

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯДРА В РАМКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ ДИНАМИКИ

В. В. Ванagas

Институт физики АН ЛитССР, Вильнюс

Изложен новый подход к микроскопической теории ядра, основанный на специальных разложениях гамильтониана в рамках ограниченной динамики. Сформулирована микроскопическая коллективная модель ядра и на ее основе выявлен смысл феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра. Описан в общих чертах новый нулевой гамильтониан ядра, который определен как точно решаемая часть произвольного гамильтониана ядра.

The new approach to the microscopic nuclear theory is described, resting on the special decompositions of the Hamiltonian, based on the idea of the restricted dynamics. The microscopic collective model of nucleus is formulated and on its ground the meaning of the phenomenological rotational-vibrational model is explained. General features of the new zeroth order Hamiltonian, defined as the exactly solvable part of the arbitrary nuclear Hamiltonian, are sketched.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изложен новый подход к микроскопической теории ядра, основанный на нескольких простых принципах, сформулированных в [1]. Исходным пунктом теории служит идея «ограничения операторов». При построении микроскопической теории ядра будем использовать подходящие для этой цели пространства и операторы, действующие в этих пространствах, учитывая то обстоятельство, что определение оператора зависит от пространства, в котором он действует. Теория развита в терминах хорошо определенного многочастичного гильбертова пространства \mathcal{R} и гамильтонианов H , действующих в \mathcal{R} .

При построении теории основной является следующая идея: *зависимость H от пространства \mathcal{R} , в котором он действует, дает возможность радикально изменить свойства H , если ограничить действие этого оператора на некотором подпространстве \mathcal{R}_0 пространства \mathcal{R} .* Это, пока не очень наглядное утверждение, в дальнейшем приобретет весьма определенное и конструктивное содержание.

Причина, по которой необходимо ввести подпространство \mathcal{R}_0 пространства \mathcal{R} и ограничить операторы, заключается в чрезвычайной сложности решения задачи многих частиц в теории ядра. Для построения подходящей теории необходимо владеть неким аппаратом, позволяющим настолько упростить эту задачу, чтобы она стала практически разрешимой. При этом желательно, чтобы каждому гамильтониану H соответствовала бы своя упрощенная задача. С другой стороны, этот прием должен в определенной степени сглаживать специфические свойства исходного гамильтониана H , такие, как детали потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия и т. п. Без этого нельзя рассчитывать на создание достаточно универсальной теории, не слишком чувствительной к детальному виду исходного гамильтониана ядра.

Так как неизвестен прямой путь выделения из H модельного гамильтониана, воспользуемся обходным путем, основанным на свойствах подпространства \mathcal{R}_0 . Коренное изменение свойств гамильтониана H , действие которого распространяется лишь на \mathcal{R}_0 , позволяет выделить из H модельный гамильтониан H_0 . Различные способы ограничения H ведут к различным H_0 , поэтому механизм ограничения H дает метод построения различных моделей ядра. Проблема состоит лишь в выборе подпространства в \mathcal{R}_0 . Оказывается, что тот или иной выбор подпространства \mathcal{R}_0 может быть подсказан видом интегралов движения исходного гамильтониана H , используя которые можно построить простейший, кинематически корректный базис в пространстве \mathcal{R} . Следовательно, в этом смысле свойства гамильтониана H определяют подпространства \mathcal{R}_0 , а тем самым и гамильтониан H_0 . Иными словами, с помощью определенных правил H порождает более простой, сглаженный гамильтониан H_0 .

Пусть задан произвольный микроскопический гамильтониан ядра H , действующий в многочастичном гильбертовом пространстве \mathcal{R} . Тогда микроскопическая теория ядра строится в рамках ограниченной динамики по следующим правилам [1].

1. Необходимо изучить все точные интегралы движения гамильтониана H .

2. Необходимо в \mathcal{R} построить простейший базис, удовлетворяющий всем кинематическим требованиям, вытекающим из свойств симметрии гамильтониана H .

3. Выбирая некоторые характеристики простейшего базиса, необходимо зафиксировать подпространство \mathcal{R}_0 в \mathcal{R} , а затем, ограничивая H на \mathcal{R}_0 , выделить H_0 из H .

4. Необходимо решить уравнение Шредингера для H_0 .

Картина строения ядра, описываемая собственными функциями Ψ_0 гамильтониана H_0 , будет упрощена в той же степени, в которой упрощен H_0 по сравнению с H . В H_0 будут отражены лишь некоторые черты породившего его гамильтониана H , следова-

тельно, и в Ψ_0 будут заложены лишь некоторые свойства истинных состояний ядра. Поэтому будем говорить, что Ψ_0 задает некоторую модель ядра, зависящую от H и \mathcal{R}_0 . Для усовершенствования теории, основанной на такой модели, можно сделать еще один шаг.

5. Используя Ψ_0 в качестве функции нулевого приближения, следует учесть наиболее важные слагаемые остаточного взаимодействия $\bar{H} = H - H_0$.

Первые два правила касаются кинематических аспектов теории, поэтому эту часть вышеизложенной программы логично назвать *кинематической основой микроскопической теории ядра*. Эти вопросы рассмотрены в [2—3].

Настоящий обзор посвящен третьему и четвертому пунктам этой программы, в которых речь идет о *динамических основах микроскопической теории ядра*. В частности, немало внимания уделено изучению коллективных степеней свободы ядра. В последнее время достигнут заметный прогресс в понимании на микроскопическом уровне феноменологической теории, предложенной и развитой в известных работах Бора, Моттельсона и Рейнуотера. Новый микроскопический подход к изучению коллективных эффектов был стимулирован идеями, используемыми в ротационно-вибрационной модели ядра, хотя непосредственно из них не вытекает. Будет показано, что динамическое уравнение, описывающее коллективные эффекты, есть не что иное, как уравнение Шредингера для гамильтониана H_0 , определенным образом выделенного из H .

Описанная в настоящем обзоре микроскопическая теория ядра имеет более общий характер и ее можно изложить в такой форме, что только на последнем этапе обнаружится применимость ее выводов для описания коллективных степеней свободы ядра. Несмотря на такую возможность аксиоматического построения теории, при написании данного обзора для простоты избран более наглядный путь. Уже с самого начала будем пользоваться такими понятиями, как «коллективный гамильтониан», «коллективные переменные» и т. п. Читателю не следует смешивать их с аналогичными, но далеко не эквивалентными понятиями, используемыми в феноменологической теории. В дальнейшем, когда в соответствующем месте будет установлена связь между микроскопическим и феноменологическим подходами, терпеливому читателю станет ясно, какой различный смысл вкладывается в эти понятия, и как и насколько феноменологическая теория абсорбирована микроскопической теорией.

Таковы общие черты основных идей излагаемой теории. Теперь приступим к более детальному изложению материала. Демонстрация вычислительных возможностей теории потребовала бы значительного расширения обзора, поэтому нам придется ограничить

изложение конкретных результатов. Дополнительные сведения можно получить в [1—4], а также в других работах, ссылки на которые приведены в соответствующих местах текста.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основные идеи подавляющего большинства моделей ядра заимствованы из теории других многочастичных квантовых систем. Например, оболочечная картина основана на предположении существования в ядре одночастичного поля, подобного полю, в котором движутся атомные электроны. Однако это допущение не очевидно. Можно спорить о существенном различии физических условий в атомах и ядрах не только потому, что эти системы состоят из частиц, законы взаимодействия которых столь различны, но также и по геометрическим причинам. Основная часть одночастичного поля для атомных электронов создается тяжелой центральной частицей. Такой ситуации, разумеется, нет в атомных ядрах, в которых сами нуклоны порождают самосогласованное, но не обязательно одночастичное поле. Почему же оно должно быть такого же типа, что и самосогласованное одночастичное поле для атомных электронов? Является ли оболочечная картина физической реальностью или мы только к ней привыкли?

В теорию ядра свойства спаривания вошли из явления сверхпроводимости. Помимо других причин тенденция образования спаренных частиц в фермиевских системах обусловлена бесконечной протяженностью системы, а это условие в реальном ядре выполнено очень приближенно.

Наиболее типичным эффектом, вытекающим из свойств спаривания, является характерная щель в спектре низколежащих возбуждений. Этот эффект, однако, наблюдается не во всех областях массовых чисел, и поэтому нельзя утверждать, что свойства спаривания в теории ядра столь же важны, как в теории сверхпроводимости.

Коллективные эффекты подчеркивают другой аспект многогранной теории ядра. Исходные предположения ротационно-вибрационной модели ядра, опирающейся на картину малых поверхностных колебаний в несжимаемой жидкости, столь классичны и противоречат оболочечным представлениям, что в этой модели теряются многие квантовые черты, такие, как принцип Паули, возможность вывода коллективной потенциальной энергии из микроскопического гамильтониана ядра и т. п.

Эти критические замечания в адрес хорошо известных моделей ядра приводим отнюдь не с целью умалить их значение. Замечательные результаты, полученные с помощью этих моделей при интерпретации различных свойств ядер, заслуженно признаны

и изложены во многих книгах. Важно лишь подчеркнуть, что большинство моделей опирается на идеи, заимствованные из теорий других квантовых систем, и не следует забывать, что их не всегда можно безоговорочно перенести в теорию ядра.

Необходимо уяснить общую неприемлемую черту этих моделей. Несмотря на очень различные исходные концепции (одночастичное поле, свойство спаривания или полуклассические коллективные степени свободы), общей отрицательной их чертой является нарушение интегралов движения. Различные типы нарушений (ложные состояния, состояния с приближенным значением общего момента ядра или даже с приближенным числом частиц, пренебрежение принципом Паули и т. п.) появились, как нежелательный груз, из теорий других многочастичных квантовых систем.

В настоящее время общепризнанно важное значение интегралов движения в релятивистской и нерелятивистской квантовой механике. При построении теорий в разных областях физики их учитывают как первое необходимое условие. Почему же так часто игнорируют их значение в теории ядра? Иногда высказывается мнение, что не стоит поначалу особенно заботиться об интегралах движения, потому что в конечной стадии вычислений с помощью проекционной техники их можно восстановить. Но этот путь, кроме технических трудностей, таит в себе и другую, более коварную опасность. Учет интегралов движения может существенно изменить ту физическую картину, которая первоначально была основой той или иной модели. Наглядный пример такой ситуации встречается в оболочечной модели ядра, когда оболочечные представления противоречат кинематическим требованиям, вытекающим из свойств трансляционной инвариантности гамильтониана ядра [2, 3].

В каждой модели кинематические требования нарушаются различными способами. Это и может быть одной из причин их явного диссонанса. Концепция коллективного движения, например, резко противоречит картине независимых частиц. С одной стороны, имеется слишком много моделей ядра, чтобы можно было во все поверить, но, с другой стороны, чувствуется, что в большинстве из них угадано нечто важное. Уже давно назрела необходимость сблизить эти модели, и есть надежда, что для осуществления этой сложной задачи кинематические требования окажутся весьма полезными. Действительно, почему бы не учесть в теории ядра в первую очередь интегралы движения? Какая физическая картина предстанет в этом случае перед нами?

Теперь мы уже вплотную подошли к исходному рубежу нашего изложения и следующий раздел начнем с обзора тех общих идей, на основе которых создается кинематически корректная микроскопическая теория ядра, построенная в рамках ограниченной динамики. Эти идеи были выдвинуты в [1, 5].

2. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Исходя из вышеизложенного, нарушение принципов симметрии должно рассматриваться как серьезный недостаток теории. По этой причине с самого начала будем строить кинематически корректную теорию, не нарушая ни на одном этапе точных интегралов движения, вытекающих из свойств симметрии гамильтониана ядра. Не будем также искать аналогий между теорией ядра и теориями других квантовых систем. Будем развивать теорию, приспособленную к описанию специфических свойств ядра, представляющего собой компактную, хорошо локализованную в пространстве систему взаимодействующих частиц. Возможны два варианта теории. Первый — с использованием изоспинового формализма, тогда будем говорить о ядре, состоящем из нуклонов, и второй — без использования изоспинового формализма, тогда будем говорить о протон-нейтронном ядре. В настоящем обзоре рассматривается только первый вариант теории, но все излагаемые результаты можно видоизменить применительно к связанной протон-нейтронной системе.

Перейдем к описанию общего метода построения микроскопической теории ядра в рамках ограниченной динамики [1, 5]. Известно, что гамильтониан ядра H хорошо сохраняет пространственную четность π , полный угловой момент и его проекцию JM_J , антисимметричность волновой функции ядра a и, наконец, число протонов и нейтронов, т. е. M_T — проекцию изоспина и n — общее число нуклонов. В перечисленный набор интегралов движения не включена энергия. Для дальнейшего удобно обозначить набор этих интегралов движения одной буквой $\Lambda \equiv \{\pi JM_J M_T n a\}$.

Построение теории начнем с подходящей реализации гильбертова пространства \mathcal{R} . Пусть \mathcal{R} разложено на прямую сумму подпространств $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$, т. е. пусть

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(\Lambda_1)} \dot{+} \mathcal{R}^{(\Lambda_2)} \dot{+} \dots, \quad (1)$$

где индексы буквы Λ обозначают некоторые фиксированные значения интегралов движения.

Нами было принято решение не нарушать интегралы движения. Поэтому теорию будем развивать только внутри подпространства $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ с определенным значением набора Λ ; это условие, как правило, нарушается в моделях, упомянутых в предварительных замечаниях. Трансляционно-инвариантный гамильтониан ядра H действует внутри $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$, т. е.

$$\langle \Lambda \Gamma | H | \Lambda' \Gamma' \rangle = \delta(\Lambda \Lambda') \langle \Gamma | H^{(\Lambda)} | \Gamma' \rangle, \quad (2)$$

где Γ обозначает некоторый базис в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ *. До тех пор пока $H^{(\Lambda)}$ есть произвольный гамильтониан, его действие ведет к определенным суперпозициям случайным образом выбранного базиса $\Psi(\Lambda\Gamma)$ в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$, и, конечно, наилучший способ зафиксировать этот базис — решить уравнение Шредингера для H , в этом случае Γ обозначало бы энергию. Однако практически невозможно точно решить уравнение Шредингера для многочастичного ядра, поэтому приходится искать другие возможности.

Размерность пространства $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ очень велика. Полезно разбить $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ на подпространства с меньшими размерностями. С этой целью отыщем во множестве гамильтонианов H , действующих внутри $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$, более простой гамильтониан (обозначим его h), обладающий дополнительными свойствами симметрии, а следовательно, и дополнительными интегралами движения. Используем один или несколько этих интегралов движения (обозначим их K) для дополнительного фиксирования базиса в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$. Имеем

$$\mathcal{R}^{(\Lambda)} = \mathcal{R}^{(\Lambda K_1)} \dot{+} \mathcal{R}^{(\Lambda K_2)} \dot{+} \dots \quad (3)$$

В новом базисе матрица оператора H приобретает следующий вид:

$$\langle \Lambda K \Gamma | H | \Lambda' K' \Gamma' \rangle = \delta(\Lambda \Lambda') \langle K \Gamma | H^{(\Lambda)} | K' \Gamma' \rangle, \quad (4)$$

где Γ теперь уже обозначает некоторый базис в $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$.

Разложение (4) дает многочастичное гильбертово пространство, подходящее для наших целей. Это разложение осуществлено с помощью двух гамильтонианов: произвольного «большого» гамильтониана H и «маленького» гамильтониана h . Для определенности будем считать, что H имеет вид

$$H = H_{\text{кин}} + H_{\text{кул}} + H_{\text{ц}} + H_{\text{в}} + H_{\text{т}}, \quad (5)$$

где первые два слагаемых есть соответственно операторы кинетической и кулоновской энергии. Три последних слагаемых обозначают центральные, векторные и тензорные силы со всеми обменными и произвольными потенциалами нуклон-нуклонного взаимодействия. Обсуждать конкретный вид гамильтониана h пока нет необходимости.

Теперь перейдем к наиболее существенной части этого раздела. Выделим из H новый гамильтониан. Для этого запишем H в виде двух слагаемых:

$$H = H_0 + \bar{H}, \quad (6)$$

где H_0 и \bar{H} сохраняют интегралы движения Λ . Определим H_0 как всю часть оператора H , для которой выполнено условие

$$\langle K \Gamma | H_0^{(\Lambda)} | K' \Gamma' \rangle = \delta(K K') \langle \Gamma | H_0^{(\Lambda K)} | \Gamma' \rangle \quad (7)$$

* В настоящем обзоре гамильтониан всюду действует внутри $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$, поэтому иногда будем опускать верхний индекс Λ оператора H .

для всех K в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$. Из этого определения следует, что \bar{H} имеет по крайней мере один недиагональный элемент по отношению к K . Важно подчеркнуть, что условие (7) неэквивалентно учету всех диагональных по K матричных элементов оператора H , потому что H также имеет не равные нулю диагональные по K матричные элементы.

Замечательно, что оператор $H^{(\Lambda)}$ и пространство $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$ определяют новый гамильтониан $H_0^{(\Lambda K)}$. В дальнейшем для краткости будем говорить, что $H_0^{(\Lambda K)}$ спроецирован из $H^{(\Lambda)}$ с помощью $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$ или просто $H_0^{(\Lambda K)}$ спроецирован из $H^{(\Lambda)}$ *. Запишем уравнение Шредингера для $H_0^{(\Lambda K)}$:

$$H^{(\Lambda K)} \bar{\Psi}_0^{(\Lambda K)} = \varepsilon_0^{(\Lambda K)} \Psi_0^{(\Lambda K)}. \quad (8)$$

Теперь уже можно ввести некоторую модель ядра [1, 5]. Будем говорить, что физическая картина строения ядра, описываемая волновой функцией $\Psi_0^{(\Lambda K)}$, есть динамическая модель ядра, порожденная гамильтонианом H , ограниченным на подпространство $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$, или, короче, модель ядра с ограниченной динамикой.

Вышеприведенные определения являются весьма общими. Отнюдь не тривиальная задача обеспечить выполнение условия (7) и можно надеяться на успех лишь в том случае, когда пространство $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$ натянута на базис с исключительно хорошими свойствами. Такой базис будет введен в следующем разделе. Степень сложности уравнения Шредингера (8) зависит от выбора дополнительных квантовых чисел K . С точки зрения практических возможностей решения уравнения (8) возникает особенно благоприятная ситуация, когда K выбрано таким образом, что размерность пространства $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$ конечна. В этом случае согласно (7) оператор $H_0^{(\Lambda K)}$ представлен эрмитовой матрицей конечной размерности, и уравнение Шредингера (8) решается точно.

