

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЧАСТИЧНЫХ КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ РЕАКЦИЙ СРЕДНИХ ЭНЕРГИЙ МЕТОДОМ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Х. Шиллер

Институт физики высоких энергий АН ГДР, Берлин

Изучение адронных взаимодействий с несколькими конечными частицами затруднено из-за высокой размерности фазового пространства.

Динамические механизмы одного конечного состояния создают структуру распределения плотности в фазовом пространстве. Метод кластерного анализа позволяет исследовать эту структуру при минимальном априорном знании.

Предлагается кластерный алгоритм, который учитывает ориентацию и форму кластера. Применяя этот алгоритм к реакциям $\pi^\pm p \rightarrow p\pi^\pm\pi^+\pi^-$ ($p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с) и $K^-p \rightarrow pK^0\pi^+\pi^-$ ($p_{\text{лаб}} = 10$ ГэВ/с), можно обнаружить динамические механизмы малого сечения.

Исследуется область применения рассмотренных методов.

The high dimensionality of phase space of hadronic interactions with several final state particles renders the experimental study more difficult. The dynamical mechanisms contributing to the final state lead to a structure of the density distribution in the phase space. This structure can be investigated using minimum a priori knowledge by the cluster analysis. For this a cluster algorithm was developed, which takes into account the orientation and the shape of the clusters. Applying this analysis to data of the reactions $\pi^\pm p \rightarrow p\pi^\pm\pi^+\pi^-$ ($p_{\text{lab}} = 16$ GeV/c) and $K^-p \rightarrow pK^0\pi^+\pi^-$ ($p_{\text{lab}} = 10$ GeV/c) dynamical mechanisms with small cross sections were found and limits of the applicability of the methods were investigated.

Вообще говоря, можно только сожалеть, что некоторые люди все еще довольствуются анализом данных на поверхностном уровне, который заранее гарантирует отсутствие новых результатов.

Людвиг Ва Хове

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное и теоретическое изучение процессов множественного рождения является одной из важнейших задач физики высоких энергий. С ростом множественности выяснение

механизмов рождения частиц с помощью одно- и двумерных проекций фазового пространства все более усложняется. Эксклюзивный анализ множественных реакций развивается в двух независимых направлениях.

1. Ищут переменные, описывающие одно определенное свойство целой реакции; эти переменные используют информацию о всех рожденных частицах. Их можно назвать коллективными переменными, так как они характеризуют событие как целое (со всеми конечными частицами) [4—7].

2. Пытаются проводить полный анализ кинематической информации одного канала реакции [8, 9] и выделить все процессы (а также описать их).

Значение экспериментального и теоретического исследования множественного рождения растет, так как при переходе к более высоким энергиям и к электронным экспериментам [10] экспериментальная информация о реакциях с большой множественностью быстро увеличивается.

Изучение реакций с несколькими конечными частицами показало, что большой вклад в сечение дают процессы с рождением резонансов низких масс [11]. С ростом множественности возрастает трудность обнаружения еще неизвестных механизмов рождения данного конечного состояния и их выделение. Простые распределения по эффективной массе из-за кинематических отражений и перекрытий с другими реакциями часто не позволяют сделать какие-либо выводы [12].

На основе одномерных распределений можно изучать распределение плотности в пространстве, образуемом полным набором независимых кинематических переменных.

Для конечного n -частичного состояния число независимых переменных при определенной энергии и неполяризованных частицах велико ($3n - 5$), что затрудняет полный анализ.

Важный шаг в этом направлении — исследование по продольному импульсу [13]. Оно опирается на экспериментально обнаруженный факт, что средний поперечный импульс рожденных частиц почти не зависит ни от энергии, ни от множественности взаимодействия, ни от вида частиц. Поэтому ожидается, что продольные импульсы содержат решающую динамическую информацию.

Однако анализ по продольному импульсу конечного состояния, в частности с четырьмя частицами, позволяет разделить только на четыре группы. Достигается физическое разделение на дифракцию нуклона и мезона и на реакции обмена мезонами. Разные состояния мезонной дифракции, например, не разделяются.

Трудно применить анализ по продольному импульсу для конечных состояний с пятью или шестью частицами [14, 15] при средних энергиях, так как здесь целый ряд механизмов входит не в один сектор диаграммы продольного фазового пространства.

Призм-плот-анализом [8] впервые пытались одновременно исследовать все принадлежащие к одному конечному состоянию механизмы в $(3n - 5)$ -мерном фазовом пространстве. Основная идея следующая: экспериментально обнаруженное распределение плотности приближается распределением плотности событий, полученных методом Монте-Карло по заданному списку механизмов реакции. В результате итераций получается распределение экспериментальных событий, обусловленное принятыми во внимание механизмами реакции и их относительным вкладом.

В призм-плот-анализе используют полную кинематическую информацию. Однако он имеет недостаток — требует более или менее подробное знание исследуемого канала.

Каждое событие реакции

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$$

при постоянной энергии и неполяризованных частицах начального состояния однозначно опишется $3n - 5$ независимыми кинематическими переменными x . События исследуемой реакции распределены в пространстве кинематических переменных внутри области с границей, заданной сохранением энергии и импульса. Внутри этой области распределение плотности точек (событий)

$$d\sigma/dx = k(x) |T(x)|^2,$$

где $k(x)$ — кинематический фактор, зависящий от выбора переменных x ; $T(x)$ — матричный элемент перехода данной реакции.

Вообще, конечное состояние содержит некоторые подпроцессы z :

$$\frac{1}{k(x)} \frac{d\sigma}{dx} = |T(x)|^2 = \left| \sum_{z=1}^n T_z(x) \right|^2.$$

Пренебрегая интерференционными членами, получаем

$$\frac{1}{k(x)} \frac{d\sigma}{dx} = \sum_{z=1}^n |T_z(x)|^2.$$

В этом (идеальном) случае точки, представляющие события каждого из участвующих подпроцессов, создают один или несколько (почти не перекрывающихся) максимумов плотности. При средних энергиях указанный идеальный случай не встречается, так как при этих энергиях существенны перекрытия и интерференционные члены. Тем не менее анализ $(3n - 5)$ -мерного распределения точек представляет интерес, поскольку: во многих случаях перекрытия небольшие [16], в результате интерференции могут возникнуть дополнительные максимумы плотности и подпроцессы малого

сечения иногда можно найти только после выделения подпроцессов большого сечения.

В литературе принято максимум плотности точек, представляющих события в многомерном фазовом пространстве, называть кластером.

Предлагается изучение $(3n - 5)$ -мерного распределения точек методами, развитыми в других областях (в психологии, биологии, при распознавании образов) для кластерного анализа.

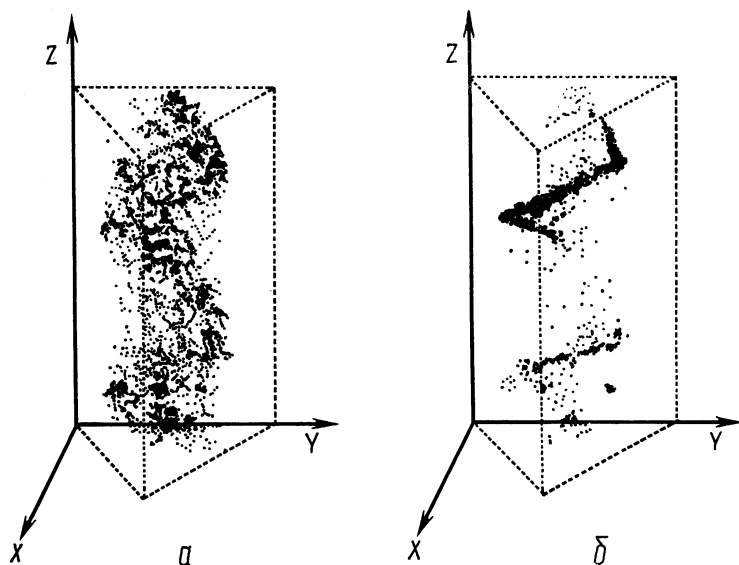


Рис. 1. Призм-плот для событий, генерированных по методу Монте-Карло (инвариантное фазовое пространство), (а) и для экспериментальных данных (б):

$$\text{реакция } \pi^+p \rightarrow p\pi^+p\pi^0; p_{\text{лаб}} = 3,9 \text{ ГэВ}/c$$

Особый интерес представляют методы, опирающиеся на знание основной структуры максимумов точек, но не нуждающиеся в дальнейших предположениях о $T_z(x)$. Найденный таким образом кластер, очевидно, не является следствием исходных предположений, а автоматически получается из структуры распределения точек в $(3n - 5)$ -мерном пространстве.

Предпосылкой такого кластерного анализа является экспериментальный факт, что события концентрируются в относительно малых областях фазового пространства (рис. 1). Максимумы $|T_z|^2$ узки в сравнении с кинематически допустимым фазовым объемом, так что распределение точек в фазовом пространстве

имеет сильно выраженную структуру. Существование таких кластеров в фазовом пространстве обнаружено разными методами в большом диапазоне энергий и для множества реакций [14, 17—21].

1. МЕТОДЫ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Кластерный анализ применяют для решения многочисленных проблем. Вообще говоря, цель кластерного анализа — разбить данные по группам таким образом, чтобы элементы одной группы были подобны между собой, а разные группы неподобны. Существенная трудность кластерного анализа состоит в том, что слова «подобен» и «неподобен» приобретают смысл только в применении к какой-либо определенной проблеме [22]. Задача анализа сгущений в высокоразмерных пространствах встречается, например, в технике (распознавание образов), в социологии и психологии (нахождение структур в данной популяции — опросные исследования), в медицине (автоматический диагноз общих осмотров) и т. п. Сколько применений, столько предлагается и используется алгоритмов для нахождения кластеров. В отсутствие общего определения кластера можно обсуждать эффективность кластерного алгоритма только в связи с его применением. Алгоритмы заметно различаются в объеме программ и зависят от возможностей вычислительной техники.

Предлагается систематика существующих кластерных алгоритмов в связи с их применением в физике высоких энергий.

Иерархические методы. Определение «иерархические» означает, что объекты (события) рассматриваются как конечные точки ветвей «дерева», и узлы одного уровня соответствуют одной совокупности. Более высокий уровень соответствует более общей совокупности.

1. *Классификация по матрице подобия (или матрице расстояний).* При N точках указанная матрица содержит $N(N - 1)/2$ элементов, так что могут возникнуть трудности ее применения для большого числа точек.

2. *Графический метод ближайших соседей (Minimum Spanning Tree Method — MST-method).* N точек рассматривают как узлы соединяющего графа, т. е. граф имеет $N - 1$ связей, так что любая пара соединений соответствует однозначно одному отрезку связи. Связям сопоставляют расстояние до точки соответствующего узла. Потом строят соединяющий граф, соответствующий минимальной сумме расстояний (MST). Граф разделяют по самой длинной связи. Так разбивают и возникшие подграфы, и в результате получают иерархию кластеров [23].

Применение этого алгоритма для 1000 событий реакции $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^0$ при $p_{\text{лаб}} = 5$ ГэВ/с привело к следующим заключениям [24]: MST имеет в областях перекрытий сгущений связи,

которые короче, чем в соседних областях (поэтому описанный выше метод не дает физического соответствия событий с динамическим механизмом); максимальная связь в MST, описанная в [23], как метод грубого описания структуры при анализе данных, может служить для разбиения сгущений, показанных на рис. 1.

3. *Иерархия возможных кластеров путем оценки для каждого события плотности окружающих точек.* После упорядочивания событий по падающей плотности точек выполняют следующую процедуру.

Событие 1 определяет центр первого кластера. К этому кластеру присоединяют события, плотность которых на фактор λ больше, чем плотность первой точки, и расстояния которых от события 1 не больше, чем νR , где R — среднее расстояние k -го и $(k + 1)$ -го соседей от события 1 (ν — параметр алгоритма).

Первое событие, удовлетворяющее первому, но не второму условию, определяет центр кластера 2 и т. д. Результаты анализа сильно зависят от значений параметров ν и λ . Большие λ позволяют изучить только кластеры большой плотности, хорошо разделяемые друг от друга и не зависящие от выбора ν . Выбирая все меньшие и меньшие λ , можно объединить соседние кластеры. Большие значения ν помогают объединять кластеры.

Применение этого метода для реакций $K^-p \rightarrow p\bar{K}^0\pi^-$ и $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$ при $p_{\text{лаб}} = 4,2$ ГэВ/с описано в [25]. В этом анализе не использована плотность точек в фазовом пространстве, но проведена оценка квадрата матричного элемента:

$$|T(x)|^2 \sim (1/J^x) \Delta N / \Delta V,$$

где J^x — плотность фазового пространства в точке x . В качестве переменных x использовали: угол Ван Хофе ω , $p_i^2(n)$, $p_i^2(K^-)$ и угол ϕ между $p_i(n)$ и $p_i(K^-)$, так что

$$\frac{1}{J^x} = \left[\sum_{j=1}^3 \frac{p_{i,j}^{*2}}{E_j^*} \right] \left[\sum_{j=1}^3 p_{i,j}^{*2} \right]^{-1} \left[\prod_{j=1}^3 E_j^* \right].$$

При оценке $\Delta N / \Delta V$ берем K ближайших соседей ($K \sim 30$), ΔV вычисляем из $\Delta V = R^{3n-5}$, где R — среднее расстояние от точки, для которой оцениваем плотность, до k -го и $(k + 1)$ -го соседей. Для реакции $K^-p \rightarrow p\bar{K}^0\pi^-$, кроме доминирующих кластеров K^* (890) и K^* (1420), обнаружен кластер $Y^* \rightarrow \bar{K}^0p$ и другие с Δ^0 (1236), N^{*0} (1470) и N^{*0} (1700). Некоторые из остальных групп с числом точек ≤ 10 (событиями) имели сверхвысокие поперечные импульсы.

Анализ 1500 событий реакции $K^-p \rightarrow nK^-\pi^+$ дал при $\lambda = 0,05$ и $\nu = 0,53$ три кластера. Кластер 2 содержал в сущности чистое рождение K^* (890). Для кластера 3 не нашли простой физической

интерпретации. Кластер 1 являлся смесью K^* (890), K^* (1420), Δ^+ (1236) и дифракционной $n\pi^+$ -системы. Снижение параметра ν до $\nu = 0,52$ не изменило кластеры 2 и 3, но привело к разбиению кластера 1 на четыре группы: Δ^+ (1236); Δ^+ (1236) + K^* (1420); Δ^+ (1236) + K^* (890); K^* (890) + K^* (1420) + дифракционная система ($n\pi^+$).

Применение подобного анализа для 1291 событий реакции $K^-p \rightarrow K^-\pi^+\pi^-p$ и 880 событий реакции $K^-p \rightarrow K^-\pi^+\pi^-\pi^0p$ при $p_{\text{лаб}} = 12,6$ ГэВ/с описано в [26]. Авторы сделали вывод, что полученное разложение на кластеры отражает существенные свойства наблюдаемых механизмов реакции.

Неиерархические методы. Эти методы дают возможность подразделить события на кластеры без определения их иерархической структуры.

1. *Метод центров.* N точек X_i подразделяют на K групп. Определяют центр каждой группы. Новое подразделение получают так, что каждая точка присоединяется к той группе, центр которой будет наиболее близок. Вообще эта процедура очень быстро ведет к сходимости. Некоторые начальные группы могут при этом «вымирать». Указанный метод использован в приведенном в Приложении 1 алгоритме.

Если в описанном методе учитывают вторые моменты, то получают алгоритм CLUCOV (см. ниже).

Разложение плотности точек по ортогональным функциям и изучение получаемого аналитического выражения очень затруднено из-за незнания порядка, которым надо окончить разложение, и большого числа членов, которые должны быть учтены.

2. *Итерационный кластерный анализ.* Развитый в ЦЕРНе [27] метод заключается в следующем. Пусть плотность точек (распределение плотности вероятности точек X) есть смесь K распределений:

$$f(X | b^*) = \sum_{k=1}^K c_k f_k(X | b_k^*).$$

Здесь b_k^* означают характеризующие k -е распределение параметры.

Задача кластерного анализа состоит в том, чтобы найти оценку b величин b^* в соответствии с наблюдаемым распределением точек. Можно показать, что, найдя максимум среднего логарифма правдоподобия

$$\eta(b | b^*) = E \{ \ln f(X | b) \} = \int \ln [f(X | b)] f(X | b^*) dx,$$

получают оценку параметра максимального правдоподобия заданного распределения.

Если $f(X | b^*)$ — суперпозиция K неперекрывающихся функций Гаусса с весами c_k и ковариациями Σ_k , то этот метод требует

нахождения максимума функции:

$$\eta_G(b) = \sum_{k=1}^K c_k \ln \left\{ \frac{c_k}{(\det \Sigma_k)^{1/2}} \right\}.$$

Развитая в ЦЕРНе программа позволяет итерационную процедуру определения максимума функции $\eta_G(b)$ осуществлять с помощью дисплея [28—31].

Существенное свойство этой процедуры — постоянное число групп K .

3. *Метод нелинейного проектирования* $Y = f(x)$ точек x из многомерного пространства на двумерную плоскость Y . Этот метод можно использовать для кластерного анализа, если проекция $f(x)$ такова, что расстояние между точками мало изменяется:

$$\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^i \{ \rho_x(x_i x_j) - \rho_y(f(x_i) f(x_j)) \}^2.$$

Кроме почти произвольного выбора проекции f , указанный метод имеет еще один существенный недостаток: он игнорирует форму сгущений точек. В ЦЕРНе его применяли к данным, полученным на пузырьковых камерах [32].

4. *Метод нахождения долин*. Он подробно описан в [33].

Первые применения кластерных анализов в физике высоких энергий. В 1972 г. впервые применили кластерный анализ для данных, полученных в пузырьковых камерах. Использовали факторный анализ [34] и метод нахождения максимальной плотности, аналогичный предложенному в [25]. Оба метода применяли к реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ при импульсе пучка 16 ГэВ/с [16]. Первые результаты показали правильность идеи вообще. Однако применение к большому объему данных привело к значительным техническим трудностям. Требовался более простой алгоритм. Выбрали алгоритм нахождения долин [34].

Этим методом исследовали реакции:

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad \text{при } 8 \text{ ГэВ/с}; \quad (1)$$

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad \text{при } 16 \text{ ГэВ/с}; \quad (2)$$

$$\pi^+ p \rightarrow p 3\pi^+ 2\pi^- \quad \text{при } 16 \text{ ГэВ/с}. \quad (3)$$

Результаты рассмотрены ниже.

