типа Ямагучи). Приведем примеры:

$$n(p)\alpha \quad \text{в состояниях } P_{3/2}, P_{1/2};$$

$${}^3\text{H}({}^3\text{He})\alpha \quad \text{в состояниях } P_{3/2}, F_{5/2}, F_{7/2};$$

$$\alpha\alpha \quad \text{в состояниях } D_2, G_4$$

и т. п.

В тех же парциальных волнах, где такие яркие околопороговые особенности отсутствуют или где фазовые сдвиги «меняют знак», берут сепарабельный потенциал отталкивающего характера.

Вот типичные примеры:

$n(p)\alpha$ в состоянии $S_{1/2}$;
 ${}^3\text{H}({}^3\text{He})\alpha$ в состояниях с четными орбитальными моментами S, D

и т. п.

То же относится и к применению аппарата УФ к исследованию трехчастичных моделей прямых ядерных реакций типа dp [71],

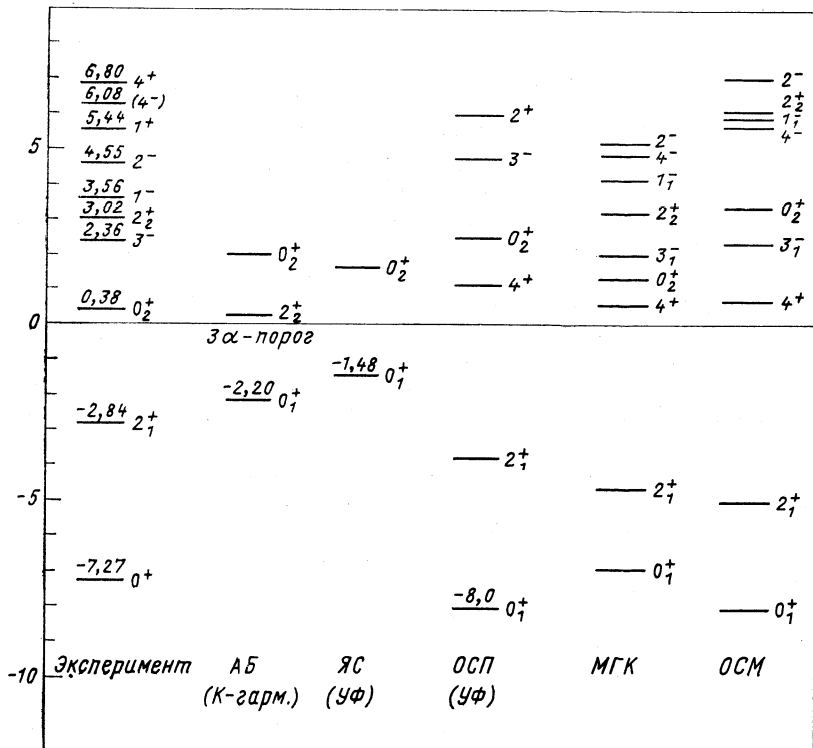


Рис. 7. Сравнение спектров ядра ${}^{12}\text{C}$ в модели 3α , найденных в разных подходах:

Первый слева — экспериментальный спектр уровней с $T = 0$ ядра ${}^{12}\text{C}$; второй слева — стандартный вариационный расчет с локальным $\alpha\alpha$ -потенциалом Али — Бодмера, содержащим отталкивающий кор большого радиуса (расчет сделан методом K -гармоник); третий слева — стандартный подход с УФ с сепарабельными потенциалами Ямагучи [101]; третий справа — УФ с осциллирующими сепарабельными $\alpha\alpha$ -потенциалами, приводящими к приближенной ортогональности функций континуума, к запрещенным $\alpha\alpha$ -состояниям; второй справа — полностью микроскопический расчет в методе генераторных координат; крайний справа — полумикроскопический ОСМ-подход

где подобный подход используют для описания взаимодействия нуклона с ядром-остовом. Не удивительно поэтому, что общий характер найденных в таком подходе ядерных спектров (для

типичных трехчастичных ядер типа ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ и т. п.) близок к тому, что найдено в вариационных расчетах с локальными взаимодействиями, содержащими локальную отталкивающую сердцевину [71, 74].

На рис. 7 показан спектр уровней с $T = 0$ наиболее хорошо исследованного ядра ${}^{12}\text{C}$, рассчитанный на основе УФ в 3α -модели для $\alpha\alpha$ -потенциалов с отталкивающим кором и без него, но с введением условия ортогональности на волновую функцию $\alpha\alpha$ -рассеяния (более детальное обсуждение применимости 3α -модели к ядру ${}^{12}\text{C}$ см. в следующем разделе). Хорошо видно, что стандартный (т. е. NN -подобный) подход к этой задаче приводит к «сжато» по сравнению с экспериментом характеру спектра. Среднеквадратичный радиус ядра также завышен. Это означает, по существу, что отталкивающий кор неверно моделирует в таких системах действие принципа Паули и необходим более адекватный подход, например учет условий ортогональности к двухчастичным запрещенным состояниям в формализме УФ. Однако хорошо известная техника ортогонального проектирования Фешбаха (использованная Ловашем [71]) не приводит к простой схеме перестройки уравнений. Проще всего понять имеющиеся тут трудности, если попытаться написать уравнения Фаддеева, в которых парное взаимодействие описывается ОСМ-моделью (26), (27).

