«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1980, ТОМ 11, ВЫП. 1

УДК 538.3

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В. Г. Кадышевский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждается калибровочно-инвариантная формулировка теории электромагнитных взаимодействий, содержащая помимо $\hbar$ и c еще один универсальный масштаб — *фундаментальную длину* l. Новые уравнения движения полей, обобщающие уравнения Дирака — Максвелла, предсказывают существование у заряженных дираковских частиц «врожденных» электрических дипольных моментов, что ведет к нарушению P- и CP-симметрий, и «врожденных» аномальных магнитных моментов. В рассматриваемом подходе естественно возникает новая группа внутренней симметрии $[SU_\tau\ (2)]$, которую можно использовать для описания $e\mu$-универсальности электромагнитных взаимодействий. При этом полный лагранжиан теории содержит четырехфермионное взаимодействие, которое нарушает $SU_\tau\ (2)$-симметрию и делает возможными распады $\mu \to 3e$, $\mu \to e\gamma$ и т. п.

Из сравнения полученных теоретических предсказаний с экспериментальными данными определяется верхняя граница для фундаментальной длины l.

A gauge formulation of the electromagnetic interaction theory, containing the «fundamental length» l as a universal scale like $\hbar$ and c, is discussed. The new field equations substituting the Dirac—Maxwell equations predict the existence of the intrinsic electric dipole moments for charged particles, leading to a direct violation of P and CP-symmetries, and the new universal correction to the $(g - 2)$-anomaly. Further, a new group of internal symmetry, $SU\ (2)$, arises naturally which can be used to describe the $e\mu$-universality of the electromagnetic interactions. It turns out that $SU_\tau\,(2)$-symmetry of the total lagrangian is violated by the 4-fermion type interaction which gives rise to the processes $\mu \to 3e$, $\mu \to e\gamma$, etc. The upper bound for the fundamental length l is discussed taking into account the obtained theoretical predictions and the experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрим теорию электромагнитных взаимодействий, основанную на концепции *фундаментальной длины*. Эта новая гипотетическая константа в дальнейшем обозначается буквой l. Величина

$$M = \hbar/(lc) \tag{1}$$

будет называться *фундаментальной массой*.

Идея о существовании в природе новой универсальной постоянной размерности длины, которая бы фиксировала определенный масштаб в пространстве — времени (и соответственно в силу (1) в импульсном 4-пространстве), многократно обсуждалась в литературе в самых различных контекстах [1—14]. Главным стимулом для всех попыток ввести в теорию поля фундаментальную длину была надежда, что на этом пути удастся избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Оказалось, однако, что в так называемых *перенормируемых теориях* существование расходимостей не мешает проведению количественных расчетов. В результате интерес к проблеме фундаментальной длины почти пропал (см. тем не менее работы [15—18]).

Самым убедительным примером плодотворности алгоритма перенормировки и возможности построения на его основе вычислительной схемы может служить квантовая электродинамика (КЭД). Предсказания КЭД согласуются с экспериментом с беспрецедентной точностью, что является веским доказательством ее жизнеспособности как физической теории. Таким образом, следует признать, что гипотеза о существовании фундаментальной длины — это прежде всего вызов существующей квантовой электродинамике *. Чтобы иметь надежду выжить, эта гипотеза должна углубить КЭД как физическую теорию, сохранив, разумеется, ее согласие с уже имеющимися экспериментальными данными.

Как известно, КЭД — простейший и исторически первый пример калибровочной теории поля, где вид взаимодействия определяется из соображений симметрии. Соответствующая (абелева) группа локальных калибровочных преобразований имеет вид ($\hbar = c = 1$) **:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &\to \exp[ie\lambda(x)]\,\psi(x); \\ \bar{\psi}(x) &\to \exp[-ie\lambda(x)]\,\bar{\psi}(x); \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial\lambda(x)/\partial x^\mu; \quad \lambda^+(x) = \lambda(x). \tag{4}$$

Требование инвариантности теории относительно группы (3), (4) в сочетании с принципом минимальности электромагнитного взаимодействия, выражаемого подстановкой ***

$$i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x), \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{6}$$

* Из экспериментов по проверке КЭД в области высоких энергий можно извлечь следующий верхний предел для фундаментальной длины:

$$l \lesssim 10^{-16}\ \text{см}. \tag{2}$$

** В p-представлении условие эрмитовости λ-функций, очевидно, выглядит так:

$$\lambda^+(p) = \lambda(-p). \tag{5}$$

*** В классической теории (6) соответствует переходу к обобщенному импульсу:

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu(x). \tag{7}$$

сразу приводит к уравнениям Дирака — Максвелла для «голых» полей:

$$\left[\left(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-eA_{\mu}(x)\right)\gamma^{\mu}-m\right]\psi\quad(x)=0; \tag{8}$$

$$\partial F^{\mu\nu}(x)/\partial x^{\nu}=e\bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\psi(x), \tag{9}$$

где тензор напряженности электромагнитного поля определяется как

$$F^{\mu\nu}(x)=\partial A^{\mu}(x)/\partial x_{\nu}-\partial A^{\nu}(x)/\partial x_{\mu}. \tag{10}$$

Группа (3), (4) и подстановка (6) не содержат какого-либо масштаба типа l или M. Поэтому современная КЭД формально применима на любых пространственно-временных расстояниях и при всех значениях 4-импульса. С другой стороны, если в природе существует фундаментальная длина, то в дополнительных по отношению друг к другу областях

$$|x|\leqslant l; \tag{11}$$

$$|p|\geqslant M \tag{12}$$

рассматриваемая ортодоксальная формулировка КЭД уже не может считаться адекватной физической сути электромагнитных явлений. В простейшем случае, когда $eA_{\mu}=\mathrm{const}\equiv c_{\mu}$ и, следовательно, $F^{\mu\nu}(x)=0$, подстановка (6) эквивалентна замене

$$p_{\mu}\to p_{\mu}-c_{\mu}. \tag{13}$$

Таким образом, группа калибровочных преобразований (3), (4) здесь совпадает с группой параллельных переносов p-пространства Минковского. Другими словами, в рамках обычной КЭД импульсное 4-пространство должно быть *плоским псевдоевклидовым пространством*. Соответственно, если (6) и (3), (4) нельзя применять в областях (11), (12), то структура p-пространства *не обязана* быть псевдоевклидовой при $|p|\geqslant M$. Возникает вопрос: какой геометрией может обладать импульсное 4-пространство, если эта геометрия не является псевдоевклидовой?

Согласно общей классификации (псевдо)евклидовы пространства суть пространства нулевой кривизны. Их ближайшими «соседями» являются пространства *постоянной ненулевой кривизны*. В нашем 4-случае это так называемые пространства де Ситтера. Поэтому естественно попытаться ввести в импульсном 4-пространстве геометрию де Ситтера. Такая геометрия реализуется на поверхности однополостного 5-гиперболоида:

$$p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2-M^2p_4^2=-M^2. \tag{14}$$

Радиус кривизны этого гиперболоида отождествлен с фундаментальной массой (1), которая в силу (2) достаточно велика. Заметим, что уравнение (14) не накладывает никаких ограничений на времениподобные 4-импульсы и поэтому не приводит к каким-либо трудностям при построении пространства Фока и формулировке требования инвариантности S-матрицы относительно группы Пуанкаре. В области малых 4-импульсов, например, при

$$|p^0|, \ |\mathbf{p}| \ll M, \quad p^4 \approx 1 \tag{15}$$

геометрия на поверхности (14) не отличается от псевдоевклидовой *.

Поскольку гиперболоиды массовых поверхностей

$$p^2 = m_1^2, \quad p^2 = m_2^2, \ \ldots$$

одинаково легко вкладываются как в p-пространство де Ситтера (14), так и в плоское p-пространство Минковского, свободные частицы не могут различать эти две геометрии. Фактически только виртуальные (взаимодействующие) частицы способны зондировать геометрическую структуру импульсного 4-пространства. В области больших виртуальных импульсов (12) кривизна p-пространства де Ситтера играет доминирующую роль. Описание взаимодействий элементарных частиц в этой области [следовательно, и на малых пространственно-временных расстояниях (11)], основанное на использовании p-пространства де Ситтера, будет радикально отличаться от той картины, которая возникает в обычном подходе, связанном с использованием псевдоевклидова p-пространства.

Общий подход к построению квантовой теории в p-пространстве де Ситтера, удовлетворяющей требованию трансляционной инвариантности, был развит в работах [19—29] **. Однако возмож-

* Кроме (14), существует еще только одно пространство де Ситтера, переходящее в пространство Минковского в «плоском пределе» (15), а именно:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + M^2 p_4^2 = M^2.$$

Однако в этой геометрии возникает универсальное ограничение сверху на времениподобные 4-импульсы:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 \leqslant M^2,$$

что создает осложнение при реализации унитарных представлений группы Пуанкаре в пространстве Фока.

** Идея использовать искривленное p-пространство (14) в теории поля впервые была выдвинута в работах [4, 8]. В [20] можно найти ссылки на работы, в которых развивается подход, изложенный в [4, 8]. В [10] обсуждалась теория поля, в которой пространство импульсов имело переменную кривизну. Отметим, что во всех ранних работах по применению в теории поля неевклидова p-пространства не выполнялся закон сохранения 4-импульса, т. е. была нарушена трансляционная инвариантность.

Концепция нелокального электромагнитного поля, основанная на идеях, близких к гипотезе неевклидова импульсного пространства, и в то же время сохраняющая трансляционную инвариантность теории, была развита М. А. Марковым много лет назад [3].

ность калибровочно-инвариантной формулировки КЭД, приспособленной к новым геометрическим условиям, по существу, оставалась неисследованной.

Даже не зная, как выглядят новые калибровочные преобразования, обобщающие в духе геометрии p-пространства де Ситтера (14) группу преобразований (3) и (4), можно утверждать, что в импульсном представлении соответствующие функции λ имеют вид

$$\lambda(p^0, \mathbf{p}, p^4) = \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - M^2 p_4^2 + M^2)\, \tilde{\lambda}(p^0, \mathbf{p}, p^4), \tag{16}$$

при дополнительном ограничении

$$\lambda^+(p^0, \mathbf{p}, p^4) = \lambda(-p^0, -\mathbf{p}, p^4), \tag{17}$$

переходящем в условие эрмитовости (5) в «плоском пределе» (15). Если положить далее

$$\lambda(p, p^4) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-ipx + ip^4\tau)\, \lambda(x, \tau)\, d^4x\, d\tau, \tag{18}$$

то из (16) и (17) следует, что

$$(\Box - M^2\partial^2/\partial\tau^2 - M^2)\, \lambda(x, \tau) = 0; \tag{19}$$

$$\lambda(x, \tau)^+ = \lambda(x, -\tau). \tag{20}$$

Таким образом, калибровочные преобразования в новой схеме можно локализовать в псевдоевклидовом 5-пространстве $(x^0, \mathbf{x}, \tau)$, причем функции $\lambda(x, \tau)$, параметризующие их, удовлетворяют условиям (19) и (20). Ясно, что соответствующее калибровочное поле, т. е. электромагнитный потенциал, в таком случае должно быть 5-*вектором*, подобным $(x^0, \mathbf{x}, \tau)$.