Чтобы общий метод, сформулированный в этом разделе, стал практически применимым, необходимо изучить отмеченные уже во введении кинематические и динамические аспекты всей проблемы. Кинематическая часть касается детального описания пространств $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$, включая также и метод построения базисов в этих пространствах [2, 3], и предполагается, что читатель знаком с этим материалом. Динамическая же часть начинается с выделения $H_0^{(\Lambda K)}$ из $H^{(\Lambda)}$ и изучения общих свойств спектра и собственных состояний гамильтониана $H_0^{(\Lambda K)}$. Это весьма широкий круг вопросов, в настоящем обзоре затронуты только некоторые из них.

* Такую процедуру также будем называть ограничением оператора $H^{(\Lambda)}$ на подпространство $\mathcal{R}^{(\Lambda K)}$.

3. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

В [2, 3] подробно обсуждены точные интегралы движения гамильтониана H и описана простейшая, кинематически корректная реализация базиса в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$. Эта реализация задает и гамильтониан h . Оказывается (см., например, [2, 3]), этот гамильтониан является первым оператором Казимира унитарной группы $U_{3(n-1)}$, где n — число нуклонов ядра.

В $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ существует два следующих унитарно-эквивалентных базиса:

$$\Psi \left(\begin{array}{c} \pi E \Omega \beta (LS) J M_J \\ T M_T \tilde{\alpha} \omega \alpha (\lambda \tilde{\lambda}) a \end{array} \middle| Q', Q \right) \quad (9)$$

и

$$\Psi \left(\begin{array}{c} \pi E \gamma (LS) J M_J \\ T M_T \tilde{\alpha} \delta \omega \alpha (\lambda \tilde{\lambda}) a \end{array} \middle| Q', Q \right). \quad (10)$$

Эти функции зависят от спин-изоспиновых переменных, набор которых в (9) и (10) обозначен через Q . Они также зависят от $3(n-1)$ орбитальных переменных, сокращенно в (9) и (10) обозначенных через Q' . Набор Q' состоит либо из переменных Якоби ρ ($i_s^z = 1, 2, \dots, n-1; s = 1, 2, 3$), либо из шести коллективных переменных ξ и $3(n-3)$ неколлективных (так называемых внутренних) переменных q ; переменные ξ и q описаны ниже.

Перед тем как перейти к объяснению смысла квантовых чисел в (9) и (10), введем следующие обозначения: буквами U и O обозначим унитарные и ортогональные группы, а O^+ — ортогональные группы без отражения. Нам понадобятся также три симметрические группы: S_n , $S_n^{(r)}$ и $S_n^{(\sigma\tau)}$. Первая из них действует на все переменные, вторая — лишь на орбитальные и третья — на спин-изоспиновые переменные. Для обеих функций (9) и (10) E имеет тройной смысл и одновременно обозначает $U_{3(n-1)}$ -неприводимое представление $[E0 \dots 0]$, U_{n-1} -неприводимое представление $[E_1 E_2 E_3 0 \dots 0]$ и U_3 -неприводимое представление $[E_1 E_2 E_3]$, причем $E_1 + E_2 + E_3 = E$. Четность π обеих функций положительна при четном E и отрицательна при нечетном E . Квантовые числа L , S и T обозначают орбитальный, спиновый и изоспиновый моменты ядра; квантовые числа J , M_J , M_T и a уже были введены ранее; ω обозначает O_{n-1} -неприводимое представление $(\omega_1 \omega_2 \omega_3 0 \dots 0)$. Перестановочная симметрия функций (9) и (10) характеризуется $S_n^{(r)}$ -неприводимыми представлениями λ (орбитальной схемой Юнга), имеющей вид $[4 \dots 43 \dots 32 \dots 21 \dots 1]$, т. е. содержащей k_1 единиц, k_2 двоек, k_3 троек и k_4 четверок, где $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = n$; буква $\tilde{\lambda}$ имеет двойной смысл и обозначает

либо $S^{\sigma\tau}$ -неприводимое представление, т. е. схему Юнга, сопряженную со схемой λ ($\tilde{\lambda}$ однозначно задается схемой λ), либо U_4 -неприводимое представление. Это представление приведено на цепочке $U_4 \supset U_2 \sim U_2 \times U_2$, а индекс повторения одинаковых S и T в $\tilde{\lambda}$ обозначен через $\tilde{\alpha}$. Индекс α имеет смысл индекса повторения на цепочке $O_{n-1} \supset S_n^+$, т. е. различает одинаковые λ , содержащиеся в данном ω . Аналогично δ и γ в (10) обозначают индексы повторения на цепочках $U_{n-1} \supset O_{n-1}$ и $U_3 \supset O_3^+$. Квантовое число Ω в (9) обозначает $O_{3(n-1)}$ -неприводимое представление $(\Omega 0 \dots 0)$, а β — индекс повторения на цепочке $O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1}$.

Преобразование между базисами (9) и (10) осуществляется с помощью ортогональной матрицы $M^{(E\omega L)}$ с матричными элементами

$$M_{[E_1 E_2 E_3] \gamma \delta, \Omega \beta}^{(E\omega L)} \tag{11}$$

Эта матрица диагональна по отношению к $U_{3(n-1)}$ -неприводимому представлению E , а также к ω и L и не зависит от $S, T, M_T, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}, \lambda, J, M_J$. Базисные функции (9) будем называть функциями унитарной схемы, а функции (10) — функциями ортогональной схемы.

Здесь приведено очень краткое описание простейшего базиса в $\mathcal{K}^{(\Lambda)}$. Подробности, включая ссылки на оригинальные работы, в которых введены функции (9) и (10), изучены их свойства, разработаны методы их рекуррентного построения и т. п., описаны в [1—4].

При построении микроскопической теории ядра в рамках ограниченной динамики будем пользоваться базисами унитарной или ортогональной схем, обладающими богатыми наборами квантовых чисел. Обсудим пригодность этих квантовых чисел для ограничения гамильтониана H . Согласно утверждению, высказанному при общей формулировке метода, оба базиса (9) и (10) характеризуются всеми точными интегралами движения $\Lambda \equiv \{\pi J M_J M_T n a\}$. Остальные же квантовые числа функций (9) и (10) составляют набор $\{K\Gamma\}$, поэтому $\{K\Gamma\} \equiv \{E\Omega\beta\omega\alpha\tilde{\lambda}\tilde{\alpha}T L S\}$ для (9) и $\{K\Gamma\} \equiv \{E\gamma\delta\omega\alpha\lambda T L S\}$ для (10).

Каждый из наборов $\{K\Gamma\}$ состоит из индексов трех типов.

Во-первых, имеются индексы повторения $\beta, \alpha, \tilde{\alpha}$ или $\gamma, \delta, \alpha, \tilde{\alpha}$. Они не имеют смысла индексов, характеризующих неприводимые представления, и поэтому не стоит пытаться интерпретировать их как дополнительные интегралы движения.

Во-вторых, имеются индексы неприводимых представлений групп, ранг которых не зависит от числа нуклонов. Для ортогональной или унитарной схемы имеем квантовые числа S, T, L , далее $\tilde{\lambda}$ (в качестве U_4 -представления) и еще дополнительно для унитарной схемы \tilde{E} (в качестве U_3 -представления).

В-третьих, имеются индексы неприводимых представлений групп, ранг которых зависит от числа нуклонов, т. е. групп, связанных с многочастичными свойствами базиса. Для обеих схем имеем E , ω , λ (E — в качестве $U_{3(n-1)}$ -представления и λ — в качестве $S_n^{(r)}$ -представления), а также Ω для ортогональной и \tilde{E} (в качестве U_{n-1} -представления) для унитарной схем.

Согласно общим положениям, изложенным в разд. 2, в качестве дополнительного интеграла движения можно выбрать одно или несколько квантовых чисел из второго или третьего набора. На первый взгляд, кажется, что имеется слишком много возможностей, но далее установим, что большинство из них следует исключить по различным причинам.

Прежде чем приступить к обсуждению конкретных квантовых чисел из обоих наборов $\{KG\}$, сделаем одно замечание. Все дополнительные интегралы движения, которые будут обсуждаться в дальнейшем, имеют смысл неприводимых представлений непрерывных или дискретных групп, поэтому реализация базиса в $\mathcal{R}^{(\Lambda)}$ с помощью функций (9) или (10) исключительно удобна: при обеспечении условия (7) она позволяет пользоваться мощным алгебраическим аппаратом. Если дополнительный интеграл движения K имеет смысл неприводимого представления некоторой группы, тогда на теоретико-групповом языке проецирование $H_0^{(\Delta K)}$ из $H^{(\Lambda)}$ означает выделение из $H^{(\Lambda)}$ его скалярной части по отношению к преобразованиям этой группы.

Приступим к обсуждению конкретных наборов $\{KG\}$. Начнем с квантовых чисел для групп, ранг которых не зависит от числа нуклонов. Дополнительный интеграл движения $\tilde{\lambda}$ (в качестве U_4 -представления) должен быть исключен по следующей причине. Если проецировать H_0 из H , ограничивая H на подпространство $\mathcal{R}^{(\Lambda\tilde{\lambda})}$, т. е. если взять лишь U_4 — скалярную часть оператора H , тогда собственные значения гамильтониана $H^{(\Lambda\tilde{\lambda})}$ будут вырождены по отношению к S и T . Однако $S + L = J$, и, следовательно, из вырожденности по S вытекает частичное вырождение по общему моменту ядра J . Как следствие этого, спектр гамильтониана $H_0^{(\Lambda\tilde{\lambda})}$ окажется слишком простым, поэтому и не стоит вводить модель ядра, основанную на этом гамильтониане. Две другие возможности, основанные на использовании квантовых чисел S и T для ограничения оператора H , также не подходят: довольно просто учесть недиагональность по S и T (для этого нужно знать лишь коэффициенты Клебша — Гордана группы U_4 [1]) и нет необходимости использовать эти квантовые числа в качестве дополнительных интегралов движения.

Из вышесказанного заключаем, что не следует использовать спин-изоспиновые квантовые числа в качестве дополнительных интегралов движения. Существует также и другая, более глубокая

причина для этого вывода. Гамильтониан ядра зависит от спин-изоспиновых переменных через операторы групп U_4 и $S_n^{(\sigma\tau)}$ в связи с чем эта зависимость носит чисто алгебраический характер. Следовательно, нет необходимости ограничивать H на спин-изоспиновые квантовые числа; техника ограничения полезна, по существу, лишь для упрощения орбитальной части динамических уравнений.

Рассмотрим возможности, заложенные в квантовых числах, характеризующих неприводимые представления других групп, ранг которых не зависит от числа нуклонов. Остались только две еще не рассмотренные нами группы, а именно U_3 и O_3^+ : из H можно выделить либо O_3^+ -скалярную, либо U_3 -скалярную часть. На первый взгляд, последняя возможность должна быть исключена по той же причине, что и в случае U_3 -скалярного гамильтониана; ограничение на неприводимое пространство группы U_3 ведет к вырождению энергии по орбитальному квантовому числу L и, следовательно, к частичному вырождению по J . Однако это возражение отпадает по той причине, что в отличие от U_4 -скалярного гамильтониана в этом случае можно снять вырождение по L с помощью дополнительного слагаемого в операторе H_0 .

Приступим к обсуждению квантовых чисел, связанных с многочастичными свойствами базисов (9) или (10). Возьмем сначала E и Ω с E в качестве $U_{3(n-1)}$ -неприводимого представления. Очевидно, что орбитальная часть $U_{3(n-1)}$ -скалярного гамильтониана H_0 , выделенного из H , почти столь же проста, что и гамильтониан \hbar и, следовательно, не подходит для наших целей. Несколько более сложный, но все же еще слишком простой гамильтониан H_0 выделен с помощью $O_{3(n-1)}$ -неприводимого представления Ω . Матрица $U_{3(n-1)}$ - или $O_{3(n-1)}$ -скалярного гамильтониана обладает высокой степенью вырождения и, в частности, не зависит от L . Это вырождение не удастся снять дополнительными слагаемыми, в связи с чем квантовые числа групп $U_{3(n-1)}$ и $O_{3(n-1)}$ не пригодны для построения модели с ограниченной динамикой.

Нами еще не рассматривались три квантовых числа: λ (в качестве $S_n^{(r)}$ -представления), E (в качестве U_{n-1} -представления) и ω . Использование всех их в качестве дополнительных интегралов движения ведет к сложным гамильтонианам H_0 . Проецирование с помощью квантового числа λ дает гамильтониан супермультиплетной схемы [6, 7] (см. также [8, 4]). В рамках этой схемы немало работ посвящено изучению ряда свойств ядер, таких, как вероятности β - и γ -переходов, магнитные моменты, общая тенденция зависимости энергии связи от супермультиплетных квантовых чисел и т. п.

Тем не менее эта схема является слишком общей для изучения более широкого круга вопросов. Как отмечено в [8], она нуждается в большей детализации. Это и осуществляется путем введения квантовых чисел E и ω , характеризующих U_{n-1} - и O_{n-1} -не-

приводимые свойства базисных функций (9) и (10). Квантовые числа E и ω послужат важнейшими дополнительными интегралами движения для построения микроскопической теории ядра в рамках ограниченной динамики.

Подведем итоги. Кроме хорошо известной супермультиплетной схемы, которая во многих отношениях чересчур обща, конструктивный и нетривиальный гамильтониан H_0 ожидается только в случае ограничения H на O_3^+ , U_3^- , O_{n-1} и U_{n-1} -неприводимые пространства. Очевидно, что наиболее сложный гамильтониан H_0 обладает наименьшей симметрией, поэтому получаем наиболее сложную модель при проецировании H_0 из H с помощью дополнительных интегралов движения ω и L . В этом случае гамильтониан H_0 состоит из трех слагаемых: H'_1 , который является O_3^+ -скаляром, но не O_{n-1} -скаляром; H'_3 , который является O_{n-1} -скаляром, но не O_3^+ -скаляром; и, наконец, слагаемого H'_2 , скалярного по отношению к обеим группам O_3^+ и O_{n-1} . Для этого гамильтониана введем обозначение

$$H'_0 = H'_1 + H'_2 + H'_3. \quad (12)$$

Вторая возможность связана с унитарными группами U_3 и U_{n-1} . Аналогично предыдущему введем гамильтониан H''_0 , состоящий из трех слагаемых: H''_1 , который является U_{n-1} -скаляром, но не U_3 -скаляром; H''_3 , который является U_3 -скаляром, но не U_{n-1} -скаляром; и слагаемого H''_2 , скалярного по отношению к обеим группам U_3 и U_{n-1} . Введем обозначение

$$H''_0 = H''_1 + H''_2 + H''_3. \quad (13)$$

Если понадобится соединить два слагаемых, входящих в (12) или (13), то будем писать $H''_{12} = H''_1 + H''_2$ и т. п. Заметим также, что можно осуществить ограничение гамильтониана H на неприводимые пространства групп U_3 и O_{n-1} или групп O_3^+ и U_{n-1} .

Из вышесказанного заключаем, что в рамках метода построения моделей, о котором шла речь во введении, кроме гамильтониана супермультиплетной схемы, получаем еще два подходящих гамильтониана H'_0 и H''_0 ; специфика этих операторов задается реализацией \mathcal{R}^Λ с помощью кинематически корректных базисов (9) или (10). Теперь, согласно четвертому пункту программы, приступим к более детальному изучению этих гамильтонианов и свойств их собственных состояний. Воспользуемся для этих целей подходящим математическим аппаратом, к описанию которого сейчас и перейдем.

4. ОБЩИЙ ВИД ОПЕРАТОРОВ И ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Ограниченный объем настоящей статьи не позволяет подробно обсудить свойства всех слагаемых гамильтонианов (12) и (13),

поэтому сосредоточим основное внимание на операторе $H'_{23} = H'_2 + H'_3$, имеющем, как это увидим в дальнейшем, самое прямое отношение к изучению коллективных степеней свободы ядра. По определению этот оператор имеет смысл O_{n-1} -скалярной части гамильтониана ядра H . Ближайшая наша цель — выяснить физический смысл пока еще абстрактно определенного гамильтониана H'_{23} . Результат окажется очень простым: H'_{23} представляет всю коллективную часть исходного гамильтониана H . В дальнейшем также получим разложение H (и даже более общее разложение произвольных операторов, используемых в теории ядра) в ряд, первые члены которого представляют O_{n-1} -скалярное (т. е. коллективное) слагаемое, а остальные дают слагаемые, зависящие как от коллективных, так и от неколлективных (внутренних) переменных ядра. При использовании гильбертова пространства $\mathcal{H}^{(\Lambda)}$, реализованного на базисных функциях (9) или (10), такое разложение естественно при изучении коллективных эффектов и эффектов, обусловленных взаимодействием коллективных и внутренних степеней свободы ядра.

Вышеставленную задачу можно решить двумя способами, первый из которых построен исключительно на матричном представлении операторов с последующим их разложением в O_{n-1} -неприводимый ряд. Это представление является оптимальным во многих отношениях. Однако матричное разложение не столь наглядно по сравнению с другим разложением, основанным частично на матричном, а частично на координатном представлении.

Поэтому ниже рассмотрим лишь второй способ O_{n-1} -неприводимого разложения произвольных операторов, встречаемых в теории ядра. Этот способ предложен в [9].

Получить O_{n-1} -неприводимое разложение непросто, поэтому, чтобы дальнейшее изложение было более понятным, отметим основные его этапы.

Сначала обсуждаются общие свойства и структура подлежащих разложению операторов. Далее коротко описаны формулы перехода к новым, коллективным и внутренним переменным, включая формулы для дифференциальных операторов.

Следующий шаг при получении O_{n-1} -неприводимого разложения операторов связан с удобной реализацией гильбертова пространства по отношению к внутренним переменным, по которым осуществлен переход от координатного к матричному представлению. Затем выяснен смысл O_{n-1} -скалярного гамильтониана H'_{23} , изучена матрица этого гамильтониана, построен полный базис, зависящий от коллективных переменных, и, наконец, из H выделена его коллективная часть.