1. *Реакция* $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ *при* 8 ГэВ/с [35].

Алгоритм нахождения долин применяли к 4400 событиям реакции (1). Вообще говоря, можно свободно выбирать кинематические переменные для описания одного события. (Некоторые проблемы выбора переменных рассмотрены в Приложении 1.)

Для исследования реакции (1) выбирали следующие переменные:

$$M(p\pi_f^+), M(p\pi_s^+), M(p\pi^-), M(\pi_f^+\pi^-), M(\pi_s^+\pi^-); \quad (4)$$

$$M^2(p\pi_f^+), M^2(p\pi_s^+), M^2(p\pi^-), M^2(\pi_f^+\pi^-), \\ M^2(\pi_s^+\pi^-), t(p/p), t(\pi^+/\pi^-), \quad (5)$$

где M — инвариантная масса между данными в скобках частицами; t — переданный 4-импульс между частицами; f и s — π^+ -мезон с большим и меньшим продольными импульсами соответственно. Выбор переменных (4) основан на доминирующей роли механизма рождения резонансов в рассматриваемой реакции [36]. Набор переменных (5) полон; из него можно получить другие наборы независимых переменных (образованные из квадратов масс и переданных 4-импульсов) линейным преобразованием. Так как кластерная структура не изменяется после линейного преобразования, набор (5) полезен для наших целей.

Оказалось, что результаты, полученные при выборе переменных (5), не лучше результатов, получаемых при выборе (4). Это можно объяснить следующим образом: переданные 4-импульсы содержат мало добавочной информации о кластерах; небольшое количество статистических данных (4400 событий) не позволяет полностью использовать метод при большом числе переменных и, таким образом, лучше выделять кластеры.

Представленные ниже результаты получены для набора переменных (4) при параметре алгоритма нахождения долин $R = 0,455$ ГэВ. Исходя из пятнадцати начальных групп, мы получили десять кластеров и осталось девятнадцать неприсоединенных событий. Количество событий в кластерах дано в табл. 1. В табл. 2

Таблица 1

Распределение событий по десяти кластерам в реакции
 $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-$ при 8 ГэВ/с (4400 событий)

Кластер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
События	1355	879	651	188	246	232	255	330	76	168

для каждого кластера указаны резонансы, сигналы от которых в нем обнаружены.

Можно сделать следующие выводы: существуют кластеры событий в фазовом пространстве; получаемые часто статистическим методом кластеры соответствуют динамическим механизмам; есть кластеры, имеющие несколько механизмов рождения; для некоторых механизмов рождения метод дает хорошее разделе-

Таблица 2

Обнаружение резонансных сигналов десяти кластеров в реакции $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$ при 8 ГэВ/с (4400 событий)

Кластер	Δ^{++}	Δ^0	ρ_f^0	f_f	ρ_s^0	f_s	N_{1470}^*	N_{1700}^*	A_1	A_2
1	×	—	×	—	—	—	—	—	—	—
2	×	—	×	×	×	×	—	—	—	—
3	×	?	—	×	—	—	×	×	—	—
4	×	—	—	—	—	—	—	?	—	—
5	—	—	×	—	—	—	—	—	×	—
6	—	—	×	—	×	—	—	—	×	×
7	—	—	×	—	×	—	—	—	?	×
8	—	—	×	—	×	—	—	—	—	×
9 и 10	—	—	×	—	×	—	—	—	—	—

ние кластеров; метод применим для большого числа конечных состояний.

Сечение процесса $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rho^0$ равно 406 ± 28 мкбарн в хорошем соответствии со значениями, получаемыми другими методами [36]. Разбиение этой реакции на два кластера объясняется периферийностью рождения ρ -мезона.

Мезонная дифракция выделяется чисто, а для нуклонной обнаружено сильное перекрытие с подпроцессом $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} f$. То обстоятельство, что в результате одного механизма рождения может образоваться два или большее число кластеров, или то, что один и тот же кластер можно получить несколькими механизмами рождения, на первый взгляд, может показаться недостатком [12]. Однако разбиение одного механизма рождения на несколько кластеров может оказаться и существенным преимуществом при аналитическом описании механизма, так как оно указывает на возможность существования области, где амплитуда обращается в нуль. Невозможность разделения механизмов рождения частиц представляет особый интерес как индикатор действительных перекрытий в фазовом пространстве. Механизмы рождения не только перекрываются на проекциях (нельзя исключить эту возможность в обыкновенных анализах), но и в тех областях фазового пространства, которые содержат информацию об интерференциях и, таким образом, об относительной фазе перекрывающихся механизмов. Так, получают важные исходные данные для многоканального анализа [9].

Обнаружены и два замечательных кластера (9 и 10) с большим продольным импульсом p_l^* протона. Получены сигналы ρ - и f -мезонов в распределении масс $M(\pi^+ \pi^-)$. Часть этих событий описывается процессом $\pi^+ p \rightarrow \Delta(1890) \rho$, что подтверждается сравнением с той же самой реакцией при импульсе $p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с.

Все полученные кластеры имеют замечательное свойство: они расположены в соответствующих областях продольного фазового пространства. Эти области расположены почти внутри секторов, выбираемых по продольному импульсу для выделения соответствующих подпроцессов.

2. Реакция $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-$ при 16 ГэВ/с [16, 37].

Алгоритм нахождения долин применяли к 12 529 событиям реакции (2). Для сравнения использовали набор переменных (4).

Таблица 3

Распределение событий по двенадцати кластерам в реакции $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-$ при 16 ГэВ/с (12 529 событий)

Кластер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
События	846	2563	395	449	1955	1022	652	1038	1392	66	565	798

Таблица 4

Содержание резонансных сигналов двенадцати кластеров в реакции $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-$ при 16 ГэВ/с (12 529 событий)

Кластер	Δ_{1236}^{++}	Δ_{1890}^{++}	ρ_f^0	f_f^0	g_f^0	ρ_s^0	f_s^0	N_{1400}^*	N_{1700}^*	A_1	A_2	A_3	A_4
1	×	—	×	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—
2	×	—	×	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—
3	×	—	×	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—
4	×	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	×	—	—	—	—	—	—	×	×	—	—	—	—
6	—	—	×	×	—	—	—	—	—	×	×	?	×
7	—	—	×	—	—	×	?	—	—	×	?	—	?
8	—	—	×	—	—	×	—	—	—	×	—	—	—
9	?	—	×	×	—	—	—	—	—	×	×	?	—
10	?	—	×	×	—	—	—	—	—	?	×	?	—
11	—	—	×	—	—	×	—	—	—	—	—	×	—
12	?	—	×	—	—	×	—	—	—	—	—	×	—

Исходя из пятнадцати начальных групп и используя значение параметра $R = 0,455$ ГэВ [34], мы получили двенадцать кластеров. Популяцию этих кластеров можно найти в табл. 3. В табл. 4 указаны для каждого кластера резонансы, сигналы от которых в нем обнаружены. Некоторые из этих кластеров рассмотрим подробнее. Чтобы полностью иметь процесс $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$, необходимо соединить кластеры 1—4 (см. табл. 4 и рис. 2). Изучение распределения угла распада событий процесса $\Delta^{++}\rho^0$ дает ответ на вопрос, почему процесс разбит на четыре подпроцесса: каждый

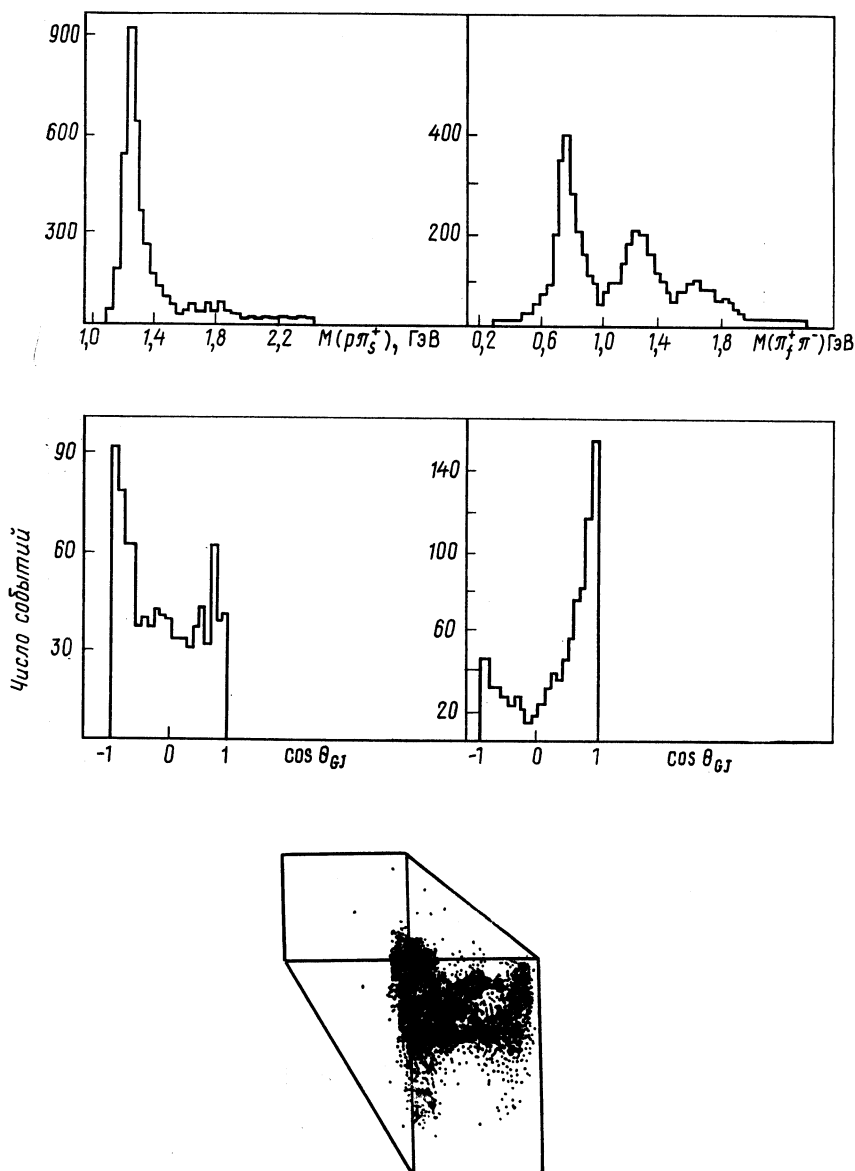


Рис. 2. Суммарное распределение эффективных масс, углов распада и схема продольных импульсов рождения системы $\Delta^{++}(1236)\rho^0$ в кластерах 1—4 для реакции $\pi^+p \rightarrow \rho\pi^+\pi^-\pi^-$ при $p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с

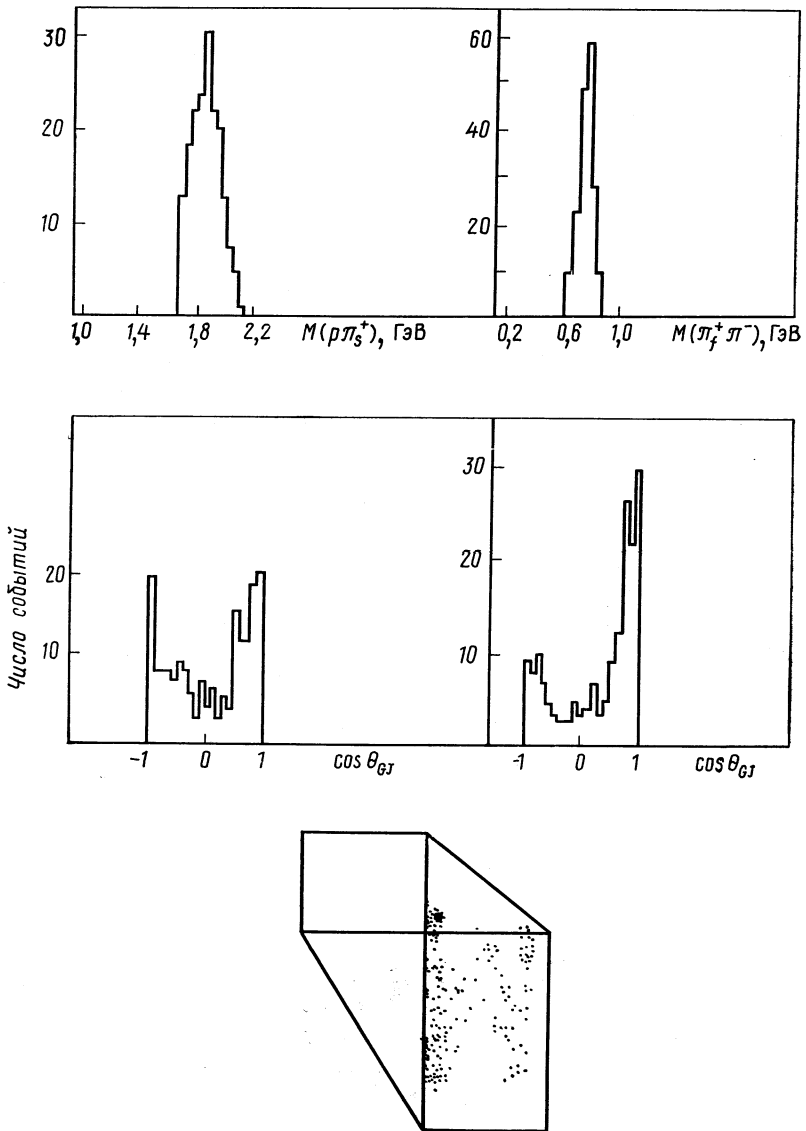


Рис. 3. Суммарное распределение эффективных масс, углов распада и схема продольных импульсов рождения системы Δ^{++} (1890) ρ^0 в кластерах 1—4 для реакции $\pi^+p \rightarrow \rho\pi^+\pi^+\pi^-$ при $p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с:
 $1,69 \leq M(\rho\pi_s^+) \leq 2,09$ ГэВ; $0,66 \leq M(\pi_f^+\pi^-) \leq 0,86$ ГэВ

из полученных кластеров содержит только одну часть ожидаемого распределения угла распада, т. е. динамика самого процесса образует в пространстве используемых нами переменных четыре кластера.

То же самое можно сказать о событиях, идущих через Δ^{++} (1890) ρ . В кластере 4 имеется четкий сигнал в области массы Δ^{++} (1890). Распределение угла распада этих событий очень асимметрично. Вырезая область массы Δ (1890) и вновь соединяя кластеры 1—4, получают довольно симметричные распределения углов (рис. 3).

Есть и слабые сигналы типа $\Delta^{++}\rho^0$ в кластерах 9, 10 и 12. Вместе с кластерами 6, 7, 8 и 11 эти кластеры содержат в основном дифракционную диссоциацию. Возникает вопрос: перекрываются ли эти процессы действительно в фазовом пространстве или сам кластерный метод является причиной этих «загрязнений»?

В результате анализа по продольному импульсу в [37] предполагают существование перекрытия процессов $\pi^+p \rightarrow pA_3$ и $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\rho^0$, что может быть причиной наблюдаемых загрязнений. Однако в независимом кластерном анализе реакции (2) получили чистое разделение этих процессов (см. разд. 3). Поэтому необходимо считать наличие этих загрязнений (как и в анализе по продольному импульсу [37]) недостатком метода.

Дифракционная диссоциация протона содержится в хорошо выделенном кластере (рис. 4). Дифракционный спектр имеет максимумы в распределении массы M ($p\pi^+\pi^-$) при 1470, 1700 и 2190 МэВ. В распределении эффективной массы M ($p\pi^+$) наблюдается типичный для этого подпроцесса сильный сигнал Δ^{++} .

Сравним результаты, полученные при 8 и 16 ГэВ/с. Схема выделения механизмов в реакции при 8 и 16 ГэВ/с изображена на рис. 5. При обеих энергиях встречались перекрывающиеся кластеры: один механизм может участвовать в рождении различных кластеров, и наоборот, один кластер может рождаться разными механизмами.

В основном при 8 и 16 ГэВ/с найдены одни и те же кластеры. Это указывает на то, что динамика процесса является причиной образования сгущений в фазовом пространстве.

Кроме результатов, аналогичных результатам при 8 ГэВ/с, при 16 ГэВ/с обнаружено: заметный вклад процесса $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}$ (1890) ρ^0 , наличие процесса $\pi^+p \rightarrow A_3p$, возможное наличие процесса $\pi^+p \rightarrow A_4p$, значительно меньшее перекрытие $N^*\pi/\Delta^{++}f$, наличие процесса $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}g$.

Различия касаются процессов с относительно маленьким сечением. Их можно объяснить более высокой энергией и большим количеством экспериментальных данных при 16 ГэВ/с.