Понятие электромагнитного 5-потенциала, локальные калибровочные преобразования в терминах функций $\lambda(x, \tau)$, удовлетворяющих (19) и (20), и адекватная калибровочно-инвариантная формулировка теории свободного электромагнитного поля были рассмотрены в работе [30]. Цель настоящей работы — перенести на новую геометрическую арену принцип минимального электромагнитного взаимодействия и получить в результате новые уравнения движения полей, обобщающие уравнения Дирака — Максвелла [31—33]. Поскольку обычное пространство — время вложено в наше пятимерное (x, τ)-пространство и новые λ-функции остаются локальными функциями переменных $(x^0, \mathbf{x})$, можно ожидать, что новая схема после проецирования на четырехмерное x-пространство превратится в некоторую локальную теорию поля, содержащую фундаментальную массу M (фундаментальную длину l) как параметр.

Ограничимся здесь рассмотрением лишь электродинамики, не подвергнутой вторичному квантованию, поскольку классические уравнения движения и вытекающие из них следствия сами по себе представляют значительный физический интерес. Процедура вторичного квантования и весь относящийся сюда материал (теория S-матрицы, графическая техника, поведение интегралов в ультрафиолетовой области и т. п.) будут изложены в другом месте.

Ниже, как правило, используется система единиц, в которой

$$\hbar = c = l = M = 1. \tag{21}$$

Применяются также следующие 5-мерные обозначения.

1. Метрический 5-тензор

$$(g^{LM}) = (g_{LM}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}; \quad L,\ M = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{22}$$

2. 5-Импульс

$$p^L = (p^\lambda,\ p^4) = (E,\ \mathbf{p},\ p^4) = g^{LM} p_M. \tag{23}$$

3. Поверхность де Ситтера (14)

$$g^{LM} p_L p_M = g_{LM} p^L p^M = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - p_4^2 = -1. \tag{24}$$

4. Пятимерный радиус-вектор

$$x^L = (x^\lambda,\ x^4) = (t,\ \mathbf{x},\ \tau) = g^{LM} x_M. \tag{25}$$

Соответствующие дифференциальные операторы:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_L = \partial / \partial x^L, \quad L = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4; \\ &g^{LM} \partial_L \partial_M = \square - \partial^2 / \partial \tau^2 \equiv \hat{\square}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

5. 5-Вектор, отвечающий началу координат в пространстве де Ситтера (24) («импульс вакуума» *)

$$V^L = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1). \tag{27}$$

6. Электромагнитный 5-потенциал

$$A^L (x,\ \tau) = (A^\lambda (x,\ \tau),\ A^4 (x,\ \tau)). \tag{28}$$

Более фундаментальной, чем $A^L (x,\ \tau)$ величиной, имеющей ясный геометрический смысл, является следующий 5-вектор:

$$\begin{aligned} B^L (x,\ \tau) &= \exp [\mathrm{i} (Vx)]\, A^L (x,\ \tau) = \\ &= \exp (-\mathrm{i}\tau)\, A^L (x,\ \tau) = g^{LM} B_M (x,\ \tau). \end{aligned} \tag{29}$$

* Это понятие, очень полезное в теории поля с искривленным p-пространством, было введено И. Е. Таммом [20].

Его тоже будем называть 5-потенциалом. Дополнительная компонента $B^4(x, \tau)$ (или $A^4(x, \tau)$) будет именоваться *τ-фотоном*.

7. 5-Тензор напряженностей электромагнитного поля [30]

$$\mathscr{F}_{LM}(x, \tau) = \partial B_L(x, \tau)/\partial x^M - \partial B_M(x, \tau)/\partial x^L =$$
$$= g_{LR} g_{MS} \mathscr{F}^{RS}(x, \tau); \quad L, M, R, S = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{30}$$

В основу рассуждений, которые приводятся ниже, положена идея о перенесении специфических «деситтеровских» черт теории свободного электромагнитного поля, развитой в работе [30], в теорию массивных частиц. Это должно привести нас к общей теории электромагнитных взаимодействий, содержащей фундаментальную длину. Такой образ действий подсказывается прошлым опытом. Укажем только один пример.

Однородные уравнения Максвелла изначально обладали свойствами релятивистской и градиентной инвариантности. Оба указанные свойства симметрии были последовательно перенесены в теорию частиц с массой. Это привело, во-первых, к специальной теории относительности и, во-вторых, к современной теории электромагнитных взаимодействий.

Далее принят следующий порядок изложения. В разд. 1 резюмированы наиболее важные моменты, связанные с описанием свободного электромагнитного поля в p-пространстве де Ситтера. В разд. 2 сформулирована теория свободного дираковскогоо поля в новых терминах. В разд. 3 обсуждается взаимодействие между электромагнитным и заряженным полями, подчиняющееся новому калибровочному принципу. Разд. 4 посвящен физическому анализу полученной картины электромагнитных взаимодействий.

1. СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В свободном случае уравнения движения для всех пяти компонент электромагнитного потенциала имеют вид [30]:

$$2(A^\mu(x, \tau) + \mathrm{i}\partial A^\mu(x, \tau)/\partial\tau + \mathrm{i}\partial A^4(x, \tau)/\partial x_\mu) = 0; \tag{31}$$

$$2(A^4(x, \tau) - \mathrm{i}\partial A^4(x, \tau)/\partial\tau - \mathrm{i}\partial A^\nu(x, \tau)/\partial x^\nu) = 0; \tag{32}$$

$$(\square - 1) A^\mu(x, \tau) = 0; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{33}$$

Переходя к потенциалу $B^L(x, \tau)$ [см. (29)] и производя некоторые простые преобразования, получаем вместо (31) — (33):

$$\mathrm{i}\mathscr{F}_{\mu 4}(x, \tau) = 0; \tag{34}$$

$$2B_4(x, \tau) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau} B_4(x, \tau) + \mathrm{i}\frac{\partial B_\nu(x, \tau)}{\partial x_\nu} = 0; \tag{35}$$

$$\partial\mathscr{F}^{\mu\nu}(x, \tau)/\partial x^\nu = 0. \tag{36}$$

Из (31), (32) или (34), (35) вытекает, что

$$(\square - 1) A^4(x, \tau) = (\square - 1)(\exp(i\tau) B^4(x, \tau)) = 0. \qquad (37)$$

Далее нетрудно убедиться, что уравнения (34) — (36) инвариантны относительно следующего калибровочного преобразования:

$$B^M(x, \tau) \to B^M(x, \tau) - \\ - \frac{\partial}{\partial x^M} (\exp(-i\tau) \lambda(x, \tau)); \quad M = 0, 1, 2, 3, 4, \qquad (38)$$

где $\lambda(x, \tau)$ подчиняется уравнению (19). Предполагая, что ограничение (20) на функции $\lambda(x, \tau)$ также наложено, и учитывая (38), получаем следующее соотношение:

$$(B^M(x, \tau))^+ = (B^\mu(x, -\tau), -B^4(x, -\tau)). \qquad (39)$$

Это равенство можно понимать и как *обобщенное условие нейтральности* электромагнитного поля, и как закон преобразования 5-потенциала $B^M(x, \tau)$ относительно τ-*инверсии*:

$$\tau \to -\tau. \qquad (40)$$

Используя (39), легко убедиться, что все новые уравнения движения (34) — (37) остаются инвариантными при преобразовании (40). Замечая далее, что

$$\frac{\partial}{\partial x^M} (\lambda(x, \tau) \exp(-i\tau)) = \frac{1}{ie} \left(\frac{\partial}{\partial x^M} \Omega(x, \tau) \right) \Omega^{-1}(x, \tau),$$

где

$$\Omega(x, \tau) = \exp[ie\lambda(x, \tau) \exp(-i\tau)], \qquad (41)$$

мы вправе рассматривать (41) как *матричную форму* нового калибровочного преобразования. В силу (20) плоскость

$$\tau = 0 \qquad (42)$$

выделена тем, что величины

$$\Omega(x, 0) = \exp[ie\lambda(x, 0)] \qquad (43)$$

являются унитарными и описывают обычную группу локальных калибровочных преобразований [ср. (3)]. Поскольку

$$B^\mu(x, 0) \to B^\mu(x, 0) - \partial\lambda(x, 0)/\partial x^\mu, \qquad (44)$$

вектор $B^\mu(x, 0)$ можно истолковать как обычный 4-потенциал электромагнитного поля:

$$B^\mu(x, 0) \equiv A^\mu(x). \qquad (45)$$

Соответственно 4-тензор $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \tau)$ на плоскости (42) можно отождествить с тензором напряженности (10):

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x, 0) = F^{\mu\nu}(x). \tag{46}$$

Однако фактически благодаря тождеству

$$\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \tau)/\partial x_4 + \partial \mathcal{F}^{\nu 4}(x, \tau)/\partial x_\mu + \partial \mathcal{F}^{4\mu}(x, \tau)/\partial x_\nu = 0$$

и уравнению (34), величины $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \tau)$ вовсе не зависят от τ:

$$\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \tau)/\partial \tau = 0. \tag{47}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \tau) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(x, 0), \tag{48}$$

и уравнение (36) есть просто свободное уравнение Максвелла

$$\partial F^{\mu\nu}(x)/\partial x^\nu = 0. \tag{49}$$

В дальнейшем будем называть (42) *физической плоскостью*. Калибровочное преобразование (44) вместе с уравнением Максвелла (49) будет именоваться (для краткости) *4-сектором*, а общее калибровочное преобразование (38) вместе с уравнениями (34) и (35) — *5-сектором* теории. Конечно, уравнения 4-сектора и 5-сектора совместимы друг с другом (см. конец этого раздела).

Заметим, что в силу (47) и (48) было бы допустимо с самого начала ослабить «деситтеровское ограничение» (33), потребовав его выполнение лишь на физической плоскости:

$$[(\hat{\Box} - 1)\, A_\mu(x, \tau)]_{\tau=0} = 0. \tag{50}$$

Другими словами, в рассматриваемом свободном случае условия (50) и (33) эквивалентны между собой *.

Как было показано в [30], τ-фотонная компонента $B_4(x, \tau)$, подобно скалярным и продольным фотонам, не является независимой динамической степенью свободы и ее можно совсем исключить с помощью подходящего калибровочного преобразования (38). Группа (38) оказывается достаточно широкой для проведения такой процедуры.

Чтобы сделать это утверждение более ясным, разложим $B_\mu(x, \tau)$ на поперечную и продольную 4-части:

$$\left.\begin{aligned} &B_\mu(x, \tau) = B_\mu^\perp(x, \tau) + B_\mu^{||}(x, \tau); \\ &\partial B_\mu^\perp(x, \tau)/\partial x_\mu = 0; \\ &\partial B_\mu^{||}(x, \tau)/\partial x_\mu = \partial B_\mu(x, \tau)/\partial x_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

* Обратим внимание также на следующий момент: уравнение Максвелла (49) можно рассматривать как *условие совместности* уравнений (34)—(35) и «ослабленного» деситтеровского ограничения (50).

Теперь уравнения (34)—(35) 5-сектора принимают вид:

$$\partial B_\mu^\perp (x,\ \tau)/\partial\tau = 0 \tag{52}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\partial B_\mu^{||} (x,\ \tau)/\partial\tau - \partial B_4 (x,\ \tau)/\partial x^\mu = 0;\\ &2B_4 (x,\ \tau) - i\partial B_4 (x,\ \tau)/\partial\tau + i\partial B_\nu^{||} (x,\ r)/\partial x_\nu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Таким образом, поперечная компонента $B_\mu^\perp (x, \tau)$, отвечающая спину 1, в действительности не зависит от τ [ср. (47)], а вся зависимость от τ концентрируется в уравнениях (53), описывающих фотоны со спином 0 и τ-фотоны. Эти уравнения выглядят как калибровочное условие, наложенное на 5-потенциал $B_M (x, \tau)$. Нетрудно убедиться, используя (38), что компоненты $B_\mu^{||} (x, \tau)$ и $B_4 (x, \tau)$ можно одновременно обратить в нуль, так что (53) превратится в тождество $0 = 0$.