Попыткой обойти эти трудности было предложение использовать осциллирующие сепарабельные потенциалы (ОСП), основанные на оболочечных волновых функциях и описывающие не только экспериментальные фазовые сдвиги, но и оболочечную структуру радиальных волновых функций рассеяния во внутренней области. Иными словами, ОСП дают волновые функции рассеяния, приближенно ортогональные к функциям занятых состояний системы. Подобные ОСП построены [72] для всех пар легких кластеров типа $\alpha{}^3\text{He}$, td и т. п. и показано [72], что такие потенциалы имеют целый ряд привлекательных черт, отличающих их от чисто феноменологических конструкций, часто используемых для тех же целей. В частности, указанные ОСП включают мало свободных параметров, тогда как остальные параметры берут прямо из модели оболочек [72]. Это в свою очередь позволяет связать между собой потенциалы для разных парциальных волн, разных спин-изоспиновых состояний и даже для разных частиц; а кроме того, без всяких вычислений можно предсказать общий характер фазовых сдвигов, в частности, те значения энергии, при которых фазовые сдвиги равны нулю или $n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

В последующие годы указанные ОСП были использованы при решении уравнений Фаддеева для 3α -системы [3, 73], где было показано, что энергии двух 0^+ состояний ${}^{12}\text{C}$ весьма хорошо соответствуют экспериментальным значениям. Особенно детально структуру состояний ${}^{12}\text{C}$ в таком подходе исследовали Тамагаки

и Фудживара [3]. Они учли все существенные парциальные волны и нашли, что спектр низколежащих состояний ядра углерода (0^+ , 2^+ , 4^+ и т. п.) весьма хорошо соответствует экспериментальной ситуации (см. рис. 7). Хорошо видно, что более корректный учет принципа Паули сразу приводит к правильному характеру спектра ^{12}C . Кроме того, Тамагаки и Фудживара показали, что подобный подход приводит также и к удовлетворительному описанию структуры низколежащих состояний ядра ^{12}C с $T=0$. Тем не менее их расчеты показали, что волновые функции низколежащих состояний имеют заметные примеси запрещенных состояний, что обусловлено, по всей вероятности, тем, что ОСП лишь приближенно учитывают требование ортогональности к занятым состояниям и при значительном сходе с массовой поверхности это требование нарушается. Поэтому для дальнейших исследований необходимо так модифицировать трехчастичные уравнения, чтобы их решения были строго ортогональны к функциям занятых состояний в каждой двухчастичной подсистеме и, кроме того, чтобы исключить соответствующие запрещенные виртуальные переходы во всех промежуточных состояниях.

Уравнения Фаддеева с ортогонализацией к двухчастичным состоянием. Итак, рассмотрим систему трех составных частиц с парными взаимодействиями, которые описываются потенциалами \tilde{V}_i с условием ортогональности $\Gamma_i \psi = 0$. Проекторы Γ_i теперь бесконечномерны и записываются, например, в координатном представлении в виде

$$\Gamma_i = \sum_n \varphi^n(\mathbf{r}_i) \varphi^{n*}(\mathbf{r}'_i) \delta(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i),$$

где $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{jk}$ и $\boldsymbol{\rho}_i$ — координаты Якоби и сумма по n берется по всем запрещенным состояниям. Введем далее ОПП $V = \tilde{V}_i + \lambda_i \Gamma_i$, псевдогамильтониан $\tilde{H} = H_0 + \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3$ и соответствующие ФГ:

$$\tilde{G} = (E - \tilde{H})^{-1}; \quad \tilde{G}_i = (E - H_0 - \tilde{V}_i)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя стандартные тождества

$$\tilde{G} = G_0 + G_0 \tilde{V} \tilde{G}; \quad \tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3; \quad \tilde{G}_i = G_0 + G_0 \tilde{V}_i \tilde{G}_i$$

и редукцию Фаддеева [75], получаем модифицированную систему УФ для ФГ [28]:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G} &= G_0 + \tilde{G}^{(1)} + \tilde{G}^{(2)} + \tilde{G}^{(3)}; \\ \tilde{G}^{(i)} &= \tilde{G}_i \tilde{V}_i (G_0 + \tilde{G}^{(j)} + \tilde{G}^{(k)}), \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где компоненты $G^{(i)}$ определяются равенством

$$\tilde{G}^{(i)} = G_0 \tilde{V}_i \tilde{G}.$$

Теперь перейдем в системе (80) к пределу $\lambda_i \rightarrow \infty$, используя соотношение

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \tilde{G}_i(\lambda) \tilde{V}_i(\lambda) = \tilde{G}_i V_i - G_i \Gamma (\Gamma G_i \Gamma)^{-1} \Gamma_i, \quad (81)$$

[\tilde{G}_i определено выражением (37)]. Если теперь подействовать на i -е уравнение системы (80) проектором Γ_i , то получим

$$\Gamma_i \tilde{G}^{(i)} = -\Gamma_i (G_0 + \tilde{G}^{(j)} + \tilde{G}^{(k)})$$

или

$$\Gamma_i \tilde{G} = 0 \quad \text{при } \lambda_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\tilde{G} \Gamma_i = 0$ при $\lambda_i \rightarrow \infty$.

Итак, выведенная система УФ имеет решения, строго ортогональные к запрещенным состояниям, включенным в проекторы Γ_i . Отметим, что если в i -й паре запрещенных состояний нет (например, когда две частицы j, k — нуклоны), то следует принять $\lambda_i = 0$. Таким образом, система (80) включает в себя самый общий случай трех составных частиц.

Важно добавить также, что если все $\lambda_i \rightarrow \infty$, то $\Gamma \tilde{G} = \tilde{G} \Gamma = 0$, где Γ — *полный* проектор, определяемый условиями:

$$\Gamma_i \Gamma = \Gamma \Gamma_i = \Gamma_i; \quad \Gamma^2 = \Gamma.$$

И поскольку разные Γ_i не коммутируют друг с другом, то полный проектор Γ представляет собой бесконечный ряд из произведений проекторов $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$, оперировать которым очень неудобно. Описываемый же здесь метод, как следует из приведенных выше соотношений, позволяет получить ортогонализацию без использования полного проектора.

Используя систему УФ (80) для ФГ, легко теперь вывести УФ для волновых функций с помощью известного соотношения для полной проектированной волновой функции

$$\tilde{\Psi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \tilde{G} (E + i\varepsilon) \Phi,$$

которая, как и полная ФГ, ортогональна всем запрещенным состояниям, включенным в Γ_i . Например, для рассеяния частицы I на связанном состоянии (23) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}_1 &= \tilde{\psi}_1^{(1)} + \tilde{\psi}_1^{(2)} + \tilde{\psi}_1^{(3)}; \\ \tilde{\psi}_1^{(i)} &= \tilde{\Phi}_1 \delta_{i1} + \tilde{G}_i V_i (\tilde{\psi}_1^{(j)} + \tilde{\psi}_1^{(k)}), \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где функция начального состояния $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ должна быть собственной функцией канального псевдогамильтониана \tilde{H}_1 (т. е. с учетом условия ортогональности) при $\lambda \rightarrow \infty$.