3. Реакция $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$ при 16 ГэВ/с [38]. Алгоритм нахождения долин применен к 6317 событиям реакции (3). Исполь-

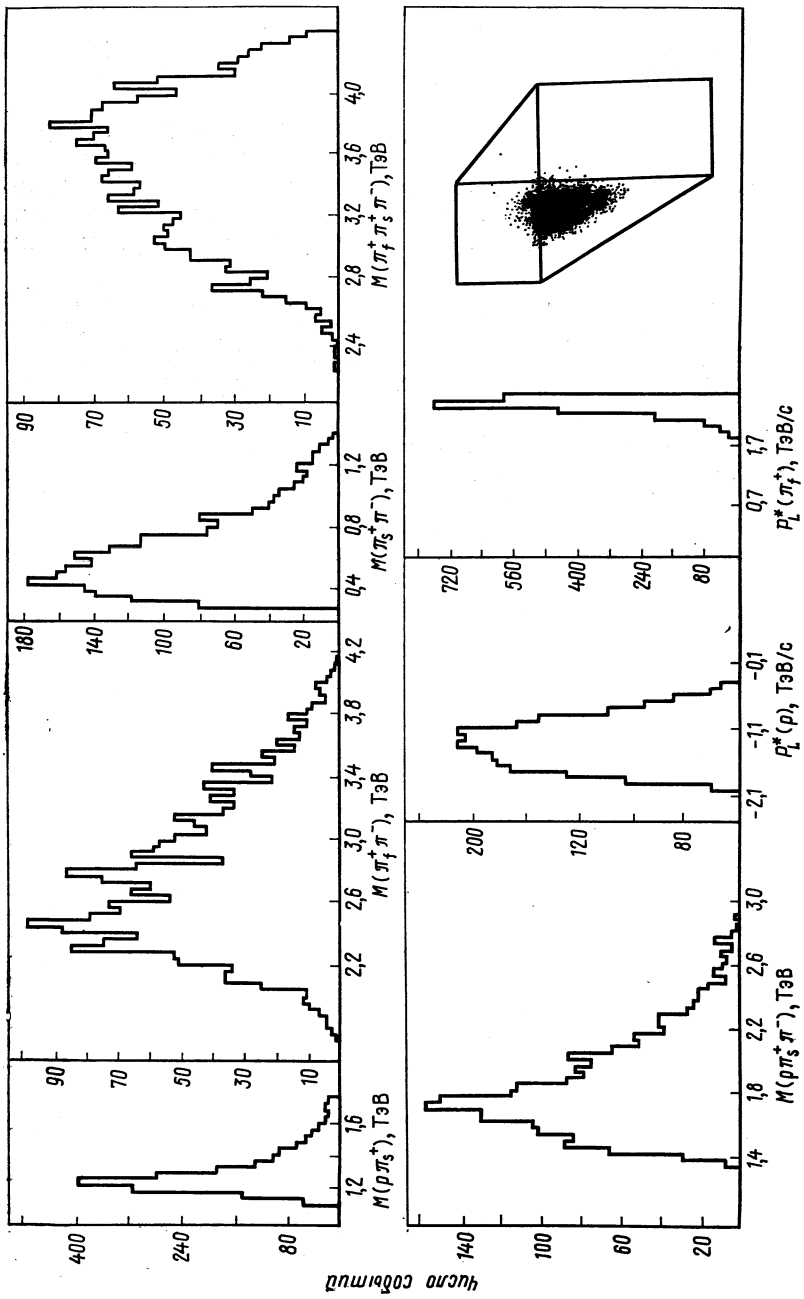


Рис. 4. Распределение эффективных масс и схема продольных импульсов, характеризующие дифракционную диссоциацию протона для кластера 5 в реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$ при $p_{lab} = 16 \text{ ГэВ/c}$ (20 168 событий)

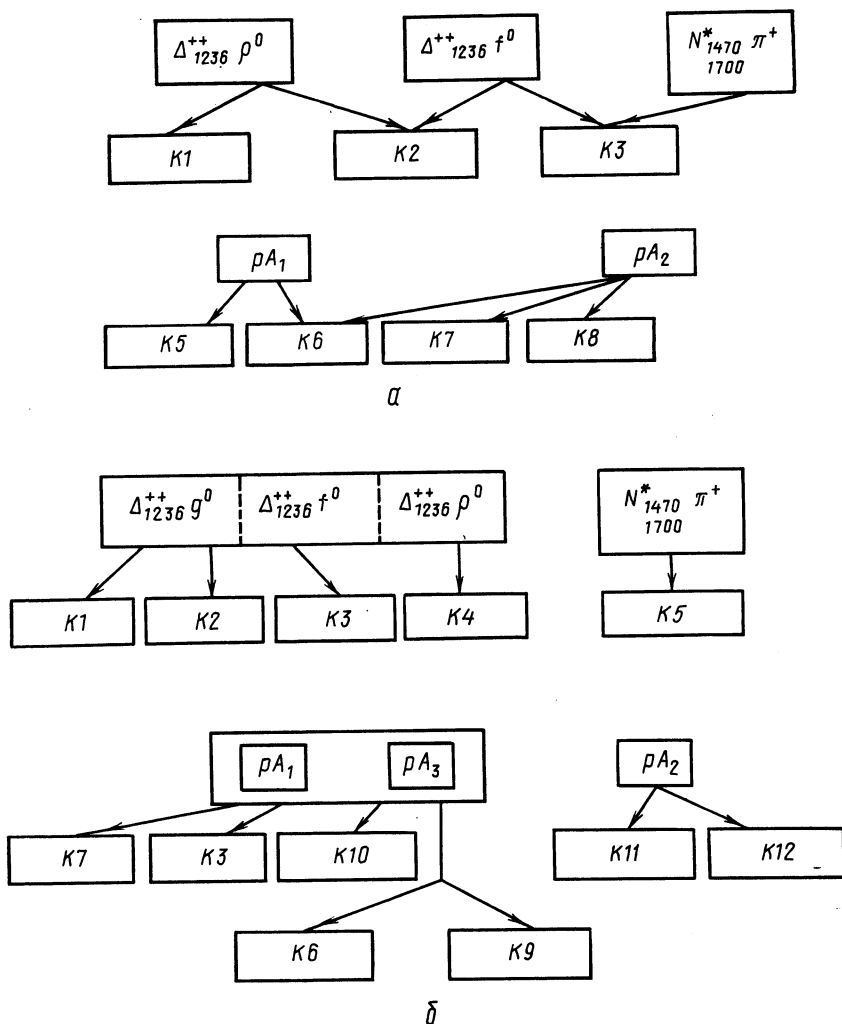


Рис. 5. Схема перекрытий разных подпроцессов при $p_{\text{лаб}} = 8$ ГэВ/с (а) и при $p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с (б):
 К1 — К12 — кластеры

зованы два набора переменных — тринадцать инвариантных масс:

$$\begin{aligned}
 & M(p\pi_1^+), M(p\pi_2^+), M(p\pi_3^+), M(p\pi_1^-), \\
 & M(p\pi_2^-), M(\pi_1^+\pi_2^+), M(\pi_1^+\pi_1^-), \\
 & M(\pi_1^+\pi_2^-), M(\pi_2^+\pi_1^-), M(\pi_2^+\pi_2^-), \\
 & M(\pi_3^+\pi_1^-), M(\pi_3^+\pi_2^-), M(\pi_1^-\pi_2^-);
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

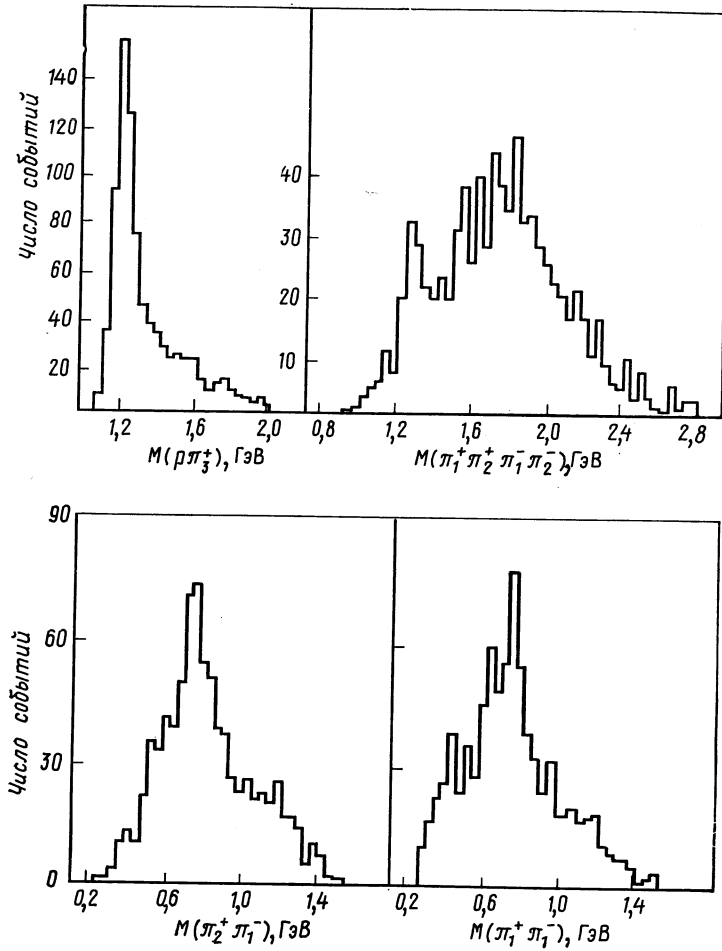


Рис. 6. Распределения эффективных масс, характеризующие рождение D -мезона (кластер 1) для реакции $\pi^+p \rightarrow p3\pi^+2\pi^-$ при $p_{\text{лаб}} = 16$ ГэВ/с

и пять независимых продольных импульсов в с. ц. м.:

$$p_L^*(p), p_L^*(\pi_1^+), p_L^*(\pi_2^+), p_L^*(\pi_3^+), p_L^*(\pi_1^-). \quad (7)$$

Из-за небольшого числа статистических данных предпочтителен выбор переменных (4). И в этом анализе один подпроцесс содержит различные кластеры, и наоборот. Разделение подпроцессов не такое четкое, как в случае четырех конечных частиц, но от него можно исходить в дальнейших исследованиях. На рис. 6—9 изобра-

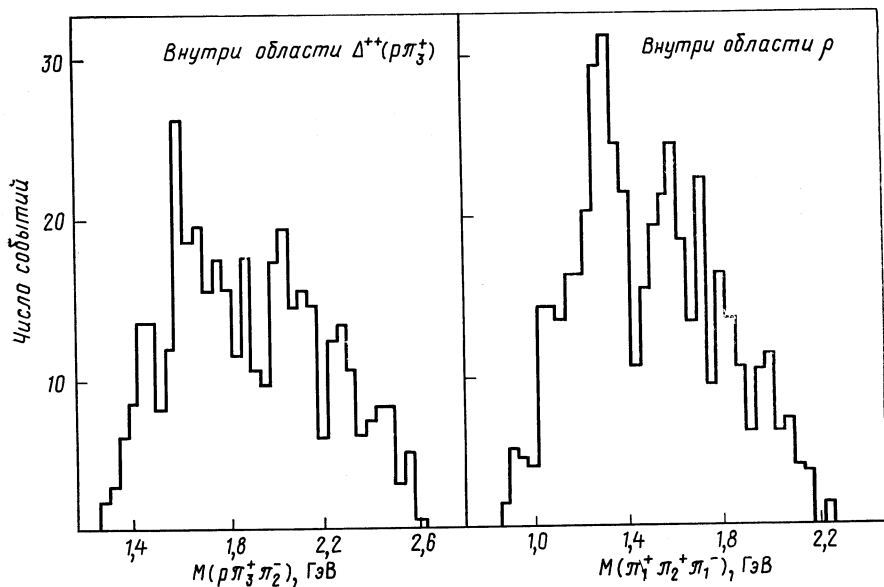


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для рождения системы N^*A_2 (кластер 14)

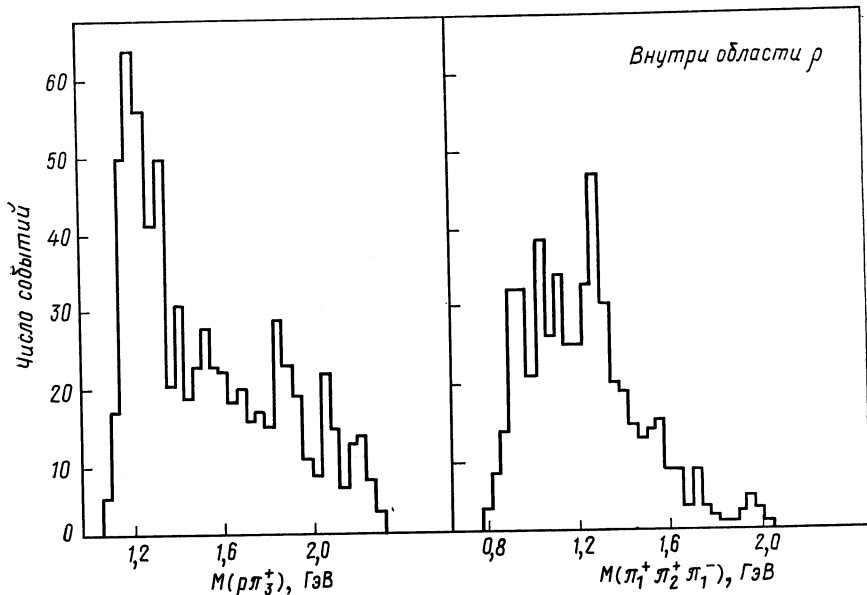


Рис. 8. То же, что на рис. 6, для рождения системы $\Delta^{++}A_2$ (кластер 8)

жено рождение D -мезона [39], (N^*A_2) , $(\Delta^{++}A_2)$ и двойной дифракционный вклад в реакции (3).

CLUSOV — эвристический кластерный алгоритм [40]. В результате работы с алгоритмом нахождения долин возникло желание построить алгоритм со следующими свойствами [40].

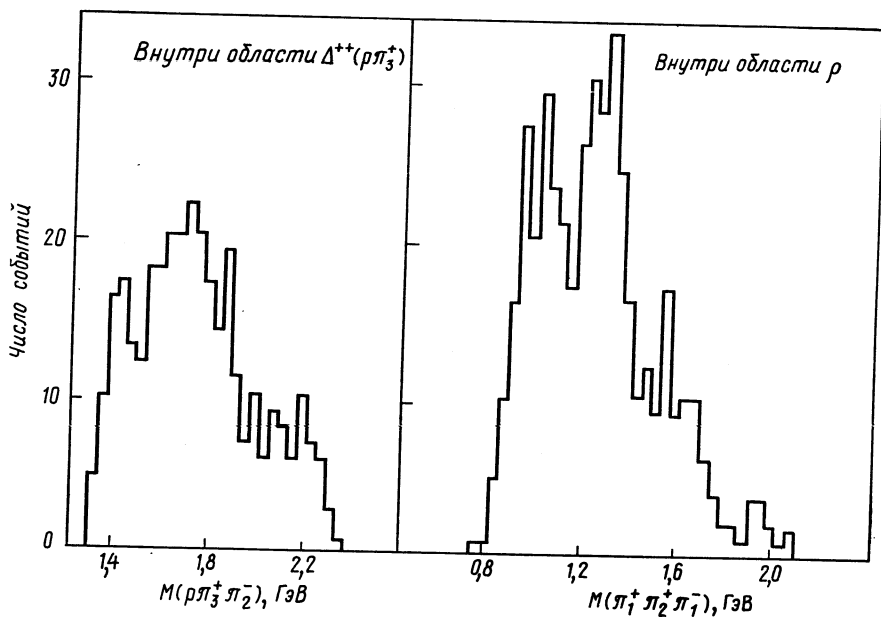


Рис. 9. То же, что на рис. 6, для двойной дифракционной диссоциации (кластер 12)

1. Число и положение максимумов плотности не должны быть известны заранее. Алгоритм должен быть пригоден и для переменного числа групп. Если при некоторой итерации две группы уже мало различаются, то надо их объединить; если одна группа имеет четкий минимум плотности, то надо ее разделить.

2. Алгоритм должен удовлетворять требованию: найденные кластеры должны иметь эллипсоидную форму любой ориентации (см., например, рис. 1). Это требование следует из подробных исследований трехчастичных конечных состояний с помощью обычных распределений (диаграмма Далица, призм-плот). Кроме того, разумно потребовать разделения двух длинных ступок разного направления, касающихся своими концами друг друга.

3. Алгоритм должен анализировать каналы с $10^4 \div 10^5$ событиями и с $5 \div 18$ переменными. Отсюда следуют еще два технических требования: объем вычислений не должен расти быстрее,

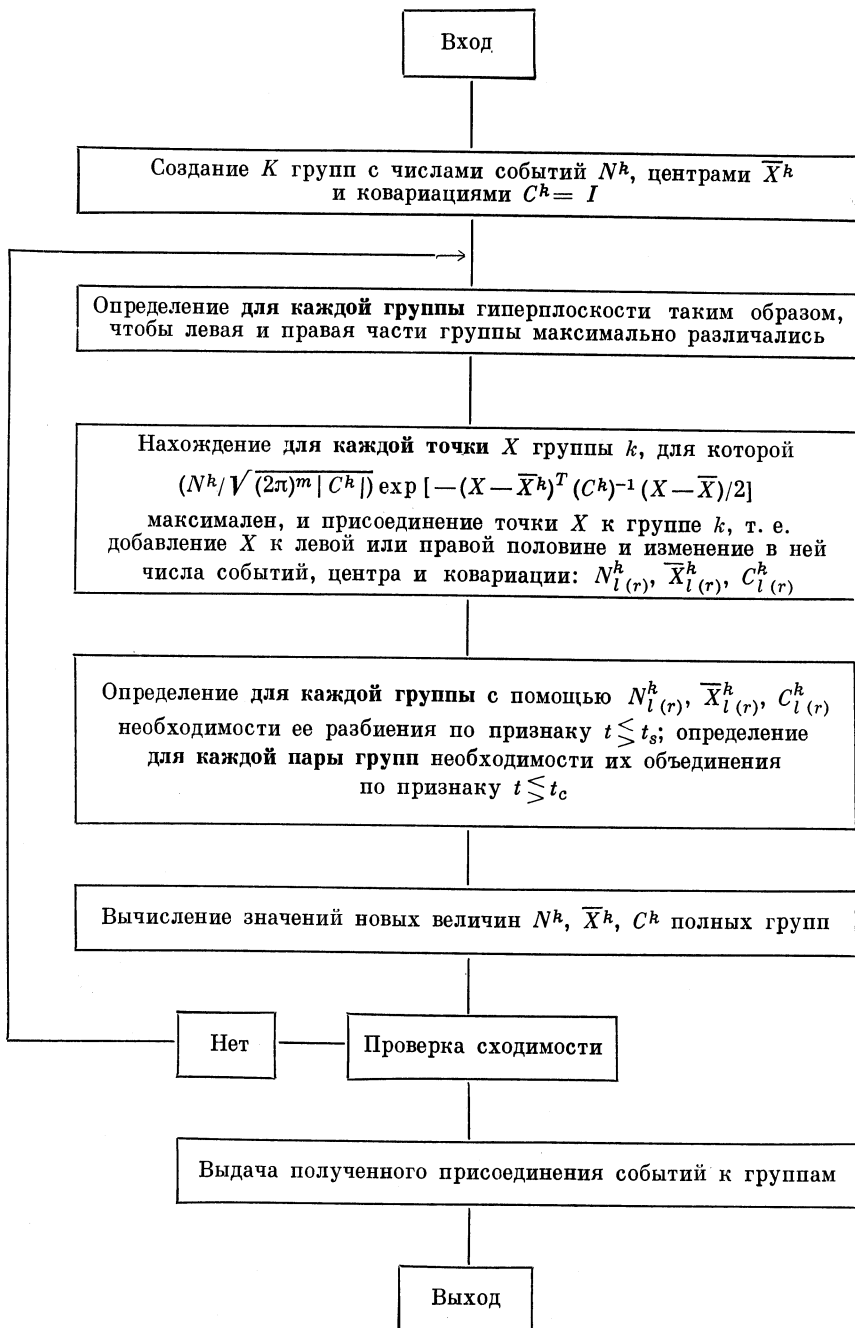


Рис. 10. Упрощенная рабочая схема кластерной программы CLUCOV

чем линейно с числом событий (поэтому отпадают алгоритмы, связывающие каждую точку с каждой другой); нельзя использовать более одного или двух раз в одном итерационном шаге кинематическую информацию о событиях (находящуюся, вообще говоря, во внешней памяти ЭВМ).