Здесь, по-видимому, уместно задать следующий вопрос: зачем вообще нужно рассматривать 5-сектор? Ведь 4-сектор обеспечивает нас привычным описанием свободного электромагнитного поля. Следовательно, 5-сектор как будто усложняет картину, не внося ничего нового в физическую трактовку данного поля.

Существование двух или более математических формулировок одной и той же свободной теории поля — явление хорошо знакомое. Известно также, что отклонение одного подхода от другого может обнаружиться после введения взаимодействия. Это обычно связано с различием в свойствах симметрии, заложенных в свободных уравнениях.

Ясно, что если совсем игнорировать 5-сектор, то мы будем иметь дело с обычным 4-мерным калибровочным преобразованием (44), свободным уравнением Максвелла (49) и неизбежно придем к стандартной теории электромагнитных взаимодействий, основанной на уравнениях Дирака — Максвелла (8), (9). С другой стороны, уравнения 5-сектора обладают новыми симметриями, в которых нашла отражение наша гипотеза о фундаментальной длине *, а именно:

1) симметрией относительно более общего, чем в 4-секторе, калибровочного преобразования (38);

2) симметрией относительно τ-инверсии (40).

Поэтому, имея в виду нашу программу (см. введение), мы примем полный 5-формализм свободного электромагнитного поля, основанный на уравнениях 5-сектора (34), (35) и уравнении 4-сектора (49), как образец при построении общей теории электромагнитных взаимодействий. Следовательно, локальные калибровочные преобразования (38) для 5-потенциала $B_M (x, \tau)$, соответ-

* Т. е. гипотеза о деситтеровской геометрии импульсного пространства.

ствующие им преобразования дираковских полей с «матрицами» (41), а также преобразование τ-инверсии призваны играть *фундаментальную* роль в нашем подходе. В 5-сектор теории должны входить инвариантные относительно этих преобразований уравнения движения дираковского и электромагнитных полей в конфигурационном 5-пространстве. Далее, уравнения движения в 4-секторе возникнут при проецировании на физическую плоскость $\tau = 0$ уравнений 5-сектора с учетом ограничений, вытекающих из деситтеровости p-пространства (ср. примечание на с. 13). Эти уравнения, инвариантные относительно обычных калибровочных преобразований (3) и (4) с $\lambda(x) = \lambda(x, 0)$, будут играть в новой схеме ту же роль, какую в обычной КЭД играют уравнения Дирака — Максвелла (8) и (9).

Возвращаясь снова к теории свободного электромагнитного поля, отметим, что 5-секторные уравнения (34) и (35) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\int \mathcal{L}_{\text{Максвелл}}(x, \tau)\, d^4x\, d\tau, \tag{54}$$

где 5-плотность функции Лагранжа дается выражением *

$$\mathcal{L}_{\text{Максвелл}}(x, \tau) = \mathcal{L}^{+}_{\text{Максвелл}}(x, \tau) = -2\,(B^4(x, \tau))^{+} B^4(x, \tau) + \\ + \frac{i}{2}\left[B^{\mu +}(x, \tau)\frac{\partial B_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} - B^\mu(x, \tau)\frac{\partial B^{+}_\mu(x, \tau)}{\partial \tau}\right] + \\ + \frac{i}{2}\left[(B^4(x, \tau))^{+}\frac{\partial B^4}{\partial \tau} - B^4(x, \tau)\left(\frac{\partial B^4(x, \tau)}{\partial \tau}\right)^{+}\right] + \\ + i\left[(B^\mu(x, \tau))^{+}\frac{\partial B^4(x, \tau)}{\partial x^\mu} - B^\mu(x, \tau)\left(\frac{\partial B^4(x, \tau)}{\partial x^\mu}\right)^{+}\right]. \tag{57}$$

Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Максвелл}}}{\partial(\partial B_\mu(x, \tau)/\partial x^0)} = 0, \tag{58}$$

то здесь мы имеем дело с так называемым *сингулярным лагранжианом* [34—38].

---

* Подчеркнем, что в силу (39)

$$\delta/\delta B^{+}_\mu(x, \tau) = \delta/\delta B_\mu(x, -\tau); \quad \delta/\delta(B^4(x, \tau))^{+} = -\delta/\delta B^4(x, -\tau).$$

Приращения функциональных аргументов, продифференцированных по x^μ и τ, определяются стандартным образом:

$$\delta\left(\frac{\partial B^\mu(x, \tau)}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta B^\mu(x, \tau)); \tag{55}$$

$$\delta\left(\frac{\partial B^\mu(x, \tau)}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\delta B^\mu(x, \tau));$$

$$\delta\left(\frac{\partial B^4(x, \tau)}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\delta B^4(x, \tau)). \tag{56}$$

Рассмотрим теперь уравнение Максвелла (49), представляющее 4-сектор. Соответствующий интеграл действия хорошо известен:

$$-\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)\,d^4x \equiv \int L_{\text{Максвелл}}(x)\,d^4x. \qquad (59)$$

В противоположность (54) приращения, которые приобретают здесь функциональные аргументы $A_\mu(x) = B_\mu(x, 0)$, не зависят от τ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta A_\mu(x)) = 0. \qquad (60)$$

В результате в силу (56)

$$\delta(\partial B_\mu(x, 0)/\partial\tau) = 0. \qquad (61)$$

Проецируя уравнение 5-сектора (34), (35) на физическую плоскость $\tau = 0$, будем иметь:

$$\mathrm{i}\mathscr{F}_{\mu 4}(x, 0) = \mathrm{i}\,(\partial B_\mu(x, 0)/\partial\tau - \partial B_4(x, 0)/\partial x^\mu) = 0; \qquad (62)$$

$$2B_4(x, 0) - \mathrm{i}\partial B_4(x, 0)/\partial\tau + \mathrm{i}\partial A_\nu(x)/\partial x_\nu = 0. \qquad (63)$$

Благодаря (61),

$$\delta\mathscr{F}_{\mu 4}(x, 0)/\delta A_\nu(x) = 0. \qquad (64)$$

Это обеспечивает совместность уравнения Максвелла (49) с (62). Что касается уравнения (63), то оно лишь фиксирует калибровку * 4-потенциала $A_\mu(x)$ и поэтому не может противоречить градиентно-инвариантному уравнению (49).

---

* В действительности эта калибровка остается произвольной, так как величины $B_4(x, 0)$ и $\partial B_4(x, 0)/\partial\tau$ не являются функциональными аргументами лагранжиана $L_{\text{Максвелл}}(x) = -F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)/4$ в 4-секторе и могут быть любыми функциями переменной x. Полагая

$$B_4(x, 0) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{1+p^2\geqslant 0} C_1(p)\exp(\mathrm{i}px)\,d^4p; \qquad (65)$$

$$B_4(x, 0) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau}B_4(x, 0) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{1+p^2\geqslant 0} C_2(p)\exp(\mathrm{i}px)\,d^4p,$$

где $C_1^\dagger(p) = C_1(-p)$ и $C_2^\dagger(p) = C_2(-p)$, можно выразить в терминах (65) любое решение уравнения (37):

$$B_4(x, \tau) = \frac{\mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}\tau)}{(2\pi)^{3/2}}\Bigg\{\int\limits_{1+p^2\geqslant 0}\exp(\mathrm{i}px)\,C_1(p)\cos\tau\sqrt{1+p^2}\,d^4p + \mathrm{i}\int\limits_{1+p^2\geqslant 0}\exp(\mathrm{i}px)\,C_2(p)\frac{\sin\tau\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}\,d^4p\Bigg\}. \qquad (66)$$

В разд. 3 мы убедимся в том, что τ-фотонная компонента $B_4(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению (37) и при наличии взаимодействия.

2. СВОБОДНОЕ ДИРАКОВСКОЕ ПОЛЕ

В целях приобретения некоторых полезных навыков рассмотрим вначале поле свободных скалярных частиц с массой m. В p-пространстве де Ситтера (24) уравнение массовой поверхности

$$p^2 - m^2 = 0 \tag{67}$$

можно записать следующим образом:

$$p^2 - m^2 = (p^4 - \operatorname{ch} \mu)(p^4 + \operatorname{ch} \mu), \tag{68}$$

где

$$\operatorname{ch} \mu \equiv \sqrt{1 + m^2}. \tag{69}$$

Поскольку

$$\operatorname{ch} \mu = |g_{LM} p^L V^M|; \quad L, M = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{70}$$

то μ определяет неевклидово 4-расстояние между точкой p и началом координат (27). Следовательно, эта величина есть точный геометрический аналог массы. В плоском пределе, очевидно,

$$\mu \approx m. \tag{71}$$

Соотношение (68) и симметрия p-пространства де Ситтера (24) относительно инверсии

$$p^4 \to -p^4 \tag{72}$$

наводят на мысль, что в новой схеме следует рассматривать два уравнения типа Клейна — Гордона [21, 24, 25]:

$$2(p^4 - \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_1 (p, p^4) = 0; \tag{73}$$

$$2(-p^4 - \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_2 (p, p^4) = 0. \tag{74}$$

Поля φ_1 и φ_2 называются *нормальным* и *аномальным* соответственно [30]. Очевидно, здесь мы имеем дело с новым квантовым числом, или новым «ароматом», которому нет аналога в теории с $l = 0$.

Применяя к (73) и (74) 5-мерное преобразование Фурье, будем иметь *:

$$2(-i\partial/\partial\tau - \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_1 (x, \tau) = 0; \tag{75}$$

$$2(i\partial/\partial\tau - \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_2 (x, \tau) = 0. \tag{76}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 (x, \tau) &= \exp(i\tau \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_1 (x, 0); \\ \varphi_2 (x, \tau) &= \exp(-i\tau \operatorname{ch} \mu)\, \varphi_2 (x, 0). \end{aligned} \right\} \tag{77}$$

---

* Из уравнений (31) и (32) следует, что в лоренцевой калибровке $\partial A_\nu (x, \tau)/\partial x_\nu = 0$ поле $A_\mu (x, \tau)$ и τ-фотонная компонента $A_4 (x, \tau)$ удовлетворяют соответственно нормальному (75) и аномальному (76) уравнениям с $\mu = 0$.