Написанные трехчастичные уравнения годны не только, когда двухчастичное взаимодействие представлено ОСМ, но и для опти-

ческих потенциалов с запрещенными состояниями. В последнем случае

$$\tilde{G}_i = G_i - \sum_n \frac{|\varphi_i^n\rangle \langle \varphi_i^n|}{E - E_i^n},$$

т. е. ортогонализованная ФГ \tilde{G}_i равна исходной ФГ G_i за вычетом спектральных членов, отвечающих запрещенным состояниям с энергией E_i^n . При этом, как легко показать, добавка вследствие ортогонализации в ядро УФ равна

$$\Delta K_i = \tilde{G}_i \tilde{V}_i - G_i V_i = \sum_n |\varphi_i^n\rangle \langle \varphi_i^n| \times \\ \times \left(\frac{V_i}{E - E_i - p_i^2/2\mu_i} + 1 \right) \delta(p_i - p_i').$$

Написанные выше УФ (80) и (82) для рассеяния трех составных частиц предложены в [7] для собственного проектирования, т. е. когда запрещенные состояния являются собственными состояниями оптического гамильтониана, и в [28] в более общем случае несобственного проектирования, включая и ОСМ (см. также [27]).

Уравнения для дейтонных реакций. Когда одна из частиц бесконечно тяжелая, например $m_3 = \infty$, удобно использовать другую схему редукции Фаддеева, предложенную Базем, а также Доддом и Грайдером [76]. Такого рода трехчастичную модель удобно использовать для интегрального описания прямых ядерных реакций с дейтонами. При этом запрещенные состояния имеются лишь в парах $1\bar{3}$ и $2\bar{3}$, а проекторы Γ_{13} и Γ_{23} коммутируют. Используем теперь разбиение вида

$$G = G_0 + G^{(12)} + G^{(3)},$$

соответствующее гамильтониану¹

$$H = H_0 + V_{12} + V_3, \quad V_3 = V_{13} + V_{23}. \quad (83)$$

Вводим псевдогамильтониан с $\tilde{V}_3 = \tilde{V}_{13} + \tilde{V}_{23}$ и после фаддеевской редукции, отвечающей разбиению (83), получим модифицированную систему УФ:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G} &= G_0 + \tilde{G}^{(12)} + \tilde{G}^{(3)}; \\ \tilde{G}^{(12)} &= G_{12} V_{12} (G_0 + \tilde{G}^{(3)}); \\ \tilde{G}^{(3)} &= \tilde{G}_3 \tilde{V}_3 (G_0 + \tilde{G}^{(12)}), \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

где

$$\tilde{G}^{(12)} = G_0 V_{12} \tilde{G}, \quad \tilde{G}^{(3)} = G_0 \tilde{V}_3 \tilde{G}.$$

Аналогично (81) можно показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{G}_3(\lambda) \tilde{V}_3(\lambda) = \tilde{G}_3 V_3 - G_3 \Gamma (\Gamma G_3 \Gamma)^{-1} \Gamma, \quad (85)$$

где $\Gamma = \Gamma_{13} + \Gamma_{23} - \Gamma_{13} \Gamma_{23}$ — полный проектор. Действуя оператором Γ на второе уравнение (84), получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma \tilde{G} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{G} \Gamma = 0$$

и

$$\Gamma_{13} \tilde{G} = 0, \quad \Gamma_{23} \tilde{G} = 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

т. е. опять требуемую ортогональность полной ФГ к запрещенным состояниям в подсистемах нуклон — ядро. Можно теперь показать [77], что

$$G_3(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g_{13}(\varepsilon) g_{23}(E - \varepsilon) d\varepsilon,$$

т. е. ФГ двух не взаимодействующих между собой частиц в поле остова дается конволюцией двух одночастичных ФГ (детальное обсуждение способов расчета этой свертки см. в [78]). Аналогично этому легко найти

$$\tilde{G}_3(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{13}(\varepsilon) \tilde{g}_{23}(E - \varepsilon) d\varepsilon$$

и при проектировании на собственные состояния подсистем 13 и 23 , т. е. при использовании ОПЗС получим

$$\tilde{G}_3 = (1 - \Gamma_{13})(1 - \Gamma_{23})G_3 = (1 - \Gamma)G_3.$$

В этом случае

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{G}_3(\lambda) \tilde{V}_3(\lambda) = \tilde{G}_3 V_3 - \Gamma.$$

Дальше стандартным образом легко вывести проектированные уравнения для волновых функций (подробности вывода см. в [7, 28, 79]) и найти добавочные члены в ядре, целиком обусловленные действием принципа Паули. Эта добавка равна $\Delta K = T_{12}(\tilde{G}_3 - G_3)$, где T_{12} — матрица рассеяния частиц 1 и 2 . Для собственного проектирования находим

$$\begin{aligned} \Delta K = & -T_{12} \left[\sum_n |\varphi_{13}^n\rangle \langle \varphi_{13}^n| g_{23}(E - E_{13}^n) + \right. \\ & \left. + (1 \rightleftharpoons 2) - \sum_{n, m} \frac{|\varphi_{13}^n\rangle \langle \varphi_{13}^n| \varphi_{23}^m \rangle \langle \varphi_{23}^m|}{E - E_{13}^n - E_{23}^m} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично можно вывести уравнения для рассеяния нуклона на связанном состоянии нуклона и ядра.

5. ЯДРО ^{12}C КАК 3α -СИСТЕМА С ЗАПРЕЩЕННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Осцилляторный базис для трехбозонной системы, «очищенный» от запрещенных состояний. Как известно, имеется два различных подхода к проблеме трех тел: с помощью уравнений Фаддеева (УФ) и использованием вариационного метода. В предыдущем разделе мы обсудили модификацию УФ для трех составных частиц, в этом же разделе на примере ядра ^{12}C обсудим второй подход, рассматривая ^{12}C , как систему 3α . В качестве вариационного базиса используем осцилляторный базис трансляционно-инвариантной модели оболочек (ТИМО), а парное $\alpha\alpha$ -взаимодействие выбираем в виде оптического потенциала с запрещенными состояниями.