Алгоритм CLUCOV удовлетворяет этим условиям и является обобщением метода центра. Здесь кластер k характеризуется моментами нулевого, первого и второго порядков: N^k (содержание), \bar{X}^k (центр) и $C_{ij}^k = (X_i - \bar{X}_i^k)(X_j - \bar{X}_j^k)$ (ковариация). Для образования моментов учитывают точки m -й группы. Программа написана на языке FORTRAN IV и проверялась на ЭВМ БЭСМ-6, а также на CDC-7600.

Перед выполнением итерационного процесса требуется временное объединение точек в группы. Иначе говоря, требуются начальное группы. Для ковариации возьмем единичную матрицу. Начальные центры получаем следующим образом: случайное событие определяет первый центр; ищем следующее событие с расстоянием от всех уже найденных центров большим, чем постоянная R . Если найдется такое событие, то оно становится центром. Если не найдется, то предварительная процедура окончена.

Эта процедура обладает тем преимуществом, что все события, которые расположены на расстоянии, меньшем, чем R , относятся к одному начальному центру. Она была испытана на двумерных примерах. Оказалось, что алгоритм быстро сходится, если создается в 2—3 раза больше предварительных групп, чем предполагалось для исследуемого процесса.

Число групп K задается или предварительной процедурой, или последней итерацией. Первый шаг каждой итерации (рис. 10) состоит в том, чтобы найти для каждой группы гиперплоскость, разбивающую группу (по возможности) на сильно «отличающиеся» части. Для этого определяют (зависящее от памяти ЭВМ) соответствующее число единичных векторов, которые перпендикулярны к искомым гиперплоскостям. Гиперплоскости располагают так, чтобы они содержали центр группы и разделяли группу на левую и правую части, которые проецируются на единичный нормальный к гиперплоскости вектор. Определяют среднее $\bar{X}_{l(r)}^p$ и отклонение $\sigma_{l(r)}^p$ этих проекций. Затем для каждой гиперплоскости вычисляют t (рис. 11):

$$t = h_0 / \sqrt{h_1 h_2}^*, \quad (8)$$

* Рассматривались и другие формы величины t :

$$t = 2h_0 / (h_1 + h_2); \quad t = h_0 / \min(h_1, h_2);$$

$$t = h_0 / \max(h_1, h_2); \quad t = (h_0/2) (1/h_1 + 1/h_2).$$

В испытаниях алгоритма на искусственных событиях выбранная нами форма (8) оказалась наилучшей.

где

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h(\bar{X}_r^p); \quad h_2 = h(\bar{X}_l^p); \quad h_0 = \min h(X), \quad X \in [\bar{X}_l^p \bar{X}_r^p]; \\ h(X) &= \frac{N_r}{\sqrt{2\pi} \sigma_r^p} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \bar{X}_r^p}{\sigma_r^p} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{N_l}{\sqrt{2\pi} \sigma_l^p} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \bar{X}_l^p}{\sigma_l^p} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для каждой группы выбирают гиперплоскость с минимальным t . На следующем шаге итерации (см. рис. 10) каждое событие

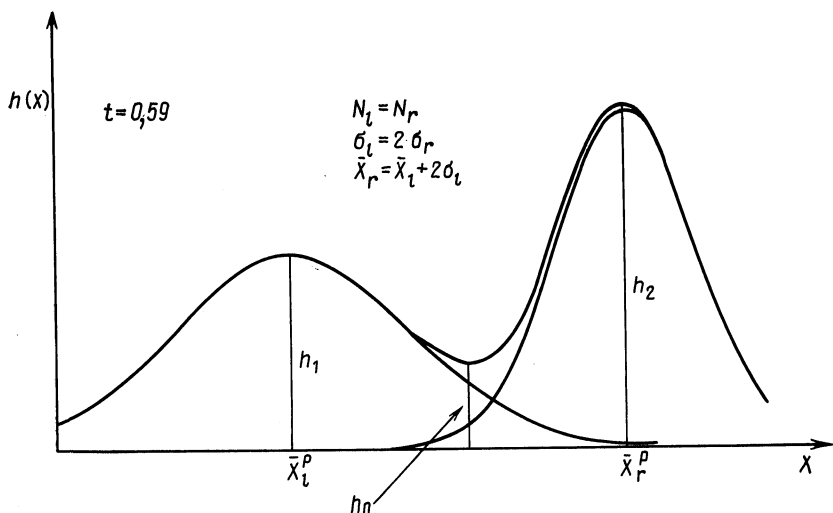


Рис. 11. Одномерный пример образования тестовой величины t в алгоритме CLUCOV

$n = 1, \dots, N$ присоединяют к одной из групп $k = 1, \dots, K$. Мерой принадлежности n -го события к k -й группе является

$$f_n^k = \left(N^k / \sqrt{(2\pi)^m |C^k|} \right) \exp \left[-(X^n - \bar{X}^k)^T (C^k)^{-1} (X^n - X^k) / 2 \right]. \quad (10)$$

Событие присоединяют к группе k^* , для которой

$$f_n^{k^*} = \max [f_n^1, \dots, f_n^K]. \quad (11)$$

В зависимости от расположения точки X^n справа или слева от содержащей центр гиперплоскости ее учитывают при опреде-

* Некоторые события отделены от всех групп дальше, чем на заданное отклонение. Чтобы предотвратить бессмысленные деформации групп, эти события ни к какой группе не присоединяют.

лении числа событий, центра и ковариации правой или левой подгруппы.

После присоединения всех точек к существующим группам для каждой группы вычисляют критическое значение t в соответствии с (8). Здесь $h(X)$ — m -мерное обобщение формулы (9).

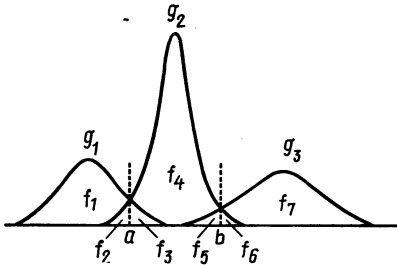


Рис. 12. Определение матрицы перекрытий O_{ik} (12) для трех групп, характеризуемых площадью под кривыми Гаусса

Группа событий подразделяется, если t меньше заданной t_c и правое (левое) содержание, центр и ковариация образуют характеристики новых групп в следующей итерации. При $t \geq t_c$ из $N_{l(r)}^h, \bar{X}_{l(r)}^h, C_{l(r)}^h$ определяют N^h, X^h, C^h целой группы для следующей итерации. Потом проверяют, существуют ли пары групп с превышающей заданное значение t_c критической величиной t . В этом случае группы рассматривают как «похожие» и соединяют содержание, центр и ковариацию перед следующей итерацией.

Итерации продолжают до тех пор, пока выполняются условия: не превышено заданное число итераций или никакая группа не разделилась; никакие группы не объединились и сумма абсолютных изменений содержаний групп меньше заданного значения.

После достижения сходимости выдается список присоединений событий к группам для дальнейших подробных исследований кластеров. Кроме того, печатается матрица перекрытий:

$$O_{ik} = \left(\sum_* f_m^k / \sum_* \sum_* f_m^k \right) \cdot 100. \tag{12}$$

Здесь символ «*» означает сложение всех событий m , присоединенных к i -й группе.

Рис. 12 объясняет эту матрицу на примере трех групп, изображенных в форме функций Гаусса. Для указанных трех групп матрица перекрытия имеет вид

$$O = \begin{Bmatrix} (f_1 + f_2)/F_1 & f_2/F_1 & 0 \\ f_3/F_2 & (f_3 + f_4 + f_5)/F_2 & f_5/F_2 \\ 0 & f_6/F_3 & (f_6 + f_7)/F_3 \end{Bmatrix} \cdot 100,$$

где $F_1 = f_1 + 2f_2$; $F_2 = f_4 + 2(f_3 + f_5)$; $F_3 = f_7 + 2f_6$.

Матрица перекрытий является мерой качества разделения групп. Она указывает и на возможные загрязнения групп.

Описанный алгоритм CLUCOV широко использован для двумерного случая. В результате доказано, что применение функций

Гаусса для описания распределений точек не является ограничением в работе с программой.

Из табл. 5 видно, как кластерный алгоритм разделил события. В той же таблице дан и результат интерактивного алгоритма

Таблица 5

Зависимость от типа кластера распределения числа событий*, генерированных методом Монте-Карло, для каналов реакций:
 $K^+p \rightarrow K^*$ (890) p , $K^+p \rightarrow K^*$ (1420) p , $K^+p \rightarrow \Delta$ (1236) K
 в реакции $K^+p \rightarrow pK^0 \pi^+$ при $p_{\text{лаб}} = 5$ ГэВ/с

500 монте-карло-событий				
Кластер	$K^*_{890} p$	$K^*_{1420} p$	Δ (1236) K	Σ
1	15	12	261	288
2	189	0	0	189
3	0	21	0	21
не присоеди- нены	0	0	2	2
Σ	204	33	263	500
2010 монте-карло-событий				
1	767	2	11	780
2	13	109	34	156
3	32	13	997	1042
не присоеди- нены	5	6	21	32
Σ	817	130	1063	2010

* Для первой совокупности данных применен алгоритм CLUCOV, для второй — интерактивная программа ЦЕРНа [20].

из [27]. Этот результат получен при пяти предварительных группах и после семи итераций. Решение стабильно для большого диапазона параметров t_s и t_c : $t_s = 0 \div 0,25$ и $t_c = 0,2 \div 0,55$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО АЛГОРИТМА CLUCOV

Кластерный алгоритм CLUCOV для реакций:

$$\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^-\pi^-, \quad p_{\text{лаб}} = 16 \text{ ГэВ/с}; \quad (13)$$

$$\pi^-p \rightarrow p\pi^+\pi^-\pi^-, \quad p_{\text{лаб}} = 16 \text{ ГэВ/с} \quad (14)$$

использован в целях систематического анализа этих реакций. Задача применения кластерной программы для реакций:

$$K^- p \rightarrow p K^- \pi^+ \pi^-, \quad p_{\text{лаб}} = 10 \text{ ГэВ/с}; \quad (15)$$

$$K^- p \rightarrow p K^0 \pi^- \pi^0, \quad p_{\text{лаб}} = 10 \text{ ГэВ/с} \quad (16)$$

состояла в выделении подпроцесса $K^- p \rightarrow K^* (890) \Delta (1236)$ (по возможности полно и чисто, что пока невозможно с помощью обычных методов) для получения информации о механизме рождения этих резонансов.

Применение алгоритма для реакций $\pi^\pm p \rightarrow p \pi^\pm \pi^+ \pi^-$ при 16 ГэВ/с [41]. Реакции (13) и (14) прекрасно подходят для применения алгоритма CLUCOV, так как имеется семь независимых кинематических переменных. Анализ будет уже многомерным, но число событий еще большее: 19178 событий для реакции (13) и 5166 событий для (14). Реакции эти исследованы и другими методами (призм-плот-анализ, анализ по продольным импульсам, метод максимального правдоподобия), что дает возможность сравнения результатов.

Необходимый шаг в каждом кластерном анализе — выбор кинематических переменных. Нужные для однозначного кинематического описания четырехчастичных реакций (13) и (14) семь переменных выбраны согласно следующим критериям [42—44]: лоренц-инвариантности описания; инвариантности относительно перестановок конечных частиц с точностью до линейного преобразования, не изменяющего кластерную структуру; инвариантности относительно перестановки частиц пучка и мишени.

Перечисленные критерии выполнены для переменных Янга. Подробное обсуждение и обобщение этих переменных изложено в Приложении 1. Выбираются шесть скалярных произведений 4-импульсов:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= (p_{\text{пуч}}, p_c), \quad i = 1, 2, 3; \\ q_i &= (p_{\text{миш}}, p_c), \quad i = 4, 5, 6, \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

где $c = p$, π_f^+ , π_s^+ для реакции (12) и $c = p$, π_f^- , π_s^+ для реакции (13) (индексы f и s обозначают π -мезон с большим и меньшим продольным импульсом в с. ц. м.). Седьмой переменной будет определитель Грама 4-импульсов конечных частиц

$$q_7 = \Delta_4(p_p, p_{\pi_f^+}, p_{\pi_s^\pm}, p_{\pi_f^\mp}). \quad (17b)$$

Вместе с общим описанием алгоритма необходимо объяснить и конкретное применение анализа. Изложенная в разд. 1 предварительная процедура была использована с $R = 5$ и $R = 4,5$ *.

* R является евклидовым расстоянием в пространстве q_1, \dots, q_7 (17) (4-импульсы измерены в гигаэлектронвольтах).

Это дало 84 и 63 предварительных групп в реакциях (13) и (14). Оказалось полезным иметь по возможности больше «посевных» точек и вместе с этим предварительных групп так, чтобы с большой вероятностью в каждой реальной группе располагалась посевная точка.

После предварительной процедуры были проведены некоторые итерационные шаги со всеми событиями. Уже вначале отделились некоторые кластеры. В качестве параметров разделения служили матрица перекрытий (12) и распределения масс, переданного 4-импульса, продольного импульса и углов распада. Потом разделяли и объединяли группы по параметру t (8). Для экономии вычислительного времени отделяли некоторые хорошо выделенные группы и продолжали анализ. На последнем этапе анализа эту же самую итерационную процедуру выполняли с полной статистикой, чтобы анализ не зависел от временного удаления выделенных групп.

Было получено двадцать два кластера для реакции (13) и семнадцать кластеров для (14). Для физической интерпретации групп необходимо установить соответствие с механизмами реакции. Физическая характеристика групп была получена с помощью одномерных и двумерных распределений для всех групп.

Ясные резонансные сигналы спектров и эффективных масс показывают, что $\sim 95\%$ событий содержат резонансы в конечном состоянии. Обнаруженные резонансы позволяют идентифицировать кластеры с подпроцессами, определяющими в дальнейшем названия для кластеров. Только три кластера реакции (13) и два кластера реакции (14) не содержали существенных сигналов резонансов. Один из кластеров реакции (13) характеризуется событиями с вылетающими вперед в с. ц. м. протонами. Аналогичного кандидата для барионного обмена не было найдено в реакции (14). В табл. 6 представлены для некоторых кластеров, связанных с дифракционной диссоциацией мишени, координаты центра и их отклонения в пространстве переменных Янга. Сравнительная их для π^+p и для π^-p реакций, найдем, что шесть из семи компонент отличаются в различных кластерах. Это подчеркивает необходимость и преимущества использования полной кинематической информации. Ясно, что в связи с малой массой N^* (1470) соответствующий подпроцесс близок к кинематической границе. Для определителя Грама q_7 (176), как седьмой компоненты, обнаруживается общая тенденция к росту $\langle q_7 \rangle$ с ростом массы рлл-системы.

Вполне естественно, что компонента $\langle q_2 \rangle$ для этих кластеров не растет: q_2 связан с передачей 4-импульса от мишени к дифракционной рлл-системе:

$$q_2 = m_\pi^2 - t/2.$$

Таблица 6

Зависимость положения центров кластеров дифракционных ($p\pi\pi$)-систем от их масс в реакциях $\pi^+p \rightarrow p\pi_f^+\pi_s^+\pi^-$ и $\pi^-p \rightarrow p\pi^+\pi_f^-\pi_s^-$ при 16 ГэВ/с*

Реакция	Число событий	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
$\pi^+p \rightarrow N_{1470}^*\pi_f^+$ ↳ $\Delta_{1236}^{++}{}^0\pi_s^-+$	1375	10,89	0,05	2,41	0,98	14,14	0,29	-0,04
		1,73	0,03	1,52	0,07	0,25	0,10	0,04
$\pi^-p \rightarrow N_{1470}^*\pi_f^-$ ↳ $\Delta_{1236}^{++}{}^0\pi_s^-+$	294	10,90	0,05	2,14	0,97	14,42	0,30	-0,04
		1,52	0,01	1,42	0,05	0,25	0,09	0,04
$\pi^+p \rightarrow N_{1700}^*\pi_f^+$ ↳ $\Delta_{1236}^{++}{}^0\pi_s^-+$	1595	9,44	0,11	2,44	1,13	13,80	0,38	-0,24
		2,18	0,07	1,54	0,18	0,30	0,17	0,24
$\pi^-p \rightarrow N_{1700}^*\pi_f^-$ ↳ $\Delta_{1236}^{++}{}^0\pi_s^-+$	620	9,44	0,11	2,49	1,14	13,98	0,35	-0,24
		2,33	0,09	1,58	0,20	0,35	0,15	0,28
$\pi^+p \rightarrow N_{2040}^*\pi_f^+$ ↳ $p\pi_s^+\pi^-$	676	7,50	0,14	3,14	1,49	13,19	0,64	-1,16
		2,24	0,10	2,10	0,38	0,38	0,34	1,05
$\pi^-p \rightarrow N_{2040}^*\pi_f^-$ ↳ $p\pi_s^+\pi^-$	217	9,02	0,14	2,58	1,27	13,32	0,66	-1,12
		2,39	0,11	1,77	0,29	0,44	0,33	1,11
$\pi^+p \rightarrow N_{2400}^*\pi_f^+$ ↳ $p\pi_s^+\pi^-$	398	8,49	0,15	3,88	1,46	11,81	0,92	-5,94
		2,38	0,10	2,35	0,38	0,90	0,49	5,17
$\pi^-p \rightarrow N_{2400}^*\pi_f^-$ ↳ $p\pi^+\pi_s^-$	94	5,50	0,09	4,88	1,86	12,77	0,66	-0,80
		2,05	0,05	2,88	0,48	0,41	0,37	0,82

* Верхняя строка — координаты центра кластера, нижняя — их отклонения.