Чтобы определить величины $\varphi_1(x, 0)$ и $\varphi_2(x, 0)$, необходимо учесть деситтеровское уравнение [ср. (33)]

$$(\widehat{\Box} - 1)\,\varphi_a(x, \tau) = 0; \quad a = 1, 2. \tag{78}$$

Поскольку

$$(\widehat{\Box} - 1)\,\varphi_a(x, \tau) = \exp(i\varepsilon_a \tau \operatorname{ch}\mu)\,(\Box + m^2)\,\varphi_a(x, 0),$$

то (78) эквивалентно «ослабленному» деситтеровскому ограничению [ср. (50)]:

$$[(\widehat{\Box} - 1)\,\varphi_a(x, \tau)]_{\tau=0} = 0; \quad a = 1, 2 \tag{79}$$

или

$$(\Box + m^2)\,\varphi_a(x, 0) = 0; \quad a = 1, 2. \tag{80}$$

По нашей терминологии, полученные уравнения Клейна — Гордона принадлежат *4-сектору* свободной скалярной теории. Соответственно пара уравнений (75) и (76) составляют *5-сектор* в рассматриваемом случае. Данные уравнения будут переходить друг в друга при τ-инверсии, если при этом производить следующее преобразование полей:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \tau) \\ \varphi_2(x, \tau) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1 - \tau) \\ \varphi_2(x_1 - \tau) \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Перейдем теперь к спинорному случаю. Естественно предположить, что уравнения соответствующего 5-сектора можно получить в результате «извлечения квадратного корня» из каждой скобки в правой части (68). Прежде чем проводить эту процедуру, учтем, что в p-пространстве де Ситтера выполняются следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} &2(p^4 - \operatorname{ch}\mu) = g_{KL}(p^K - V^K)(p^L - V^L) - 4\operatorname{sh}^2\mu/2; \\ &-2(p^4 + \operatorname{ch}\mu) = g_{KL}(p^K + V^K)(p^L + V^L) - \\ &-4\operatorname{sh}^2\mu/2; \quad K, L = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Далее введем пять квадратных матриц

$$\Gamma^L = (\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4),$$

удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^K\Gamma^L + \Gamma^L\Gamma^K = 2g^{KL}; \\ &(\Gamma^K)^+ = \Gamma^0\Gamma^K\Gamma^0; \quad K, L = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Минимальная размерность таких матриц равна четырем. Это соответствует рассмотрению спинорного представления $SO(4,1)$-

группы де Ситтера. Как известно, данное представление одновременно является и неприводимым спинорным представлением несобственной группы Лоренца 0 (3,1). Поэтому выберем Г-матрицы в виде

$$\Gamma^L = (\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ -\mathrm{i}\gamma^5), \tag{84}$$

где $\gamma^\lambda = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ и γ^5 — стандартные γ-матрицы:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}. \tag{85}$$

Используя тождество

$$g_{KL} A^K A^L = (A_K \Gamma^K)(A_L \Gamma^L); \quad K,\ L = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{86}$$

выполняющееся для произвольного 5-вектора A^L, можно получить из (82) пару уравнений дираковского типа — *нормальное* и *аномальное* соответственно:

$$[p_\mu \gamma^\mu - (p^4 - 1)\,\Gamma^4 - 2\,\mathrm{sh}\,\mu/2]\,\psi_1(p,\ p^4) = 0, \tag{87}$$

$$[p_\mu \gamma^\mu + (p^4 + 1)\,\Gamma^4 - 2\,\mathrm{sh}\,\mu/2]\,\psi_2(p,\ p^4) = 0. \tag{88}$$

В $(x,\ \tau)$-представлении эти уравнения принимают вид:

$$\left(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\gamma^\mu + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\,\Gamma^4 + \Gamma^4 - 2\,\mathrm{sh}\,\mu/2\right)\psi_1(x,\ \tau) = 0; \tag{89}$$

$$\left(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\gamma^\mu - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\,\Gamma^4 + \Gamma^4 - 2\,\mathrm{sh}\,\mu/2\right)\psi_2(x,\ \tau) = 0. \tag{90}$$

Что касается деситтеровского ограничения на $\psi_1(x,\ \tau)$ и $\psi_2(x,\ \tau)$, то можно потребовать его выполнения уже в «ослабленной» форме, т. е. только на физической плоскости $\tau = 0$:

$$[(\widehat{\Box} - 1)\,\psi_a(x,\ \tau)]_{\tau=0} = 0; \quad a = 1,\ 2 \tag{91}$$

[ср. (50) и (79)] *. Уравнения (89) и (90) будут совместимы с (91), если на плоскости $\tau = 0$ справедливы следующие уравнения движения (ср. примечание на с. 13):

$$\left[\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\gamma^\mu + \mathrm{i}\gamma^5(\mathrm{ch}\,\mu - 1) - 2\,\mathrm{sh}\,\mu/2\right]\psi_a(x,\ 0); \quad a = 1,\ 2. \tag{93}$$

Очевидно, необходимо принять (93) в качестве уравнений *4-сектора* теории свободного дираковского поля в нашем подходе.

---

* Нетрудно проверить, что решения уравнений (89) и (90), подчиняющиеся дополнительному условию (91), автоматически удовлетворяют точному деситтеровскому ограничению

$$(\widehat{\Box} - 1)\,\psi_a(x,\ \tau) = 0, \quad a = 1,\ 2. \tag{92}$$

Вводя обозначение

$$\sin\theta = \operatorname{th}(\mu/2), \tag{94}$$

можно переписать (93) в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu - m\exp(-i\theta\gamma^5)\right]\psi_a(x, 0) = 0; \quad a = 1, 2.$$

Это уравнение эквивалентно обычному уравнению Дирака для волновой функции

$$\psi_a(x) = \exp(-i\gamma^5\theta/2)\,\psi_a(x, 0); \quad a = 1, 2. \tag{95}$$

Таким образом, наш 4-сектор есть просто стандартная теория двух свободных дираковских полей $\psi_a(x)$ $(a = 1, 2)$ с равными массами m. Соответствующий лагранжиан записывается как

$$L_{\text{Дирак}}(x) = \sum_{a=1,2}\bar\psi_a(x)\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu - m\right)\psi_a(x) =$$

$$= \bar\Psi(x)\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu - m\right)\Psi(x), \tag{96}$$

где введено обозначение

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}. \tag{97}$$

Лагранжиан (96) остается инвариантным при унитарных преобразованиях в 2-пространстве величин (97). Соответствующую группу симметрии будем обозначать $SU_\tau(2)$. Эта внутренняя симметрия, как видно из нашего построения,— прямое следствие гипотезы о деситтеровости импульсного пространства теории.

Переходя вновь к уравнениям (89) и (90), естественно заключить, что они относятся к *5-сектору* теории свободного дираковского поля в развиваемой формулировке. Единственный вопрос, который необходимо здесь выяснить, связан с инвариантностью (89) и (90) относительно τ-инверсии. Каждое из этих уравнений в отдельности не может быть инвариантным при отражении $\tau \to -\tau$, так как деситтеровские спиноры $\psi_1(x, \tau)$ и $\psi_2(x, \tau)$ не обладают соответствующим линейным законом преобразования. Фактически здесь имеет место та же ситуация, которая возникает в формализме лоренцевых 2-компонентных спиноров при рассмотрении операции пространственной инверсии. При этом, как известно, приходится конструировать из 2-компонентных спиноров 4-компонентные биспиноры. В данном случае, чтобы получить величину, которая бы при τ-инверсии преобразовывалась линейно, необходимо перейти к 8-компонентным деситтеровским спинорам.

Положим

$$\begin{pmatrix}\psi_1(x,\ \tau)\\ \psi_2(x,\ \tau)\end{pmatrix}=\Psi(x,\ \tau). \tag{98}$$

Теперь уравнения (89) и (90) можно объединить в одно уравнение для 8-компонентной волновой функции (98):

$$(\mathrm{i}\partial_M G^M+\sigma_0\times\Gamma^4-2\,\mathrm{sh}\,\mu/2)\,\Psi(x,\ \tau)=0, \tag{99}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\\
&G^\mu=\sigma_0\times\gamma^\mu=\begin{pmatrix}\gamma^\mu&0\\0&\gamma^\mu\end{pmatrix};\\
&G^4=\sigma_3\times\Gamma^4=\begin{pmatrix}\Gamma^4&0\\0&-\Gamma^4\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}\gamma^5&0\\0&-\gamma^5\end{pmatrix};\\
&G^MG^N+G^NG^M=2g^{MN};\\
&(G^M)^+=G^0G^MG^0;\quad M,\ N=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Уравнение (99) будет инвариантным при τ-инверсии, если функция $\Psi(x,\ \tau)$ одновременно подвергается линейному преобразованию [ср. (81)]:

$$\Psi'(x,\ \tau)=T\Psi(x,\ -\tau), \tag{101}$$

где T есть 8×8 матрица

$$T=\sigma_1\times E=\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}, \tag{102}$$

обладающая следующими очевидными свойствами:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad T^2=1,\ T^+=T;\\
&2.\quad T\,(\sigma_0\times\Gamma^M)\,T=\sigma_0\times\Gamma^M;\quad M=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\\
&3.\quad TG^4T=-G^4.
\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

В дальнейшем будет удобно использовать для (101) специальное обозначение

$$\Phi(x,\ \tau)\equiv T\Psi(x_1-\tau) \tag{104}$$

и в дополнение к (99) писать:

$$(\mathrm{i}\partial_M G^M+\sigma_0\times\Gamma^4-2\,\mathrm{sh}\,\mu/2)\,\Phi(x,\ \tau)=0. \tag{105}$$

Ясно теперь, что на любое из уравнений (99) и (105) можно ссылаться, как на уравнение 5-сектора теории свободного дираковского поля. Вводя сопряженные 8-компонентные спиноры:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Psi}(x,\ \tau)&=\Psi^{+}(x,\ \tau)\,G^{0};\\ \overline{\Phi}(x,\ \tau)&=\Phi^{+}(x,\ \tau)\,G^{0},\end{aligned}\right\}\qquad(106)$$

легко построить соответствующий 5-мерный лагранжиан:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{Дирак}}(x,\ \tau)=\mathscr{L}^{+}_{\text{Дирак}}(x,\ \tau)=\frac{\mathrm{i}}{4}&[\overline{\Phi}(x,\ \tau)\,G^{M}(\partial_{M}\Psi(x,\ \tau))-\\ -(\partial_{M}\overline{\Psi}(x,\ \tau))\,G^{M}\Phi(x,\ \tau)&+\overline{\Psi}(x,\ \tau)\,G^{M}(\partial_{M}\Phi(x,\ \tau))-\\ -(\partial_{M}\overline{\Phi}&(x,\ \tau))G^{M}\Psi(x,\ \tau)]+\\ +\frac{1}{2}\overline{\Phi}(x,\ \tau)\,(\sigma_{0}&\times\Gamma^{4}-2\operatorname{sh}(\mu/2)\ \Psi(x,\ \tau)+\\ +\frac{1}{2}\overline{\Psi}(x,\ \tau)\,(\sigma_{0}&\times\Gamma^{4}-2\operatorname{sh}(\mu/2))\,\Phi(x,\ \tau).\end{aligned}\qquad(107)$$

Заметим, что с учетом уравнений (99) и (105) *вектор 5-тока*

$$J^{M}(x,\ \tau)=\overline{\Psi}(x,\ \tau)\,G^{M}\Phi(x,\ \tau);\qquad M=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\qquad(108)$$

подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial J^{M}(x,\ \tau)/\partial x^{M}=0.\qquad(109)$$

Кроме того [ср. (39)],

$$(J^{M}(x,\ \tau))^{+}=(J^{\mu}(x,\ -\tau),\ -J^{4}(x,\ -\tau)).\qquad(110)$$

В заключение этого раздела кратко резюмируем развитую схему описания свободного дираковского поля.

1. В конфигурационном представлении имеет место следующая система уравнений для 8-компонентной волновой функции:

$$\left\{\begin{aligned}&(\mathrm{i}\,\partial_{M}G^{M}+\sigma_{0}\times\Gamma^{4}-2\operatorname{sh}\mu/2)\ \Psi(x,\ \tau)=0; &(111)\\ &[(\widehat{\square}-1)\ \Psi(x,\ \tau)]_{\tau=0}=0. &(112)\end{aligned}\right.$$

2. Все компоненты 5-градиента $\partial_{M}=(\partial/\partial x^{\mu},\ \partial/\partial\tau)$ входят в (111) симметричным образом.

3. Поскольку плоскость $\tau=0$ в (111) явно выделена, максимальная непрерывная группа симметрии этой системы в конфигурационном пространстве есть обычная группа Пуанкаре

$$x^{\mu\prime}=L^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}.$$

4. *Условием совместности* системы уравнений (111) и (112) является уравнение (93) 4-сектора для волновой функции

$$\Psi(x,\ 0)=\begin{pmatrix}\psi_{1}(x,\ 0)\\ \varphi_{2}(x,\ 0)\end{pmatrix}.$$

5. Уравнение (93) эквивалентно обычному уравнению Дирака для каждой компоненты $SU_\tau(2)$-дублета (97). Соответствующее преобразование эквивалентности (95) является *киральным*.