Попытки трактовать ядро ^{12}C (в основном и низколежащих состояниях с $T = 0$) как систему 3α многократно предпринимали уже давно (см. обзор [80]), однако в подавляющем большинстве работ принцип Паули в $\alpha\alpha$ -взаимодействии учитывали слишком грубо путем введения в потенциал L -зависящей локальной отталкивающей сердцевины. Естественно, что ни один из этих потенциалов не приводит к корректной, с микроскопической точки зрения, волновой функции относительного движения в $\alpha\alpha$ -подсистеме.

Хотя 3α -модель ядра ^{12}C не учитывает ряд факторов (тройные обменные силы, спин-орбитальное взаимодействие в системе двенадцати нуклонов и т. п.), все же представляет интерес использовать ОПЗС в 3α -системе и посмотреть, как они передают истинное взаимодействие вне энергетической поверхности, дают ли разумное значение энергий связи и т. д.

Специфика использования полного базиса ТИМО в нашем случае заключается в том, что он должен быть очищен от запрещенных состояний по каждой паре частиц. Это не совсем элементарное требование легко учесть именно на осцилляторном базисе, имея в виду легкость пересвязок частиц, которую он допускает. Здесь мы рассмотрим простейший случай построения проектированного базиса ТИМО, соответствующий предположению о том, что запрещенные состояния парного гамильтониана $\alpha\alpha$ аппроксимируются осцилляторными волновыми функциями. Наилучшая аппроксимация волновых функций запрещенных состояний достигается при значении осцилляторного параметра $\hbar\omega = 22,5$ МэВ, которое и было использовано.

Состояния базиса ТИМО для трех составных бозонов в соответствии с [81—84] будем нумеровать квантовыми числами: N , $[f]$, $(\lambda\mu)$, K , Ω , L , M . Поскольку ядро ^{12}C в модели оболочек имеет низшую конфигурацию s^4p^8 , ограничимся набором состояний с полным числом осцилляторных квантов $N \geq 8$. Перестановочная симметрия α -частиц $[f] = [3]$ накладывает следующие ограничения [83] на число $K = \lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots, 1$ или 0 : $K =$

$= 0 \pmod 3$; если $K = 0$, то μ должно быть четным. Полный список базисных векторов ТИМО для $N \leq 12$ дан в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Число квантов N	Полный набор состояний	Разрешенные состояния
0	(00)	—
2	(20)	—
3	(30)	—
4	(40)(02)	—
5	(50)(31)	—
6	(60) ² (22)	—
7	(70)(51)(32)	—
8	(80) ² (61)(42)(04)	(04)
9	(90) ² (71)(52)(33)	(33)
10	(10,0) ² (81)(62) ² (24)	(62), (24)
11	(11,0) ² (91) ² (72)(53)(34)	(91), (53), (34)
12	(12,0) ³ (10,1)(82) ² (63) (44)(06)	(12,0)(82)(63) (44)(06)

Однако не все состояния с $N \geq 8$ свободны от запрещенных компонент, которые можно построить следующим образом. Умножим осцилляторную функцию $|nlm(r)\rangle$ запрещенного состояния ($nl = 00, 20, 22$) подсистемы $\alpha\alpha$ с координатой относительного движения двух α -кластеров $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ на некоторую осцилляторную функцию $|N - n, \Lambda M_\Lambda(\rho)\rangle$, зависящую от второй координаты Якоби $\rho = \rho_3 = (1/2)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_3$. С помощью коэффициентов Клебша — Гордана для группы $SU(3)$ построим из этих произведений состояния с определенной $SU(3)$ симметрией ($\lambda\mu$):

$$|n, N - n(\lambda\mu) \Omega LM\rangle = \sum \langle (n0) l(N - n, 0) \Lambda | (\lambda\mu) \Omega \Lambda | nl(\mathbf{r}_{12}), N - n \Lambda(\rho_3) : LM \rangle. \quad (86)$$

Если $n = 0$, то допустимо только $(\lambda\mu) = (N0)$. При $n = 2$ возможны $(\lambda\mu) = (N0), (N - 2, 1)$ и $(N - 4, 2)$. Теперь симметризуем вектор (86) относительно перестановки α -частиц. Поскольку вектор (86) симметричен относительно перестановки P_{12} , то оператор симметризации S приобретает вид

$$S = 1 + P_{13} + P_{23}$$

и для функции запрещенного состояния получаем выражение

$$|A = 3N [3] (\lambda\mu) \Omega LM\rangle_{\text{запр}} = (1/W) S |n, N - n(\lambda\mu) \Omega LM\rangle, \quad (87)$$

где нормировочный множитель с помощью результатов работ [83] можно записать следующим образом:

$$W^2 = 3 [1 + 2 \langle n, N - n(\lambda\mu) \Omega LM | P_{23} | n, N - n(\lambda\mu) \Omega LM \rangle = 3 [1 + 2 (-1)^{N-n} D_{n-N/2, n-N/2}^{\lambda/2} (2\pi/3)]. \quad (88)$$

Условие ортогональности некоторой симметричной функции $\bar{\psi}_{LM}$ к функции (87) имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\psi}_{LM} | A = 3, N [3] (\lambda\mu) \Omega LM \rangle = \\ & = (3/W) \langle \psi_{LM} | n, N - n (\lambda\mu) \Omega LM \rangle = 0, \end{aligned} \quad (89)$$

где $n \leq 2$, а квантовые числа $N (\lambda\mu) \Omega$ принимают всевозможные значения. Так как преобразование (86) унитарно, можно записать

$$\langle \bar{\psi}_{LM} | nl (r_{12}), N - n \Lambda (\rho_3) : LM \rangle = 0, \quad nl = 00, 20, 22. \quad (90)$$

Здесь значения $N - n$ и Λ произвольны, поэтому получаем условие

$$\langle \bar{\psi}_{LM} | nlm (r) \rangle = 0, \quad nl = 00, 20, 22. \quad (91)$$

В силу симметрии функции $\bar{\psi}_{LM}$ относительно перестановок α -частиц условие ортогональности к запрещенным состояниям трехчастичной системы (89) сводится к условию (91), в котором фигурирует только одна степень свободы $r = r_{12}$ с фиксированными номерами α -частиц.