Начнем с рассмотрения общего вида операторов, встречаемых в теории ядра. Следуя [9], изучим трансляционно-инвариантные

операторы следующего вида:

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} = \sum_{i=1}^n U_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j) \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (14)$$

Здесь σ_i и τ_i обозначают спиновые и изоспиновые переменные i -го нуклона; $\hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}$ — произвольный двухчастичный спин-изоспиновый оператор, симметричный по отношению к перестановке индексов i и j и преобразующийся по O_3^+ -неприводимому представлению κ' , базис которого обозначен через μ' . Аналогично $\hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}$ — произвольный, симметричный по индексам i и j оператор, зависящий от расстояния между нуклонами и преобразующийся по O_3^+ -неприводимому представлению κ'' с базисом μ'' . Каждое слагаемое гамильтониана (5) можно записать в следующем виде (см., например, (8.8) — (8.12) в [1]):

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \hat{\mathcal{O}}_{\mu-\mu}^{\kappa\kappa} = \sum_{i>j=1}^n \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \hat{U}_{\mu}^{\kappa}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j) \hat{W}_{-\mu}^{\kappa}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (15)$$

Наряду с (14) рассмотрим также и операторы одночастичного типа. Как правило, они записаны в однонуклонных переменных \mathbf{r}_i и поэтому, вообще говоря, не являются трансляционно-инвариантными. Чтобы подчеркнуть в явном виде это свойство, введем переменные $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, отсчитанные от вектора центра масс \mathbf{R} , где $n\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_n$. В переменных $\dot{\mathbf{r}}_i$ операторы одночастичного типа имеют следующий общий вид (см., например, (8.13) в [1]):

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n \hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_i \tau_i) \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{R}), \quad (16)$$

где введенные обозначения аналогичны обозначениям в (15). Воспользуемся тем обстоятельством, что на базисе антисимметричных функций

$$\langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} | \Gamma' \rangle = n \langle \Gamma | \hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_n \tau_n) \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{R}) | \Gamma' \rangle \quad (17)$$

для операторов одночастичного типа и

$$\langle \Gamma | \hat{\mathcal{O}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} | \Gamma' \rangle = [n(n-1)/2 \langle \Gamma | \hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_{n-1} \tau_{n-1} \sigma_n \tau_n) \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n) | \Gamma' \rangle] \quad (18)$$

для операторов двухчастичного типа. Последние две формулы показывают, что задача O_{n-1} -неприводимого разложения многочастичных операторов сводится к разложению либо одночастичного оператора $\hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{R})$, либо двухчастичного оператора $\hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n)$. Вспомним также, что при стандартном определе-

нии векторов Якоби ρ_i (см., например, (16.5) в [4]) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_n &= -\sqrt{(n-1)/n} \rho_{n-1}; \\ r_{n-1} - r_n &\equiv \sqrt{2} \rho_n = \sqrt{n/(n-1)} \rho_{n-1} - \sqrt{(n-2)/(n-1)} \rho_{n-2}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и, значит, оба оператора \hat{W} имеют вид

$$\hat{W}_{\mu''}^{\mu''} (c_t \rho_t + c'_t \mathbf{R}), \quad (20)$$

где индекс t принимает два значения $n - 1$ и a ; $\sqrt{nc_t} = -\sqrt{n-1}$, $c'_t = 1$ для одночастичных и $c'_t = \sqrt{2}$, $c'_t = 0$ для центральных двухчастичных операторов. Для простоты вместо выражения (20) в дальнейшем будем сокращенно писать $\hat{W}(\rho_i)$.

Нам предстоит осуществить замену переменных в операторе (20). С этой целью воспользуемся явным выражением переменных Якоби через новые переменные. Удобно вместо 3-мерных векторов Якоби рассматривать r_0 -мерные векторы ρ_i . Такое обобщение позволяет проследить симметрию между r_0 -мерным пространством, в котором двигаются частицы, и r -мерным пространством, размерность которого связана с общим числом частиц. Оно также полезно при рассмотрении методических задач, таких, например, как двумерное движение частиц и т. п. В тех случаях, когда понадобится перейти от общих выражений к $n - 1$ квазичастицам, движущимся в 3-мерном пространстве, будем без дополнительных объяснений полагать, что $r_0 = 3$ и $r = n - 1$. Компоненты векторов ρ_i^s обозначим ρ_i^s , где $i = 1, 2, \dots, r$ и $s = 1, 2, \dots, r_0$. В дальнейшем будем также пользоваться специальным индексом s_0 , пробегающим значения $s_0 = 1, 2, \dots, r_0$ при $r_0 \leq r$ и значения $s_0 = 1 + r_0 - r, 2 + r_0 - r, \dots, r_0$ при $r_0 \geq r$.

Введем оператор вращения a -мерного пространства \hat{T} . Матрицу оператора вращения в плоскости $(p - 1) p$ ($p = 2, 3, \dots, a$), зависящую от параметра $\vartheta_p^{(t)}$, обозначим $T_{(p-1)p}^t(\vartheta_p^{(t)})$. Наряду с операторами вращения нам понадобится также оператор отражения $\hat{\sigma}$. Элементы группы отражения r -мерного пространства обозначим σ_r (подробности об операторах \hat{T} и $\hat{\sigma}$ см., например, в [2, 3]). Введем также следующее произведение матриц вращения:

$$D(a, b) = \prod_{k=0}^{a-2} T_{a-b-k, a-b+1-k}^{(a-b+1)}(\vartheta_{a-b+1-k}^{(a-b+1)}) \times \\ \times T_{a-b+1-k, a-b+2-k}^{(a-b+2)}(\vartheta_{a-b+2-k}^{(a-b+2)}) \dots T_{a-1-k, a-k}^{(a)}(\vartheta_{a-k}^{(a)}), \quad (21)$$

в котором подразумевается, что множители с меньшим k находятся слева и берутся лишь матрицы $T(p - 1) p$ с $p > 1$. Переменные ϑ_p принимают значения $0 \leq \vartheta_p < \pi$ при $p > 2$ и $0 \leq \vartheta_2 < 2\pi$

при $p = 2$. Определим r -мерную матрицу $D^{(1r)}(q^+)$, где

$$D^{(1r)}(q^+) = \begin{cases} D(r, r_0) & \text{при } r_0 < r; \\ D(r, r-1) & \text{при } r_0 \geq r. \end{cases} \quad (22)$$

Аналогично определим r_0 -мерную матрицу $D^{(1r_0)}(G^+)$, которая задается выражением (22), если в нем поменять местами индексы r_0 и r . В этих выражениях q^+ и G^+ соответственно означают наборы $(1/2)r_0(r_0-1)$ и $(1/2)r_0(2r-r_0-1)$ непрерывных переменных ϕ при $r_0 \leq r$ или соответственно $(1/2)r(2r_0-r-1)$ и $(1/2)r \times (r-1)$ непрерывных переменных ϕ при $r_0 \geq r$. В теории групп q^+ называют переменными, заданными на фактор-пространстве $O_{r-r_0}^+ \sim O_r^+$, где $r = \min(r_0, r)$. Аналогичный смысл имеют и переменные G^+ (подробности см., например, в [2, 3]).

Дополним операцию вращения операцией отражения и введем r -мерную матрицу с отражением:

$$D^{(1r)}(\sigma q^+) = \sigma_r D^{(1r)}(q^+), \quad (23)$$

где σ_r — либо r -мерная единичная матрица (тогда в аргумент матрицы левой части выражения (23) будем писать $\sigma = 0$), либо r -мерная матрица отражения, т. е. матрица, отличающаяся от единичной r -мерной матрицы только знаком последнего диагонального элемента (тогда в левой части (23) положим $\sigma = 1$).

Случай одночастичных и центральных двухчастичных операторов можно охватить введением следующего преобразования векторов Якоби (см. (16.9) в [4]):

$$\begin{aligned} & |\rho_1 \dots \rho_{r-2} \rho_s \rho_a| = \\ & = |\rho_1 \dots \rho_{r-2} \rho_{r-1} \rho_r| \begin{array}{|c|c|c|} \hline e_{r-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{(r+1)/2r} & -\sqrt{(r-1)/2r} \\ \hline 0 & \sqrt{(r-1)/2r} & \sqrt{(r+1)/2r} \\ \hline \end{array}, \quad (24) \end{aligned}$$

где e_{r-2} — $r-2$ -мерная единичная матрица. При $r = n-1$ из (24) получаем вектор ρ_a . Преобразование (24), разумеется, принадлежит группе O_r . Матрицу этого преобразования обозначим g_0 и введем

$$D^{(1r)}(\sigma q^+ g) = D^{(1r)}(\sigma q^+) g_0. \quad (25)$$

В дальнейшем будет удобно полагать, что g в левой части выражения (25) принимает два значения, а именно, что g есть либо матрица в (24) (тогда будем писать $g = g_0$), либо единичная r -мерная матрица (тогда положим $g = e$).

Матричные элементы матриц $D^{(1r_0)}(G^+)$ и $D^{(1r)}(\sigma q^+ g)$ будут использованы в качестве функций, с помощью которых осуще-

ствляется замена переменных. Выражение ρ_i^s через новые переменные имеет следующий вид:

$$\rho_i^s = \sum_{s_0} \rho^{(s_0)} D_{s_0 s}^{(1r_0)} (G^+) D_{r-r_0+s_0, i}^{(1r)}, \quad (26)$$

где $\rho^{(s_0)}$ — переменные радиального типа, принимающие значения в интервале $0 \leq \rho^{(s_0)} < +\infty$. При $r_0 = 3$, $\sigma = 0$ и $g = e$ это выражение, записанное в несколько иной форме, предложено в [10, 11] (см. также [12]). В неявном виде переменные $\rho^{(s_0)}$, G^+ и q^+ использованы в [13]. Дискретные переменные, задающие отражение, введены в [14].

Оператор (20) зависит, вообще говоря, также и от производных по ρ_i^s . Для замены переменных в дифференциальных операторах следует знать выражение производных по ρ_i^s в новых переменных. При $r_0 = 3$ оно получено в [15]. Обобщенное на случай произвольных r_0 это выражение имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_i^s} = & \sum_{s'_0} D_{s'_0 s}^{(1r_0)} D_{r-r_0+s'_0, i}^{(1r)} \frac{\partial}{\partial \rho^{(s'_0)}} - \sum_{s'} \sum_{i'} D_{s' s}^{(1r_0)} D_{s' s}^{(1r_0)} D_{i' r}^{(1r)} \hat{\mathcal{K}}(s' i') - \\ & - \sum_{s'_0 > s''_0} \left[\frac{\rho^{(s'_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s'_0 s}^{(1r_0)} D_{r-r_0+s'_0, i}^{(1r)} + \right. \\ & \left. + \frac{\rho^{(s'_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s''_0 s}^{(1r_0)} D_{r-r_0+s'_0, i}^{(1r)} \right] \hat{\mathcal{J}}_{r-r_0+s'_0, r-r_0+s''_0} - \\ & - \sum_{s'_0 > s''_0} \left[\frac{\rho^{(s'_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s'_0 s}^{(1r_0)} D_{r-r_0+s'_0, i}^{(1r)} + \right. \\ & \left. + \frac{\rho^{(s''_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s'_0 s}^{(1r_0)} D_{r-r_0+s'_0, i}^{(1r)} \right] \hat{\mathcal{L}}_{s'_0 s''_0}, \quad (27) \end{aligned}$$

где s'_0 и s''_0 принимают те же значения, что и s_0 в (26). В (27) матричные элементы матриц $D^{(1r_0)}$ и $D^{(1r)}$ соответственно зависят от G^+ и $\sigma q^+ g$. Если $r > r_0$, то во втором слагаемом выражения (27) индексы суммирования принимают значения $s' = 1, 2, \dots, r_0$ и $i' = 1, 2, \dots, r - r_0$, а

$$\hat{\mathcal{K}}(s' i') = (1/\rho^{(s')}) \hat{\mathcal{J}}_{r-r_0+s', i}. \quad (28)$$

Если $r > r_0$, тогда $s' = 1, 2, \dots, r_0 - r$; $i' = 1, 2, \dots, r$ и

$$\hat{\mathcal{K}}(s' i') = (1/\rho^{(r_0-r+i')}) \hat{\mathcal{L}}_{r_0-r+i', s'}. \quad (29)$$

При $r = r_0$

$$\hat{\mathcal{K}}(s' i') \equiv 0. \quad (30)$$

$\hat{\mathcal{J}}$ и \mathcal{L} в (27) — это операторы левого сдвига для групп $O_{r_0}^+$ и O_r^+ [2, 3]. Чтобы дать их определение, удобно несколько изменить обозначения угловых переменных ϑ . Совокупность переменных в том порядке, в каком они входят в произведение (21), переобозначим через

$$\vartheta_a^{(a-b+1)}\vartheta_a^{(a-b+2)} \dots \vartheta_a^{(a)}, \vartheta_{a-1}^{(a-b)}\vartheta_{a-1}^{(a-b+1)} \dots$$

$$\dots \vartheta_{a-1}^{(a-1)}, \dots, \vartheta_4^{(2)}\vartheta_4^{(3)}\vartheta_4^{(4)}, \vartheta_3^{(2)}\vartheta_3^{(3)}, \vartheta_2^{(2)}, \quad (31)$$

или вкратце $\vartheta_t^{(\kappa)}$, где $t = a, a - 1, \dots, 2$ и $\kappa = t - b + 1, t - b + 2, \dots, t$ ($\kappa > 1$). Пусть $q_{t\kappa}^+$ — все переменные, находящиеся в (31) по левую сторону от $\vartheta_t^{(\kappa)}$, и пусть $\tilde{q}_{t\kappa}^+$ обозначает переменную $\vartheta_t^{(\kappa)}$ и все переменные, находящиеся по правую сторону от $\vartheta_t^{(\kappa)}$. Тогда, согласно определению, операторы $\hat{\mathcal{J}}_{jj'}$ (аналогично и операторы $\hat{\mathcal{L}}_{jj'}$) можно найти из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_t^{(\kappa)}} = \sum_{j>j'} \hat{\mathcal{J}}_{jj'} D_{jj', \kappa, \kappa-1}^{(11)}(q_{t\kappa}^+) \quad (32)$$

для всех t и κ . В (32) введены следующие матричные элементы:

$$D_{j_1 j_2, j_3 j_4}^{(11)}(q_{t\kappa}^+) = D_{j_1 j_3}^{(1r)}(q_{t\kappa}^+) D_{j_2 j_4}^{(1r)}(q_{t\kappa}^+) -$$

$$- D_{j_2 j_4}^{(1r)}(q_{t\kappa}^+) - D_{j_1 j_4}^{(1r)}(q_{t\kappa}^+) D_{j_2 j_3}^{(1r)}(q_{t\kappa}^+). \quad (33)$$

Матрица $D^{(11)}$ является матрицей O_r -неприводимого представления (11) $\equiv (110 \dots 0)$, что вытекает из определения (33) и явного вида соответствующих коэффициентов Клебша — Гордана для группы O_r (см. (3.17) в [16]); при $r > 3$ по представлению (11) преобразуются также и сами инфинитезимальные операторы $\hat{\mathcal{J}}_{jj'}$. Можно доказать, что $\hat{\mathcal{J}}_{ii'}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{\mathcal{J}}_{i_1 i_2}, \hat{\mathcal{J}}_{i_3 i_4}] = \hat{\mathcal{J}}_{i_1 i_3} \delta(i_2 i_4) + \hat{\mathcal{J}}_{i_2 i_4} \delta(i_2 i_3) - \hat{\mathcal{J}}_{i_2 i_3} \delta(i_1 i_4). \quad (34)$$

В выкладках с выражениями (27) удобно пользоваться алгеброй тензорных операторов для группы O_r ; пример таких выкладок приведен в [1]. Для вычисления субматриц полезно знать явное выражение одного из операторов $\hat{\mathcal{J}}$. Наиболее простой вид имеет оператор

$$\hat{\mathcal{J}}_{a-b+1, a-b} = \partial / \partial \vartheta_{n-1}^{(n-3)}. \quad (35)$$

В (35) использованы обозначения, примененные в (27). Нетрудно проверить, что оператор (35) является O_{r-4} -скаляром, преобразуется по O_{r-3} -неприводимому представлению (1), O_{r-2} -неприводимому

представлению (11) и O_{r-1} -неприводимому представлению (11); эти свойства преобразования следует знать при использовании теоремы Вигнера — Экарта для операторов группы O_r .

5. O_{n-1} -НЕПРИВОДИМОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ $\hat{W}(\rho_i)$

Используем формулы (26) и (27) для двух наборов переменных Якоби, а именно $\rho_1, \dots, \rho_{r-2}, \rho_{r-1}, \rho_r$ или $\rho_1, \dots, \rho_{r-2}, \rho_s, \rho_a$, связанных преобразованием (24). Примем в (26) $g = e$ и рассмотрим это выражение, записанное для двух наборов угловых переменных q^+ и q'^+ , соответствующих каждому набору вышеприведенных координат Якоби. Связь между углами, составляющими наборы q^+ и q'^+ , можно найти, подставив в (24) выражения (26) для обоих наборов координат Якоби. Используя ортогональность матриц $D^{(1r)}$ получим следующее равенство для матричных элементов матрицы $D^{(1r)}$:

$$D_{r-r_0+s_0, i}^{(1r)}(\sigma q'^+) = D_{r-r_0+s, i}^{(1r)}(\sigma q^+ g_0). \tag{36}$$

Подставляя выражения (21) для матричных элементов матрицы $D^{(1r)}$ и сокращая одинаковые операторы T , а также и σ , для $r_0 = 3$ получаем

$$\begin{aligned} T_{r-3\ r-2}^{(r-2)}(\vartheta_{r-2}^{(r-2)}) T_{r-2\ r-1}^{(r-1)}(\vartheta_{r-1}^{(r-1)}) T_{r-1\ r}^{(r)}(\vartheta_r^{(r)}) T_{r-4\ r-3}^{(r-2)}(\vartheta_{r-3}^{(r-2)}) T_{r-3\ r-1}^{(r-1)} \times \\ \times (\vartheta_{r-2}^{(r-1)}) T_{r-2\ r-1}^{(r)}(\vartheta_{r-1}^{(r)}) = T_{r-3\ r-2}^{(r-2)}(\vartheta_a^{r-2}) T_{r-2\ r-1}^{(r-1)}(\vartheta_a^{r-1}) T_{r-1\ r}^{(r)}(\vartheta_a^r) \times \\ \times T_{r-4\ r-3}^{(r-2)}(\vartheta_s^{r-2}) T_{r-3\ r-2}^{(r-1)}(\vartheta_s^{r-1}) T_{r-2\ r-1}^{(r)}(\vartheta_s^r) g_0^{-1}. \end{aligned} \tag{37}$$

В правой части последнего матричного соотношения введенные угловые переменные $\vartheta_a^{r-2}, \vartheta_a^{r-1}, \vartheta_a^r, \vartheta_s^{r-2}, \vartheta_s^{r-1}, \vartheta_s^r$ пробегает те же интервалы значений, что и соответствующие им переменные $\vartheta_{r-2}^{(r-2)}, \vartheta_{r-1}^{(r-1)}, \vartheta_r^{(r)}, \vartheta_{r-3}^{(r-2)}, \vartheta_{r-2}^{(r-1)}, \vartheta_{r-1}^{(r)}$. Напомним, что при малых r в (37) остаются лишь операторы $T_{p-1\ p}$ с $p > 1$ и, следовательно, имеется меньше шести параметров ϑ . В дальнейшем будет удобно обозначать оба этих набора углов единым образом; будем писать $\vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_1, \vartheta'_3, \vartheta'_2, \vartheta'_1$, подразумевая при этом углы в левой части (37), если речь идет о переменных ρ_r, ρ_{r-1} , либо углы в правой части (37), если рассматриваются переменные ρ_a, ρ_s .