6. $SU_\tau(2)$-симметрия 4-сектора непосредственно следует из инвариантности 5-сектора относительно τ-инверсии *.

3. НОВАЯ ГРУППА КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ

Согласно нашей общей концепции (см. введение и разд. 1) дираковское поле должно внутри 5-сектора разделять новые свойства симметрии с электромагнитным полем. Одну из таких симметрий, связанную с τ-инверсией, мы уже перенесли на дираковские частицы (см. разд. 2). В результате возникла $SU_\tau(2)$-симметрия 4-сектора теории свободного дираковского поля. Теперь обратимся к симметрии, связанной с новыми калибровочными преобразованиями (38).

Как уже отмечалось, (38) соответствует «матричному» преобразованию (41). Поэтому постулируем, что общая теория электромагнитных взаимодействий должна оставаться инвариантной при следующих одновременных локальных калибровочных преобразованиях дираковского и электромагнитного полей:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(x,\ \tau) \to \exp[ie\lambda(x,\ \tau)\exp(-i\tau)]\,\Psi(x,\ \tau);\\ &\Phi(x,\ \tau) \to \exp[ie\lambda^+(x,\ \tau)\exp(i\tau)]\,\Phi(x,\ \tau);\\ &\overline{\Psi}(x,\ \tau) \to \exp[-ie\lambda^+(x,\ \tau)\exp(i\tau)]\,\overline{\Psi}(x,\ \tau);\\ &\overline{\Phi}(x,\ \tau) \to \exp[-ie\lambda(x,\ \tau)\exp(-i\tau)]\,\overline{\Phi}(x,\ \tau); \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

$$B_M(x,\ \tau) \to B_M(x,\ \tau) - \frac{\partial}{\partial x^M}(\lambda(x,\ \tau)\exp(-i\tau));\quad M=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{114}$$

где, как и ранее [см. (19) и (20)],

$$(\square - 1)\,\lambda(x,\ \tau) = 0;\quad \lambda^+(x,\ \tau) = \lambda(x,\ -\tau). \tag{115}$$

Чтобы наш подход был столь же однозначен, как и обычная теория электромагнитных взаимодействий, необходимо еще найти обобщение принципа минимального электромагнитного взаимодействия, адекватное новому формализму. Это обобщение подсказывается соотношениями (113) и (114); очевидно, вместо (6) мы теперь

* Это отражено в самом обозначении $SU_\tau(2)$.

должны применить подстановку *:

$$i\frac{\partial}{\partial x^M}\to i\frac{\partial}{\partial x^M}-eB_M(x,\ \tau);\quad M=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{116}$$

Спрашивается, однако, в каких уравнениях должна совершаться замена (116). Например, если взять систему (111), которая описывает свободное дираковское поле и содержит дифференциальный оператор $i\partial/\partial x^M$, то следует ли произвести подстановку (116) в каждом из уравнений (111) или нужно подвергнуть этой процедуре лишь первое уравнение, оставив второе, связанное с деситтеровским ограничением, без изменения. Ясно, что второй путь ведет к системе уравнений, которая не будет инвариантной относительно произвольных калибровочных преобразований (113), (114), в то время как первый путь позволяет эту инвариантность сохранить. Действительно, производя замену (116) в каждом из уравнений (111), получаем явно калибровочно-инвариантную систему:

$$\begin{cases}[(i\partial_M-eB_M(x,\ \tau))\,G^M+\sigma_0\times\Gamma^4-2\,\mathrm{sh}\,\mu/2]\,\Psi(x,\ \tau)=0; & (117)\\ \{[g^{LM}(i\partial_L-eB_L(x,\tau))\,(i\partial_M-eB_M(x,\tau))+1]\,\Psi(x,\tau)\}_{\tau=0}=0. & (118)\end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать, что система уравнений (117) и (118) адекватна рассматриваемому здесь подходу. При этом, конечно, необходимо обобщить нашу исходную гипотезу о деситтеровской геометрии импульсного пространства, взяв за основу уравнение (118). Другими словами, с самого начала будем требовать, чтобы *5-вектор обобщенного импульса*

$$\Pi_M=i\frac{\partial}{\partial x^M}-eB_M(x,\ \tau),\quad M=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{119}$$

удовлетворял условию деситтеровости в смысле соотношения

$$[(\Pi_0^2-\vec{\Pi}^2-\Pi_4^2+1)\,\Psi(x,\ \tau)]_{\tau=0}=0. \tag{120}$$

Отсюда в свободном случае ($e\to 0$) получаем (112), что эквивалентно точному деситтеровскому ограничению (92) и, следовательно, гипотезе о деситтеровской геометрии импульсного пространства.

Кроме системы (117) и (118), в силу (39), (103) и (104) имеем также

$$\begin{cases}[(i\partial_M-eB_M^+(x,\ \tau))\,G^M+\sigma_0\times\Gamma^4-2\,\mathrm{sh}\,\mu/2]\,\Phi(x,\ \tau)=0; & (121)\\ \{[g^{LM}(i\partial_L-eB_L^+(x,\tau))\,(i\partial_M-eB_M^+(x,\tau))+1]\,\Phi(x,\tau)\}_{\tau=0}=0. & (122)\end{cases}$$

* В геометрической трактовке (см., например, [39]) комбинация $\partial/\partial x^M+ieB_M(x,\ \tau)$ есть ковариантная производная в расслоенном пространстве, базой которого является псевдоевклидово 5-пространство.

Уравнения (117) и (121) можно получить из принципа стационарного действия в 5-пространстве, если использовать лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{Дирак}}(x,\ \tau) - \frac{e}{2}\left[J^M(x,\ \tau)\, B_M^{+}(x,\ \tau) + J_M^{+}(x,\ \tau)\, B^M(x,\ \tau)\right], \quad (123)$$

где $\mathcal{L}_{\text{Дирак}}(x, \tau)$ дается выражением (107), а $J^M(x, \tau)$ есть 5-ток (108). Добавляя к (123) 5-мерный лагранжиан свободного электромагнитного поля (57), будем иметь

$$\mathcal{L}_{\text{total}}(x,\ \tau) = \mathcal{L}_{\text{Максвелл}}(x,\ \tau) +$$
$$+ \mathcal{L}_{\text{Дирак}}(x,\ \tau) - \frac{e}{2}\left[J^M(x,\ \tau)\, B_M^{+}(x,\ \tau) + J_M^{+}(x, \tau)\, B^M(x, \tau)\right]. \quad (124)$$

По самому построению лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{total}}(x, \tau)$ инвариантен относительно новых калибровочных преобразований (113), (114) и τ-инверсии. Следовательно, мы вправе рассматривать его как полный лагранжиан 5-сектора теории. Ясно при этом, что (117) и (121) суть уравнения Дирака в 5-секторе при наличии электромагнитного взаимодействия. Варьируя интеграл действия

$$\int \mathcal{L}_{\text{total}}(x,\ \tau)\, d^4x\, d\tau \quad (125)$$

по 5-потенциалу, получаем соответствующие неоднородные уравнения движения для электромагнитного поля в 5-секторе:

$$\mathrm{i}\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ \tau) = (e/2)\, J_\mu(x,\ \tau); \quad (126)$$

$$2B_4(x,\ \tau) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau} B_4(x,\ \tau) + \mathrm{i}\frac{\partial B_\nu(x,\ \tau)}{\partial x_\nu} = \frac{e}{2} J_4(x,\ \tau). \quad (127)$$

Используя (117) и (121), нетрудно убедиться в том, что 5-ток $J_M(x, \tau)$, как и прежде, в свободном случае удовлетворяет уравнению непрерывности (109). Чтобы это уравнение было совместимо с (126) и (127), необходимо соблюдение следующего условия:

$$(\Box - 1)\left(\exp(\mathrm{i}\tau)\, B_4(x,\ \tau)\right) = 0.$$

Это уравнение совпадает с (37). Таким образом, τ-фотонное поле должно удовлетворять точному деситтеровскому ограничению и при наличии взаимодействия (см. примечание на с. 16)

Перейдем теперь к отысканию уравнений движений полей в 4-секторе, т. е. на физической плоскости $\tau = 0$. Начнем с дираковского поля, временно считая электромагнитное поле фиксированным. По аналогии со свободным случаем (см. разд. 2) будем полагать, что искомые уравнения должны совпадать с *условием совместности* системы уравнений (117), (118). После несложных выкладок находим

$$\Big[(\mathrm{i}\partial/\partial x^{\mu} - eA_{\mu}(x))\,G^{\mu} - (\operatorname{ch}\mu - 1)\,\sigma_0 \times \Gamma^4 + \\ + \frac{e}{4}(\sigma_0 \times \Gamma^4)\,\Sigma^{LM}\mathcal{F}_{LM}(x,\ 0) - 2\operatorname{sh}\mu/2\Big]\,\Psi(x,\ 0) = 0, \tag{128}$$

где

$$\Sigma^{LM} = \frac{\mathrm{i}}{2}(G^L G^M - G^M G^L); \tag{129}$$

$A_{\mu}(x)$ — электромагнитный 4-потенциал (45); $\mathcal{F}_{LM}(x,\ 0)$ — 5-тензор напряженностей электромагнитного поля (30) при $\tau = 0$.

Если выключить электромагнитное взаимодействие ($e \to 0$), то (128) совпадет со свободным уравнением (93), содержащим γ^5-матрицу в массовом члене. Чтобы в этом пределе возникало обычное уравнение Дирака, необходимо предварительно подвергнуть (128) киральному преобразованию эквивалентности (95).

Таким образом, вместо (128) будем иметь:

$$\Big[\Big(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}(x)\Big)\,\gamma^{\mu} - m\Big]\,\Psi_1(x) = \frac{\mathrm{i}e\cos\theta}{4}\,\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\,\psi_1(x) - \\ - \frac{e\sin\theta}{4}\,\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\,\psi_1(x) - \frac{\mathrm{i}e}{2}\,\gamma^{\mu}\mathcal{F}_{\mu4}(x,\ 0)\,\psi_1(x); \tag{130}$$

$$\Big[\Big(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}(x)\Big)\,\gamma^{\mu} - m\Big]\,\psi_2(x) = \frac{\mathrm{i}e\cos\theta}{4}\,\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\,\psi_2(x) - \\ - \frac{e\sin\theta}{4}\,\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\,\psi_2(x) + \frac{\mathrm{i}e}{2}\,\gamma^{\mu}\mathcal{F}_{\mu4}(x,\ 0)\,\psi_2(x), \tag{131}$$

где $\sigma^{\mu\nu} = (\mathrm{i}/2)(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$; $F_{\mu\nu}(x)$ — 4-тензор (10);

$$\mathcal{F}_{\mu4}(x,\ 0) = \partial B_{\mu}(x,\ 0)/\partial\tau - \partial B_4(x,\ 0)/\partial x^{\mu} \tag{132}$$

— компоненты 5-тензора (30) при $\tau = 0$, в которые непосредственно вносят вклад τ-фотоны;

$$\sin\theta = \operatorname{th}\mu/2 = \big(\sqrt{1+m^2} - 1\big)/m;$$

$$\cos\theta = 1/\operatorname{ch}\mu/2 = \sqrt{2/\big(1+\sqrt{1+m^2}\big)}$$

[см. (69) и (94)].

Каждое из уравнений (130) и (131) выглядит как нетривиальное обобщение уравнения Дирака (8).

Отметим их наиболее характерные особенности.