Прямое вычисление показывает, что при $N \geq 8$ все состояния (87) с $n = 0$, $(\lambda\mu) = (N0)$ или $n = 2$, $(\lambda\mu) = (N0)$, $(N - 2, 1)$ и $(N - 4, 2)$ являются линейно-независимыми ненулевыми векторами. Отсюда вытекает следующая процедура построения проективного базиса ТИМО, «очищенного» от запрещенных состояний. Для каждого значения N необходимо: сконструировать полный базис ТИМО $\bar{\psi}_{NLM}$, построить всю совокупность запрещенных состояний (87) и, наконец, провести ортогонализацию базисных состояний $\bar{\psi}_{NLM}$ к запрещенным состояниям, например с помощью процедуры Грама — Шмидта. Интегралы перекрывания исходных базисных векторов $\bar{\psi}_{NLM}$ с запрещенными состояниями задаются формулами (89), (90). Конкретно для ядра ^{12}C описанная процедура приводит к таким результатам. В основном состоянии данное ядро имеет спин 0^+ , поэтому в его волновую функцию могут входить только векторы ТИМО с четными N и μ . Следовательно, при фиксированном N имеются три типа линейно-независимых векторов запрещенных состояний, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{два набора векторов с } \mu = 0, \\ \text{один набор векторов с } \mu = 2. \end{array} \right\} \quad (92)$$

Все векторы с $\mu > 2$ — разрешенные, поэтому практически описанную выше процедуру ортогонализации к запрещенным состояниям нужно проводить только для векторов из базиса ТИМО с $\mu = 0$ и 2 (см. табл. 1).

Из условия (91) вытекает и другая возможность проектирования запрещенных состояний в трехчастичной системе. Она сво-

дится к диагонализации на полном базисе ТИМО оператора $P = P_1 + P_2 + P_3$, где P_1, P_2, P_3 — проекторы на запрещенные состояния для степеней свободы r_{12}, r_{13}, r_{23} . Вследствие симметрии трехбозонных состояний по отношению к перестановкам частиц достаточно диагонализировать часть оператора P , например:

$$P_1 = |00\rangle\langle 00| + |20\rangle\langle 20| + |22\rangle\langle 22|. \tag{93}$$

Разрешенные состояния соответствуют нулевым собственным значениям этого оператора. Ясно, что последний подход применим также к системам из четырех и большего числа α -кластеров. Он позволяет провести обобщение процедуры проектирования и на случай, когда используются не осцилляторные волновые функции, а функции общего вида.

Есть и другие методы выделения разрешенных и запрещенных состояний в системе трех [2] и четырех [85] α -кластеров, а также для других многокластерных систем, основанные на изучении свойств собственных значений и собственных функций трехкластерных (и более сложных) интегралов перекрывания, аналогичных тем, которые рассматривались для двухкластерных систем. Для системы 3α они приводят к тем же результатам, что были описаны выше.

Теперь перейдем к результатам конкретных расчетов.

Уровни ядра ^{12}C в 3α -модели с запрещенными состояниями. В вариационном расчете [5] пробная функция представляла собой линейную комбинацию разрешенных базисных векторов ТИМО:

$$\psi_{\text{проб}} = \sum_{i=1}^{i_{\text{макс}}} C_i |A = 3N [3] (\lambda\mu) \omega LM\rangle_{\text{разр}}. \tag{94}$$

Здесь индекс i означает всю совокупность квантовых чисел ТИМО: $\{N, (\lambda\mu), \omega\}$; $i_{\text{макс}}$ — номер вектора, на котором производится «обрезание» базиса. Неизвестные коэффициенты C_i и энергии уровней E получают при решении системы линейных уравнений

$$(\partial/\partial C_i^*) (\psi_{\text{проб}} | H - E | \psi_{\text{проб}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, i_{\text{макс}} \tag{95}$$

и соответствующего секулярного уравнения.

Парное $\alpha\alpha$ -взаимодействие, которое входит в гамильтониан H , имеет вид (см. разд. 3):

$$V_{\alpha\alpha}(r) = V_0 \{1 + \exp[(r - r_0)/a]\}^{-1} + V_{\text{Кул}}(r), \tag{96}$$

где $V_0 = -125$ МэВ; $r_0 = 1,78$ Ферми; $a = 0,66$ Ферми. Заметим, что в данном расчете нельзя было, как обычно, варьировать параметр $\hbar\omega$, так как он заранее фиксирован ($\hbar\omega = 22,5$ МэВ) из условия наилучшей аппроксимации запрещенных состояний. Поэтому использованный в таком расчете класс пробных функций (94) менее гибок, чем в обычных вариационных расчетах на осцил-

ляторном базисе. В результате для получения хорошей сходимости следует использовать базис достаточно большой размерности. Расчет производился вплоть до $N_{\text{макс}} = 24$ (диагонализовалась матрица размерности 68×68). Определялась энергия основного состояния 0^+ и положение первых двух возбужденных состояний 0_2^+ и 0_3^+ :

$$E_{0_1^+} = -15,06 \text{ МэВ}; \quad E_{0_2^+} = +9,12 \text{ МэВ}; \quad E_{0_3^+} = 11,75 \text{ МэВ}. \quad (97)$$

Для сравнения проведем расчет 3α -системы со взаимодействием (96) на полном базисе ТИМО (т. е. без ортогонализации к запрещенным состояниям) и получим:

$$E'_{0_1^+} = -217,3 \text{ МэВ}; \quad E'_{0_2^+} = -164,9 \text{ МэВ}; \quad E'_{0_3^+} = -116,9 \text{ МэВ}. \quad (98)$$

Таким образом, ортогонализация к запрещенным состояниям при отсутствии отталкивания в $\alpha\alpha$ -потенциале действительно удерживает систему 3α от коллапса. Этот факт еще раз подтверждает наше исходное положение о том, что нет никакой необходимости вводить отталкивающую сердцевину в $\alpha\alpha$ -взаимодействие.