Таблица 7

Сравнение сечений подпроцессов, найденных кластерным анализом, методом максимального правдоподобия [24] и призм-плот-анализом [25]

Каналы реакций $\pi^{\pm}p \rightarrow$	Сечение, мкбарн					
	Кластерный анализ		Метод максим- ального правдоподобия		Призм-плот-анализ	
	π^+p	π^-p	π^+p	π^-p	π^+p	π^-p
1. $A_1^{\pm}p$ $\rightarrow \rho^0\pi^{\pm}$	200±22	220±18	280±67	294±56	} 590±29	} 619±40
2. $A_2^{\pm}p$ $\rightarrow \rho^0\pi^{\pm}$	200±26	136±23	167±40	158±33		
3. $A_3^{\pm}p$ $\rightarrow f\pi^{\pm}, \rho^0\pi^{\pm}$	114±28	106±16	115±27	113±22		
4. $A_4^{\pm}p$ $\rightarrow \rho^0\pi^{\pm}, f\pi^{\pm}$	55±15	40±8	-	-		
5. $N_{1470}^{*+}\pi^{\pm}$ $\rightarrow \Delta_{1236}^{++}, \rho^0\pi^-+$	68±17	62±13	146±40	128±22	} 189±15	} 147±18
6. $N_{1700}^{*+}\pi^{\pm}$ $\rightarrow \Delta_{1236}^{++}, \rho^0\pi^-+$	115±18	128±15	106±27	117±22		
7. $N_{2040}^{*+}\pi^{\pm}$ $\rightarrow p\pi+\pi^-$	48±12	45±8	-	-	} 77±11	} 166±19
8. $N_{2400}^{*+}\pi^{\pm}$ $\rightarrow p\pi+\pi^-$	28 $^{+5}_{-13}$	20±6	-	-		
9. $\Delta_{1236}^{++}\rho^0$	160±20	-	180 $^{+40}_{-27}$	-	194±16	-
10. $\Delta_{1236}^{++}f$	108±17	-	73±13	-	98±12	-
11. $\Delta_{1236}^{++}g^0$	30±9	-	-	-	32±7	-
12. $\Delta_{1890}^{++}\rho^0$	40±10	-	-	-	67±10	-
13. $\Delta_{1236}^0\rho^0$	-	48±12	-	-	-	-
14. Δ_{1236}^0f	-	11±4	-	-	-	-
15. $N_{1520}^{*0}\rho^0$	-	48±10	-	-	-	-
16. $N_{1520}^{*0}f$	-	19±5	-	-	-	-
17. $\Delta_{1236}^{++}\pi^{\pm}\pi^-$	35±15	80±19	106±28	127±26	-	44±10
18. $\Delta_{1236}^0\pi^{\pm}\pi^+$	30±8	-	40±7	45±11	-	-
19. $N_{1520}^{*0}\pi^{\pm}\pi^+$	18±5	-	-	-	-	-
20. $p\pi^{\pm}\rho^0$	63±34	29±10	47±15	68±14	-	90±15
21. $p\pi^{\pm}f$	10±8	-	27±11	40±13	-	30±9
22. $p\pi^{\pm}g^0$	6±5	15±7	-	-	-	-
23. p_L^* (proton) > 0	6±1	-	-	-	-	-
24. $p\pi^{\pm}\pi^+\pi^-$	45±32	72±25	47±17	35±16	53±20	32±15

Выбираемые здесь дифракционные подпроцессы все обладают маленькими значениями t .

Сечения каналов реакции приведены в табл. 7. Для сравнения даны и сечения, полученные для этих реакций с помощью метода максимального правдоподобия [45] и призм-плот-метода [46, 47].

Перекрытия двух-трех кластеров требуют введения поправок для пяти сечений. Эти перекрытия проявляются в виде резонансных сигналов в спектрах инвариантных масс, которые не обнаружены в эксперименте.

Сечение для процессов $\pi^+p \rightarrow pA_3^+$ и $\pi^+p \rightarrow pA_2^+$ на (11 ± 3) мкбарн изменено в соответствии с видимым в A_3 сигналом от A_3^* (рис. 13).

Найден сигнал ρ^0 с сечением (15 ± 4) мкбарн в спектре масс кластера N^* (1470), имеющего четкий сигнал Δ^{++} (1236) в спектре масс $p\pi_s^+$. Поэтому сделана такая же поправка сечений для подпроцессов N^* (1470) π , Δ^{++} (1236) ρ и Δ^{++} (1236) f .

Матрицы перекрытий (12) реакций (13) и (14) (табл. 8, 9) дают представление о перекрытиях кластеров в семимерном пространстве переменных Янга. Обнаружено удовлетворительное разделение кластеров.

Для оценки полных ошибок сечений в кластерных анализах необходимо рассмотреть, кроме статистических ошибок, и ошибки, связанные с остаточным загрязнением и неправильным присоединением точек к кластерам. Для оценки этой части ошибки мы определяли изменение присоединения в результате некоторых добавочных итераций кластерного алгоритма. Представленные нами ошибки содержат обе части. Сравнивая сечения процессов дифракционной диссоциации (процессы 1 и 3—8 в табл. 7) π^+p -эксперимента с соответствующим процессом π^-p -эксперимента, находим, что они хорошо согласуются. Это справедливо и для сечений, полученных другими методами. Полное сечение дифракционной диссоциации пучка и мишени совпадает для всех трех приведенных методов.

Результаты для A -мезонов требуют более подробного обсуждения. В [48] проведен анализ парциальных волн 3π -системы малой массы, в которой состояния A_1^+ , A_2^+ , A_3^+ описываются парциальными волнами со спином и четностью: $J^P = 1^+, 2^+ \text{ и } 2^-$. Обнаружены и сильные интерференции. Однако интерференции не входят в формализм кластерного анализа. Найденные кластеры имеют максимумы плотности в фазовом пространстве. Если некоторые элементы матрицы перекрытий существенно отличаются от нуля, то это может быть следствием интерференции соответствующих подпроцессов. Нельзя, однако, брать значение элементов матрицы перекрытий в качестве меры для интерференции.

* Ошибка в выборе фона не включена в ошибку сечения.

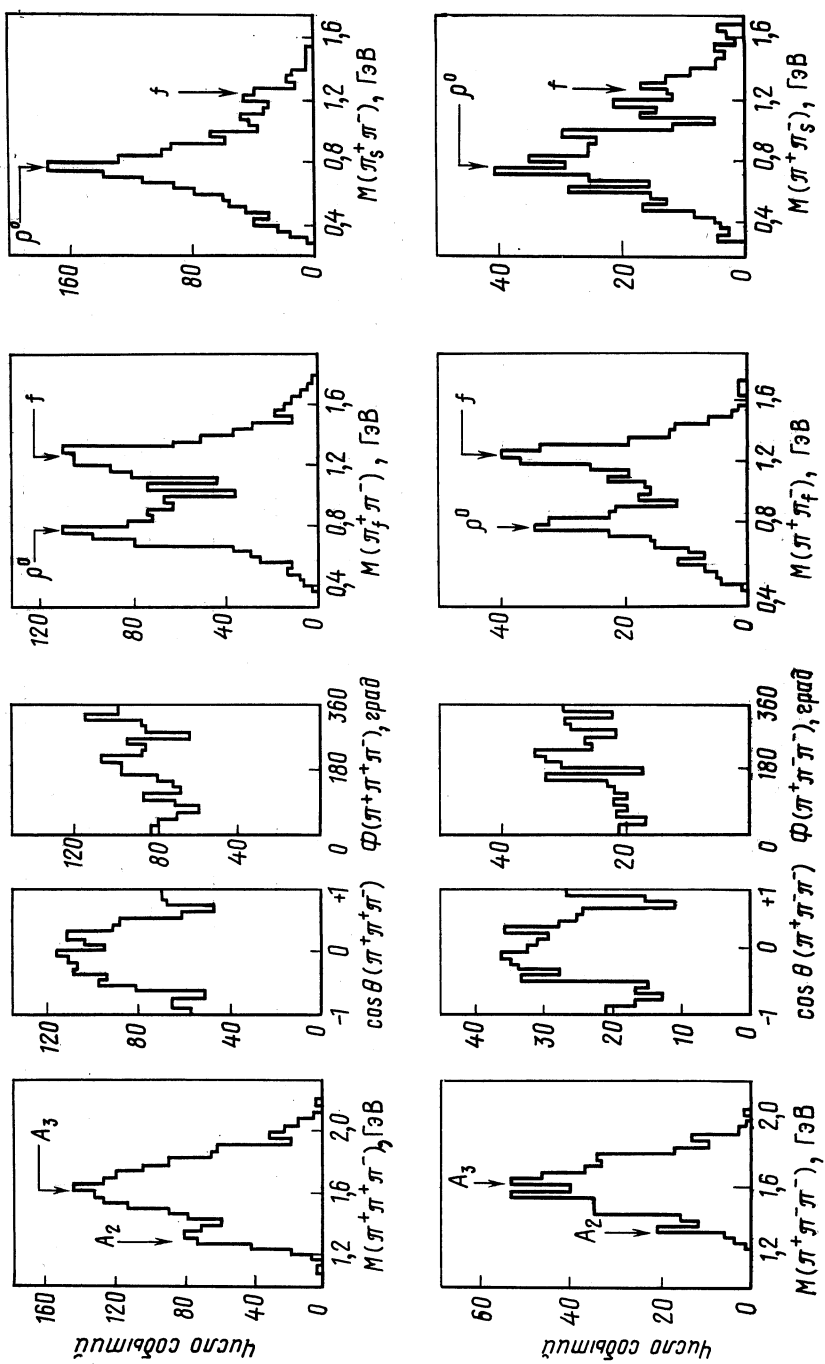


Рис. 13. Распределения эффективных масс и углов распада, характеризующие каналы $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho A_2^\pm$ в реакции $\pi^+\pi^- p \rightarrow \rho A_2^\pm$ при $P_{\text{lab}} = 16$ ГэВ/с

Матрица перекрытий $O_{kk'}$ (12) для кластеров в

$p\pi^+\pi^+\pi^-$											
$p\pi^+\pi^+\pi^-$											
p_L^* (proton) < 0											
g^0											
f											
ρ^0				1	1						
N^{*0} (1520)				1	1						2
Δ^0 (1236)									3	1	
Δ^{++} (1236)											1
Δ^{++} (1890) ρ^0											
Δ^{++} (1236) g^0											
Δ^{++} (1236) f				1				1			
Δ^{++} (1236) ρ^0							1				
" N^{**} (2400)"											91
N^{**} (2040)										91	2
N^{**} (1700)								94	1		
N^{**} (1470)							97	1			
A_4^+							88				
A_3^+				1		84	8				
A_2^+			1	92	5						
A_1^+			97	2							
A_1^+	99			2							
	A_1^+		A_1^+	A_2^+	A_3^+	A^{++}	N^{**} (1470)	N^{**} (1700)	N^{**} (2040)	" N^{**} (2400)"	

С помощью кластерного анализа можно четко разделить два соседних кластера, даже если имеют место сильные интерференции соответствующих подпроцессов. Анализ парциальных волн дает для 1^+ -волны сечение (333 ± 38) , для 2^+ -волны — (48 ± 14) и для 2^- -волны — (119 ± 25) мкбарн.

Сравнение, проведенное в табл. 7, показывает, что данные для трех методов хорошо согласуются лишь для рождения A_3 , а для сильно интерферирующих волн A_1 и A_2 — только для их суммы.

Для недифракционных процессов (см. табл. 7) сечения, получаемые разными методами, хорошо согласуются. Отличия объясняются тем, что в ранних анализах [46—48] не были учтены некоторые подпроцессы. Однако введение этих подпроцессов на начальной стадии анализа не позволяет найти все подпроцессы малого сечения. Возможный обмен барионами [кластер 23 реакции (13)] тоже не был учтен.

Из закона сохранения изоспина следует $\sigma(\pi^+p \rightarrow \Delta^{++})/\sigma(\pi^-p \rightarrow \Delta^0) = 9/1$. Из табл. 7 видно, что это отношение выполнено для $\pi p \rightarrow \Delta f$. Однако сечение для процесса $\pi^-p \rightarrow \Delta^0(1236)\rho^0$ в два раза больше, чем ожидалось. Нельзя забывать, что этот процесс не был найден другими методами. Для подпроцессов $\pi^-p \rightarrow \Delta^0(1236)g^0$ и $\pi^-p \rightarrow \Delta^0(1890)\rho^0$ ожидалось сечение ~ 4 мкбарн. Отсюда можно сделать вывод, что в рассмотренном нами канале с 5116 событиями, имеющими сечение 1,08 мбарн, предел детектирования для кластерного анализа приблизительно 4 мкбарн. Этим можно объяснить отсутствие в реакции (14) группы барионного обмена, найденной в реакции (13). Рассмотрим некоторые особенно интересные кластеры. Кроме распределений эффективных масс, на приводимых ниже рисунках изображены и распределения углов распада в джексоновской системе.

Для $p\pi\pi$ - и 3π -систем ось координатной системы z направлена вдоль нормали плоскости распада, а для $p\pi$ - и $\pi\pi$ -систем — вдоль направления протона и π -мезона с отрицательным зарядом пучка.

Реакции $\pi^\pm p \rightarrow pA_3^\pm$. Перекрывание каналов $\pi^+p \rightarrow pA_3^+$ и $\pi^+p \rightarrow pA_2^+$ рассмотрено ранее (см. рис. 13). Особый интерес представляет наличие четкого сигнала ρ^0 -мезона с f -мезоном в обоих распределениях масс ($\pi^+\pi^-$). Сигнал ρ^0 не объясняется перекрытием с pA_2^+ . Это подкрепляет утверждение [50], что A_3 распадается и по каналу $A_3^\pm \rightarrow \rho^0\pi^\pm$. Дальнейшее указание на этот распад получено при анализе парциальных волн реакции (13) [26].

Реакция $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}(1236)\rho^0$ (рис. 14). Чтобы оценить число подпроцессов, полученных кластерным анализом, на рис. 14 показаны некоторые свойства того кластера, который мы однозначно отождествляем с этой реакцией, подробно изученной в [49]. Спектры масс $M(p\pi_3^+)$ и $M(\pi_3^+\pi^-)$ имеют четкие сигналы резонансов $\Delta^{++}(1236)$ и $\rho^0(765)$ (см. рис. 14).

Асимметрию распределения по углу распада $\cos \theta (\pi_f^+ \pi^-)$ можно объяснить интерференцией между рождением ρ^0 с фоном

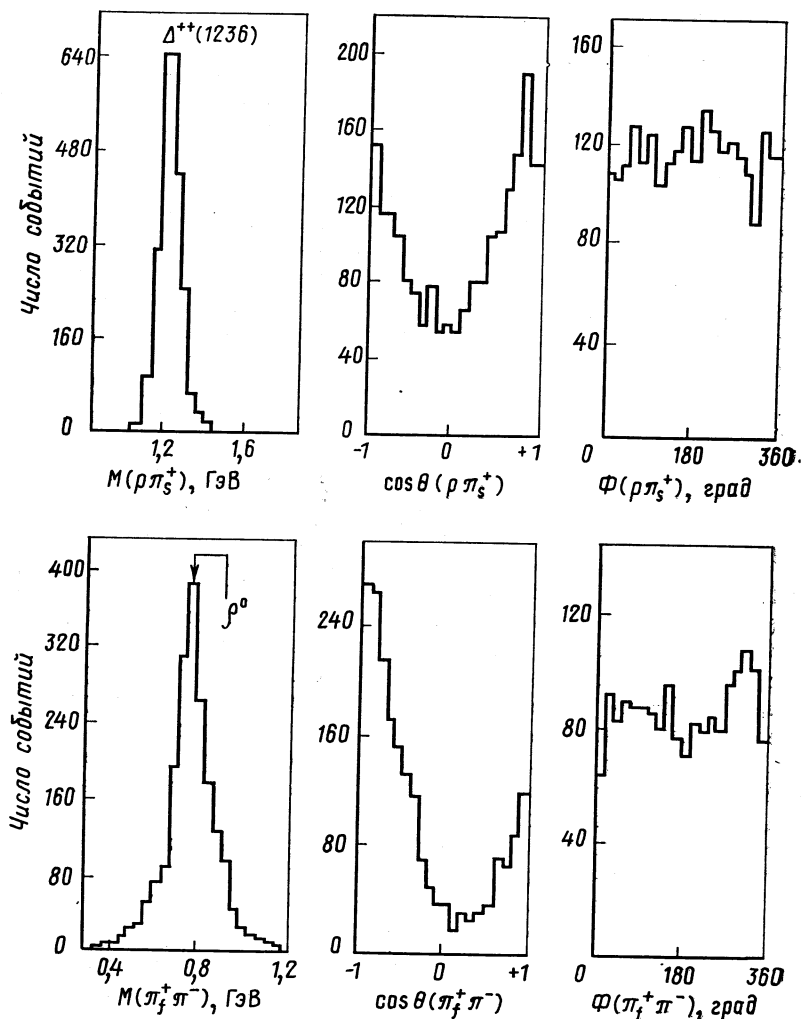


Рис. 14. То же, что на рис. 13, для канала $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}(1236) \rho^0$ в реакции $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^-$

s-волны. Сечение этого подпроцесса хорошо согласуется со значениями, полученными другими методами (см. табл. 7) [49].

Реакции $\pi^\pm p \rightarrow p A_4^\pm(1900)$ (рис. 15). Обнаружено два канала распада $A_4(1900)$. Распад $A_4(1900) \rightarrow p \rho^0$ обнаружен в [46].