1. Уравнения (130) и (131) инвариантны относительно обычных калибровочных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_a(x) \to \exp(\mathrm{i}e\lambda(x))\,\psi_a(x); \\ &\bar{\psi}_a(x) \to \exp[-\mathrm{i}e\lambda(x)]\,\bar{\psi}_a(x) \qquad (a = 1,\ 2); \\ &A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \partial\lambda(x)/\partial x^{\mu},\ \ \lambda(x) = \lambda^{+}(x), \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

являющихся при $\lambda(x) = \lambda(x, 0)$ проекцией новой калибровочной группы (113) и (114) на физическую плоскость $\tau = 0$. Мы не включили в (133) калибровочное преобразование τ-фотонного поля $B_4(x, 0)$, так как оно сейчас входит лишь в калибровочно-инвариантные величины (132).

2. В левых частях уравнений (130) и (131) электромагнитное взаимодействие имеет традиционную минимальную форму. В правых частях представлены только «неминимальные» взаимодействия, а именно:

а) взаимодействие $\sim\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)$, индуцированное электрическим дипольным моментом (ЭДМ);

б) взаимодействие Паули $\sim\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)$, индуцированное магнитным дипольным моментом (МДМ);

в) взаимодействие $\sim i\gamma^\mu\mathcal{F}_{\mu 4}(x, 0)$, не исчезающее даже в отсутствие «обычных» фотонов ($B_\mu(x, \tau) = 0$). В этом *вакуумном* случае рассматриваемое взаимодействие может быть обязано своим существованием лишь τ-фотонам, и потому в дальнейшем будем называть его τ-*фотонным*.

Заметим, что члены τ-фотонного взаимодействия входят с разными знаками в (130) и (131). Это приводит к нарушению $SU_\tau(2)$-симметрии данной системы уравнений.

Взаимодействие ЭДМ-типа неизбежно нарушает симметрию относительно пространственной инверсии P и комбинированной инверсии CP. Несохранение P- и CP-симметрий в свободных уравнениях (93), очевидно, носит фиктивный характер, поскольку оно исчезает после кирального преобразования эквивалентности (95). Однако применение этого преобразования к уравнениям (128), содержащим взаимодействие, уже не позволяет избавиться совсем от матрицы γ^5 *.

Важно понимать, что все содержащиеся в уравнениях (130) и (131) взаимодействия, как минимальные, так и неминимальные,

* Подчеркнем, что C- и CPT-симметрии в нашей схеме по-прежнему сохраняются и соответствующие операции могут быть, естественно, введены и для пятимерных величин. Например, операция зарядового сопряжения в 5-секторе определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(x, \tau) \to G_2\Psi^*(x, -\tau);\\ &B_M(x, \tau) \to -B_M(x, \tau), \quad M = 0, 1, 2, 3, 4\end{aligned}\right\} \tag{134}$$

(* означает комплексное сопряжение). Легко убедиться в том, что система уравнений (117) и (118) остается неизменной при таком преобразовании полей. Обратим внимание на то обстоятельство, что *все пять* компонент электромагнитного 5-потенциала меняют знак при зарядовом сопряжении.

На физической плоскости $\tau = 0$ операция (134) порождает как обычное зарядовое сопряжение $\psi_a(x) \to \gamma_2\psi_a^*(x)$, $a = 1, 2$; $A_\mu(x) \to -A_\mu(x)$, так и преобразование

$$\mathcal{F}_{\mu 4}(x, 0) \to -\mathcal{F}_{\mu 4}(x, 0).$$

Инвариантность уравнений (130) и (131) относительно этих преобразований очевидна.

есть *проявление одного, минимального по отношению к 5-потенциалу, электромагнитного взаимодействия*, введенного подстановкой (116).

Пока величины

$$(A_\mu(x),\ \mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)) \tag{135}$$

остаются фиксированными, мы можем рассматривать (130) и (131) как уравнения движения дираковских частиц во *внешнем* электромагнитном поле, описываемом парой 4-векторов (135). Этим уравнениям отвечает лагранжиан

$$L_{\text{Дирак}}(x) + L_{\text{INT}}(x), \tag{136}$$

где $L_{\text{Дирак}}(x)$ дается выражением (96), а

$$\begin{aligned} L_{\text{INT}}(x) = -e \sum_{a=1,\,2} \Big[& \bar{\psi}_a(x)\,\gamma^\mu \psi_a(x)\,A_\mu(x) + \\ & + \frac{i\cos\theta}{4}\,\bar{\psi}_a(x)\,\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)\,F_{\mu\nu}(x) - \\ & - \frac{\sin\theta}{4}\,\bar{\psi}_a(x)\,\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)\,F_{\mu\nu}(x)\Big] + \\ + \frac{ie}{2}\,[\bar{\psi}_1(x)\,\gamma^\mu\psi_1(x) - {} & \bar{\psi}_2(x)\,\gamma^\mu\psi_2(x)]\,\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0). \end{aligned} \tag{137}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда электромагнитное поле включено в нашу динамическую систему. В качестве *динамических переменных*, отвечающих этому полю, естественно выбрать величины (135). Нетрудно сообразить, что соотношение (62) по-прежнему имеет место, т. е. $A_\mu(x)$ и $\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)$ могут выступать как независимые функциональные аргументы.

Добавляя к (136) слагаемое

$$L_{\text{Максвелл}} = -F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)/4,$$

приходим к следующему интегралу действия для нашей системы полей:

$$\int d^4x\,[L_{\text{Максвелл}}(x) + L_{\text{Дирак}}(x) + L_{\text{INT}}(x)] = \int d^4x L_{\text{total}}(x). \tag{138}$$

Теперь примем во внимание, что динамические переменные $\psi_a(x)$, $\bar{\psi}_a(x)$ и $\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)$ не являются независимыми, а подчиняются соотношению, которое возникает в результате проецирования

-мерного уравнения (126) на физическую плоскость $\tau = 0$:

$$\mathrm{i}\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0) = \frac{e}{2} J_\mu (x,\ 0)^*, \tag{139}$$

где с учетом (108), (104) и (95)

$$J_\mu (x,\ 0) = \overline{\psi}_1 (x)\, \gamma_\mu \psi_2 (x) + \overline{\psi}_2 (x)\, \gamma_\mu \psi_1 (x). \tag{141}$$

Таким образом, уравнения движения полей в данном случае находятся из условия стационарности функционала:

$$\int d^4x \left\{ L_{\text{total}}(x) + \xi^\mu (x) \left[\mathrm{i}\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0) - \frac{e}{2} J_\mu (x,\ 0) \right] \right\}, \tag{142}$$

где $\xi^\mu (x)$ — множители Лагранжа. Эти уравнения таковы:

$$\left[\left(\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu (x) \right) \gamma^\mu - m \right] \psi_1 (x) =$$

$$= \frac{\mathrm{i}e\cos\theta}{4} \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\, \psi_1 (x) - \frac{e\sin\theta}{4} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\, \psi_1 (x) -$$

$$- \frac{\mathrm{i}e}{2} \gamma^\mu \mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)\, \psi_1 (x) + \frac{e}{2} \xi^\mu \frac{\partial J_\mu (x,\ 0)}{\partial \overline{\psi}_1 (x)}; \tag{143}$$

$$\left[\left(\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu (x) \right) \gamma^\mu - m \right] \psi_2 (x) =$$

$$= \frac{\mathrm{i}e\cos\theta}{4} \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\, \psi_2 (x) - \frac{e\sin\theta}{4} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\, \psi_2 (x) +$$

$$+ \frac{\mathrm{i}e}{2} \gamma^\mu \mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)\, \psi_2 (x) + \frac{e}{2} \xi^\mu \frac{\partial J_\mu (x,\ 0)}{\partial \overline{\psi}_2 (x)}; \tag{144}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e \sum_{a=1,\,2} \left[\overline{\psi}_a (x)\, \gamma^\mu \psi_a (x) - \frac{\mathrm{i}\cos\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\overline{\psi}_a (x)\, \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} \psi_a (x)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\overline{\psi}_a (x)\, \sigma^{\mu\nu} \psi_a (x)) \right]; \tag{145}$$

$$\frac{e}{2} [\overline{\psi}_1 (x)\, \gamma^\mu \psi_1 (x) - \overline{\psi}_2 (x)\, \gamma_\mu \psi_2 (x)] + \xi^\mu (x) = 0. \tag{146}$$

Уравнения (143) — (146), дополненные соотношением (139), позволяют найти величины $\psi_a (x)$ и $A_\mu (x)$. Таким образом, задача

* Ср. (62). Вместо (63) теперь имеем

$$2B_4 (x,\ 0) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial \tau} B_4 (x,\ 0) = -\mathrm{i} \frac{\partial A_\nu (x)}{\partial x_\nu} + \frac{e}{2} J_4 (x,\ 0). \tag{140}$$

Левая часть этого равенства остается произвольной на плоскости $\tau = 0$ и, следовательно, (140) не является уравнением связи. Подобно свободному случаю [ср. (63)], его можно трактовать как произвольное калибровочное условие, налагаемое на 4-потенциал $A_\mu (x)$.

о нахождении уравнений 4-сектора теории, играющих в нашей схеме роль уравнений Дирака — Максвелла (8) и (9), может считаться решенной.

Полезно выписать эти обобщенные уравнения Дирака — Максвелла еще раз в виде, свободном от множителей Лагранжа и содержащем явно фундаментальную длину l:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x)\right)\gamma^\mu - m\right]\psi_1(x) = \\
&= \frac{iel\cos\theta}{4}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_1(x) - \frac{el\sin\theta}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) - \\
&- \frac{e^2l^2}{4}[(\bar\psi_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x) + \bar\psi_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x))\gamma^\mu\psi_1(x) + \\
&+ (\bar\psi_1(x)\gamma_\mu\psi_1(x) - \bar\psi_2(x)\gamma_\mu\psi_2(x))\gamma^\mu\psi_2(x)];
\end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x)\right)\gamma^\mu - m\right]\psi_2(x) = \\
&= \frac{iel\cos\theta}{4}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) - \frac{el\sin\theta}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) + \\
&+ \frac{e^2l^2}{4}[(\bar\psi_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x) + \bar\psi_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x))\gamma^\mu\psi_2(x) - \\
&- (\bar\psi_1(x)\gamma_\mu\psi_1(x) - \bar\psi_2(x)\gamma_\mu\psi_2(x))\gamma^\mu\psi_1(x)];
\end{aligned} \tag{148}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = [j^\mu(x) + l\cos\theta j^\mu_{\text{ЭДМ}}(x) + l\sin\theta j^\mu_{\text{МДМ}}(x)], \tag{149}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta &= \operatorname{th}\mu/2 = \left(\sqrt{1+m^2l^2} - 1\right)/ml; \\
\cos\theta &= 1/\operatorname{ch}\mu/2 = \sqrt{2/\left(1+\sqrt{1+m^2l^2}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

и

$$j^\mu(x) = \sum_{a=1,2}\bar\psi_a(x)\gamma^\mu\psi_a(x); \tag{151}$$

$$j^\mu_{\text{ЭДМ}}(x) = -\frac{i}{2}\sum_{a=1,2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\bar\psi(x)\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)); \tag{152}$$

$$j^\mu_{\text{МДМ}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{a=1,2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\bar\psi_a(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)). \tag{153}$$

Из (147) и (148) следует уравнение непрерывности для полного электромагнитного тока (152) нормальных и аномальных частиц:

$$\partial j^\mu(x)/\partial x^\mu = 0. \tag{154}$$

Заметим, что токи (152) и (153) удовлетворяют уравнению непрерывности (154) независимо от уравнений движения полей.