Видно также, что масштабы кинетической и потенциальной энергий в 3α -системе велики. В сравнении с этими масштабами получившееся завышение энергии связи ^{12}C на 7,8 МэВ * можно рассматривать как относительно небольшое отклонение, если принять во внимание, что рассмотренная модель является лишь «первым приближением», так как не учитываются следующие аспекты.

1. Ядро ^{12}C в основном состоянии, по-видимому, имеет структуру, промежуточную между оболочечной и 3α -кластерной. Ортогонализация к парным запрещенным состояниям учитывает лишь вклад от парных обменов тождественных нуклонов из разных α -частиц, а в 3α -системе определенный вклад должны вносить также и тройные обмены. Это приведет к перенормировке $\alpha\alpha$ -взаимодействия в 3α -системе.

2. Как показывают расчеты МРГ [1], взаимодействие между α -кластерами, связанное с парными обменами, является нелокальным и энергетически зависящим. Потенциал (96) эквивалентен такому взаимодействию в смысле описания фаз и запрета определенных состояний. Однако мы не учитываем зависимость потенциала от энергии. Поэтому t -матрица для потенциала (96) может все же отличаться от t -матрицы для «истинного» нелокального взаимодействия.

3. Если руководствоваться оболочечной моделью ядра (реально это соответствует центральной области, где высока плотность

* Заметим, что расчеты с $\alpha\alpha$ -потенциалом, содержащим отталкивающий кор, обычно приводят к сильно недосвязанному ядру ^{12}C [87].

нуклонов), то в ядре ^{12}C с большой вероятностью присутствуют, как виртуальные, α -частицы в возбужденных состояниях [88], которые уже могут находиться, например, в $2S$ -состоянии взаимного движения и т. д., т. е. должны трактоваться особым образом. Однако расчеты Джексона с сотрудниками [89] показывают, что их вклад в энергию связи ядра ^{12}C невелик.

Таким образом, «второе приближение» должно учитывать эффекты, перечисленные в пунктах 1—3.

Что касается возбужденных состояний O_2^+ и O_3^+ , то они имеют, вероятно, α -кластерную природу. Этот вывод согласуется с результатами микроскопических расчетов [90], которые определенно указывают на то, что ядро ^{12}C в O_2^+ -состоянии представляет собой вибрирующую цепочку α -кластеров.

Мы остановились здесь только на уровнях O^+ ядра ^{12}C . Подобная же схема (на основе модели ортогональных условий, описанной в разд. 2) применяется также и к состояниям с другими моментами [2, 91] и дает хорошее описание всех уровней ядра ^{12}C с энергией возбуждения ниже 15 МэВ, при которой начинается разрушение α -кластеров (см. рис. 7). Результаты этих расчетов также хорошо согласуются с точным расчетом МРГ [92].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим возможные применения описанных в обзоре теоретических схем. Это, во-первых, различные ядерные реакции при сравнительно невысоких энергиях в трехкластерных системах — $^6\text{Li}(\alpha d)^8\text{Be}$, $^6\text{Li}(t, d)^7\text{Li}$, $^{16}\text{O}(^6\text{Li}, d)^{20}\text{Ne}$ и т. п., которые не сопровождаются перестройкой самих кластеров, но характеризуются при диаграммном описании сложной игрой различных механизмов [93]. В нашей схеме они должны описываться модифицированными уравнениями Фаддеева. Возможно упрощение [94], связанное с использованием суммы осциллирующих сепарабельных потенциалов [72] для каждой пары кластеров. Например, для пары αt связанные состояния и резонансы есть в каналах 2P_J ($J = 3/2$ и $1/2$) и 2F_J ($J = 7/2$ и $5/2$). Сюда же можно отнести проблему исследования резонансных состояний в 3α -системе, для решения которой сделаны первые полезные шаги [3]. Правда, некоторая примесь запрещенных состояний остается [3].

Далее, можно указать реакцию срыва (d, p) на легких ядрах в области сравнительно небольших энергий 3—10 МэВ с захватом нейтрона на одночастичные уровни (например, $^{12}\text{C}(d, p)^{13}\text{C}^*$, $E^* = 3,09$ МэВ, $2s$ — уровень нуклона). Здесь есть все основания ожидать неборовский механизм прямой ядерной реакции (существенный вклад многих лестничных диаграмм), т. е. необходимость трехтельного подхода [95]. Аналогичным образом нужно

рассматривать при сравнительно небольших энергиях и неупругие процессы (p, p') или (n, n') на ядрах ${}^9\text{Be}$; ${}^{13}\text{C}$, ${}^{17}\text{O}$ с возбуждением одночастичных уровней.

Представляет интерес рассмотрение структуры легких ядер, таких, как ${}^6\text{Li}$ — ${}^6\text{Be}$ — ${}^6\text{He}$, ${}^9\text{Be}$ — ${}^9\text{B}$ и т. п., как системы трех тел с известными взаимодействиями $\alpha\alpha$ и αn , где можно использовать либо модифицированные уравнения Фаддеева, либо проектированный вариационный базис типа описанного в разд. 5, но для частиц с разными массами. Определенные шаги в этом направлении уже сделаны [96]. Как видим, красивых задач ядерной физики в этой области достаточно много.