Перемножая матрицы T в (37), легко убедиться в том [1], что предпоследний столбец матриц $D^{(1r)}(q^+)$ или $D^{(1r)}(q'^+)$ зависит от шести углов $\vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_1, \vartheta'_3, \vartheta'_2, \vartheta'_1$. Последний же столбец этой матрицы зависит лишь от трех углов $\vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_1$, набор которых обозначим \bar{q}^+ . Отсюда заключаем, что для $i = r - 1, r$ правая и левая части соотношений (36) зависят лишь от шести непрерывных переменных, а равенства (37) выражают функциональную связь между ними. Явный вид входящих в (37) матричных элементов дан в [1] [см. (8.21)]. Ниже приведем их выражения лишь для

последнего столбца. При $r > 3$ все они равны нулю, за исключением следующих четырех матричных элементов:

$$\left. \begin{aligned} D_{r-3, r}^{(1r)}(\bar{q}^+) &= \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1; \\ D_{r-2, r}^{(1r)}(\bar{q}^+) &= \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1; \\ D_{r-1, r}^{(1r)}(\bar{q}^+) &= \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1; \\ D_{r, r}^{(1r)}(\bar{q}^+) &= \cos \vartheta_1. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Выписывая в явном виде компоненты 3-мерных векторов ρ_t ($t = n-1$ или $t = a$), получаем

$$\rho_t^s = \sum_{s_0} \rho^{(s_0)} D_{s_0 s}^{(1s)}(G^+) D_{n-4+s_0, r}^{(1n-1)}(\sigma \bar{q}^+) \quad (39)$$

и, следовательно,

$$|\rho_t| = \left(\sum_{s_0} (\rho^{(s_0)})^2 D_{n-4+s_0, n-1}^{(1n-1)}(\sigma \bar{q}^+)^{1/2} \right)^2, \quad (40)$$

где матричные элементы матрицы $D^{(1n-1)}(\bar{q}^+)$ имеют выражения (38), а $D_{s_0 s}^{(1s)}(G^+)$ — матричные элементы матрицы трехмерных вращений в декартовом базисе определены с помощью (22). Матричные элементы (38) также входят и в выражения для производной по ρ_i^s . Ввиду того что $D_i^{(1n-1)}(\bar{q}^+)$ с $i' < n-4$ исчезает, в выражении (27) для переменной ρ_i^s при $n > 4$ присутствует только одно слагаемое по i' , содержащее оператор $\mathcal{J}_{n-4+s', n-4}$. В итоге заключаем, что производная по ρ_i^s зависит лишь от непрерывных переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ и \bar{q}^+ , а также от σ и инфинитезимальных операторов $\hat{\mathcal{J}}_{s_0 s_0}$ и $\hat{\mathcal{L}}_{s_0 s_0}$.

Формулы (39), (27) и (38) дают явные выражения для ρ_i^s и производных по ρ_i^s через новые переменные $\rho^{(s_0)}$, G^+ и $\sigma \bar{q}^+$. Подставляя эти выражения в (20), получаем следующий оператор $\hat{W}(\rho_t)$:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\mu}^{(\mu')} &= W_{\mu}^{(\mu')}(\rho^{(s_0)}, \partial/\partial \rho^{(s_0)}, G^+, \\ &\quad \hat{\mathcal{L}}_{s_0 s_0}, \sigma \bar{q}^+, \hat{\mathcal{J}}_{s_0 s_0}). \end{aligned} \quad (41)$$

Это выражение, наряду с формулами (17) или (18), завершает первый этап O_{n-1} -неприводимого разложения произвольных операторов вида (14) или (16).

Второй этап этого разложения осуществим двумя ступенями. Сначала усредним (41) по переменным $\sigma \bar{q}^+$, т. е. по этим переменным перейдем к матричному представлению. Затем возьмем определенные линейные комбинации усредненного оператора и на этом закончим O_{n-1} -неприводимое разложение оператора $\hat{W}(\rho_t)$.

Прежде чем начать описание подходящего класса функций, на которых будет осуществлено усреднение оператора (41), введем еще одно обозначение. Набор переменных, дополняющих \bar{q}^+ до q^+ или до q'^+ , обозначим q_i^+ , следовательно, $q^+ \equiv \bar{q}^+ q_i^+$ либо $q^+ \equiv \bar{q}'^+ q_i^+$ в зависимости от того, идет ли речь о координатах Якоби ρ_{n-1}, ρ_{n-2} или ρ_a, ρ_s . Пусть теперь Q в (9) или (10) обозначает набор переменных $\rho^{(s_0)}, G^+$ и $\sigma \bar{q}^+ q_i^+$. Эти функции характеризуются орбитальным квантовым числом L , поэтому их зависимость от углов G^+ можно выделить в форме

$$D_{KM}^L(G^+). \quad (42)$$

Здесь D^L — матрицы неприводимого представления группы O_3^+ . Аналогично зависимость функций (9) или (10) от переменных $\sigma \bar{q}^+ q_i^+$ можно выделить в виде следующих функций [14]:

$$D_{\nu^0, \alpha\lambda\mu}^\omega(\sigma \bar{q}^+ q_i^+), \quad (43)$$

где D^ω — матрицы O_{n-1} -неприводимого представления ω , μ — базис $S_n^{(\nu)}$ -неприводимого представления λ . Функции (42) и (43) сходны во многих отношениях, и это сходство обуславливается тем, что (42) и (43) являются матричными элементами матриц неприводимых представлений ортогональных групп. Однако между ними существуют и некоторые различия. Во-первых, столбцы матрицы D^L нумеруются проекциями M , наличие которых позволяет конструировать функции (9) или (10) с общим моментом J . Аналогично столбцы в (43) нумеруются индексами $\alpha\lambda\mu$, наличие которых позволяет построить антисимметрические базисные функции. Из-за последнего требования пользуемся неприводимыми матрицами D^ω ортогональной группы с отражением, зависящим, кроме непрерывных переменных, также и от переменной σ . Наличие дискретной переменной существенно при построении функций (43); невозможно фиксировать правильный базис, характеризуемый определенной схемой Юнга для функций $D_{\nu^0, \alpha\lambda\mu}^\omega$, заданных только на множестве непрерывных переменных $\bar{q}^+ q_i^+^*$.

Второе различие между (42) и (43) отражено в обозначениях строк: при $n > 3$ в разложениях (9) или (10) через (42) присутствуют все строки матрицы D^L , тогда как в разложении по матричным элементам (43) пользуемся только частью строк матрицы D^ω [1—3, 14]; условимся считать, что на это обстоятельство в (43) указывает верхний индекс нуль в ν . Несколько различных цепочек можно использовать для нумерации ν^0 , причем одна из них связана с группой 3-мерных вращений с отражением, вложенной

* Это обстоятельство упущено из виду в [17], где в упрощенной форме переписаны результаты, взятые из работы [14].

в O_{n-1} по цепочке $O_{n-1} \supset O_3 \dot{+} O_{n-4}$. В этом случае v^0 обозначает совокупность индексов $\beta_\nu l_\nu m_\nu$, где $l_\nu m_\nu$ — квазиоммент и его проекция, связанные с абстрактным 3-мерным пространством, натянутым на векторы Якоби $\rho_{n-3}, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}$; β_ν — индекс повторения на цепочке $O_{n-1} \supset O_3 \dot{+} O_{n-4}$. Эти квантовые числа введены в [14].

Благодаря O_r -неприводимым свойствам, (43) является оптимальным базисом для разложения произвольных функций, зависящих от переменных $\sigma\bar{q}^+q_1^+$. Этот набор дает именно тот класс функций, на которых следует усреднить оператор (41). Предварительно удобно выделить зависимость функций (43) от переменных \bar{q}^+ . Это осуществляется с помощью некоторой численной матрицы A , введенной в работе [18], матричные элементы которой принято называть генеалогическими коэффициентами. Для получения генеалогического разложения функций (43) используем тождество $\sigma\bar{q}^+q_1^+ \equiv \sigma\bar{q}^+\sigma_1^{-1}\sigma_0^{-1}\sigma_0\sigma_1q_1^+$, в котором σ_1 и σ_0 — дискретные переменные, дополняющие элементы групп O_{n-2}^+ и O_1^+ , вложенных в O_{n-1}^+ по цепочке $O_{n-1}^+ \supset O_{n-2}^+ \dot{+} O_1^+$, до групп O_{n-2} и O_1 , вложенных в O_{n-1} по цепочке $O_{n-1} \supset O_{n-2} \dot{+} O_1$ *. Далее матричные элементы (43) разложим на сумму произведений элементов, соответственно зависящих от $\sigma\bar{q}^+\sigma_1^{-1}\sigma_0^{-1}$, σ_0 и $\sigma_1q_1^+$, одновременно образуя их линейные комбинации с помощью матричных элементов матрицы A . Окончательные выражения имеют следующий вид:

$$D_{\nu^0, \alpha\lambda\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\omega}(\sigma\bar{q}^+q_1^+) = \sum_{\bar{\omega}\bar{\alpha}\bar{\nu}^0} D_{\nu^0, \bar{\omega}\bar{\nu}^0}^{\bar{\omega}}(\sigma\bar{q}^+\sigma_1^{-1}) D_{\bar{\nu}^0, \alpha\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\bar{\omega}}(\sigma_1q_1^+) A_{\bar{\omega}\bar{\alpha}, \alpha\bar{\lambda}}^{(\bar{\omega}\bar{\lambda})} \quad (44)$$

для одночастичных операторов и

$$\begin{aligned} & D_{\nu^0, \alpha\lambda\lambda_{12}\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\omega}(\sigma\bar{q}^+q_1^+) = \\ & = \sum_{\bar{\omega}\bar{\alpha}\bar{\nu}^0} D_{\nu^0, \bar{\omega}\bar{\nu}^0}^{\bar{\omega}}(\sigma\bar{q}^+\sigma_1^{-1}) D_{\bar{\nu}^0, \bar{\omega}\bar{\alpha}\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\bar{\omega}}(\sigma_1q_1^+) A_{\bar{\omega}\bar{\alpha}, \bar{\omega}\bar{\alpha}}^{(\bar{\omega}\lambda_{12}\bar{\lambda})} \end{aligned} \quad (45)$$

для центральных двухчастичных операторов. В двух последних формулах $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ и λ_{12} соответственно обозначают неприво-

* Это тождество становится более наглядным при рассмотрении общего случая генеалогического разделения для системы, состоящей из r квазичастиц, на подсистеме, состоящие из r_1 и r_2 квазичастиц ($r_1 + r_2 = r$). Тогда имеем цепочку $O_r^+ \supset O_{r_1}^+ \dot{+} O_{r_2}^+$ (ее параметры $q_0^+q_1^+q_2^+$) [19], а также цепочку $O_r \supset O_{r_1} \dot{+} O_{r_2}$ и приспособленное для нее тождество $\sigma_r q_0^+q_1^+q_2^+ \equiv \sigma_r q_0^+\sigma_{r_1}^{-1} \times \times \sigma_{r_2}^{-1}(\sigma_{r_2}q_{r_2}^+)(\sigma_{r_1}q_{r_1}^+)$. Здесь рассматривается лишь частный случай $r_1 = n - 2$ и $r_2 = 1$, когда $O_{r_2}^+$ вырождается до тривиальной группы O_1^+ , состоящей из единичного элемента.

димые представления для групп O_{n-2} , O_{n-3} , O_{n-4} , S_{n-1} , S_{n-2} и S_2 ; $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$ — индексы повторения для цепочек $O_{n-2} \supset S_{n-1}$ и $O_{n-3} \supset S_{n-2}$, а $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}$ — базисы для представлений λ и $\bar{\lambda}$. Свойства матриц операторов отражения, входящих в (44) и (45), рассмотрены в [20].

Теперь в (44) и (45) уже отделено σq^+ и можно приступить к усреднению оператора (44) по этим переменным. Элемент объема для q^+ (см., например, [22]):

$$d\tau_{n-1}(q^+) = (V_o |(\tau_{n-1})|)^{-1} \prod_{p=n-1}^2 (\sin \vartheta_p^{(n-1)})^{p-2} d\vartheta_p^{(n-1)} \times \\ \times \prod_{p=n-2}^2 (\sin \vartheta_p^{(n-2)})^{p-2} d\vartheta_p^{(n-2)} \prod_{p=n-3}^2 (\sin \vartheta_p^{(n-3)})^{p-2} d\vartheta_p^{(n-3)}. \quad (46)$$

Для элемента объема, дополненного дискретной переменной, имеем

$$d\tau_{n-1}(\sigma q^+) = d\tau_{n-1}(q^+)/2. \quad (47)$$

В (46) введено обозначение

$$V_o |(\tau_{n-1})| = \int d\tau_{n-1}(q^+). \quad (48)$$

В [14] доказано следующее свойство ортогональности функций:

$$d_\omega \sum_6 \int d\tau_{n-1}(\sigma q^+) D_{\nu^0 \mu}^{*\omega}(\sigma q^+) D_{\nu^0 \mu'}^{\omega'}(\sigma q^+) = \delta(\omega \omega') \delta(\nu^0 \nu'^0) \delta(\mu \mu'), \quad (49)$$

где d_ω — размерность представления ω . Очевидно, что (47) можно переписать в виде

$$d\tau_{n-1}(\sigma q^+) = d\tau(\sigma q^+) d\tau_{n-2}(\sigma_1 q_1^+), \quad (50)$$

где $d\tau_{n-2}(q_1^+)$ имеет вид (46) и

$$d\tau(\sigma q^+) = \frac{1}{2} \frac{V_o |(\tau_{n-2})|}{V_o |(\tau_{n-1})|} (\sin \vartheta_1)^{n-3} (\sin \vartheta_2)^{n-4} (\sin \vartheta_3)^{n-5} d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3. \quad (51)$$

Стандартные выкладки с учетом (49) ведут к следующему выражению матричных элементов одночастичного оператора (41) на базисе функций (44) [20]:

$$\langle \nu^0 \omega \alpha \lambda \bar{\lambda} \bar{\mu} | \hat{W} | \nu'^0 \omega' \alpha' \lambda' \bar{\lambda}' \bar{\mu}' \rangle = \delta(\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \delta(\bar{\mu} \bar{\mu}') \sum_{\bar{\omega}} \hat{I}_{\bar{\omega} \bar{\omega}, \omega' \bar{\omega}}^{(\nu^0 \nu'^0)} Q_{\bar{\omega} \bar{\omega}, \omega' \bar{\omega}}. \quad (52)$$

Аналогично для матричных элементов центрального двухчастичного оператора на базисе функций (45) имеем

$$\begin{aligned} & \langle v^0 \omega \alpha \lambda \lambda_{12} \bar{\lambda} \bar{\mu} | \hat{W} | v'^0 \omega' \alpha' \lambda' \lambda'_{12} \bar{\lambda}' \bar{\mu}' \rangle = \\ & = \delta(\lambda_{12} \lambda'_{12}) \delta(\bar{\lambda} \bar{\lambda}') \delta(\bar{\mu} \bar{\mu}') \sum_{\bar{\omega}} \hat{I}_{\bar{\omega}\bar{\omega}, \omega'\bar{\omega}}^{(v^0 v'^0)} Q_{\bar{\omega}\bar{\omega}, \omega'\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (53)$$

В двух последних формулах введены следующие обозначения:

$$Q_{\bar{\omega}\bar{\omega}, \omega'\bar{\omega}} = \sum_{\alpha} A_{\bar{\omega}\bar{\alpha}, \alpha\lambda}^{(\omega\bar{\lambda})} A_{\bar{\omega}\bar{\alpha}, \alpha'\lambda'}^{(\omega'\bar{\lambda})} \quad (54)$$

для (52) и

$$Q_{\bar{\omega}\bar{\omega}, \omega'\bar{\omega}} = \sum_{\bar{\omega}\bar{\alpha}} A_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\alpha}, \alpha\lambda}^{(\omega\lambda_{12}\bar{\lambda})} A_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\alpha}, \alpha'\lambda'}^{(\omega'\lambda'_{12}\bar{\lambda})} \quad (55)$$

для (53). Величина Q называется обобщенной матрицей плотности.

Интегралы \hat{I} в (52) и (53) имеют вид

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{\bar{\omega}\bar{\omega}, \omega'\bar{\omega}}^{(v^0 v'^0)} \left(\rho^{(s_0)}, \frac{\partial}{\partial \rho^{(s_0)}}, G^+ \hat{\mathcal{L}}_{s_0 s'_0} = \sqrt{\frac{d_{\omega'}}{d_{\omega}}} \sum_{\chi\beta} d_{\chi} C_{\bar{0}\bar{\omega}\bar{\omega}}^{\chi\omega'\beta\omega} \times \right. \\ & \times \sum_{\mu\nu^0} \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\bar{\tau} (\bar{q}^+) D_{\bar{0}, \bar{\mu}\bar{\nu}}^{\chi} ((\sigma\bar{q}^+)^{-1}) \langle \omega' \nu^0 | \hat{W} (\sigma\bar{q}^+) | \omega' \nu^0 \rangle \right) C_{\bar{\mu}\nu^0 \bar{0}\nu^0}^{\chi\omega'\beta\omega}, \end{aligned} \quad (56)$$

где C — коэффициенты Клебша — Гордана для группы O_{n-1} ; χ — всевозможные O_{n-1} -неприводимые представления в прямом произведении $\chi \times \omega' \rightarrow \beta\omega$, β — индекс повторения; $\bar{0}$ обозначает O_{n-2} -скалярное представление. Матричные элементы оператора \hat{W} в (56) появляются вследствие зависимости \hat{W} от инфинитезимальных операторов левого сдвига $\hat{\mathcal{J}}$. Эти операторы действуют на строки матрицы D^{ω} , поэтому \hat{W} , будучи некоторой функцией от $\hat{\mathcal{J}}$, действует на D^{ω} следующим образом:

$$\hat{W} D_{\nu^0 \nu}^{\omega} = \sum_{\nu'^0} \langle \omega \nu^0 | \hat{W} | \omega \nu'^0 \rangle D_{\nu'^0 \nu}^{\omega}. \quad (57)$$

Когда \hat{W} не зависит от $\hat{\mathcal{J}}$, матричный элемент оператора \hat{W} имеет вид

$$\langle \omega' \nu'^0 | \hat{W} | \omega' \nu'^0 \rangle = \delta(\nu'^0 \nu'^0) \hat{W}, \quad (58)$$

и тогда соответствующим образом упрощаются интегралы (56).