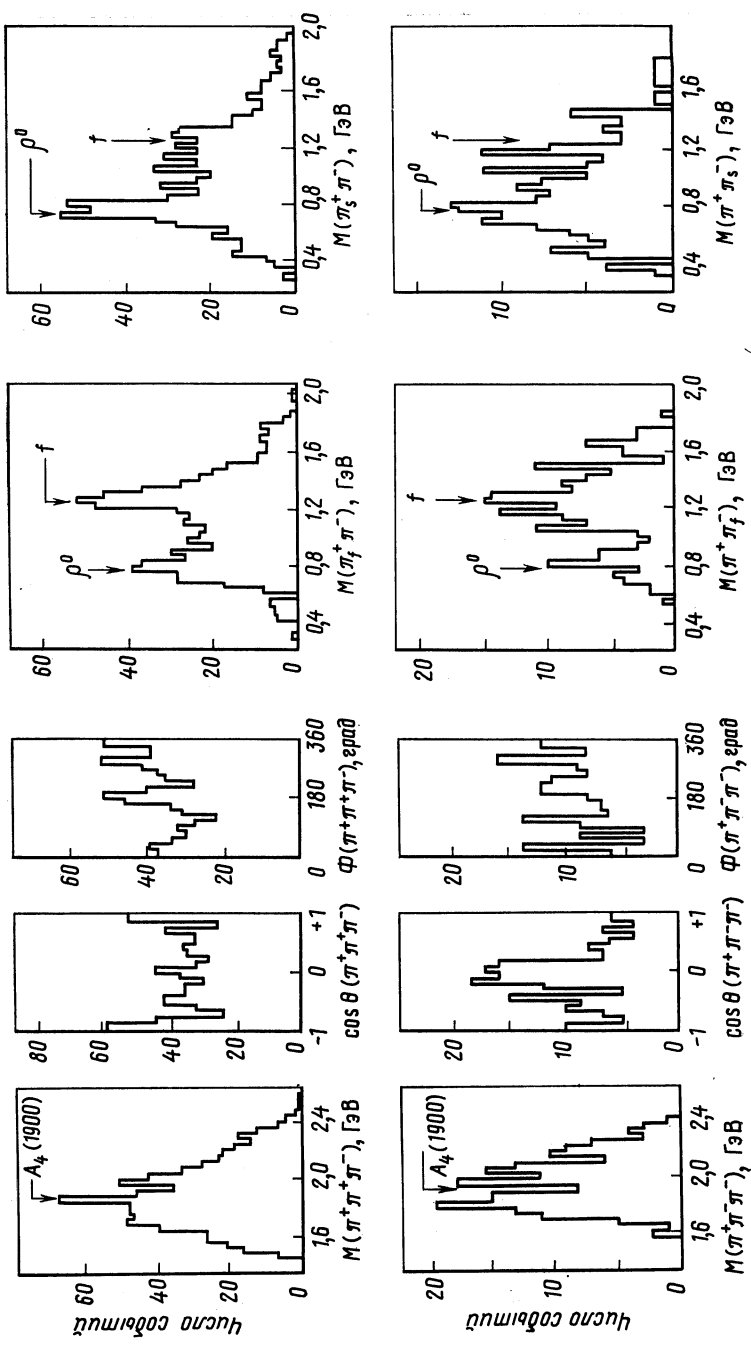


Рис. 15. То же, что на рис. 13, для каналов $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho A_4^\pm$

Мы нашли распад $A_4(1900) \rightarrow f\pi$. Распад $A_4 \rightarrow g^0\pi$, который был указан для 3π -системы, в этом диапазоне массы не обнаружен [51].

Реакции $\pi^\pm p \rightarrow N^(1700)\pi^\pm$* (рис. 16). Для дифракционной системы $N^*(1700)$, как и для подпроцесса $\pi^\pm p \rightarrow N^*(1470)\pi^\pm$, наблюдается сигнал $\Delta^{++}(1236)$ в спектре массы $M(p\pi_\pm^+)$. Из сохранения изоспина следует отношение $\sigma(\Delta^{++}\pi^-)/\sigma(\Delta^0\pi^-) = 9/1$ для распадов $N^*(1700) \rightarrow \Delta\pi$. Экспериментальные распределения масс $p\pi$ -системы этому не противоречат.

Реакции $\pi^\pm p \rightarrow N^(2040)\pi^\pm$ и $\pi^\pm \rightarrow N^*(2400)\pi^\pm$* (рис. 17). Кластерный анализ дал две относительно маленькие группы (см. табл. 6), характеризующиеся четким сигналом при больших массах $p\pi$ -системы. Рождение $\Delta^{++}(1236)$ не обнаружено. Такие сигналы пока не обнаружены в распределениях масс $p\pi$ -системы [52]. Аппроксимация этих сигналов функцией Брайта — Вигнера дает для масс и ширины следующие значения: $M_1 = (2,02 \pm 0,03)$, $\Gamma_1 = (0,5 \pm 0,06)$, $M_2 = (2,38 \pm 0,06)$, $\Gamma_2 = (0,5 \pm 0,15)$ ГэВ.

Эти сигналы были найдены в реакциях (13) и (14), что подтверждает гипотезу существования состояний $N^*(2040)$ и $N^*(2400)$. Из-за маленькой статистической значимости этих групп событий требуется сравнение свойств указанных кластеров с другими.

Изучение центров Q_i этих групп (см. табл. 6) позволяет рассмотреть системы $N^*(2040)$ и $N^*(2400)$ как члены серии дифракционных систем $N^*(1470)$ и $N^*(1700)$. Аргументом для такой интерпретации служит равенство соответствующих сечений реакций (13) и (14) (см. табл. 7).

Спектры масс 3π этих кластеров имеют очень высокий порог, что запрещает интерпретацию кластеров $N^*(2040)$ и $N^*(2400)$ как кинематическое отражение интерференционных эффектов в трехпионной системе. Из распределения джексоновского угла $\cos\theta_{GF}$ (см. рис. 17) можно заключить, что кластерный анализ хотя и позволяет детектирование этих подпроцессов малого сечения, но не в каждом случае выделяет полную и чистую группу событий.

Реакции $\pi^\pm p \rightarrow \Delta^{++}(1236)f$ (рис. 18). Для π^+p -реакций получают чистые резонансные сигналы в соответствующих спектрах масс. Распределения углов распада также имеют ожидаемую форму. Для π^-p -реакций из-за малого сечения нет такой четкой картины.

Реакция $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}(1890)\rho^0$ (рис. 19). И здесь обнаружены четкие резонансные сигналы в соответствующих спектрах масс. Не удалось найти реакцию $\pi^-p \rightarrow \Delta^0(1890)\rho^0$.

Применение кластерного анализа к реакциям $K^-p \rightarrow pK^0\pi^\pm\bar{p}$ при 10 ГэВ/с [53]. При изучении двойных резонансных реак-

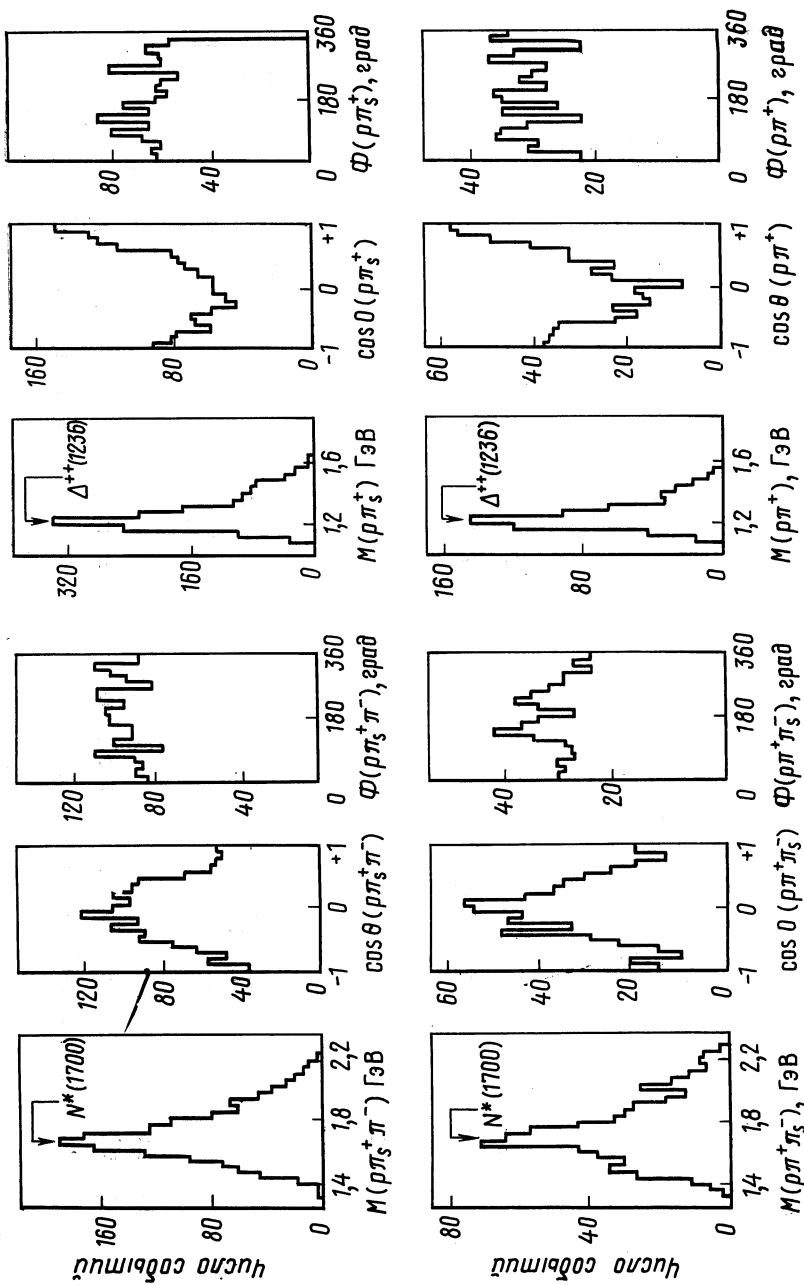


Рис. 16. То же, что на рис. 13, для каналов $\pi^+\pi^- \rightarrow N^*(1700)$ и $\Delta^{**}(1236)$.

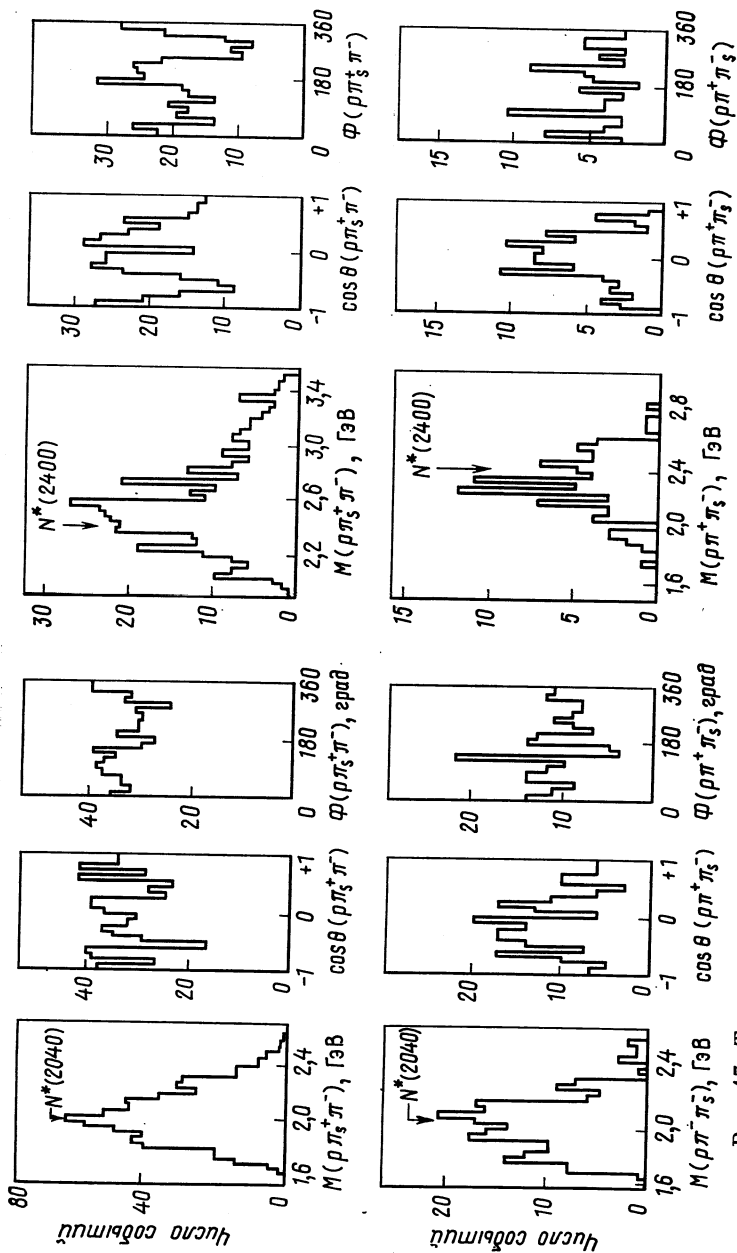


Рис. 17. То же, что на рис. 13, для каналов $\pi^+\pi^- \rightarrow N^{*+}(2040)\pi^\pm$ и $\pi^+\pi^- \rightarrow N^{*+}(2400)\pi^\pm$

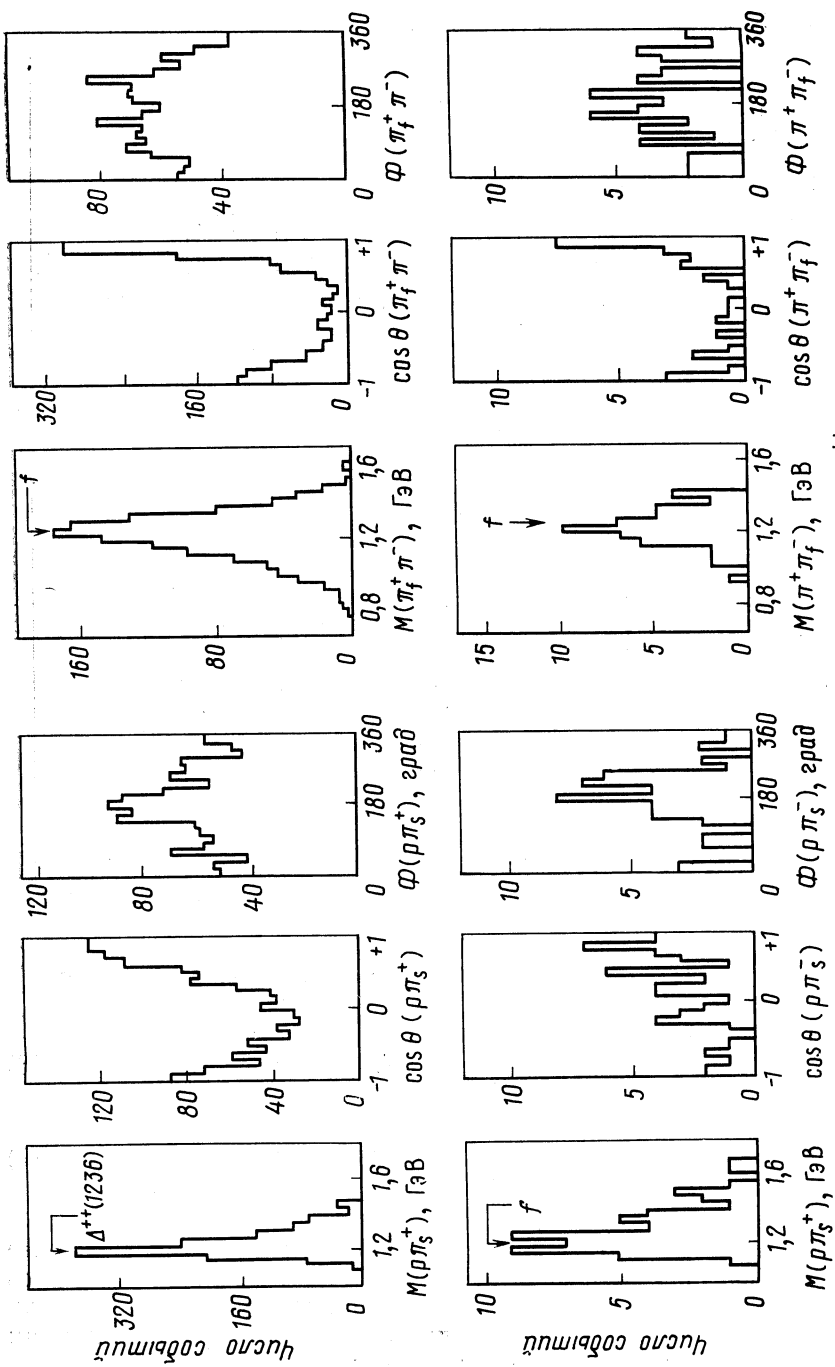


Рис. 18. То же, что на рис. 13, для каналов $\pi^+\pi^- \rightarrow \Delta^{++}(1236) f$

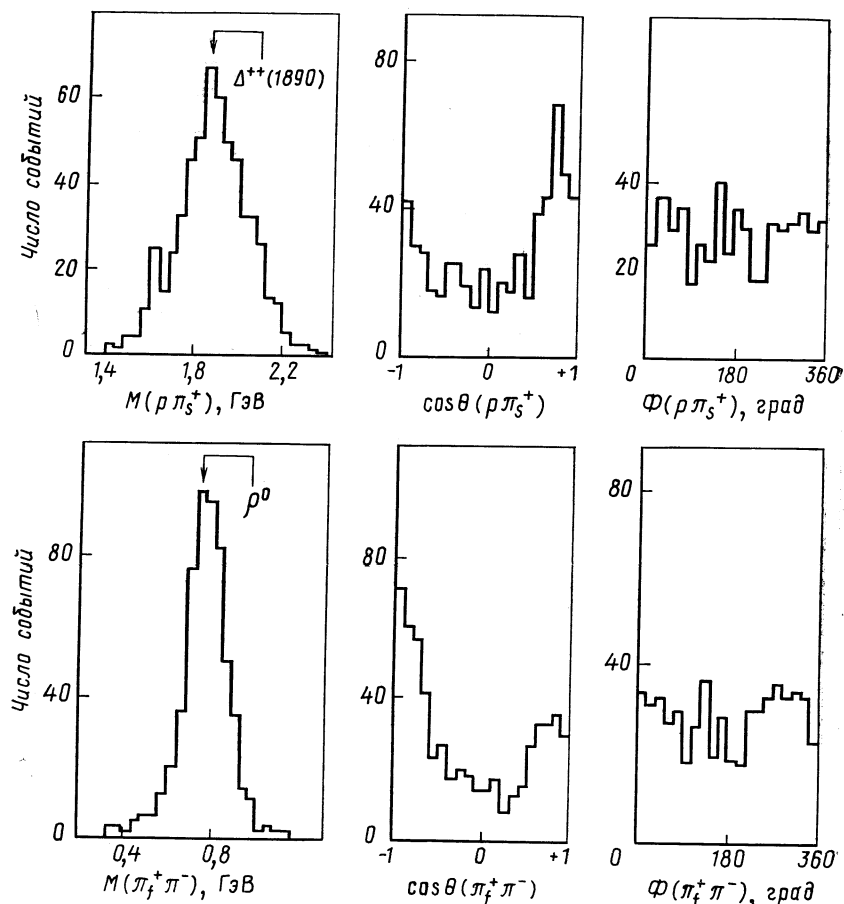


Рис. 19. То же, что на рис. 13, для канала $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}(1890)\rho^0$

ций [54—58]:

$$K^-p \rightarrow \bar{K}^{*0}(890)\Delta^0(1236); \quad (18)$$

$$K^- \pi^+ \leftarrow \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \rightarrow \rho\pi^-$$

$$K^-p \rightarrow K^{*-}(890)\Delta^+(1236) \quad (19)$$

$$\bar{K}^0\pi^- \leftarrow \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \rightarrow \rho\pi^0$$

столкнулись со следующими трудностями: не были получены чистые сигналы резонансов K^* (890) и Δ (1236); оставались загрязнения от дифракционной диссоциации частиц пучка или мишени; нарушались требования симметрии к распределениям углов распада исследуемых резонансов.