Наконец, интересные возможности открываются в применении изложенных идей и к задаче NN . Именно, вполне возможно, что в NN -взаимодействии отсутствует отталкивающая сердцевина, а вместо нее имеется узел волновой функции [97]. Можно представить, какого рода взаимодействие между кварками приводит к такому результату [98], предсказать качественно спектр возбуждений в системе NN , рассчитать содержание примеси $\Delta\Delta$ в дейтоне [99], форм-факторы рассеяния электронов на дейтоне [98] и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wildermuth K., Tang Y. C. A Unified Theory of the Nucleus. — Braunschweig, Vieweg Verlag, 1977.
2. Horiuchi H. — Progr. Theoret. Phys., 1974, v. 51, p. 1266; 1975, v. 53, p. 447. — In: Proc. Internat. Conf. on Nuclear Structure. Tokyo, 1977; — J. Phys. Soc. Japan, Suppl., 1978, v. 44, p. 144.
3. Fujiwara Y., Tamagaki R. — Progr. Theoret. Phys., 1976, v. 56, p. 1503.
4. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. — В кн.: Современные проблемы оптики и ядерной физики. Киев, Наукова думка, 1974, с. 225; Neudatchin V. G. — In: Proc. 2nd Internat. Conf. on Clustering Phenomena in Nuclei. Maryland, Park College, 1975.
5. Smirnov Yu. F. e.a. — Nucl. Phys. A, 1974, v. 235, p. 289.
6. Kukulin V. I., Neudatchin V. G., Smirnov Yu. F. — Nucl. Phys. A, 1975, v. 245, p. 429.
7. Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Померанцев В. Н. — Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 298.
8. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. — М., Наука, 1969.
9. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф., Юдин И. П. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1782.
10. Kannelopoulos Th., Wildermuth K. — Nucl. Phys., 1960, v. 20, p. 10.
11. Elliott J. P., Skyrme T. H. R. — Proc. Roy. Soc. A, 1955, v. 232, p. 561.
12. Reidemeister G. — Nucl. Phys. A, 1972, v. 197, p. 631.
13. Feshbach H. — Ann. Phys., 1962, v. 19, p. 287; Ann. Rev. Nucl. Sci., 1958, v. 8, p. 49. — In: Topics in the Theory of Nuclear Reactions. Part II. Reaction Dynamics. N. Y., Gordon and Breach, 1973.
14. Auerbach N. e.a. — Rev. Mod. Phys., 1972, v. 44, p. 48.
15. Clement D., Schmid F. — In: Proc. 2nd Internat. Conf. on Clustering Phenomena in Nuclei. Maryland, 1975.
16. Saito S. e.a. — Preprint Nagoya Univ. DPNU-15, 1973.

17. Kamimura M., Matsuse T., Tanoda K. — Progr. Theoret. Phys., 1972, v. 47, p. 1537.
18. Clement D., Schmid E. W., Teufel A. G. — Phys. Lett. B, 1974, v. 49, p. 308.
19. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М., Атомиздат, 1974.
20. Кукулин В. И., Померанцев В. Н. — Ядерная физика, 1978, т. 27, с. 1668.
21. Kukulín V. I. — Fizika, 1977, v. 9 (Suppl. 4), p. 395.
22. Saito S. — Progr. Theoret. Phys., 1969, v. 41, p. 705.
23. Fujiwara Y., Horiuchi H., Tamagaki R. — In Internat. PreSymp. on Clustering Phenomena in Nuclei. Tokyo, 1977.
24. Краснопольский В. М., Кукулин В. И. — Ядерная физика, 1974, т. 20, с. 883; Кукулин В. И., Померанцев В. Н. — ТМФ, 1976, т. 27, с. 373.
25. Horiuchi H. — Fizika, 1977, v. 9 (Suppl. 3), p. 251.
26. Saito S. e. a. — Progr. Theoret. Phys., 1973, v. 50, p. 156.
27. Померанцев В. Н. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1978.
28. Kukulín V. I., Neudatchin V. G., Pomerantsev V. N. — J. Phys. G, 1978, v. 4, p. 1409.
29. Lippmann V. A., Schey H. M. — Phys. Rev., 1961, v. 121, p. 1112.
30. Burke P. G., Chandra N. — J. Phys. B., 1972, v. 5, p. 1696.
31. Shakin C. M., Weiss M. S. — Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 756.
32. Burke P. G., SinFailam A. L. — J. Phys. B., 1970, v. 3, p. 641.
33. Chandra N., Temkin A. — Phys. Rev. A, 1976, v. 13, p. 188; Buckley B. D., Burke P. G. — J. Phys. B, 1977, v. 10, p. 725.
34. Coz M., Arnold L. G., McKellar A. D. — Ann. Phys., 1970, v. 58, p. 504; 1970, v. 59, p. 219.
35. Afzal S. A., Ahmad A. A., Ali S. — Rev. Mod. Phys., 1969, v. 41, p. 247.
36. Okai S., Park S. C. — Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 787.
37. Neudatchin V. G. e.a. — Phys. Lett. B, 1971, v. 34, p. 58.
38. Neudatchin V. G. e.a. — Nuovo cimento Lett., 1972, v. 5, p. 834.
39. Кукулин В. И. и др. — В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика высоких энергий и атомного ядра. Вып. 2 (4). Харьков, 1973.
40. Коренной В. П. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1973.
41. Эль Ховари Р. М. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1977.
42. Progr. Theoret. Phys. Suppl., v. 52 (в частности, см. работу J. Hiura, R. Tamagaki, Ch. II).
43. За ман Дж. Вычисление блоховских функций. М., Мир, 1973.
44. Swan P. — Proc. Roy. Soc., 1955, v. 228, p. 10; Ann. Phys., 1968, v. 48, p. 455.
45. Glockle W., Le Turneux J. — Nucl. Phys. A, 1976, v. 269, p. 16.
46. Ситенко А. Г. Лекции по теории рассеяния. Киев, Вища школа, 1971.
47. Jauch J. M. — Helv. phys. acta, 1957, v. 30, p. 143.
48. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., Мир, 1966.
49. Fong J. C., Igo G., Perez-Mendez. V. — Nucl. Phys. A, 1976, v. 262, p. 365.
50. Смирнов Ю. Ф., Эль Хавари Р. М. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1975, т. 39, с. 2084.
51. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
52. Clement D., Kannelopoulos E. F., Wildermuth K. — Phys. Lett. B, 1972, v. 55, p. 19.
53. Park J. V., Sheid W., Greiner W. — Phys. Rev. C, 1972, v. 6, p. 1565.
54. Brueckner K. A. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 944.
55. Sheid W., Greiner W. — Z. Phys., 1969, Bd 266, S. 364.
56. Yukawa T. — Nucl. Phys. A, 1972, v. 186, p. 127.