Теперь введем следующие O_{n-1} -неприводимые интегралы:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{\omega\omega'(\chi)\beta}^{(\nu^0\nu'^0)}(\rho^{(s_0)}, \partial/\partial\rho^{(s_0)}, G^+, \hat{\mathcal{L}}_{s_0s'_0}) = \\ & = d_\chi \sqrt{\frac{d_{\omega'}}{d_\omega}} \sum_{\mu\nu''^0} \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\tau(\bar{q}^+) D_{0,\mu}^{\chi}((\sigma\bar{q}^+)^{-1}) \times \right. \\ & \quad \left. \times \langle \omega' \nu'^0 | \hat{W}(\sigma\bar{q}^+) | \omega' \nu''^0 \rangle \right) C_{\mu\nu''^0\nu_0}^{\chi\omega'\beta\omega}, \end{aligned} \quad (59)$$

а также O_{n-1} -неприводимые компоненты обобщенной матрицы плотности

$$Q_{\omega\omega'(\chi)\beta} = \sum_{\omega} Q_{\omega\omega, \bar{\omega}'\bar{\omega}} C_{0\bar{\omega}\bar{\omega}}^{\chi\omega'\beta\omega}. \quad (60)$$

Легко проверить, что оба выражения (52) и (53) можно записать в следующем виде:

$$\langle \nu^0 \omega \alpha \lambda \mu | \hat{W} | \nu'^0 \omega' \alpha' \lambda' \mu' \rangle = \delta(\mu\mu') \sum_{\chi\beta} \hat{I}_{\omega\omega'(\chi)\beta}^{(\nu^0\nu'^0)} Q_{\omega\omega'(\chi)\beta}, \quad (61)$$

где μ обозначает $\bar{\lambda}\bar{\mu}$ для одночастичных и $\lambda_{12}\bar{\lambda}\bar{\mu}$ для центральных двухчастичных операторов.

Осуществляя практические расчеты, необходимо помнить, что матричные элементы (52) и (53) заданы в различных базисах $S_n^{(r)}$ -неприводимого представления λ и что при их вычислении были использованы различные переменные q^+ для D^ω . В [22] показано, что эти два типа матричных элементов коррелируются, если двухчастичные генеалогические коэффициенты вычисляются по следующей формуле:

$$A_{\omega|\bar{\omega}\alpha, \alpha\lambda}^{(\omega\lambda_{12}\bar{\lambda})} = \sum_{\bar{\omega}'} D_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}^{(\bar{\omega}\bar{\omega})} (g_0^{-1})_{\lambda} \sum_{\bar{\alpha}} \left(\sum_{\bar{\alpha}'} A_{\bar{\omega}'\bar{\alpha}, \alpha\lambda}^{(\bar{\omega}\bar{\lambda})} A_{\bar{\alpha}\bar{\lambda}}^{(\bar{\omega}'\bar{\lambda})} \right) M_{\bar{\lambda}\lambda_{12}}^{(\lambda\lambda')}, \quad (62)$$

где $D^\omega (g_0^{-1})$ — матрица O_{n-1} -неприводимого представления ω для элемента группы g_0^{-1} , входящего в (24), а M — известная матрица простого преобразования между двумя базисами представления λ , используемыми для вычисления матричных элементов (52) и (53).

6. КОЛЛЕКТИВНАЯ ЧАСТЬ ОПЕРАТОРА

Формула (61) дает O_{n-1} -неприводимое разложение произвольных операторов \hat{W} , имеющих вид (20). Это разложение еще не обобщено на многочастичные операторы (14) или (16), образованные из центральных двухчастичных или одночастичных компонент. Для осуществления такого обобщения следовало бы подставить (61) в (17) или (18) и, придавая определенный смысл наборам

квантовых чисел Γ , получить O_{n-1} -неприводимое разложение многочастичного оператора \hat{O} .

Существует хорошо разработанная техника такого разложения, основные этапы которой изложены в [4, 23, 24]. Однако описание этих вопросов в общей форме выходит за рамки настоящего обзора, поэтому ограничимся изучением лишь первого слагаемого в разложении операторов в O_{n-1} -неприводимый ряд. Скоро выяснится, что это слагаемое имеет ясный физический смысл. Но прежде напомним одно важное утверждение, касающееся переменных ρ^{s_0} , G^+ и σq^+ .

Эти переменные обладают замечательным свойством, позволяющим сортировать их по одному признаку, существенному для понимания природы коллективных степеней свободы ядра. Возвратимся к случаю $r_0 r$ переменных ρ_i^s с произвольным r_0 и введем следующие удобные обозначения: набор переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ обозначим через ξ , набор переменных σq^+ — через q . Пусть число переменных ξ есть $N(\xi)$, число переменных q^+ есть $N(q^+)$ и число дискретных переменных σ есть $N(\sigma)$. Выше уже было отмечено, что

$$N(\xi) = \begin{cases} (1/2) r_0 (r_0 + 1), & r_0 \leq r; \\ r_0 r - (1/2) r (r - 1), & r_0 \geq r. \end{cases} \quad (63)$$

Число $N(q^+)$ находим из соотношения

$$N(\xi) + N(q^+) = r_0 r, \quad (64)$$

отражающего закон сохранения числа и вида частиц. Очевидно, что $N(\sigma) = 1$ при $r \geq 0$ и $N(\sigma) = 0$ при $r = 0$; последний случай встречается при $r = n - 1$ и $n = 1$.

Переменные ξ существенно отличаются от переменных q по перестановочным свойствам: все $N(\xi)$ переменных набора ξ являются скалярами группы $S_n^{(r)}$, действующими на орбитальные индексы частиц, тогда как все переменные набора q не являются таковыми: они преобразуются по $S_n^{(r)}$ -неприводимому представлению $[n - 1, 1]$. В [2] доказано, что, сохраняя общее число переменных $r_0 r$, из набора q нельзя дополнительно выделить $S_n^{(r)}$ -скалярные переменные, не теряя при этом возможности обеспечить принцип Паули.

Только что отмеченное свойство наборов переменных ξ и q позволяет трактовать ξ как коллективные, а q как неколлективные (внутренние) переменные ядра, причем число обоих типов переменных из-за соотношения (64) строго фиксировано. Это определение, предложенное в [2], согласуется с интуитивной физической трактовкой коллективных степеней свободы конечной фермионной системы: под коллективными переменными естественно понимать те переменные, которые настолько усреднены по индек-

сам индивидуальных частиц, что они их «не чувствуют». Такими переменными и являются переменные набора ξ . Из этого определения также следует, что нескаллярные по отношению к преобразованиям группы $S_n^{(r)}$ переменные должны быть исключены из списка кандидатов в коллективные переменные, ввиду того что они не усреднены в достаточной мере по индексам индивидуальных частиц и, следовательно, «чувствуют» их присутствие.

Вышесказанное относится к наборам ξ и q , используемым в теории, построенной с помощью изоспинового формализма, т. е. в том случае, когда ядро рассматривается как система, состоящая из частиц одного вида. Когда идет речь о теории, в которой атомное ядро трактуется как двухкомпонентная квантовая система, состоящая из двух фермиевских подсистем (протонной и нейтронной), тогда общее число коллективных переменных такой системы складывается из числа коллективных переменных обеих подсистем плюс число переменных, задающих относительное движение центра масс обеих подсистем.

Для того чтобы охватить оба случая, удобно говорить о системе, состоящей из k фермиевских подсистем, каждая из которых состоит из $r_i + 1$ частиц ($i = 1, 2, \dots, k$), двигающихся в r_0 -мерном пространстве*. Полное число частиц r равно $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k + k$. Каждая подсистема описывается $N_i(\xi)$, $N_i(q^+)$ и $N_i(\sigma)$ переменными типа ξ , q^+ и σ . Введем числа:

$$\left. \begin{aligned} N_{\xi} &= r_0(k-1) + \sum_{i=1}^k N_i(\xi); \\ N_{q^+} &= \sum_{i=1}^k N_i(q^+); \\ N_{\sigma} &= \sum_{i=1}^k N_i(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

где $r_0(k-1)$ дает число переменных, описывающих относительное движение всех подсистем. Очевидно, что $N_{\xi} + N_{q^+} = r_0 r$.

Подведя итоги сказанному, заключаем, что справедлива следующая теорема: *не нарушая требований, вытекающих из кинематических свойств гамильтониана введенной выше k -компонентной системы, можно вести N_{ξ} коллективных переменных. Остальные N_{q^+} непрерывных и N_{σ} дискретных переменных являются существенно неколлективными (внутренними) переменными. При $r_0 = 1, 2$ эта теорема сформулирована и доказана в [2] (см. также [3]).*

* Требование, чтобы i -я подсистема состояла именно из фермионов, существенно лишь в том случае, когда $r_i > 0$; при $r_i = 0$ в подсистеме имеется лишь одна частица, и принцип Паули роли не играет, следовательно, эта частица не обязательно должна быть фермиевской частицей.

Из нее вытекает, что согласно (63) при $r_i \geq r_0$ число коллективных переменных i -й подсистемы не зависит от числа частиц и задается лишь размерностью пространства r_0 . Поэтому в теории ядра, развитой с использованием изоспинового формализма, можно ввести лишь шесть коллективных переменных ξ . Это и является важным для дальнейшего свойством переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ .

Интересно проследить, как «абсорбируются» коллективные переменные при объединении двух подсистем эквивалентных фермионов в одну систему. Пусть имеем два ядра, состоящих из n' и n'' частиц ($n' > 3$ и $n'' > 3$). Обозначим для них наборы коллективных переменных через ξ' и ξ'' . Введем также три переменные η , описывающие относительное движение обеих подсистем; всего имеем 15 коллективных переменных ξ' , ξ'' и η . До тех пор пока обе подсистемы еще не объединены, принцип Паули накладывается на n' и n'' частицы в отдельности. При объединении подсистем в одну систему требование принципа Паули распространяется на все $n' + n''$ частиц. Чтобы удовлетворить это требование, вместо ξ' , ξ'' и η используем другие переменные, обладающие следующими свойствами: введем девять нескалярных переменных q^0 , «чувствующих» перестановки частиц между обеими подсистемами, и шесть скалярных, т. е. коллективных, переменных ξ для объединенной системы. Из сказанного заключаем, что принцип Паули и есть та причина, из-за которой в объединенной системе всегда уменьшается общее число коллективных переменных до шести. Явная связь между наборами переменных ξ' , ξ'' , η и q^0 , ξ получена в [19].

Теперь после выяснения смысла переменных ξ возвратимся к изучению разложения (61). Возьмем первое его слагаемое с $\chi = 0$. В этом случае индекс β не существует и

$$C_{\delta v^0 v_0}^{0 \omega' \omega} = \delta(\omega' \omega) \delta(v^0 v_0). \tag{66}$$

Подставляя это выражение в (59), получаем [1]:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{\omega \omega' (0)}^{(v^0 v_0')} (\rho^{(s_0)} \partial / \partial \rho^{(s_0)}, G^+, \mathcal{L}_{s_0 s_0'} = \\ & = \delta(\omega \omega') \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\tau (\bar{q}^+) \langle \omega v^0 | \hat{W}(\bar{q}^0 \sigma) | \omega v^0 \rangle, \end{aligned} \tag{67}$$

где, напомним, в общем случае \hat{W} зависит от производных по $\rho^{(s_0)}$ и инфинитезимальных операторов левого сдвига $\hat{\mathcal{L}}_{s_0 s_0'}$ и $\hat{\mathcal{J}}_{s_0 s_0'}$. В частности, если \hat{W} имеет вид (58), то из (67), учитывая (58), имеем [9, 25]:

$$\hat{I}_{\omega \omega' (0)}^{(v^0 v_0')} (\rho^{(s_0)}, G^+) = \delta(\omega \omega') \delta(v^0 v_0') \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\tau (\bar{q}^+) \hat{W}(\sigma \bar{q}^*). \tag{68}$$

Окончательные результаты (67) или (68) очень просты: для получения O_{n-1} -скалярной части произвольного одночастичного или центрального двухчастичного оператора, действующего в гильбертовом пространстве, натянутом на O_{n-1} -неприводимые пространства, необходимо усреднить матричный элемент оператора \hat{W} по переменным \bar{q}^+ и осуществить суммирование по двум значениям переменной σ . Согласно (51) элемент объема $d\tau$ имеет следующее выражение:

$$d\tau(\bar{q}^+) = N_\tau (\sin \vartheta_1)^{n-3} (\sin \vartheta_2)^{n-4} (\sin \vartheta_3)^{n-5} d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3, \quad (69)$$

где

$$N_\tau = \left(\int \int \int (\sin \vartheta_1)^{n-3} (\sin \vartheta_2)^{n-4} (\sin \vartheta_3)^{n-5} d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \right)^{-1}. \quad (70)$$

Напомним, что ν_1, ν_2, ν_3 обозначают $\vartheta_{n-1}^{(n-1)}, \vartheta_{n-2}^{(n-2)}, \vartheta_{n-3}^{(n-3)}$ для одночастичных операторов и $\vartheta_a^{(n-1)}, \vartheta_a^{(n-2)}, \vartheta_a^{(n-3)}$ для центральных двухчастичных операторов. Для $n = 4$ или $n = 3$ интеграл по переменным \bar{q}^+ становится двукратным или однократным. Для $n = 5$ переменные \bar{q}^+ имеют пределы, отличающиеся от стандартных. Если \hat{W} не зависит от σ , то в (67) или (68) можно опустить множитель $1/2$ и сумму по σ .

Выражение (67) зависит лишь от переменных ξ и производных по ним. Как уже было выяснено, эти переменные имеют смысл коллективных переменных ядра. Поэтому O_{n-1} -скалярное слагаемое произвольного оператора \hat{W} есть его коллективная часть; в этом и заключается физический смысл этого слагаемого. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, введем следующее специальное обозначение:

$$\hat{I}_{\omega\omega^0}^{(\nu^0\nu'^0)} \equiv \delta(\omega\omega') \left[\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)} \left(\rho^{(s_0)}, \frac{\partial}{\partial \rho^{(s_0)}}, G^+, \mathcal{L}_{s_0 s'_0} \right) \right]_{\nu^0\nu'^0}. \quad (71)$$

Из (71) видно, что $\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)}$ есть матричный оператор левого сдвига, действующий в O_{n-1} -неприводимом пространстве ω . В частности, когда \hat{W} не зависит от производных по переменным q^+ , $\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)}$ есть диагональная матрица, элементы которой не зависят от базисных индексов ν^0 . Другими словами, в этом случае $\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)}$ является также и O_{n-1} -скаляром по отношению к левому сдвигу.

В случае $\chi = (0)$ из (60) имеем

$$Q_{\omega\omega'(0)} = \delta(\omega\omega') \sum_{\bar{\omega}} Q_{\omega\bar{\omega}, \bar{\omega}\omega'}. \quad (72)$$

Подставляя (54) или (55) в (72) и используя ортогональность матрицы A , можно убедиться в том, что сумма в (72) равна $\delta(\alpha\alpha') \times \times \delta(\lambda\lambda')$. Поэтому O_{n-1} -скалярная компонента матрицы плотно-

сти имеет следующий вид:

$$Q_{\omega\omega'(0)} = \delta(\omega\omega') \delta(\alpha\alpha') \delta(\lambda\lambda'). \quad (73)$$

Следовательно, как и должно быть, O_{n-1} -скалярное слагаемое в (61) диагонально по отношению к $\omega\alpha\lambda$ и равно $[\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)}]_{\nu^0\nu^0}$.

7. МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН ЯДРА

В предыдущем разделе выделена коллективная часть $W_{\text{кол}}$ произвольного одночастичного или центрального двухчастичного оператора \hat{W} . Следующая ступень в изучении коллективных свойств многочастичных операторов (14) и (16) связана с их факторизацией на орбитальную и спин-изоспиновую части. Операторы (14) и (16), очевидно, являются скалярами по отношению к группе S_n , переставляющей одновременно орбитальные и спин-изоспиновые индексы. Однако (14) и (16) не являются скалярами по отношению к группам $S_n^{(r)}$ и $S_n^{(\sigma\tau)}$, действующим в отдельности на орбитальные и спин-изоспиновые индексы; они приводимы по отношению к преобразованиям этих групп. В [26] показано (см. также в [4]), что оператор (16) содержит две $S_n^{(r)} \times S_n^{(\sigma\tau)}$ -неприводимые компоненты, а именно $[n]$ и $[n-1, 1]$, а оператор (14) — три компоненты $[n]$, $[n-1, 1]$ и $[n-2, 2]$. В дальнейшем понадобится выделить в явном виде лишь $S_n^{(r)} \times S_n^{(\sigma\tau)}$ -скалярную компоненту. Согласно (8.44) и (8.30) в [4] имеем:

$$\hat{O}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''}(\mathbf{R}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_i \tau_i) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\mathbf{r}_i + \mathbf{R}) \right) + \hat{\mathcal{C}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''}(\mathbf{R}) \quad (74)$$

для оператора (16),

$$\begin{aligned} \hat{O}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} &= \left(\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \sum_{i>j=1}^n \hat{U}_{\mu'}^{\kappa'}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j) \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \sum_{i<j=1}^n \hat{W}_{\mu''}^{\kappa''}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) + \hat{\mathcal{C}}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} \end{aligned} \quad (75)$$

для оператора (14). В этих выражениях $\hat{\mathcal{O}}$ обозначает одно неприводимое слагаемое $[n-1, 1]$ в случае (74) и два неприводимых слагаемых $[n-1, 1]$ и $[n-2, 2]$ в случае (75). Базисные функции (9) или (10) содержат неприводимые характеристики групп $S_n^{(r)}$ и $S_n^{(\sigma\tau)}$, поэтому, пользуясь разложениями (74) или (75) и обычной техникой вычисления матричных элементов неприводимых операторов, приспособленной к симметрической группе (подробности см. в [4]), получаем

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \begin{matrix} \pi\Gamma_0(LS)JM_J \\ TM_T\tilde{\alpha}(\lambda\tilde{\lambda})a \end{matrix} \middle| \hat{O}_q^{(\kappa'\kappa'')\kappa} \middle| \begin{matrix} \pi'\Gamma'_0(L'S')J'M'_J \\ T'M'_J\tilde{\alpha}'(\lambda'\tilde{\lambda}')a \end{matrix} \right\rangle = \\
 & = N(n) \delta(\lambda\lambda') \delta(\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}') ((2L+1)(2S+1)(2\kappa+1)(2J'+1))^{1/2} \times \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ L' & S' & J' \\ \kappa' & \kappa'' & \kappa \end{matrix} \right\} C_{\mu M'_J M_J}^{\kappa' J' J} \langle \tilde{\lambda}\tilde{\alpha} S T M_T \| \hat{U}^{\kappa'} \| \tilde{\lambda}\tilde{\alpha}' S' T' M'_T \rangle \times \\
 & \times \langle \pi\Gamma_0 L \lambda \| \hat{W}^{\kappa''} \| \pi'\Gamma'_0 L' \lambda \rangle + \langle | \hat{O} | \rangle, \tag{76}
 \end{aligned}$$

где Γ_0 есть $E\Omega\beta\omega\alpha$ для базиса (9) или $E\gamma\delta\omega\alpha$ для базиса (10). В (76) фигурными скобками обозначен стандартный $9j$ -коэффициент для группы 3-мерных вращений, $\langle | \hat{O} | \rangle$ — сокращенное обозначение матричного элемента оператора \hat{O} и

$$\hat{O}_{\mu}^{(\kappa'\kappa'')\kappa} = \sum_{\mu'\mu''} \hat{O}_{\mu'\mu''}^{\kappa'\kappa''} C_{\mu'\mu''\mu}^{\kappa'\kappa''\kappa}. \tag{77}$$

В (76) \hat{U} и \hat{W} зависят от тех же переменных, что и в (17) или (18); $N(n) = n$ для одночастичных и $2N(n) = n(n-1)$ для двухчастичных операторов. Субматрицы в (76) определены для группы O_3^+ при использовании теоремы Вигнера — Экарта в форме (9.3) из работы [4].