Поэтому пытались выделить реакции (18) и (19) при 10 ГэВ/с с помощью кластерного анализа. Полученные сечения реакций и числа событий:

$$K^-p \rightarrow pK^- \pi^+ \pi^-, \quad \sigma = 845 \pm 20 \text{ мкбарн}, \quad 10074 \text{ событий};$$

$$K^-p \rightarrow p\bar{K}^0 \pi^- \pi^0, \quad \sigma = 652 \pm 5 \text{ мкбарн}, \quad 2642 \text{ событий}.$$

Выбраны переменные Янга как полная система независимых кинематических переменных.

Свойства кластеров K^ , Δ .* Изучим полноту и чистоту полученных таким образом групп событий.

Распределения масс $K\pi$ и $p\pi$ обоих кластеров дают четкие сигналы K^* и Δ (рис. 20). Во всех других распределениях масс, включая спектры $p\pi$ и $K\pi$, нет никаких симптомов загрязнений.

Сохранение четности при сильном распаде K^* - и Δ -резонансов дает необходимое условие для чистоты и полноты групп событий:

$$\langle \text{Im } Y_L^M \rangle = 0 \quad \text{для всех } L \text{ и } M.$$

Здесь

$$\langle \text{Im } Y_L^M \rangle = \int W(\cos \theta, \Phi) Y_L^M(\cos \theta, \Phi) d\Omega$$

и $W(\cos \theta, \Phi)$ — распределение углов распада, для которого сохранение четности требует [59]:

$$W \cos(\theta, \Phi) = W(\cos \theta, -\Phi); \quad W(\cos \theta, \Phi) = W(-\cos \theta, \Phi + \pi).$$

Определим χ^2 для проверки гипотезы сохранения четности для групп событий:

$$\chi^2 = \sum_{L=1}^{L_{\text{макс}}} \sum_{M=0}^L \left[\frac{\langle \text{Im } Y_L^M \rangle}{\Delta(\text{Im } Y_L^M)} \right]^2.$$

Предполагается, что моменты $\langle \text{Im } Y_L^M \rangle$ независимы и распределены по закону Гаусса с ошибкой $\Delta(\text{Im } Y_L^M)$. При $L_{\text{макс}} = 4$ (и, следовательно, девяти степенях свободы) получаем значения для χ^2 , представленные в табл. 10, откуда следует, что можно принимать нашу гипотезу.

Распределения масс ($K\pi$) и ($p\pi$) аппроксимировались функциями Брайта — Вигнера (см. рис. 20).

В табл. 11 приведены полученные таким образом число событий и сечения. Из сохранения изоспина в обеих вершинах получаем

$$\sigma[\bar{K}^{*0}(K^- \pi^+) \Delta^0(p\pi^-)] / \sigma[K^{*-}(\bar{K}^0 \pi^-) \Delta^+(p\pi^0)] = 1/2.$$

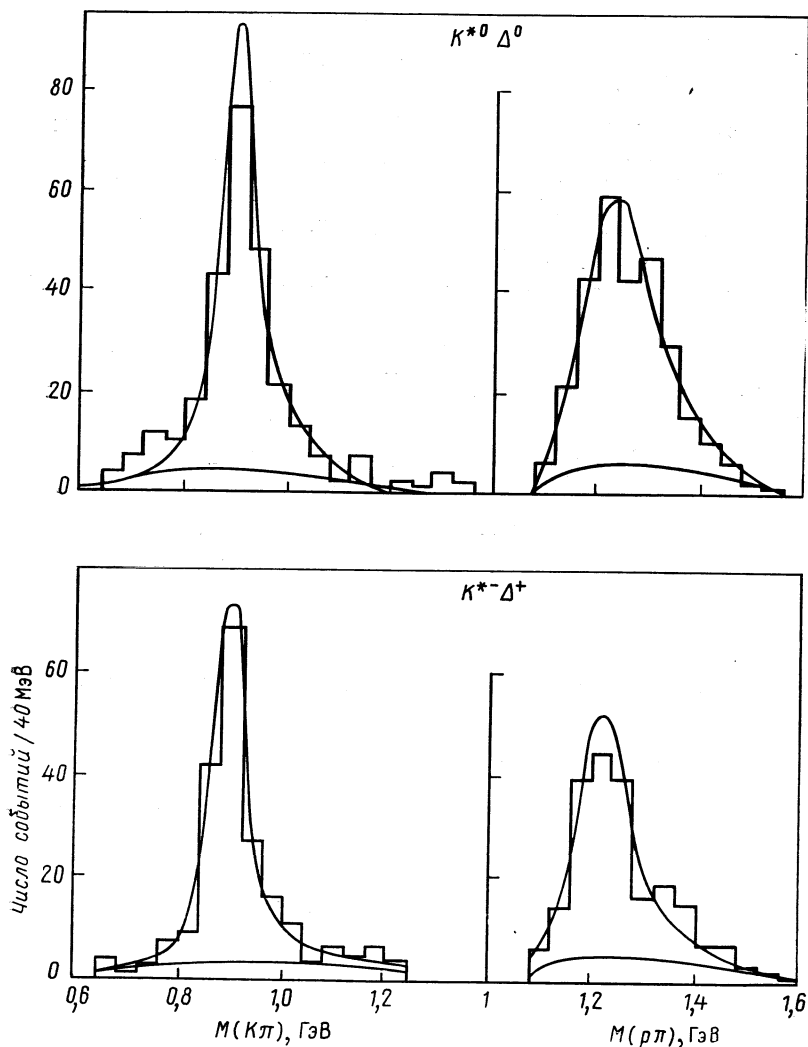


Рис. 20. Распределения эффективных масс для каналов $K^-p \rightarrow K^{*0} \Delta^0$ (1890) Δ^0 (1236) в реакции $K^-p \rightarrow p K^{*0} \pi^0 \pi^-$ при $p_{\text{лаб}} = 10$ ГэВ/с

Значения сечений в табл. 11 находятся в хорошем согласии с этим отношением.

Мы использовали метод интервалов масс [60] для всех событий, не содержащихся в кластерах с конечным состоянием $K^* \Delta$; получили верхнюю границу потерянных событий: 40 для реакции

(18) и 25 для реакции (19). Внутри этих пределов кластеры должны быть полные.

Мерой систематической ошибки выделения являются элементы спиновой матрицы плотности. Определяем комбинации элементов матрицы плотности:

$$\rho^+ = \rho^{11} + \rho^{1-1};$$

$$\rho^- = \rho^{00} + \rho^{11} - \rho^{1-1}.$$

Можно доказать [61], что эти комбинации не зависят от выбора оси квантования, так что они должны совпадать в спиральной (*s*-канал) и джексоновской (*t*-канал) системах. На рис. 21 изображена зависимость ρ^+ от передачи 4-импульса *t*. При больших $|t|$ элементы матрицы плотности не совпадают в обеих системах. Отсюда

следует, что полная идентификация кластеров с процессом $K^-p \rightarrow K^*\Delta$ невозможна. Разница возникает при больших $|t|$; ρ^+ и ρ^- соответствуют части сечения, падающей экспоненциально с *t*. Поэтому несовпадение касается только малой части событий, а интегральные условия могут быть выполнены.

Таблица 10

Проверка гипотезы сохранения четности для кластеров, содержащих реакции $K^-p \rightarrow \bar{K}^{*0}\Delta^0$ и $K^-p \rightarrow K^{*-}\Delta^+$ при 10 ГэВ/с

Резонанс	χ^2	Вероятность, %
\bar{K}^{*0}	14,9	9
Δ^0	5,6	80
K^{*-}	14,5	10
Δ^+	6,3	70

Таблица 11

Полное число событий кластеров $K^-p \rightarrow \bar{K}^{*0}\Delta^0$, резонансное содержание, полученное подгонкой Брайт—Вигнера резонансов K^* и Δ , и соответствующие им сечения при 10 ГэВ/с

Реакция	Содержание кластера (события)	Резонансные события	σ , мкбарн
$K^-p \rightarrow \bar{K}^{*0} (890) \Delta^0 (1236)$	278	226 ± 22	19 ± 2
$K^-p \rightarrow K^{*-} (890) \Delta^+ (1236)$	211	168 ± 25	41 ± 8

Перекрытия $K^*\Delta$ -кластеров. Попытаемся найти причины неполноты и нечистоты кластеров. Для этого рассмотрим тот кластер, который в согласии с матрицей перекрытия (12) максимально перекрывается с кластерами $\bar{K}^{*0}\Delta^0$ и $K^{*-}\Delta^+$. Эти соседние кластеры имеют следующие характеристики: доминирующим процессом является $K^-p \rightarrow Q^-p$, что видно из спектров масс;

как и $K^*\Delta$ -кластеры, представляют собой низкоразмерные объекты в фазовом пространстве, точнее, они обладают только двумя из семи возможных размерностей; центры их близки; длины и направления главных осей, определенных ковариацией эллипсоида, определяют взаимное проникновение сгустков. Низкая

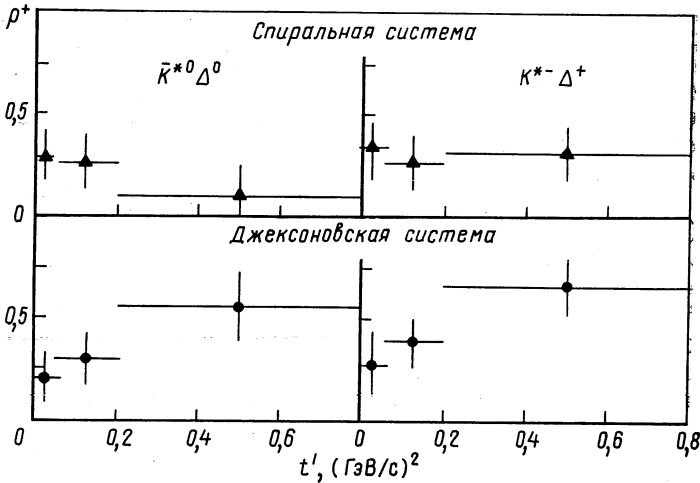


Рис. 21. Комбинация элементов матрицы спин-плотности $\rho^+ = \rho^{11} + \rho^{1-1}$ для реакций $K^-p \rightarrow K^*0(890)\Delta^0(1236)$ при $p_{\text{лаб}} = 10$ ГэВ/с в джексоновской и спиральной системах координат в зависимости от $t' = |t - t_{\text{мин}}|$

размерность кластеров (два собственных значения, большие по сравнению с остальными) позволяет иллюстрировать различные ситуации в фазовом пространстве.

В табл. 12 приведены для $K^*\Delta$ -кластеров и их наибольших соседей число событий, центр, направления собственных векторов и собственные значения (соответствующие собственным векторам). Для процесса (18), как и для процесса (19), соседние кластеры являются дисками, расположенными вертикально относительно диска кластеров $K^*\Delta$ и касающимися его. Проектируем точки одного кластера на плоскость, определенную собственными векторами, связанными с двумя наибольшими значениями (главная плоскость). Эта проекция иллюстрирует внутреннюю структуру кластера.

Чтобы ответить на вопрос о перекрытии двух кластеров, необходимо учесть расстояние между их центрами, направление главных осей, а также структуру, не включенную в приближение многомерных распределений Гаусса. Для этого точки одного

Таблица 12

Геометрическая характеристика кластеров $K^*\Delta$ и перекрывающихся с ними соседних кластеров*

Процесс	$K^-p \rightarrow K^{*-} (890) \Delta^+ (1236) \rightarrow p\bar{K}^0\pi^-\pi^0$							
Число событий	188							
Оси координат	a_1 ГэВ ²	a_2 ГэВ ²	a_3 ГэВ ²	b_1 ГэВ ²	b_2 ГэВ ²	b_3 ГэВ ²	Z ГэВ ⁸	Собственные значения
Центр тяжести	7,41	0,43	0,21	0,99	5,59	3,40	-0,08	
<i>E1</i>	1,00	0,01	0,00	-0,03	-0,02	0,00	0,00	0,90
<i>E2</i>	0,00	0,75	0,00	0,00	0,36	0,32	-0,45	0,00
<i>E3</i>	0,00	0,07	0,91	-0,03	0,14	0,15	0,34	0,00
<i>E4</i>	0,03	-0,12	0,00	0,97	0,13	0,13	0,00	0,00
<i>E5</i>	-0,01	-0,03	-0,01	0,00	-0,70	0,71	0,00	6,74
<i>E6</i>	-0,02	0,52	-0,15	-0,22	0,56	0,58	0,00	0,01
<i>E7</i>	0,00	0,38	-0,38	0,01	0,14	0,11	0,82	0,01

Процесс	$K^-p \rightarrow Q^-p \rightarrow p\bar{K}^0\pi^-\pi^0$							
Число событий	306							
Оси координат	a_1 ГэВ ²	a_2 ГэВ ²	a_3 ГэВ ²	b_1 ГэВ ²	b_2 ГэВ ²	b_3 ГэВ ²	Z ГэВ ⁸	Собственные значения
Центр тяжести	8,64	0,49	0,15	0,92	3,68	4,34	-0,09	
<i>E1</i>	0,94	-0,19	-0,14	0,00	-0,01	0,01	0,22	0,02
<i>E2</i>	0,11	0,97	0,00	0,00	0,13	0,05	0,04	0,00
<i>E3</i>	0,14	-0,03	0,99	0,00	-0,01	0,01	0,03	0,00
<i>E4</i>	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>E5</i>	0,01	-0,07	0,01	0,00	0,75	-0,65	-0,04	1,74
<i>E6</i>	-0,04	-0,12	0,00	0,00	0,64	0,75	0,04	0,39
<i>E7</i>	-0,23	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,06	0,97	0,00

Продолжение табл. 12

Процесс	$K^-p \rightarrow \bar{K}^*0 (890) \Delta^0 (1236) \rightarrow pK^- \pi^+ \pi^-$							
Число событий	278							
Оси координат	a_1 ГэВ ²	a_2 ГэВ ²	a_3 ГэВ ²	b_1 ГэВ ²	b_2 ГэВ ²	b_3 ГэВ ²	Z ГэВ ⁸	Собственные значения
Центр тяжести	7,24	0,41	0,21	0,99	5,52	3,49	-0,04	
E1	1,00	-0,02	-0,01	-0,04	0,00	0,01	0,00	1,23
E2	0,04	0,80	0,00	0,35	-0,32	-0,36	-0,00	0,01
E3	0,01	0,00	1,00	0,00	-0,01	0,01	0,00	0,01
E4	0,03	-0,40	0,00	0,91	-0,01	0,01	0,00	0,00
E5	0,00	-0,03	0,01	0,00	0,71	0,70	0,00	7,35
E6	0,01	0,43	0,00	0,19	0,63	0,62	0,00	0,00
E7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00

Процесс	$K^-p \rightarrow Q^-p \rightarrow pK^- \pi^+ \pi^-$							
Число событий	881							
Оси координат	a_1 ГэВ ²	a_2 ГэВ ²	a_3 ГэВ ²	b_1 ГэВ ²	b_2 ГэВ ²	b_3 ГэВ ²	Z ГэВ ⁸	Собственные значения
Центр тяжести	8,52	0,44	0,25	0,96	5,11	2,93	-0,13	
E1	0,96	-0,04	-0,08	-0,02	0,15	0,13	0,18	0,07
E2	0,08	0,71	0,69	0,00	0,02	0,00	0,01	0,01
E3	0,03	-0,69	0,71	-0,11	-0,03	0,03	0,03	0,01
E4	0,06	-0,08	0,08	0,97	0,00	0,00	-0,22	0,00
E5	-0,02	-0,04	0,02	0,00	0,72	-0,70	0,00	4,72
E6	-0,20	0,00	0,00	0,02	0,68	0,70	0,01	0,20
E7	-0,16	0,00	0,00	0,23	-0,04	-0,03	0,96	0,01

* Смысл приводимых величин поясняется в Приложении 1.