57. Базь А. И. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 607.
58. Von Oertzen W. e.a. — Nucl. Phys. A, 1970, v. 148, p. 529.
59. Saito S. e.a. — Progr. Theoret. Phys., 1973, v. 50, p. 1561.
60. Meier W., Glöckle W. — Nucl. Phys. A, 1975, v. 255, p. 211.
61. Böinghoff A., Hüsken H., Weiguny A. — Phys. Lett. B, 1976, v. 61, p. 9.
62. Tang Y. C. — In: Internat. Conf. on Clustering Phenomena in Nuclei, Bochum, 1969. Vienna, IAEA, 1969, p. 109.
63. Tamagaki R. — Progr. Theoret. Phys. Suppl., Extra Number, 1969, p. 42.
64. Perey F., Buck B. — Nucl. Phys., 1962, v. 32, p. 353.
65. Perey F. — In: Direct Interaction and Nuclear Reactions Mechanisms. N. Y., Gordon and Breach, 1963.
66. Coz M. — Progr. Theoret. Phys., 1973, v. 50, p. 111; Fiedeldey H. — Nucl. Phys., 1966, v. 77, p. 149.
67. Furness J. B., McCarthy I. E. — J. Phys. B, 1973, v. 6, p. 2280.
68. De Takaszy N. — Phys. Rev. C, 1972, v. 5, p. 1883.
69. Giraud B., Hocquenghem F. C., Lumbroso A. — Phys. Rev. C, 1973, v. 7, p. 2274.
70. Fiedeldey H. — Nucl. Phys. A, 1967, v. 96, p. 463.
71. Kreps R. E., Nath P. — Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 1475; Charnomordic B., Fayard C., Lamot G. H. — Phys. Rev. C, 1977, v. 15, p. 864; Chum D. S., Han C. S., Lin D. L. — Phys. Rev. C, 1974, v. 9, p. 2086; Ghovanlou A., Lehman D. R. — Phys. Rev. C, 1974, v. 9, p. 1730; Kawazoe Y. e.a. — Progr. Theoret. Phys., 1974, v. 51, p. 428; Lovas I. — Ann. Phys. (N. Y.), 1975, v. 89, p. 96; Beregi P., Lovas I., Revai J. — Ann. Phys. (N. Y.), 1970, v. 61, p. 57; Reiner A. S., Jaff A. I. — Phys. Rev. 1967, v. 161, p. 935; Bunati J. R., Bund G. W. — Nucl. Phys. A, 1978, v. 306, p. 139.
72. Kukulin V. I., Neudachin V. G. — Nucl. Phys., 1970, v. 157, p. 609; Кузнецова Л. М., Кукулин В. И., Неудачин В. Г. — Ядерная физика, 1971, т. 13, с. 694.
73. Kukulin V. I. Czech. J. Phys. B, 1971, v. 21, p. 923.
74. Horiuchi H. — In: Proc. 3d Internat. Conf. on Clustering Aspects of Nuclear Structure, Manitoba, 1978.
75. Фаддеев Л. Д. — ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459.
76. Базь А. И., Демин В. Ф., Кузьмин И. И. — Ядерная физика, 1966, т. 4, с. 737; Greider R. R., Dodd L. R. — Phys. Rev., 1966, v. 146, p. 671; 1966, v. 146, p. 675.
77. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.
78. Fuller R. C. — Phys. Rev. C, 1971, v. 3, p. 1042.
79. Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Померанцев В. Н. — Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 298; Preprint Prague Inst. Nucl. Phys., Řež, 1976.
80. Horiuchi H. — Fizika, 1977, v. 9 (Suppl. 4), p. 251.
81. Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1963, т. 27, с. 1442.
82. Kurdyumov L. V. e.a. — Nucl. Phys. A, 1970, v. 145, p. 593.
83. Kramer P., Moshinsky M. — Nucl. Phys. A, 1969, v. 125, p. 321; Мошинский М. Гармонический осциллятор в современной физике. М., Мир, 1972.
84. Вангаас В. В. Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс, Минтис, 1971.
85. Horiuchi H. — Progr. Theoret. Phys., 1974, v. 55, p. 1448; Suzuki Y. — In: Proc. Internat. Conf. on Nuclear Structure. Tokyo, 1977.
86. Horiuchi H. — Progr. Theoret. Phys., 1977, v. 38, p. 204.
87. Aguilira-Navarro V. C., Por tilho O. — Ann. Phys., 1977, v. 107, p. 126.
88. Голованова Н. Ф. и др. — Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 63.
89. Jackson A. D., Lande A., Sauer P. U. — Nucl. Phys. A, 1970, v. 156, p. 1.

90. De Takaszy N. — Nucl. Phys. A, 1972, v. 178, p. 469.
91. Kamimura M., Fukushima Y., Tohsaki Suzuki A. — Fizika, 1977, v. 9 (Suppl. 2), p. 33.
92. Fukushima Y., Kamimura M. — Fizika, 1977, v. 9 (Suppl. 2), p. 35.
93. Werby M. F. e.a. — Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 106; 1974, v. 10, p. 564.
94. Levinger J. S. Springer Tracts in Modern Physics. Berlin, Heidelberg, N. Y., 1974, v. 71, p. 88; Charnomordic B., Fayard C., Lamot G. H. — Phys. Rev. C, 1977, v. 15, p. 864.
95. Неудачин В. Г. и др. — Ядерная физика, 1979, т. 29, № 2, с. 343.
96. Barsella B., Lovitch L., Rosati S. — Nucl. Phys. A, 1968, v. 117, p. 638.
97. Neudatchin V. G. e.a. — Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 128.
98. Neudatchin V. G., Smirnov Yu. F., Tamagaki R. — Progr. Theoret. Phys., 1977, v. 58, p. 1072.
99. Smirnov Yu. F., Tchuvilsky Yu. M. — J. Phys. G, 1978, v. 4, p. 1.