Легко убедиться в том, что для O_{n-1} -скалярного оператора матричный элемент $\langle | \hat{O} | \rangle$ равен нулю. Действительно, группа $S_n^{(r)}$ вложена в O_{n-1} по цепочке $O_{n-1} \supset S_n^{(r)}$, поэтому произвольный O_{n-1} -скалярный оператор всегда является и $S_n^{(r)}$ -скаляром и, следовательно, не содержит компоненты \hat{O} .

Подставим в (76) оператор $\hat{W}_{\text{кол}}$ вместо \hat{W} . Тогда в силу вышесказанного слагаемое $\langle | \hat{O} | \rangle$ исчезнет. Матричные элементы спин-изоспиновых операторов $U^{\kappa'}$ полностью определяются алгеброй групп U_4 и $S_n^{(\sigma\nu)}$, техника их вычисления описана в [4]. Поэтому при наличии известных субматриц оператора $\hat{W}_{\text{кол}}$ становится известной и матрица коллективной части многочастичного оператора (14) или (16). Другими словами, одночастичный или трансляционно-инвариантный двухчастичный оператор $\hat{W}_{\text{кол}}$, действующий в O_{n-1} -неприводимом пространстве ω , однозначно определяет многочастичный оператор $O_{\text{кол}\mu}^{(\kappa\kappa'')\kappa}$. В свою очередь, выше было показано, что $\hat{W}_{\text{кол}}$ однозначно определяется оператором \hat{W} . Поэтому заключаем, что выделение из произвольного оператора его коллективной части осуществлено однозначно.

Это утверждение было доказано с помощью явной конструкции с использованием частично-матричного и частично-координатного

представлений. Однако из доказательства существования оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, в определенном представлении следует доказательство его существования и в произвольном представлении [27]. Поэтому заключаем, что $\hat{C}_{\text{кол}}$ однозначно определен в любом представлении и для него существует следующее разложение [9, 25]:

$$\hat{C} = \hat{C}_{\text{кол}} + \sum_{\chi \neq (0), \beta} \hat{C}^{(\chi)\beta}, \quad (78)$$

где χ и β имеют тот же самый смысл, что и в (61). В частности, в координатном представлении

$$\begin{aligned} & \hat{C}(\rho^{(s_0)}, \partial/\partial\rho^{(s_0)}, G^+, \hat{\mathcal{L}}_{s_0 s'_0}, q, \hat{\mathcal{I}}_{s_0 s'_0}; Q) = \\ & = \hat{C}_{\text{кол}}\left(\rho^{(s_0)}, \frac{\partial}{\partial\rho^{(s_0)}}, G^+, \hat{\mathcal{L}}_{s_0 s'_0}, \hat{\mathcal{I}}_{s_0 s'_0}; Q\right) + \\ & + \sum_{\chi \neq (0), \beta} \hat{C}^{(\chi)\beta}\left(\rho^{(s_0)}, \frac{\partial}{\partial\rho^{(s_0)}}, G^+, \hat{\mathcal{L}}_{s_0 s'_0}, \hat{\mathcal{I}}_{s_0 s'_0}; Q\right). \end{aligned} \quad (79)$$

Первое слагаемое в (79) зависит от $\hat{\mathcal{I}}_{s_0 s'_0}$ в виде O_{n-1} -скалярных операторов, поэтому $\hat{C}_{\text{кол}}$ не зависит от внутренних переменных q , тогда как остальные слагаемые, вообще говоря, зависят от них. Неприводимые свойства разложения (79) гарантируют однозначность выделения $\hat{C}_{\text{кол}}$ из \hat{C} : оператор $\hat{C} - \hat{C}_{\text{кол}}$ уже не содержит O_{n-1} -скалярной, т. е. чисто коллективной, компоненты.

При общей формулировке метода в разд. 2 было сказано, что дополнительные интегралы движения позволяют выделять из H более простой гамильтониан H_0 . Теперь это утверждение можно продемонстрировать в явном виде, если использовать ω в качестве дополнительного интеграла движения. Перепишем (78) для гамильтониана H :

$$H = H_{\text{кол}} + H_{\text{кол. внутр}}, \quad (80)$$

где $H_{\text{кол. внутр}}$ обозначает все слагаемые, не скалярные по отношению к преобразованиям группы O_{n-1} . Согласно обозначениям, введенным в разд. 3:

$$H_{\text{кол}} \equiv H'_{23} = H'_2 + H'_3. \quad (81)$$

Гамильтониан ядра сохраняет J , поэтому положим в (76) $\kappa = 0$ и учтем то обстоятельство, что последнее слагаемое в (76) исчезает. Тогда для базисных функций (10) получаем следующее общее выражение матричных элементов матрицы коллективного гамиль-

тониана ядра [9]:

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{l} E\gamma(LS)JM_J \\ TM_T\tilde{\alpha}\delta\omega\alpha(\lambda\tilde{\lambda})a \end{array} \middle| H_{\text{кол}}^{(\kappa\kappa)0} \middle| \begin{array}{l} E'\gamma'(L'S')JM_J \\ T'M_T\tilde{\alpha}'\delta'\omega'\alpha'(\lambda'\tilde{\lambda}')a \end{array} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{2} n(n-1) \delta(\omega\omega') \delta(\alpha\alpha') \delta(\lambda\lambda') \delta(TT') (-1)^{L+S'+J} \times \\ & \quad \times \left((2L+1)(2S+1) \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} L \quad S \quad J \\ S' \quad L' \quad \kappa \end{array} \right\} \times \\ & \quad \times \langle \tilde{\lambda}\tilde{\alpha}STM_T || \hat{U}^\kappa || \tilde{\lambda}'\tilde{\alpha}'S'TM_T \rangle \langle E\gamma L\delta\omega || \hat{W}_{\text{кол}}^\kappa || E'\gamma'L'\delta'\omega \rangle. \quad (82) \end{aligned}$$

Причина диагональности (82) по квантовым числам ω , α и λ очевидна. Менее очевидна диагональность по T . Тем не менее она обнаруживается при более детальном изучении матрицы оператора $H_{\text{кол}}$, если учесть явную зависимость всех слагаемых гамильтониана (5) от спин-изоспиновых операторов [28]. В итоге заключаем, что $H_{\text{кол}}$, полученный путем ограничения H на пространство $\mathcal{R}^{(\Lambda\omega)}$ из-за вышеотмеченной диагональности, действует внутри $\mathcal{R}^{(\Lambda\omega\alpha\lambda T)}$; при этом предполагается, что базисные функции (9) и (10) ортогональны по отношению к индексу α .

Метод вычисления входящих в (82) спин-изоспиновых субматриц в настоящее время разработан до такой степени, что они известны для многих интересных с практической точки зрения схем Юнга (подробности см. в [4, 28]). Поэтому осталось лишь рассмотреть субматрицы оператора $\hat{W}_{\text{кол}}$. Кроме технической стороны, касающейся методики вычисления, этот вопрос тесно связан с пониманием микроскопического смысла феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра. Обсуждению этого вопроса посвящен следующий раздел.

8. ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ЯДРА

Построим базис в гильбертовом пространстве, в котором действует оператор $\hat{W}_{\text{кол}}$. В тех случаях, когда речь пойдет лишь об орбитальных переменных, соответствующее гильбертово пространство обозначим через $\hat{R}^{(\Lambda\omega)}$. Натянем $\hat{R}^{(\Lambda\omega)}$ на полную систему функций, зависящих от переменных ξ , т. е. переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ . Полный базис для G^+ составляют функции (42), поэтому остается лишь отыскать приспособленную к специфике задачи полную систему функций, зависящих от переменных $\rho^{(s_0)}$. Эти функции можно построить применительно к квантовым числам либо ортогональной, либо унитарной схемы. В обоих случаях они имеют смысл матричных элементов матриц неприводимых представлений со специальным образом выбранными базисами. Для

ортогональной схемы имеем [2, 3]

$$\Theta \left(\begin{matrix} E\Omega\beta LK \\ \omega\nu^0 \end{matrix} \middle| \rho \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_2 \right) = R_{E\Omega}(\rho) (d\Omega/d_L d_\omega)^{1/2} D_{0, \beta L K \omega \nu^0}^\Omega (\tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_2), \quad (83)$$

где использованы переменные $\rho, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2$, связанные с переменными ρ^{s_0} следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \rho^x &= \rho \sin \tilde{\vartheta}_1 \sin \tilde{\vartheta}_2; \\ \rho^y &= -\rho \sin \tilde{\vartheta}_1 \cos \tilde{\vartheta}_2; \\ \rho^{(z)} &= \rho \cos \tilde{\vartheta}_1, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

причем $0 \leq \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2 \leq \pi/2$. В (83) D^Ω является матрицей $O_{3(n-1)}$ -неприводимого представления Ω , столбцы которой нумеруются квантовыми числами, уже встречавшимися в функциях (9), а $\bar{0}$ означает $O_{3(n-3)-1}$ -скалярную строку. Функции $R_{E\Omega}$ в (83) являются радиальными функциями $3(n-1)$ -мерного осциллятора, зависящими от глобального радиуса ρ^* .

Базисные функции для пространства $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Lambda\omega)}$ в случае унитарной схемы можно представить в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} &\Theta \left(\begin{matrix} E [E_1 E_2 E_3] \gamma L K \\ \delta\omega\nu^0 \end{matrix} \middle| \eta^{(s_0)} \right) | \text{micr} \rangle = \\ &= \left(\frac{d_E}{d_L d_\omega} \right)^{1/2} D_{0[E_1 E_2 E_3] \gamma L K \delta\omega\nu^0}^E (\eta^{(s_0)} | \text{micr} \rangle), \quad (85) \end{aligned}$$

где D^E является матрицей $U_{3(n-1)}$ -неприводимого представления E , $\bar{0}$ обозначает $U_{3(n-1)-1}$ скалярную строку, $\eta^{(s_0)}$ — операторы рождения осцилляторных квантов для переменных $\rho^{(s_0)}$, а $| \text{micr} \rangle$ — состояние вакуума. Столбцы матрицы D^E нумеруются квантовыми числами, встречающимися в функциях (10); для наглядности в (85) в явном виде выписано U_{3-} и U_{n-1} -неприводимые представления $[E_1 E_2 E_3]$. Функции (83) и (85) связаны преобразованием (11).

Базисные функции (85) можно построить в явном виде в координатном представлении. В [22] получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\Theta \left(\begin{matrix} E \gamma L K \\ \alpha \omega \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{0} \end{matrix} \middle| \rho^{(x)}, \rho^{(y)}, \rho^{(z)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{E_x E_y E_z \\ \omega_x \omega_y \omega_z}} R_{E_x \omega_x}(\rho^{(x)}) R_{E_y \omega_y}(\rho^{(y)}) R_{E_z \omega_z}(\rho^{(z)}) B_{E_x \omega_x E_y \omega_y E_z \omega_z}, \quad (86) \end{aligned}$$

* Заменяя функции $R_{E\Omega}(\rho)$ в (83) полным набором функций, принадлежащим непрерывному и дискретному спектру, можно расширить гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Lambda\omega)}$ (а тем самым и гильбертово пространство \mathcal{H}) до оснащенного гильбертова пространства. Таким образом, излагаемая теория обобщается применительно к более широкому кругу задач, связанных с нестационарными процессами. Этих вопросов, однако, в настоящей статье касаться не будем.

где

$$B = \sum_{E_{xy}\omega_{xy}} (d_{\omega_x} d_{\omega_y} d_{\omega_z})^{1/2} D_{\bar{0}\omega_x}^{(\omega_x\bar{0})} D_{\bar{0}\bar{\omega}}^{(\bar{\omega}_x\bar{0})} D_{\bar{0}\bar{\omega}_y}^{(\omega_y\bar{0})} \times \\ \times C_{\omega_x\bar{\omega}_x\bar{\omega}}^{E_x} = \frac{E_y}{\omega_y\bar{\omega}_y\bar{0}} = \frac{E_{xy}}{\alpha_{xy}\omega_{xy}\bar{\omega}} = C_{\alpha_{xy}\omega_{xy}\bar{\omega}}^{E_{xy}} = \frac{E_z}{\omega_z\bar{0}} = \frac{E}{\alpha\omega\bar{\omega}\bar{0}} M_{E_{xy}E_x, \gamma LK}^{(E)} \quad (87)$$

В (86) R — радиальные функции $n - 1$ -мерного осциллятора, $\bar{\omega}$ и $\bar{\bar{\omega}}$ обозначают неприводимые представления групп O_{n-2} и O_{n-3} , а $\bar{0} - O_{n-4}$ — скалярное представление; D в (87) — простые множители, явный вид которых приведен в [22] [см. выражение (2.14)]. Матрица $M^{(E)}$ преобразует канонический базис $U_3 \supset \supset U_2 \supset U_1$ в базис $U_3 \supset O_3^+ \supset O_2^+$ [29, 30]. Коэффициенты C в (87) являются изоскалярными факторами коэффициентов Клебша — Гордана для цепочки $U_{n-1} \supset O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset O_{n-3}$; α_{xy} — индекс повторения O_{n-1} -представления ω_{xy} , содержащегося в U_{n-1} -представлении E_{xy} . Функции (86) нормированы условием [22]

$$\frac{1}{d_L d_\omega} \sum_{K\bar{\omega}\bar{\bar{\omega}}} \int d\tau \left(\rho^{(s_0)} \Theta^* \left(\frac{E\gamma LK}{\alpha\omega\bar{\omega}\bar{0}} \middle| \rho^{(s_0)} \right) \times \right. \\ \left. \times \Theta \left(\frac{E'\gamma' LK}{\alpha\omega\bar{\omega}\bar{0}} \middle| \rho^{(s_0)} \right) \right) = \delta(E E') \delta(\gamma \gamma') \delta(\alpha \alpha'), \quad (88)$$

где при $n > 3$

$$d\tau(\rho^{(s_0)}) = \frac{2^{n-4} (\Gamma((n-1)/2))^2}{3\Gamma(n-3)} |(\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(y)})^2| |(\rho^{(y)})^2 - (\rho^{(z)})^2| |(\rho^{(x)})^2 - (\rho^{(z)})^2| \\ |(\rho^{(x)}\rho^{(y)}\rho^{(z)})^{n-4} d\rho^{(x)} d\rho^{(y)} d\rho^{(z)}. \quad (89)$$

Ненормированный элемент объема (89) получен в [40]. Нормировка получена в [22], где также описаны детали построения базиса (86).

Учитывая зависимость базисных функций от углов Эйлера G^+ , имеем:

$$\Theta \left(\frac{E\gamma LM}{\delta\omega\nu^0} \middle| \rho^{(s_0)}, G^+ \right) = \sum_K \Theta \left(\frac{E\gamma LK}{\delta\omega\nu_0} \middle| \rho^{(s_0)} \right) D_{KM}^L(G^+) \quad (90)$$

для унитарной схемы и

$$\Theta \left(\frac{E\Omega\rho LM}{\omega\nu^0} \middle| \rho^{(s_0)}, G^+ \right) = \sum_K \Theta \left(\frac{E\Omega\beta LK}{\omega\nu^0} \middle| \rho^{(s_0)} \right) D_{KM}^L(G^+) \quad (91)$$

для ортогональной схемы. Функции (90) или (91) образуют полную систему функций, на которые натянуто гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Delta\omega)}$. Базисные функции в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Delta)}$ имеют следующий

ВИД:

$$\begin{aligned} & \Psi \left(E\gamma LM \left| \rho^{(s_0)}, G^+, \sigma q^+ \right. \right) = \\ & = \sum_{\nu^0} \Theta \left(E\gamma LK \left| \rho^{(s_0)} \right. \right) D_{KM}^L(G^+) D_{\nu^0, c\lambda\mu}^\omega(\sigma q^+). \end{aligned} \quad (92)$$

Аналогичное разложение имеет место и для ортогональной схемы. Разложение (92) получено в [14].

Используя базис, построенный в явном виде в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Lambda\omega)}$, можно вычислить матричные элементы

$$\begin{aligned} & \langle E\gamma LM \delta\omega \mid \hat{W}_{\text{кол}} \mid E'\gamma' L' M' \delta'\omega \rangle = \\ & = (d_\omega)^{-1} \sum_{\nu^0 \nu'^0} \int d\tau(G^+) d\tau(\rho^{(s_0)}) \Theta^* \left(E\gamma LM \left| \rho^{(s_0)}, G^+ \right. \right) \times \\ & \times [\hat{W}_{\text{кол}}^{(\omega)}]_{\nu^0 \nu'^0} \Theta \left(E'\gamma' L' M' \left| \rho^{(s_0)}, G^+ \right. \right), \end{aligned} \quad (93)$$

затем найти субматрицы оператора $\hat{W}_{\text{кол}}$ и подставить их в (82). Этим и завершается явное построение коллективного гамильтониана в матричном представлении. Диагонализация его матрицы дает собственные значения и собственные функции, т. е. решение следующего уравнения Шредингера:

$$H_{\text{кол}} \Psi_{\text{кол}} = E_{\text{кол}} \Psi_{\text{кол}}. \quad (94)$$

Ниже рассмотрим некоторые свойства собственных состояний гамильтониана $\hat{H}_{\text{кол}}$, а также обсудим возможности практического решения уравнения (94).