В пределе $l \to 0$ каждое из уравнений (147) и (148) совпадает с уравнением Дирака (8), а (149) — с уравнением Максвелла (9).

Систему уравнений (147) — (149) можно получить из лагранжиана

$$L_{\text{total}}(x) = -F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)/4 + \overline{\Psi}(x)\left[\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}(x)\right)\sigma_0 \times \gamma^{\mu} \times \right.$$
$$\left. \times m\right]\Psi(x) - (\mathrm{i}\,el/4)\cos\theta\,[\overline{\Psi}(x)\sigma_0 \times \gamma^5\sigma^{\mu\nu}\Psi(x)]\,F_{\mu\nu}(x) +$$
$$+ (el/4)\sin\theta\,[\overline{\Psi}(x)\sigma_0 \times \sigma^{\mu\nu}\Psi(x)]\,F_{\mu\nu}(x) +$$
$$+ (e^2l^2/4)\,[\overline{\Psi}(x)\sigma_3 \times \gamma^{\mu}\Psi(x)] \times [\overline{\Psi}(x)\sigma_1 \times \gamma_{\mu}\Psi(x)], \qquad (155)$$

где дираковские поля объединены в 8-компонентные спиноры (97)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, (155) совпадает с лагранжианом $L_{\text{total}}(x)$, фигурирующим в (138), если в последнем исключить с помощью (139) величину $\mathcal{F}_{\mu 4}(x,\ 0)$. Поэтому 4-фермионное взаимодействие в (155) с константой связи $e^2l^2/4$ будет по-прежнему именоваться τ-фотонным взаимодействием.

Если τ-фотонным взаимодействием в лагранжиане (155) вообще пренебречь, то теория становится формально $SU_{\tau}(2)$-инвариантной. В общем случае единственным преобразованием симметрии из $SU_{\tau}(2)$-группы, оставляющим лагранжиан (155) инвариантным, является лишь операция

$$\Psi(x) \to \sigma_2\Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\Psi(x).$$

Ясно, что наличие неминимальных электромагнитных взаимодействий в лагранжиане (155) радикально меняет прежние представления об электромагнитных явлениях в области сверхвысоких энергий.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Начнем с $SU_{\tau}(2)$-симметрии. Ясно, что развитая нами схема после проведения процедуры квантования должна быть прежде всего применена для описания электромагнитных взаимодействий электрона и мюона, ибо обычная КЭД здесь достигла поразительного согласия с экспериментальными данными.

Как хорошо известно, до сих пор не найдено никаких различий в электромагнитных свойствах e и μ. Если бы не разность масс, эти частицы в рамках КЭД были бы идентичны. Происхождение этой $e\mu$-универсальности электромагнитных взаимодействий представляет собой старую загадку.

В обсуждаемой нами теории, кажется, возникает естественная возможность для описания $e\mu$-универсальности. Она связана с существованием того нового «аромата», который отличает нормальные поля от аномальных. Примем как гипотезу, что

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{156}$$

Тогда можно утверждать, что развитая теория электромагнитных $e\mu$-взаимодействий универсальна в том смысле, что она формулируется одновременно и для e, и для μ *. В приближении, когда τ-фотонное взаимодействие в (155) не учитывается, $e\mu$-универсальность электромагнитного взаимодействия проявляется как $SU_\tau(2)$-симметрия обычного минимального взаимодействия и новых ЭДМ- и МДМ-членов. При этом массы электрона и мюона должны считаться равными.

Заманчиво предположить, что нарушающее $SU_\tau(2)$-симметрию τ-фотонное взаимодействие

$$\frac{e^2l^2}{4}[\overline{\Psi}(x)\sigma_3 \times \gamma^\mu \Psi(x)][\overline{\Psi}(x)\sigma_1 \times \gamma_\mu \Psi(x)] \tag{157}$$

ответственно за возникновение разности масс мюона и электрона. Этот вопрос в настоящее время исследуется **.

Благодаря взаимодействию (157) становится возможным распад ***

$$\mu \to 3e \tag{158}$$

и, следовательно, реакции

$$\mu \to e\gamma; \tag{159}$$

$$\mu \to e\gamma\gamma; \tag{160}$$

---

* Недавно открытый τ-лептон должен входить в другой $SU_\tau(2)$-дублет с неизвестным пока партнером. Подчеркнем, что новый «аромат» не является, конечно, привилегией одних лептонов. Это универсальное квантовое число, внутренне связанное с нашей концепцией фундаментальной длины, должно иметь отношение ко всем частицам, в частности к адронам, гипотетическому промежуточному W-бозону и т. п.

В семействе адронов различие между нормальными (электронными) и аномальными (мюонными) состояниями, по-видимому, следует вводить на уровне кварков. Возможно, кварки μ-типа окажутся значительно тяжелее кварков e-типа. Тогда примесь μ-кварков должна приводить к заметному утяжелению адронов. Возникает естественный вопрос: не состоит ли r-семейство ($m \approx 10$ ГэВ) из кварков и антикварков μ-типа?

Отметим, что при калибровочном подходе к самой $SU_\tau(2)$-симметрии мы неизбежно придем к $SU_\tau(2)$-триплетам.

** Автор благодарен проф. Р. Фейнману за полезные дискуссии по данной проблеме.

*** Заметим, что в реакции (158) четность должна сохраняться.

$$\mu + Z \rightarrow eZ \tag{161}$$

и т. д.

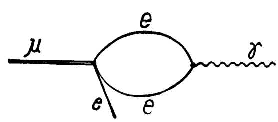
Из экспериментов по поиску распада (158) следует [40], что

$$\Gamma(\mu \rightarrow 3e)/\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}) < 1{,}9 \cdot 10^{-9}. \tag{162}$$

Отсюда и из (157) находим верхнюю границу для фундаментальной длины *:

$$l \leqslant 2 \cdot 10^{-18}\ \text{см}. \tag{163}$$

Если полученную оценку для l использовать в расчетах вероятности распада (159), исходя из следующего графического представления данного процесса:



то результат оказывается согласующимся с последними экспериментальными данными [41]

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)/\Gamma(\mu \rightarrow \text{все}) \leqslant 2{,}0 \cdot 10^{-10}. \tag{164}$$

В работе [30] отмечалось, что формулировка теории электромагнитных взаимодействий в импульсном пространстве де Ситтера, использующая пятимерные величины ($\partial/\partial x^M$, $B_M(x, \tau)$, $\mathcal{F}_{MN}(x, \tau)$ $\Psi(x, \tau)$ и т. п.), является альтернативой по отношению к 4-формализму, основанному на применении 4-анализа Фурье в кривом пространстве (24) [19—29]. Во втором подходе конфигурационное пространство оказывается 4-многообразием, непрерывным вдоль временнóго и дискретным вдоль любого из пространственных направлений**, причем размер «кванта пространства» определяется фундаментальной длиной l [4, 9, 20, 21].

Квантование пространства сопряжено с большими изменениями в аппарате теории поля. Например, если взять новое (нормальное) уравнение Клейна — Гордона (73), построить соответствующий пропагатор

$$\mathcal{D}^c(p) = 1/(2p^4 - 2\operatorname{ch}\mu + i\,0), \tag{165}$$

а затем, используя (165), найти аналог потенциала Юкавы, то результат будет иметь вид

$$V_{\text{Юкава}}(n) = \text{const}\ \exp[-\mu(n+1)]/(n+1), \tag{166}$$

* Обратим внимание на то, что эта величина на два порядка меньше оценки (2).

** В евклидовой формулировке импульсное пространство (24) становится компактным, а конфигурационное 4-пространство — полностью дискретным.

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ — расстояние между частицами в единицах l *.

Можно думать, что дискретность пространства, разделяющего частицы,— это проявление каких-то новых свойств вакуума в рассматриваемой 4-мерной версии теории. С другой стороны, из развитого выше 5-мерного формализма в теории электромагнитных взаимодействий следует, что заряженные частицы в результате «посредничества» τ-фотонов обладают специфическим *вакуумным* взаимодействием, описываемым лагранжианом (157). Если оба подхода, 4-мерный и 5-мерный, физически эквивалентны, то τ-фотонное взаимодействие следует трактовать как результат рассеяния заряженных частиц на дискретной структуре пространства.

Займемся теперь анализом ЭДМ- и МДМ-взаимодействий в уравнениях (147) — (149). Вводя стандартное обозначение $(e\varkappa/4m)\ \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\,\psi_a(x)$ для пауливских членов в (147) и (148) и используя (150), получаем следующее выражение для *врожденного аномального магнитного момента* «голой» дираковской частицы **:

$$\varkappa = \operatorname{ch}\mu - 1 = \sqrt{1+m^2l^2} - 1 = \sqrt{1+m^2/M^2} - 1. \tag{167}$$

Далее будет удобно перейти в уравнениях (147) и (148) к нерелятивистскому приближению Паули. Предполагая, что электромагнитное поле является внешним, причем

$$A^0 = \Phi(r); \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}\times\mathbf{r}\right], \quad \mathbf{H} = \mathrm{const}, \tag{168}$$

и производя в (147) — (149) разложение по степеням $1/c$, получаем *обобщенное* уравнение Паули:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi_a(\mathbf{r},\ t) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\Phi(r) - e\frac{(\mathbf{L}+g\mathbf{S})\cdot\mathbf{H}}{2mc} + \right.$$
$$\left. + \frac{e\cos\theta}{Mc}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{E})\right]\varphi_a(\mathbf{r},\ t) \quad (a=1,\ 2), \tag{169}$$

где

$$\mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}};\ \mathbf{L} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}];\ \mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2;\ \mathbf{E} = -\partial\Phi(r)/\partial\mathbf{r} \tag{170}$$

и

$$g = 2(1+\varkappa) = 2\sqrt{1+m^2/M};\quad \cos\theta = \sqrt{2/\left(1+\sqrt{1+m^2/M^2}\right)}. \tag{171}$$

Записывая ЭДМ-взаимодействие в стандартной форме

$$U_{\text{ЭДМ}} = -(\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}), \tag{172}$$

---

* Выражение (166) в отличие от своего непрерывного аналога не является сингулярным на «малых расстояниях». Это свидетельствует о том, что переход к импульсному пространству де Ситтера оказывает на теорию регуляризующее действие.

** Сопоставляя (167) и (70), можно заключить, что величина $\varkappa$ есть проявление неевклидовости пространства импульсов.

приходим к следующему выражению для *врожденного электрического дипольного момента* «голой» дираковской частицы:

$$\mathbf{d} = -e\frac{\cos\theta}{Mc}\mathbf{S} = -el\frac{\cos\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{173}$$

Заметим, что вектор $\mathbf{d}$ антипараллелен вектору магнитного момента частицы:

$$\mu = \frac{eg}{2mc}\mathbf{S}. \tag{174}$$

Уравнение (169) справедливо для любых значений отношения m/M. Для лептонов, разумеется [см. (2) и (163)]:

$$m/M \ll 1. \tag{175}$$

Отсюда и из (171) и (173) следует, что

$$[(g-2)/2]_{\text{лептон}} \approx m^2/(2M^2); \tag{176}$$

$$|\mathbf{d}|_{\text{лептон}} \approx el/2. \tag{177}$$

Сравнивая (176) с теми погрешностями (теоретическими и экс, периментальными), с которыми на сегодня определены величины $(g-2)/2$ для μ и e [42], находим еще одну верхнюю границу для фундаментальной длины l:

$$l \leqslant 2{,}6\cdot 10^{-17}\ \text{см}. \tag{178}$$

Принимая во внимание (163), (178) и (177), можно сделать вывод, что

$$|\mathbf{d}|_{\text{лептон}} \leqslant 10^{-18}\ e\cdot\text{см}. \tag{179}$$

Эта оценка согласуется со всеми экспериментальными данными по прямому измерению электронного и мюонного ЭДМ [43] с наблюдаемыми сдвигами атомных уровней [43], с наблюдаемыми эффектами несохранения четности в атомах [44, 45] и в рассеянии поляризованных электронов на дейтерии [46].