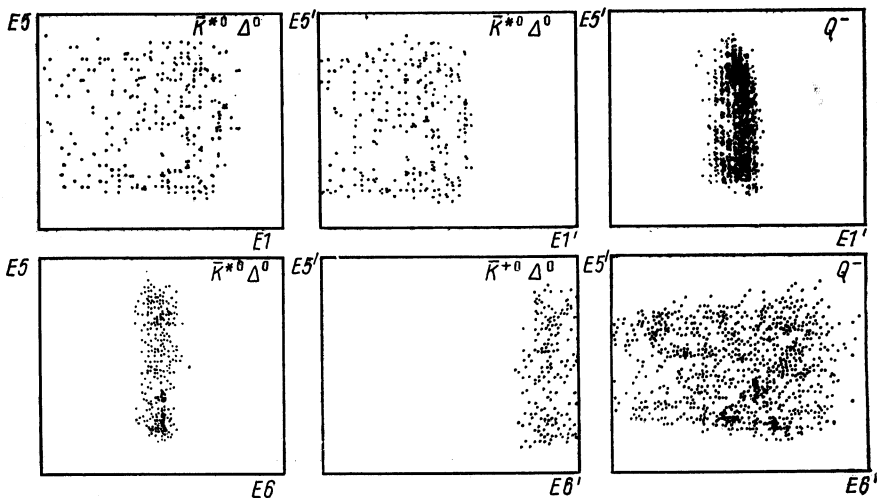


Рис. 22. Двумерные проекции кластера $\bar{K}^{*0} \Delta^0$ на плоскости, образуемые собственными векторами (E_1, E_5) , (E_6, E_5) и (E_1', E_5') , (E_6', E_5') , а также двумерные проекции кластера $Q^- \rightarrow \bar{K}^{*0} \pi^-$ на собственные плоскости (E_1', E_5') и (E_6', E_5') :

$$\angle E_1, E_1' = 15^\circ; \angle E_5, E_5' = 1^\circ; \angle E_6, E_6' = 30^\circ$$

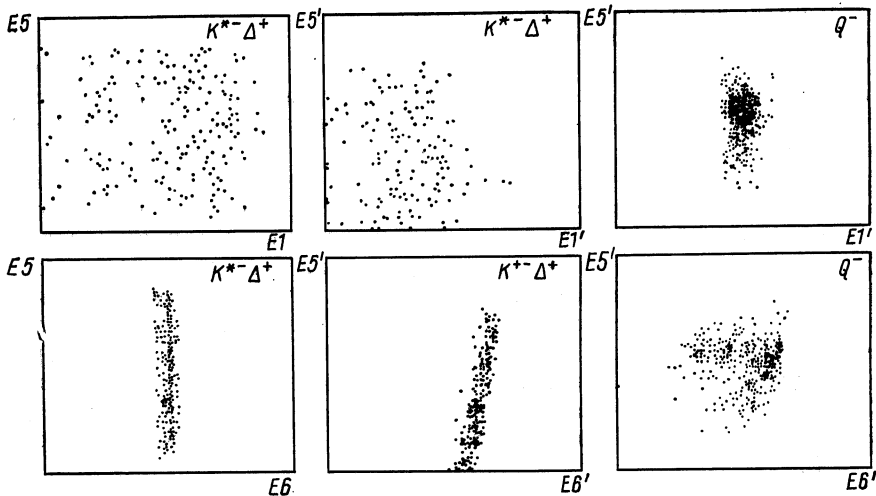


Рис. 23. То же, что на рис. 22, для кластеров $K^{*-} \Delta^+$ и $Q^- \rightarrow K^{*-} \pi^0$:

$$\angle (E_1, E_1') = 20^\circ; \angle (E_5, E_5') = 5^\circ; \angle (E_6, E_6') = 30^\circ$$

кластера проецируем на главную плоскость соседнего кластера. Центр координатной системы расположен в центре того кластера, на главную плоскость которого мы проецируем. Так получаются проекции $\bar{K}^{*0}\Delta^0$ -кластера (рис. 22) и $K^{*}\Delta^{+}$ -кластера (рис. 23). Они наглядно показывают перекрытие процесса $K^{-p} \rightarrow K^{*}\Delta$ с процессом $K^{-p} \rightarrow Q^{-p}$, так что это действительное перекрытие в многомерном пространстве, и никакой метод, использующий сечения в фазовом пространстве, не способен чисто выделить указанный механизм. Это не зависит от выбора переменных и определения расстояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В анализе эксклюзивных экспериментов применяются разные методы с целью: выяснить, какие механизмы реакции дают данное конечное состояние; отделить группы событий, содержащие известный механизм реакции, для дальнейшего подробного изучения этого механизма. В таких анализах необходимо использовать полную кинематическую информацию (которую мы имеем для эксклюзивных экспериментов). Размерность фазового пространства n -частичного конечного состояния равна $3n - 5$, что создает ряд методологических трудностей. Все предлагаемые для устранения этих трудностей методы предполагают, что реакции имеют некоторую структуру $(3n - 5)$ -мерного распределения событий в фазовом пространстве.

Кластерные анализы распределения точек в многомерном пространстве являются методом для определения с минимальным числом предположений структуры этих распределений. Применение двух таких методов кластерного анализа дало следующие результаты: найденные кластеры не выделяются сечениями фазового пространства по части переменных; большая часть кластеров содержит резонансы, позволяющие установить однозначное соответствие кластеров с механизмом реакции; найдены до сих пор неизвестные механизмы реакции; есть указания на существование дифракционных состояний ртл-системы; для всех механизмов реакции получены сечения. Как и ожидалось, не выделены интерферирующие механизмы; лишь частично выделены механизмы реакции малого сечения, расположенной близко в фазовом пространстве к реакции большого сечения или даже перекрывающейся с ней.

Кластерный анализ данных из физики высоких энергий можно рассматривать как звено следующей логической (не хронологической) цепочки.

1. Доказано, что события образуют кластеры в фазовом пространстве. Это выполняется и для процессов высокой множественности.

2. С помощью почти свободных от параметров методов можно выделить кластеры. Не во всех случаях возможна однозначная идентификация кластеров с динамическими механизмами. Можно получить не только информацию о распределении событий в фазовом пространстве, но и указания на динамические механизмы малого сечения.

3. Найденные и выделенные таким образом группы событий (механизмы) затем подробно изучаются в той области фазового пространства, где они расположены (например, анализ парциальных волн).

4. Эти результаты являются исходными данными для многоканального анализа. Они не только позволяют учесть перекрытия разных механизмов, но и определить относительные фазы между отдельными динамическими механизмами.

Развитие методов многомерных анализов еще далеко не окончено. Ожидаются интересные результаты в их применении для инклюзивных реакций и в поиске струй.

Результаты настоящей работы получены в многолетнем плодотворном сотрудничестве с проф. К. Ланиусом, Х. Э. Ролофом, Х. Бетхером, В. Д. Новаком, П. Костка, Л. Бекером и Т. Науманом.

Благодарю Т. Наумана за подготовку рукописи на русском языке.

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

ВЫБОР КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫЕ ЯНГА И ИХ ОБОБЩЕНИЕ [62]

Результат кластерного анализа зависит от выбора переменных. Поэтому надо искать условия, которые по возможности однозначно определяют переменные с физической точки зрения. Можно, например, требовать, чтобы полный набор переменных был лоренц-инвариантен и симметричен относительно перестановки частиц. Реакцию

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n \quad (\text{П.1})$$

можно описать инвариантными переменными:

$$(ai) = (p_a p_i); (bi) = (p_b p_i); (ik) = (p_i p_k). \quad (\text{П.2})$$

Число переменных (П.2) больше числа независимых переменных ($3n - 5$) при постоянной энергии, поэтому часть из них необходимо отбросить. Для этого потребуем: квазиперестановочной инвариантности между конечными частицами $1, \dots, n$; инвариантности при замене частицы a на b . Квазиперестановочная инвариантность означает, что любая перестановка конечных частиц осуществляет только линейное преобразование конечных частиц. Линейные преобразования не изменяют результаты, полученные алгоритмом CLUCOV, так что разумно потребовать выполнения этих двух условий инвариантности.

Для четырех конечных частиц Янг [42] предложил следующий выбор переменных:

$$n = 4: (a_1), (a_2), (a_3); (b_1), (b_2), (b_3); \Delta_4 (1234), \quad (\text{П.3})$$

где Δ_K — определитель Грама, имеющий форму

$$\Delta_K (12 \dots K) = \begin{vmatrix} (11) & \dots & (1K) \\ \vdots & & \vdots \\ (K1) & \dots & (KK) \end{vmatrix}.$$

При обобщении выбора переменных (П.3) надо учесть, что инварианты (П.2) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{i,k=1}^n (ik) = \text{const}; \quad (\text{П.4a})$$

$$\sum_{i=1}^n (ai) = \text{const}; \quad (\text{П.4б})$$

$$\sum_{i=1}^n (bi) = \text{const}; \quad (\text{П.4в})$$

$$\Delta_K (1 \dots K) = 0, \text{ если } K \geq 5. \quad (\text{П.4г})$$

Условие (П.4а) содержит $n(n-1)/2$ переменных; оно возможно только при $n(n-1)/2 \leq 3n-5$ (т. е. для $n \leq 5$). Определитель Грама Δ_K содержит $K(K-1)/2$ переменных. И поэтому условие (П.4г) возможно при $K(K-1)/2 \leq 3n-5$. Если учесть (П.4б, в), мы получим следующее обобщение выбора (П.3):

$$\left. \begin{array}{l} (a_1), (a_2), \dots, (a, n-1); \\ (b_1), (b_2), \dots, (b, n-1). \end{array} \right\} \quad (\text{П.5})$$

Остается только найти обобщение определителя Δ_4 . Рассмотрим собственные значения матрицы $A_{ik} = (ik)$ [32]:

$$\lambda^n - \bar{\Delta}_1 \lambda^{n-1} - \bar{\Delta}_2 \lambda^{n-2} - \bar{\Delta}_3 \lambda^{n-3} - \bar{\Delta}_4 \lambda^{n-4} = 0, \quad (\text{П.6})$$

где λ обозначает собственное значение и

$$\bar{\Delta}_m = (-1)^{m+1} \sum_{i_1, \dots, i_m=1, \dots, n} \Delta_m (i_1 \dots i_m).$$

По определению величины $\bar{\Delta}_m$ инвариантны при перестановке конечных частиц и могут служить обобщением определителя Δ_4 для большего числа частиц в конечном состоянии. Чтобы иметь для всех переменных одинаковую размерность, определим еще

$$Z_m^{(n)} = [(-1)^{m+1} \sum_{i_1, \dots, i_m=1, \dots, n} \Delta_m (i_1 \dots i_m)]^{1/m}. \quad (\text{П.7})$$

Так как $Z_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n m_i^2$ постоянно, только $Z_2^{(n)}$, $Z_3^{(n)}$ и $Z_4^{(n)}$ могут служить как переменные, инвариантные при перестановке конечных частиц.

Для $n = 3, 4, 5, 6$ мы получим, таким образом, следующие наборы инвариантных в указанном смысле переменных:

- $n = 3$: $(a1), (a2);$
 $(b1), (b2);$
- $n = 4$: $(a1), (a2), (a3);$ } переменные Янга
 $(b1), (b2), (b3);$ }
 $Z_4^{(4)};$
- $n = 5$: $(a1), \dots, (a4);$
 $(b1), \dots, (b4);$
 $Z_4^{(5)}, Z_3^{(5)};$
- $n = 6$: $(a1), \dots, (a5);$
 $(b1), \dots, (b5);$
 $Z_4^{(6)}, Z_3^{(6)}, Z_2^{(6)}.$

Отметим некоторые свойства величин $Z_m^{(n)}$. Каждый из $\binom{n}{m}$ -членов суммы (П.7) положителен внутри физической области. На границе физической области имеется $\Delta_m = 0$ [63]. Вообще не все Δ_m в переменной $Z_m^{(n)}$ могут одновременно быть равны нулю. Поэтому получаем $Z_{m\text{мин}}^{(n)} \geq 0$. Если пренебречь массами конечных частиц, то границы физической области переменных $Z_m^{(n)}$, пропорциональные $s = (p_a + p_b)^2$, следующие:

$$Z_{2\text{мин}}^{(n)} = s / \sqrt{2n(n-1)}; \quad Z_{2\text{макс}}^{(n)} = s/2;$$

$$Z_{3\text{мин}}^{(n)} = 0; \quad Z_{3\text{макс}}^{(n)} = s [(n-2)/3n^2 (n-1)^2]^{1/3};$$

$$Z_{4\text{мин}}^{(n)} = 0; \quad Z_{4\text{макс}}^{(n)} = s [(n-2)(n-3)/8n^3 (n-1)^3]^{1/4}.$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2.

КЛАССИФИКАЦИЯ В КЛАСТЕРНОМ АЛГОРИТМЕ

Предполагается, что $p(x)$ — распределение N точек x является суперпозицией распределений K классов. Пусть k -й класс ω_k ($k = 1, \dots, K$) имеет вероятность $p(\omega_k)$. Тогда распределение вероятности $p(x) = \sum_{k=1}^K p(\omega_k) p(x | \omega_k)$, где $p(x | \omega_k)$ — условное распределение вероятности точек x , принадлежащих k -му классу. Минимизация ложных классификаций (minimum risk solution) получается следующим образом.

Для данной точки x находим по правилу Байеса условную вероятность принадлежности k -му классу:

$$p(\omega_k | x) = p(x | \omega_k) p(\omega_k) / \sum_{i=1}^k p(x | \omega_i) p(\omega_i)$$

и присоединяем точку x к тому классу, который имеет максимальное значение $p(\omega_k | x)$.

Если $p(\omega_k | x)$ — многомерное распределение Гаусса, то получаем правило присоединения (11) и веса выражения (10). Описанный алгоритм

CLUSOV является процедурой классификации, где априорные вероятности $p(\omega_k)$ и параметры \bar{X}^k , C^k распределений $p(x | \omega_k)$ заменяются от итерации к итерации лучшими оценками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandt S. e.a. — Phys. Lett., 1964, v. 12, p. 57.
2. Schiller H. Preprint Zeuthen-PHE 72-8. Berlin, 1972.
3. Kostka P. e.a. — Nucl. Phys. B, 1975, v. 86, p. 1.
4. Forster M. C. e.a. — Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3135.
5. Glasser R. G. e.a. — Phys. Lett. B, 1974, v. 53, p. 387.
6. Ludlam T., Slansky R. — Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 1408.
7. Berger E. L. e.a. — Phys. Lett. B, 1973, v. 43, p. 132.
8. Brau J. E. e.a. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1181; Ferrando A. e.a. Preprint CERN/EP/PHYS 77-54, 1977.
9. Ferrando A. e.a. — Nucl. Phys. B, 1975, v. 92, p. 61.
10. Experiments at CERN in 1977. CERN Scientific Information Service, 1977.
11. Wroblewski A. K. In: Rapporteurs talk at 15th Internat. Conf. on High Energy Physics. Kiev, 1970; Morrison D. R. O. CERN/EP/PHYS 76-45; In: Invited talk at theoret. session at 7th Internat. Coll. On Multiparticle Reactions. Tutzing, 1976; Biehl K. J. e.a. — Nucl. Phys. B, 1976, v. 102, p. 120.
12. Kittel W. In: Summary talk Internat. Symposium on Antinucleon-Nucleon Interactions. Prague — Liblice, 1974.
13. Van Hove L. — Phys. Lett. B, 1969, v. 28, p. 429; — Nucl. Phys. B., 1969, v. 9, p. 331.
14. Böttcher H. e.a. Preprint Zeuthen-PHE 74-2; In: Proc. of the 5th Internat. Symp. On Many Particle Hadrodynamics. Eisenach-Leipzig, 1974.
15. Deutschmann M. e.a. — Nucl. Phys. B, 1972, v. 50, p. 61, 80.
16. Roloff H. E. — Math. Nat. Diss. A, 1976.
17. Berger E. L. — Phys. Lett. B, 1973, v. 43, p. 132.
18. Dao F. T. e.a. — Phys. Lett. B, 1973, v. 45, p. 73.
19. Ludlam T., Slansky R. — Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 1408.
20. Haulon J. e.a. — Phys. Lett. B, 1973, v. 46, p. 415.
21. Ludlam T. e.a. Ibid., 1974, v. 48, p. 449.
22. Anderberg M. R. Cluster analysis for applications. N.Y., 1973; Schorr B. Preprint CERN/DD Int/76-3.
23. Zahn C. T. IEEE Transacts. Computing C-20, 1971, v. 20, p. 68.
24. Schotanus D. J. In: Proc. Topical Meeting On Multidimensional Data Analysis. CERN, 1976.
25. Kittel W. In: Invited paper at 4th Internat. Winter Meeting On Fundamental Physics. Salardù (Spain), 1976.
26. Ludlam T., Slansky R. — Phys. Rev. D, 1977, v. 16 p. 100.
27. Gelsema E. S. Preprint CERN/DD/74-16, 1974.
28. Baubillier M. e.a. Multidimensional analysis of the reaction $\pi^- n \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ n$ at 9 GeV/c. — In: Sbm. to Internat. Conf. on High Energy Physics. Budapest, 1977.
29. Baubillier M. e.a. A multidimensional analysis of the coherent reaction $\pi^- d \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ d$ at 9 GeV/c. — In: Sbm. to Internat. Conf. on High Energy Physics. Budapest, 1977.
30. De la Vaissierz Ch. In: Proc. Topical Meeting on Multidimensional Data Analysis. CERN, 1976.
31. Lornet P. In: Proc. Topical Meeting on Multidimensional Data Analysis. CERN, 1976.

32. Manton N. In: Proc. Topical Meeting on Multidimensional Data Analysis. CERN, 1976.
33. Koontz W. L., Fukunaga K.— IEEE Transacts. Comp. C, 1972, v. 2, p. 967.
34. Jahn W., Vahle H. Die Faktorenanalyse und ihre Anwendung. Berlin, 1970.
35. Böttcher H. e.a.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 81, p. 365.
36. Aderholz M. e.a. Ibid., 1968, v. 8, p. 45.
37. Beaupré J. e.a. Ibid., 1972, v. 46, p. 1.
38. Böttcher H. e.a. Preprint Zeuthen-PHE 76-7. Berlin, 1976.
39. Grässler H. e.a.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 121, p. 189.
40. Nowak W. D., Schiller H. Preprint Zeuthen-PHE 75-12. Berlin, 1975.
41. Honecker R. e.a. Preprint CERN/EP/PHYS 77-51, 1977.
42. Yang C. N. Private communication.
43. Korkea-aho M. Preprint Helsinki University 75/88, 1975.
44. Nyborg P. Textbook in elementary particle physics. Vollebekk, 1972.
45. Honecker R. e.a.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 50, p. 157.
46. Grässler H. e.a. Ibid., 1976, v. 113, p. 365.
47. Deutschmann M. e.a. Ibid., 1975, v. 99, p. 397.
48. Otter G. e.a. Ibid., 1974, v. 80, p. 1.
49. Honecker R. e.a. Ibid., 1976, v. 106, p. 365.
50. Eskreys A. In: Proc. of the 6th Internat. Colloquium on Multiparticle Reactions, RL 75-143, 1975, S. 241.
51. Harris R. Washington University. Preprint VTL-PUB-22, 1975.
52. Chaloupka V. e.a.— Phys. Lett. B, 1974, v. 50, p. 1.
53. Naumann Th., Schiller H. In: Proc. 3rd Topical Meeting on Multidimensional Analysis, Nijmegen, 1978, p. 54.
54. Dauber P. M. e.a.— Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1403.
55. Colton E. e.a.— Nucl. Phys. B, 1970, v. 17, p. 117.
56. Amsterdam — CERN — Nijmegen Collaboration.— In: Proc. 5th Intern. Symp. on Many Particle Hadrodynamics. Leipzig, 1974.
57. Deutschmann M. e.a.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 36, p. 373.
58. Lohmann W., Schreiber H. J. Private communication.
59. Schmitz N. In: Proc. of the 1965 Easter School for Physicists. CERN, 1965.
60. Aguilar-Benitez M. e.a.— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 29.
61. Michael C. Daresbury Lectures, 14. DL/R36, 1975.
62. Becker L., Schiller H. Preprint Zeuthen-PHE 76-23.
63. Byckling E., Kajantie K. Particle Kinematics. N.Y., 1973, p. 202.