Неприводимые свойства разложения (80) обеспечивают однозначное выделение всех слагаемых гамильтониана H , зависящих только от коллективных переменных. Каждое дополнительное слагаемое будет обязательно учитывать взаимодействие между коллективными и внутренними степенями свободы ядра. Поэтому микроскопическая теория коллективного движения в ядрах, заложенная в уравнение (94), является наиболее общей кинематически корректной теорией коллективных степеней свободы ядра, когда используется изоспиновый формализм*. Каждая кинематически корректная теория, изучающая чисто коллективные явления, либо эквивалентна изложенной теории, либо является некоторым ее частным случаем.

* Общие черты теории коллективного движения в двухкомпонентной системе фермионов (т. е. в случае, когда формализм изоспина не используется) рассмотрены в [31].

Введем следующее определение. Назовем физическую картину, описываемую решениями уравнения (94), *кинематически корректной микроскопической коллективной моделью ядра*. Эта модель предложена в [9].

9. ПЕРЕМЕННЫЕ РОТАЦИОННО-ВИБРАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Теория вращательных и колебательных форм движения в атомных ядрах, берущая свое начало в известных работах Бора, Моттельсона и Рейнуотера [32—34], является феноменологической. В этой теории наличие коллективных мод движения постулируется, но не выводится из уравнения Шредингера для многочастичного гамильтониана ядра. Изложенная в настоящем обзоре кинематически корректная микроскопическая коллективная модель ядра сформулирована строго в рамках квантовой механики, исходя из гамильтониана H . Интересно проследить, можно ли перебросить мост между этими двумя теориями, и тем самым выяснить смысл феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра. Согласно утверждению, высказанному в конце предыдущего раздела, это наверняка можно сделать, если ротационно-вибрационная модель ядра является кинематически корректной моделью. Однако, как уже отмечалось в разд. 1, в той форме, которая ей была придана в оригинальных работах, даже трудно представить, каким образом это можно проверить.

Первый вопрос, который необходимо обсудить, касается интерпретации смысла β - и γ -переменных, используемых в феноменологической теории. Являются ли они квантовомеханическими переменными или некоторыми параметрами, описывающими деформацию ядра? В первом случае они не являются наблюдаемыми в состояниях с определенной энергией, и, значит, можно говорить лишь об их средних значениях. Разумеется, средние значения операторов других физических величин, в частности операторов перелома, не зависят от β и γ . При такой интерпретации β и γ можно попытаться связать их с микроскопическими динамическими переменными. Во втором случае, если β и γ трактуются как параметры, средние значения операторов зависят от них, и можно попытаться связать β и γ лишь с некоторыми параметрами (но не переменными) микроскопического гамильтониана H .

В обширной литературе по вопросам, связанным с коллективным возбуждением ядер, среди которой отметим монографии [35—37] и обзоры [38, 39], не всегда четко ставится и объясняется этот вопрос. В настоящей статье будем придерживаться первой из вышеотмеченных точек зрения и будем рассматривать β и γ как динамические переменные.

Изучение микроскопического смысла феноменологической теории начнем с обсуждения связи между переменными, используе-

мыми в обоих подходах. Введем шесть новых переменных $q^{ss'}$ ($s \leq s' = 1, 2, 3$), являющихся функциями коллективных переменных ξ . Зависимость $q^{ss'}$ от ξ подберем таким образом, чтобы оператор кинетической энергии для переменных $q^{ss'}$ совпал с оператором, используемым в теории Бора — Моттельсона. Идею, позволяющую осуществить выбор $q^{ss'}$, подсказывает преобразование к главным осям билинейной формы $x_1^s x_1^{s'} + x_2^s x_2^{s'} + \dots + x_n^s x_n^{s'}$, где x_i^s — одночастичные декартовы переменные. Такое преобразование использовано в [40] при введении коллективных переменных, описывающих квадрупольные деформации ядер. Эта билинейная форма не является трансляционно-инвариантной и, следовательно, не удовлетворяет кинематическим требованиям. Это нарушение принципов симметрии можно легко избежать, заменив x_i^s переменными Якоби $\rho_i^{(s)}$. Поэтому будем исходить из билинейной формы переменных ρ_i^s с подходяще подобранной для дальнейшего нормировки и положим, что

$$q^{ss'} = \left(\frac{2}{1 + \delta(ss')} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^{m-1} \rho_i^s \rho_i^{s'}. \tag{95}$$

Подставляя в (95) выражение (26) для ρ_i^s , получаем [2]

$$q^{ss'} = \left(\frac{2}{1 + \delta(ss')} \right)^{1/2} \sum_{s_0} (\rho^{(s_0)})^2 D_{s_0 s}^{(1s)}(G^+) D_{s_0 s'}^{(1s)}(G^+). \tag{96}$$

Из этого выражения видно, что $q^{ss'}$ действительно зависит лишь от коллективных переменных ξ , т. е. что $q^{ss'} = q^{ss'}(\xi)$.

Проследить связь между переменными $q^{ss'}$ и переменными, используемыми в ротационно-вибрационной модели ядра, можно с помощью выражения оператора Лапласа в переменных $q^{ss'}$. Для краткости введем обозначения $(\rho^{(x)})^2 \equiv X$, $(\rho^{(y)})^2 \equiv Y$ и $(\rho^{(z)})^2 \equiv Z$. Выкладки ведут к следующему выражению [41]:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{phen}} = & \sum_{s' \geq s=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (q^{ss'})^2} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + \\ & + 2 \left(\frac{1}{X-Y} + \frac{1}{X-Z} \right) \frac{\partial}{\partial X} + 2 \left(\frac{1}{Y-Z} + \frac{1}{Y-X} \right) \frac{\partial}{\partial Y} + \\ & + 2 \left(\frac{1}{Z-X} + \frac{1}{Z-Y} \right) \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{2}{(X-Y)^2} \hat{\mathcal{L}}_{12}^2 + \\ & + \frac{2}{(X-Z)^2} \hat{\mathcal{L}}_{13}^2 + \frac{2}{(Y-Z)^2} \hat{\mathcal{L}}_{23}^2. \end{aligned} \tag{97}$$

Для того чтобы придать оператору (97) более привычный вид, перепишем (96) в O_3^+ -неприводимой форме. Имеем

$$q_{\mu}^{\kappa} = \sum_{s \geq s'=1}^3 G_s^1 \frac{1}{s} \frac{\kappa}{s'} q^{ss'} = \sum_{\mu} p_{\mu}^{\kappa} D_{\mu, \mu}^{\kappa}(G^+), \tag{98}$$

где $\kappa = 0, 2$ и

$$p_{\mu}^{\kappa} = \sum_{s_0} (\rho^{(s_0)})^2 C_{s_0}^{1 \ 1 \ \kappa} \quad (99)$$

В частности, при $\kappa = 0$ получаем, что

$$\sqrt{3} p_0^0 = X + Y + Z = \rho^2 \equiv p_0.$$

При $\kappa = 2$, используя коэффициенты Клебша — Гордана в декартовом базисе (см., например, (7.12) [1]), легко находим, что p_{μ}^2 не исчезает лишь для двух значений μ . Обозначим эти значения через 11 и 22 и выпишем в явном виде выражения неисчезающих переменных p_{11}^2 и p_{22}^2 :

$$\left. \begin{aligned} p_{11}^2 &= (1/\sqrt{6})(X + Y - 2Z) \equiv (1/\sqrt{3}) p_1; \\ p_{22}^2 &= (1/\sqrt{2})(X - Y) = p_2. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

В переменных p_0, p_1, p_2 оператор (97) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{phen}} &= 3 \frac{\partial^2}{\partial (p_0)^2} + 4 \left[3 \frac{\partial^2}{\partial (p_1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (p_2)^2} + \right. \\ &+ 6 \frac{p_1}{p_1^2 - p_2^2} + \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{p_1^2 - 3p_2^2}{p_2(p_1^2 - p_2^2)} \frac{\partial}{\partial p_2} + \\ &\left. + \frac{1}{4(p_2)} \hat{\mathcal{L}}_{12}^2 + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \hat{\mathcal{L}}_{13}^2 + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \hat{\mathcal{L}}_{23}^2 \right]. \end{aligned} \quad (101)$$

Если принять в (101) $p_1 = \sqrt{3}a_0$ и $p_2 = \sqrt{2}a_2$, то легко проверить, что (101) содержит выражения (6.15) и (6.17), приведенные в [37]. Как и в [37], примем

$$\left. \begin{aligned} (1/\sqrt{6})(X + Y - 2Z) &= \beta \cos \gamma; \\ (1/12)(X - Y) &= \beta \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

и введем моменты инерции [37]:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_{12} &= 4p_2^2 = 4\beta^2 \sin^2 \gamma; \\ \mathcal{J}_{13} &= (p_1 + p_2)^2 = 4\beta^2 \sin^2(\gamma - 2\pi/3); \\ \mathcal{J}_{23} &= (p_1 - p_2)^2 = 4\beta^2 \sin^2(\gamma - 4\pi/3). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

В новых переменных (101) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{phen}} &= 3 \frac{\partial^2}{\partial (p_0)^2} + 4 \left(\sum_{s>s'=1}^3 \frac{\hat{\mathcal{L}}_{s's}^2(G^+)}{\mathcal{J}_{s's}(\beta\gamma)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Второе слагаемое этого выражения совпадает с известным, полученным в [32], выражением оператора Лапласа феноменологической ротационно-вибрационной модели, что подтверждает пра-

вильность выбора переменных $q^{ss'}$ в форме (95). Отметим, что в (102) вместо $\beta \sin \gamma$ и $\beta \cos \gamma$ можно было бы взять $\rho^2 \beta \sin \gamma$ и $\rho^2 \beta \cos \gamma$; такая связь между переменными использована в [11]. В этом случае, однако, во втором слагаемом выражения (104) содержался бы множитель p_0^{-2} , т. е. переменные p_0 и β , γ в операторе (104) не разделялись бы столь полно.

Хотя второе слагаемое в (104) совпадает с оператором кинетической энергии, используемым в теории Бора — Моттельсона, этот оператор теперь приобретает иной, микроскопический смысл: при его выводе удалось избежать традиционного пути, обойтись без феноменологической концепции колебания поверхности ядра вблизи сферически-равновесной формы. Только что продемонстрированный вывод оператора (104) позволяет заключить, что в ротационно-вибрационной модели при другой, квантовомеханической ее интерпретации используются квадратичные формы микроскопических переменных $\rho^{(s_0)}$; на важность этого обстоятельства было указано в [25]. Отметим еще, что в ротационно-вибрационной модели переменная p_0 по хорошо известным причинам не учитывается. Предпочтительно, однако, использовать все шесть переменных $(\rho^{(s_0)})^2$, G^+ ; они нужны для более простого установления связи между феноменологической и микроскопической теориями — в микроскопическом подходе кинематические принципы не позволяют пренебрегать ни одной переменной. Кроме того, имеется еще и другая, более практическая причина: зачастую более наглядно пользоваться декартовыми переменными $(\rho^{(s_0)})^2$ [ср., например, (97) с (104)]. Оказывается также, что привлечение дополнительной степени свободы, описываемой переменной p_0 , существенно при переходе от ротационного к вибрационному пределу в феноменологической ротационно-вибрационной модели [41].

10. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНА РОТАЦИОННО-ВИБРАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Пусть $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ есть гильбертово пространство, натянутое на полный набор функций, зависящих от шести переменных $(\rho^{(s_0)})^2$, G^+ или им эквивалентных шести переменных $q^{ss'}$. Следуя нашему традиционному пути, введем базис в $\mathcal{R}_{\text{phen}}$. Это легко сделать, натянув пространство $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ на функции следующего гамильтониана 6-мерного осциллятора:

$$h_{\text{phen}} = -\frac{1}{2} \Delta_{\text{phen}} + \frac{1}{2} \sum_{s_0 \geq s'_0 = 1}^3 (q^{s_0 s'_0})^2. \quad (105)$$

На теоретико-групповом языке это означает, что введенный базис в $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ преобразуется по неприводимым представлениям $\varepsilon \equiv$

$\equiv [\varepsilon 00000]$ унитарной группы U_6 , где $\varepsilon = 0, 1, 2, \dots$. Для нумерации базисных функций с определенным ε можно пользоваться различными цепочками подгрупп группы U_6 , такими, как:

$$U_6 \supset U_5 \supset P_5 \supset O_3^+; \tag{106}$$

$$U_6 \supset O_6 \supset O_5 \supset O_3^+; \tag{107}$$

$$U_6 \supset U_3 \supset O_3^+. \tag{108}$$

Эти три вида базисов введены в [41]. Рассмотрим сначала последнюю цепочку, в которой подразумевается, что группа U_3 вложена в U_6 в смысле плетизма. Общая теория плетизма изложена в [42] (см. также [4, 43]). В этом частном случае смысл плетизма следующий. Пусть $[1]_3$ есть пространство, в котором действует группа U_3 . С помощью прямого произведения $[1]_3 \times [1]_3$ конструируем 9-мерное тензорное пространство. Образуя линейные комбинации компонент этого тензора, выделяем 3-мерное антисимметрическое подпространство $[11]_3$ и 6-мерное симметричное пространство $[2]_3$. Пусть симметричное подпространство $[2]_3$ есть пространство, в котором действует группа U_6 ; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, переобозначим ее через $[1]_6$. Существование, что несущее пространство $[1]_6$ для группы U_6 есть U_3 -неприводимое пространство $[2]_3$, и это ее свойство задает некоторое специфическое вложение группы U_3 в U_6 . Такое вложение и есть вложение в смысле плетизма.

Плетизм служит очень полезным инструментом для изучения правил приведения для различных, порою сложным образом вложенных, цепочек подгрупп, для приведения прямых произведений и т. п. [4, 42, 43]. В частности, правила приведения на цепочке (108) очень просты [41]: если ζ есть неприводимое представление группы U_6 , то все U_3 -неприводимые представления, содержащиеся в ζ , перечисляются путем разбиения числа 2ζ на всевозможные три слагаемые E_1, E_2, E_3 , такие, что $E_1 \geq E_2 \geq E_3$ и все E_1, E_2 и E_3 — четные. Эти числа маркируют U_3 -неприводимые представления $[E_1 E_2 E_3]$, содержащиеся в ζ . По этому правилу, например, находим, что U_6 -представление $[3]_6$ содержит U_3 -представления $[600]$, $[420]$ и $[222]$.

Обозначим базисные функции, маркированные с помощью квантовых чисел цепочки (108), через

$$\begin{aligned} & \Theta(\zeta [E_1 E_2 E_3] \gamma LM | q^{ss'}) = \\ & = \sum_K \Theta(\zeta [E_1 E_2 E_3] \gamma LM | (\rho^{(\zeta)})^2) D_{KM}^L(G^+) \end{aligned} \tag{109}$$

и зададимся вопросом, можно ли найти связь базиса (109) с базисом (90)? Зависимость обоих наборов функций от G^+ одинакова,

поэтому лишь остается сравнить функции

$$\Theta \left(\begin{array}{c} E [E_1 F_2 E_3] \gamma L K \\ \delta \omega \gamma_0 \end{array} \middle| \rho^{(s_0)} \right) \quad (110)$$

с функциями

$$\Theta (\in [E_1 E_2 F_3] \gamma L K | (\rho^{(s)})^2). \quad (111)$$

В (110) обозначение $U_3 \times U_{n-1}$ -неприводимого представления выписано в явном виде. Базисные функции (111) введены в [41].

Сразу можно заметить несколько различий между (110) и (111). Во-первых, как это можно усмотреть из (86), асимптотическое поведение (110) при больших $\rho^{(s_0)}$ (состояние вакуума) есть

$$| \text{micr} \rangle \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s_0} (\rho^{(s_0)})^2 \right\}, \quad (112)$$

тогда как (111) имеет следующую асимптотику:

$$| \text{phen} \rangle \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s_0 \geq s'_0} (q^{s_0 s'_0})^2 \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s_0} (\rho^{(s_0)})^4 \right\}. \quad (113)$$

Во-вторых, (110) зависит от $\rho^{(s_0)}$ в форме $P_{\text{micr}}^{(\omega)}(\rho^{(s_0)}) | \text{micr} \rangle$, где $P_{\text{micr}}(\rho^{(s_0)})$ есть некоторые полиномы, тогда как (111) всегда зависит от квадрата переменных $\rho^{(s_0)}$, т. е. имеет форму $P_{\text{phen}}((\rho^{(s_0)})^2) | \text{phen} \rangle$. Третье различие состоит в наборах квантовых чисел: набор в (110) намного богаче набора в (111). Поэтому пространство $\tilde{\mathcal{H}}^{(\Delta \omega)}$, натянутое на (110), также богаче $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{phen}}$, натянутого на (111): можно разложить (111) через (110), но не наоборот.

Сразу можно было бы продвинуться вперед в выяснении смысла феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра, если бы удалось найти подмножество функций в (110), изоморфное множеству (111). С этой целью рассмотрим трансформационные свойства переменных $q^{ss'}$ по отношению к действию операторов левого сдвига \tilde{T}_L группы O_{n-1} . Если G_{n-1} есть произвольный элемент этой группы, то по определению операторов левого сдвига (см., например, [2, 3]), имеем

$$\tilde{T}_L(G_{n-1}) \rho_i^s = \sum_{s_0} \rho^{(s_0)} D_{s_0 s}^{(1s)}(G^+) D_{n-4+s_0, i}^{(1_{n-1})}(G_{n-1}^{-1} q). \quad (114)$$

Вспомнив определение (95) переменных $q^{ss'}$, легко получим

$$\hat{T}_L q^{ss'} = q^{ss'}, \quad (115)$$

т. е. $q^{ss'}$ есть скаляры по отношению к действию операторов левого (а также, разумеется, и правого) сдвига группы O_{n-1} . Это озна-

чает, что $q^{ss'}$ совершенно «не чувствует» существования группы O_{n-1} в той мере, в какой, например, радиальная переменная, будучи функцией от квадратичной формы декартовых переменных, «не чувствует» действия группы O_3^+ . Другими словами, в пространстве $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ любое действие группы O_{n-1} полностью заморожено; значит, также необходимо отыскать замороженное подпространство и в $\tilde{\mathcal{R}}^{(\Lambda\omega)}$. Можно заморозить действие любых операторов группы O_{n-1} в $\tilde{\mathcal{R}}^{(\Lambda\omega)}$, взяв в (110) $\omega = (0)$, поэтому правдоподобно, что $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ должно быть изоморфно подпространству $\tilde{\mathcal{R}}^{(\Lambda, \omega=0)} \equiv \tilde{\mathcal{R}}^{(0)}$.