С другой стороны, был проведен целый ряд экспериментов, в которых величина $|\mathbf{d}|_{\text{электрон}}$ определялась косвенным образом на основе измерений ЭДМ атомов. Полученные оценки верхнего предела для электронного ЭДМ оказываются на много порядков меньше, чем (179):

$$|\mathbf{d}|_{\text{электрон}} < \begin{cases} 3\cdot 10^{-24}\ e\cdot\text{см}\ [47]; \\ (0{,}7\pm 2{,}2)\cdot 10^{-24}\ e\cdot\text{см}\ [48]; \\ (1{,}9\pm 3{,}4)\cdot 10^{-24}\ e\cdot\text{см}\ [49]; \\ (8{,}1\pm 11{,}6)\cdot 10^{-23}\ e\cdot\text{см}\ [50]. \end{cases} \tag{180}$$

Результаты [47—49] * лежат в том же интервале значений, что и последние данные по измерению ЭДМ нейтрона [51]:

$$|\mathbf{d}|_{\text{нейтрон}} < 1{,}6\cdot 10^{-24}\ e\cdot\text{см}. \tag{181}$$

Из (180) и (177) следует значительно более жесткое ограничение на величину

$$l \leqslant 10^{-24} - 10^{-23}\ \text{см}. \tag{182}$$

Полагая, что электромагнитные взаимодействия кварков описываются уравнениями (147) — (149), подобную оценку для l можно извлечь и из (181), если рассматривать нейтрон в рамках релятивистской кварковой модели [52].

Хорошо известно [53], что обнаружение ЭДМ у элементарных частиц было бы прямым свидетельством несохранения CP-симметрии. Как мы убедились, механизм нарушения CP-инвариантности может быть чисто электромагнитным, если теорию электромагнитных взаимодействий развивать на основе нашей гипотезы о фундаментальной длине **. Нет нужды доказывать, что экспериментальное открытие существования у элементарных частиц ЭДМ имело бы важнейшее значение для развиваемого подхода.

В заключение этого раздела рассмотрим электромагнитные характеристики дираковской частицы в случае, когда ее масса m значительно превышает фундаментальную массу M:

$$m/M \gg 1. \tag{183}$$

В этом пределе, как видно из (173), ЭДМ частицы становится малой величиной:

$$|\mathbf{d}| \approx el\sqrt{M/m}. \tag{184}$$

Магнитный момент (174), напротив, к нулю не стремится и оказывается не зависящим от m:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{Mc}\mathbf{S} = \frac{el}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{185}$$

Таким образом, фундаментальная длина определяет *минимально возможную* величину магнетона для дираковской частицы.

Мы видим, что сверхтяжелые заряженные дираковские частицы, если такие объекты вообще где-нибудь существуют ***, могут служить не только источниками статического кулоновского поля, но и источниками статического магнитного поля.

* В работе [50] использовалась методика, независимая по отношению к методикам, примененным в [47—49].

** Как было отмечено в [30], неабелевы теории поля можно также обобщить в духе гипотезы о деситтеровском импульсном пространстве. Соответствующие версии квантовой хромодинамики и модели Вайнберга—Салама, содержащие фундаментальную длину l, внесут, конечно, новые моменты в проблему CP-симметрии.

*** Ср. с «максимоном» М. А. Маркова [54].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже говорилось, в задачу этой статьи входило получение обобщенных уравнений классической электродинамики, в которых бы нашла адекватное отражение гипотеза о фундаментальной длине. Процедура вторичного квантования и диаграммная техника, проблема расходимостей и перенормировка — все эти вопросы будут рассмотрены отдельно. Отличительной особенностью развитой схемы, как калибровочной теории поля, является использование пятимерного конфигурационного пространства для локализации калибровочной группы и внутренняя зависимость этой группы от фундаментальной длины l [см. уравнение (19)].

Автор искренне благодарен А. Д. Донкову, М. Д. Матееву и Р. М. Мир-Касимову за многолетнее плодотворное сотрудничество и очень полезное обсуждение данной работы.

Автор выражает глубокую признательность Н. Н. Боголюбову, Дж. Бьёркену, С. С. Герштейну, К. Джонсону, А. Йылдызу, Л. Н. Липатову, А. А. Логунову, Ф. Лоу, М. А. Маркову, Н. Рамзею, А. Т. Филиппову и Э. Н. Цыганову за ценные дискуссии по ряду вопросов, затронутых в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Watagin G. V.**— Z. Phys., 1934, Bd 88, S. 92.
2. **Heisenberg W.**— Z. Phys., 1936, Bd 101, S. 533;
   Heisenberg W. In: Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles, Inters. Publ., 1966.
3. **Марков М. А.**— ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 1311.
4. **Snyder H.**— Phys. Rev., 1947, v. 71, p. 38; 1947, v. 72, p. 68.
5. **Yang C. N.**— Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 874.
6. **Markov M. A.**— Nucl. Phys., 1958, v. 10, p. 140; **Komar A. A., Markov M. A.**— Nucl. Phys., 1959, v. 12, p. 190; **Марков М. А.** Гипероны и K-мезоны. М., Физматгиз, 1958.
7. **Блохинцев Д. И.**— УФН, 1957, т. 61, с. 137.
8. **Гольфанд Ю. А.**— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 504; 1962, т. 43, с. 256; 1963, т. 44, с. 1248.
9. **Кадышевский В. Г.**— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1885;— Докл. АН СССР, 1962, т. 147, с. 588, 1336.
10. **Тамм И. Е.** В кн.: XII Международная конференция по физике высоких энергий. Дубна, 1964. Том 2. М., Атомиздат, 1966, с. 229; In: Proc. Intern. Conf. on Elementary Particles, Kyoto, 1965.
11. **Мир-Касимов Р. М.**— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 905, 1161; 1967, т. 52, с. 533.
12. **Киржниц Д. А.**— УФН, 1966, т. 90, с. 129.
13. **Лезнов А. Н.** Препринт ОИЯИ Р2-3590, 1967, с. 52.
14. **Блохинцев Д. И.** Пространство и время в микромире, М., «Наука». 1970.
15. **Ефимов Г. В.** Нелокальные взаимодействия квантовых полей. М., Наука, 1977.
16. **Соловьев М. А., Файнберг В. А.**— В кн.: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории. Препринт ОИЯИ Д2-9788, Дубна, 1976.
17. **Fubini S.**— Preprint CERN TH-2129, 1976.
18. **Bjorken J. D.**— In: Proc. Ben Lee Memorial Conference, 1977.
19. **Кадышевский В. Г.** Препринт ОИЯИ Р2-5717, Дубна, 1971.

20. **Кадышевский В. Г.** В кн.: Проблемы теоретической физики, посвященной памяти акад. И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972; Препринт ОИЯИ Д2-7161, Дубна, 1973.
21. **Donkov A. D., Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M.**— Bulgar. J. Phys., 1974, v. 1, p. 58, 150, 233; 1975, v. 2, p. 3; In: Proc. Internat. Conference Mathemat. Problems Quantum Field Theory and Quantum Statistics, M., Nauka, 1975, p. 85—129; Preprint JINR, E2-7936, Dubna, 1974.
22. **Мир-Касимов Р. М.**— Аксиоматическая квантовая теория поля и импульсное пространство де Ситтера. Препринт ОИЯИ Р1,2-7642, Дубна, 1973.
23. **Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M.** Preprints JINR, E2-8892, P2-8877, Dubna, 1975.
24. **Kadyshevsky V. G.** Fundamental length as a new scale in quantum field theory. Preprint D1, 2-9342, Dubna, 1975.
25. **Donkov A. D., Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M.**— В кн.: Нелокальные нелинейные и неперенормируемые теории. Препринт ОИЯИ Д2-9788, Дубна, 1976; In: Proc. the XVIII Intern. Conf. on High Energy Physics. Tbilisi, Preprint D1, 2-10400, Dubna, 1977, p. A5-1.
26. **Матеев М. Д.**— Процессы при высоких энергиях и гипотеза о фундаментальной длине. Препринт ОИЯИ Д2-10533, Дубна, 1977, с. 257.
27. **Волобуев И. П.**— ТМФ, 1976, т. 28, с. 331.
28. **Volobuyev I. P., Mir-Kasimov R. M.**— Acta Phys. Polonica B, 1978, v. 9, p. 2.
29. **Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M., Volobuyev I. P.** Preprint JINR, E2-10860, 1977.
30. **Kadyshevsky V. G.**— Nucl. Phys. B, 1978, v. 141, p. 477.
31. **Kadyshevsky V. G.** FERMILAB-Pub-78/70 THY, September, 1978.
32. **Kadyshevsky V. G.** In: Proc. Intern. Integrative Conf. Group Theory and Math. Phys. Austin, Texas, 1978.
33. **Mateev M. D.** In: Proc. XIX Intern. Conf. on High Energy Phys., Tokyo, Japan, 1979, p. 588.
34. **Dirac P. A. M.**— Can. J. Math., 1950, v. 2, p. 129;— Proc. Roy. Soc., 1958, v. 246, p. 326.
35. **Bergmann P.**— Rev. Mod. Phys., 1961, v. 33, p. 510.
36. **Bergmann P., Goldberg I.**— Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 531.
37. **Faddeev L., Popov V.**— Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 29.
38. **Фаддеев Л. Д.**— ТМФ, 1969, т. 1, с. 3.
39. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
40. **Korenchenko S. M. e.a.** In: Proc. XVIII Intern. Conf. High Energy Phys., v. 11, 1977, p. B174, D1, 2-10400.
41. **Cooper M.**— Search for $\mu \to e\gamma$ Topical Conf. at SLAC, 1978.
42. **Sandars P. G. H.** In: Proc. Intern. Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies. (Hamburg, 1977).
43. **Шапиро Ф. Л.**— УФН, 1968, т. 95, с. 145.
44. **Lewis L. L. e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 795; **Sandars P. G. H.**— Search for Parity Nonconservation in Bi.— In: Proc. Ben Lee Memorial Conference, 1977.
45. **Barkov L.**— In: Proc. XIX Intern. Conf. High Energy Phys., Tokyo, Japan, 1979, p. 425.
46. **Taylor R. J.**— In: Proc. XIX Intern. Conf. on High Energy Phys., Tokyo, Japan, 1979, p. 422.
47. **Weisskopf M. C. e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1645; **Stein T. S. e.a.**— Phys. Rev., 1969, v. 186, p. 39.
48. **Player M. A., Sandars P. G. H.**— J. Phys. B, 1970, v. 3, p. 1620.
49. **Sandars P. G. H., Sternheimer R. M.**— Phys. Rev., 1975, v. 11, p. 413.

50. **Васильев Б. В., Колычева Е. В.**— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 466.
51. **Алтарев И. С. и др.** Поиск электрического дипольного момента нейтрона с помощью ультрахолодных нейтронов. Препринт ЛИЯФ № 430, 1978.
52. **Боголюбов П. Н.**— ЭЧАЯ, 1972, т. 3, с. 71.
53. **Ландау Л. Д.**— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 405.
54. **Марков М. А.**— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 878; Progress of Theor. Phys., H. Yukawa Suppl., 1965, p. 85.
55. **Klein F.** Vorlesungen über mecht-euklidische Geometrie, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.