Это предположение легко доказуемо путем проверки изоморфизма между соответствующими наборами квантовых чисел. Правила приведения на цепочке $U_{n-1} \supset O_{n-1}$ хорошо известны (см., например, [4]), и здесь мы воспользуемся только одним фактом: U_{n-1} -неприводимое представление $[E_1 E_2 E_3]$ содержит O_{n-1} -скалярное представление тогда и только тогда, когда все E_1, E_2, E_3 являются четными. В этом случае индекс повторения δ принимает только одно значение и, следовательно, несуществен.

Итак, выяснилось, что функции (110) с $\omega = (0)$, а именно функции

$$\Theta \left(\begin{matrix} E [E_1 E_2 E_3] \gamma L M \\ \omega = (0) \end{matrix} \middle| \rho^{(s_0)} \right), \quad (116)$$

характеризуются набором квантовых чисел, изоморфным набору в (111). Принимая во внимание явный вид функций $R_{E\Omega}(\rho)$, из общего выражения (86) можно увидеть, что при $\omega = 0$ полиномы $P_{\text{micr}}^{(0)}$, умноженные на $(\rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)})^{1/2(n-2)}$, зависят лишь от $(\rho^{(s_0)})$, т. е. существует связь между P_{phen} и $P_{\text{micr}}^{(0)}$. В обоих случаях асимптотические условия для больших $\rho^{(s)}$ обеспечивают быстрый спад базисных функций и, следовательно, не возникает проблем сходимости. Подводя итоги вышесказанному, сформулируем следующую теорему.

Теорема. Гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ изоморфно пространству $\tilde{\mathcal{R}}^{(0)}$ [1].

В основе этой теоремы лежат алгебраические свойства. При сравнении базисов (110) и (111) следует обратить внимание на интервалы значений переменных $q^{ss'}$: $0 \leq q^{ss'} < +\infty$; эти пределы следует учесть при решении дифференциального уравнения для оператора (105). Однако с алгебраической точки зрения эти детали не очень важны. Их можно учесть с помощью нормирующих множителей. Пример такого рода можно найти в [44], где, в частности, в явном виде продемонстрировано, что алгебраические свойства некоторых коэффициентов разложения в случае функций одномерного осциллятора (т. е. когда $-\infty < x < +\infty$) вычис-

ляются по той же формуле, что и коэффициенты для осцилляторных радиальных функций (т. е. при $0 \leq r < +\infty$).

С практической точки зрения наличие вышеописанного изоморфизма между двумя, различным образом построенными пространствами $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}^{(0)}$ означает, что в вычислениях вместо базиса (114) можно пользоваться базисом (110). Последний базис для произвольного ω зависит от числа частиц, тогда как первый от него не зависит. Поэтому при реализации пространства, изоморфного пространству $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$, можно зафиксировать число частиц и, разумеется, проще всего взять наименьшее n . Вырожденный случай с $n = 3$, когда набор $\rho^{(s_0)}$ состоит лишь из двух переменных, не подходит, поэтому можно взять $n = 4$. При этом из (87) получаем следующее выражение для коэффициентов B :

$$B = \sum_{E_{xy}\omega_x} (d_{\omega_x} d_{\omega_y})^{1/2} D_{0\omega_x}^{(\omega_x\bar{0})} D_{00}^{(\omega_x\bar{0})} D_{0\omega_x}^{(\omega_y\bar{0})} C_{\omega_x\bar{\omega}_x}^{E_x} E_{y\bar{\omega}_x} E_{xy\bar{\omega}_x} E_{z\bar{0}} \times \\ \times C_{\omega_z}^{E_{xy}} E_{z\bar{0}} E_{00} M_{E_{xy}E_x, \gamma LK}^{(E)} \quad (117)$$

где $\bar{\omega}_x$ принимает не более двух значений, а C — коэффициенты Клебша — Гордана для группы U_3 . Явный вид C и M известен, следовательно, и базис в $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ строится в явном виде.

Рассмотрим остальные две цепочки (106) и (107), используемые при построении базиса в пространстве $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$. В [44] в явном виде найдена матрица, связывающая эти два базиса, поэтому достаточно рассмотреть один из них, скажем, цепочку (107). Базисные функции для нее, очевидно, имеют следующий вид:

$$\sum_K \Theta(\in \Lambda_6 \Lambda_5 \kappa LK | p_0, \beta, \gamma) D_{KM}^L(G^+) = \\ = R_{\in \Lambda_6}(p_0) \sum_K Y(\Lambda_6 \Lambda_5 \kappa LK | \beta, \gamma) D_{KM}^L(G^+), \quad (118)$$

где Λ_6 и Λ_5 обозначают O_6 и O_5 -неприводимые представления, а κ — индекс повторения на цепочке $O_5 \subset O_3$. С помощью правил приведения на соответствующих цепочках можно прямым путем установить изоморфизм между множеством базисных функций (118) с множеством функций (91) с $\omega = (0)$. В этом, однако, нет необходимости, потому что базисные функции (118) связаны с функциями (109) унитарным преобразованием [см. (5.5) в [41]], а функции (91) — с функциями (90) унитарным преобразованием, задаваемым матрицей с матричными элементами (11). Оба этих преобразования задаются квадратичными матрицами, и этого факта достаточно, чтобы убедиться в изоморфизме пространств, натянутых на базисе (118) и базисе (91) с $\omega = 0$. В частности, ясно, что функции с данным Ω сопоставляются с функциями с $2\Lambda_6 = \Omega$,

поэтому набор квантовых чисел Λ_5, κ в (118) изоморфен индексу повторения δ в (110). В [45, 46] в явном виде построены базисные функции для цепочки $U_5 \supset O_5 \supset O_3^+$. Дополняя это построение до цепочки (106), можно пользоваться результатами упомянутых работ для реализации базиса в $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$.

11. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ РОТАЦИОННО-ВИБРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЯДРА

Приведенная в предыдущем разделе теорема дает ключ к пониманию микроскопического смысла ротационно-вибрационной модели ядра. Уточним смысл, который далее будем вкладывать в эту модель. Говоря о ротационной модели ядра, будем иметь в виду теорию, основанную на гамильтониане

$$H_{\text{phen}}((\rho^{(s_0)})^2, G^3) = -(1/2) \Delta_{\text{phen}} + V_{\text{phen}}((\rho^{(s_0)})^2, G^+) \quad (119)$$

с оператором кинетической энергии вида (97) и произвольной потенциальной энергией V_{phen} , зависящей, вообще говоря, от $(\rho^{(s_0)})^2$ и G^+ ; заметим, что не исключена зависимость потенциала V_{phen} от переменных G^+ , так как нуклон-нуклонное взаимодействие сохраняет лишь полный момент J . Под это определение феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра попадает и обычно понимаемая модель. Действительно, если учитывать связь (102) между $(\rho^{(s_0)})^2$ и переменными β, γ и считать, что (119) не зависит от переменной ρ_0 , а также допустить, что V_{phen} не зависит от G^+ , то (119) превращается в обычно используемый гамильтониан феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра (см., например, (6.38) в [37]).

В предыдущем разделе выяснили, что оператор (119) действует в пространстве $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$. При заданном V_{phen} в принципе можно вычислить матрицу оператора H_{phen} в базисе (111) либо в базисе (118) (один из этих базисов приспособлен к так называемому ротационному, а другой — к вибрационному пределу [41, 47]) и, диагонализируя ее, найти спектр и собственные значения оператора (119). В феноменологической теории V_{phen} выбирается эмпирически. Кроме того, вводим зависимость от спиновых квантовых чисел, дополняя H_{phen} операторами полного момента. Соответственно обогащается и гильбертово пространство путем замены D^L на D^J , где J — полный угловой момент ядра. Учитываются также и хорошо известные технические детали, связанные с обеспечением требований, вытекающих из дополнительной симметрии по отношению к группе дискретных преобразований и т. п.

Доказанный в [1] изоморфизм пространств $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{phen}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}^{(0)}$ дает конструктивную возможность обобщить феноменологическую теорию, используя преимущества, представляемые микроскопиче-

ской теорией. Делается это следующим образом [1]: чтобы получить микроскопическое обоснование феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра, следует развивать теорию в пространстве $\mathcal{R}^{(0)}$, где, напомним, отсутствие тильды у \mathcal{R} означает, что учитываются также и спин-изоспиновые степени свободы ядра. Однако такая теория уже изложена в разд. 4—8, так что остается лишь приспособить общие формулы к этому частному случаю. Для матрицы гамильтониана, полагая в (82) $\omega = (0)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{c} E\gamma(LS)JM_J \\ TM_T\tilde{\alpha}(0)\tilde{\lambda} \end{array} \middle| H_{\text{кол}}^{(\kappa\kappa_0)} \middle| \begin{array}{c} E'\gamma'(L'S')JM_J \\ TM_T\tilde{\alpha}'(0)\tilde{\lambda} \end{array} \right\rangle = \\ & = (-1)^{L+S'+J} ((2L+1)(2S+1))^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} L & S & J \\ S' & L' & \kappa \end{array} \right\} \times \\ & \left\langle \tilde{\lambda}\tilde{\alpha}STM_T \middle| \sum_{i>j=1}^n \hat{U}^\kappa(\sigma_i\sigma_j\tau_i\tau_j) \middle| \tilde{\lambda}\tilde{\alpha}'S'TM_T \right\rangle \times \\ & \times \langle E\gamma L(0) \parallel \hat{W}_{\text{кол}}^\kappa \parallel E'\gamma' L'(0) \rangle. \end{aligned} \tag{120}$$

В (120) осуществлена небольшая модификация, а именно множитель $(1/2)n(n-1)$ опущен, а $\hat{U}(\rho_a)$ заменено суммой $\sum \hat{U}(ij)$. Входящая в (120) субматрица вычисляется при помощи (93) с $\omega = (0)$.

Гамильтониан, получаемый ограничением H на пространство $\mathcal{R}^{(0)}$, обозначим через H_{R-V} . Матричное представление оператора H_{R-V} дает формула (120), следовательно, этот оператор определен и в любом представлении. Решая уравнение Шредингера

$$H_{R-V}\Psi_{R-V} = E_{R-V}\Psi_{R-V}, \tag{121}$$

находим спектр и волновые функции Ψ_{R-V} . По определению, физическую картину, описываемую функциями Ψ_{R-V} , будем называть *микроскопической обобщенной ротационно-вибрационной моделью ядра* (обобщенной — по той причине, что гамильтониан H_{R-V} учитывает также и «дыхательную» степень свободы ядра, описываемую переменной ρ). Эта модель введена в [1].

Как только что было объяснено, гамильтониан микроскопической обобщенной ротационно-вибрационной модели есть H , ограниченный на O_{n-1} -скалярное подпространство $\mathcal{R}^{(0)}$. Важно иметь в виду, что это ограничение нарушает принцип Паули. Действительно, если $\omega = (0)$, тогда $\lambda = [n]$, значит, $\tilde{\lambda}$ должно быть равно $[1^n]$. Однако это невозможно: при $n > 4$ для схемы $[1^n]$ не существует спин-изоспиновых функций. Нам не остается ничего другого, как допустить, что равенство $\tilde{\lambda} = [1^n]$ не обязательно следует из условия $\lambda = [n]$, т. е. что $S_n^{(\sigma)}$ - и $S_n^{(\sigma\tau)}$ -неприводимые пред-

ставления λ и $\tilde{\lambda}$ не связаны в антисимметрическое представление. Это, конечно, дополнительное предположение, нарушающее кинематические требования квантовой механики. Сделаем это допущение и будем считать, что в (120) $\tilde{\lambda}$ принимает значения, допустимые в физически разрешаемых U_{n-1} -состояниях $[E_1 E_2 E_3]$, со всеми четными E_1, E_2, E_3 *).

Резюмируя вышесказанное, заключаем, что микроскопическая обобщенная ротационно-вибрационная модель ядра не является кинематически корректной моделью. Это свойство теории было потеряно вследствие решения принять $\omega = (0)$. Последнее решение, в свою очередь, обусловлено свойствами феноменологического гамильтониана (119): этот гамильтониан зависит от $q^{ss'}$, т. е. от $(\rho^{(s_0)})^2$ и G^+ , а его собственные функции есть скаляры группы O_{n-1} . Таким образом определенная микроскопическая модель, будучи в этом отношении близка к феноменологической, дает естественное обобщение последней.

Главное преимущество микроскопической модели, по сравнению с феноменологической, заключается в том, что ее гамильтониан H_{R-V} не является эмпирическим, а выводится из гамильтониана H . Это обстоятельство открывает возможности для изучения зависимости H_{R-V} от деталей нуклон-нуклонного взаимодействия. В этом направлении еще предстоит проделать большую работу как аналитического, так и численного характера. Не останавливаясь на подробностях, коснемся лишь вопроса зависимости гамильтониана H_{R-V} от операторов углового момента.

Наиболее интересные в этом отношении слагаемые появляются из векторных и тензорных сил, зависящих от операторов углового момента. Используя (26) и (27) для переменных ρ_a^s и учитывая то обстоятельство, что в O_{n-1} -скалярных пространствах все операторы \hat{J} исчезают, получаем

$$\begin{aligned}
 L_{ss'}(\rho_a^0) &= \rho_a^s \partial / \partial \rho_a^{s'} - \rho_a^{s'} \partial / \partial \rho_a^s = \\
 &= \sum_{s_0} \rho^{(s_0)} D_{n-4+s_0, a}^{(1_{n-1})} \sum_{\substack{s'_0 > s''_0 \\ s'_0 > s''_0}} \left(\frac{\rho^{(s'_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s_0 s'_0, s' s}^{(11)} \times \right. \\
 &\times D_{n-4+s'_0, a}^{(1_{n-1})} + \left. \frac{\rho^{(s''_0)}}{(\rho^{(s'_0)})^2 - (\rho^{(s''_0)})^2} D_{s_0 s'_0, ss'}^{(11)} D_{n-4+s'_0, a}^{(1_{n-1})} \right) \mathcal{L}_{s'_0 s''_0}. \quad (122)
 \end{aligned}$$

* Это фактически означает, что в указанной модели в такой форме остается «вспоминание» о принципе Паули, т. е. что принцип Паули нарушается лишь для орбитальной части волновой функции ядра. Заметим также, что выражения (76) и (82) получены для антисимметричных волновых функций и можно было бы возразить, что (120) не справедливо, когда пренебрегаем условием антисимметрии. Это было бы верно для $\langle | \hat{\tilde{\Theta}} | \rangle \neq 0$. При $\langle | \hat{\tilde{\Theta}} | \rangle = 0$ после модификации (120) эта формула пригодна для произвольных $\tilde{\lambda}$.

Для того чтобы закончить выделение оператора $\hat{W}_{\text{кол}}$ для векторных сил, остается умножить (122) на потенциал векторного взаимодействия и, используя (68), найти O_{n-1} -скалярную часть полученного выражения. Ясно, что окончательный результат будет зависеть от переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ и углового момента $(i)^{-1}\mathcal{L}'_{s_0 s_0}$. Более сложная билинейная зависимость H_{R-V} от $\mathcal{L}'_{s_0 s_0}$ обусловливается зависящими от скоростей тензорными силами.

Эти простые рассуждения показывают, что H_{R-V} зависит от углового момента не только через оператор кинетической энергии, но также и через векторные и тензорные силы; дополнительные слагаемые такого рода иногда вводятся эмпирически при попытке микроскопического обоснования феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра. В рамках вышеописанной теории легко понять их происхождение и изучить их зависимость от деталей потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия.

Микроскопическая обобщенная ротационно-вибрационная модель ядра определена в рамках квантовой механики без привлечения гипотезы о вращающемся ядре и ссылок на полуклассическую картину строения ядра. Формально эта модель является частным случаем кинематически корректной теории. По существу, однако, это не так. Микроскопическая коллективная модель ядра строится в гильбертовом пространстве, натянутом на O_{n-1} -неприводимые подпространства $\mathcal{R}^{\Lambda\omega}$ с $\omega \geq \omega_{\text{мин}}$, где в случае $n > 4$ $\omega_{\text{мин}}$ не может принимать O_{n-1} -скалярные значения (подробности см. в [1, 4]). Обобщенная микроскопическая ротационно-вибрационная модель задана в пространстве $\mathcal{R}^{(0)}$ по той причине, что кинематически корректная модель, основанная на гамильтониане $H_{\text{кол}}$, была «испорчена» использованием «неестественных» переменных $(\rho^{(s_0)})^2$. Этот дефект теории, допущенный при определении гамильтониана (119), не исправим, поэтому при $n > 4$ микроскопическая обобщенная ротационно-вибрационная модель ядра, строго говоря, не имеет права существования в рамках квантовой механики; она определена на нефизическом подпространстве $\mathcal{R}^{(0)}$ многочастичного гильбертова пространства. Как было отмечено в [25], решения уравнения Шредингера (121), лежащие в пространстве, натянутом на функции, зависящие от переменных $(\rho^{(s_0)})^2$, не дают коллективных состояний, получаемых при истинном квантовом подходе.

Что же касается феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра, то ее судьба зависит от смысла, вкладываемого в переменные β , γ . Если считать, что микроскопический смысл этих переменных определяется соотношениями (102), то все вышесказанное о микроскопической обобщенной ротационно-вибрационной модели переносится и на феноменологическую ротационно-вибрационную модель ядра и тогда последняя должна быть вычеркнута из списка кинематически корректных теорий.

12. ДРУГИЕ ТИПЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

Возвратимся к вопросам общей теории, основанной на идее ограниченной динамики. Разд. 8 был закончен построением гамильтониана $H_{\text{кол}}$, содержащего всю информацию о коллективных степенях свободы ядра. Этот гамильтониан действует в бесконечном пространстве $\mathcal{R}^{(\Lambda\omega)}$, поэтому при решении уравнения Шредингера для $H_{\text{кол}}$ возникает проблема сходимости. Один из методов приближенного решения этого уравнения может быть основан на диагонализации матрицы (82). Осуществление такой диагонализации для широкого диапазона массовых чисел с обеспечением хорошей сходимости невозможно при современной электронно-вычислительной технике. Тем не менее в ряде специальных случаев для благоприятных в вычислительном отношении значений квантового числа ω и при умеренных требованиях к сходимости разложений по базисным функциям такие вычисления можно осуществить сравнительно легко. Степень трудности решения уравнения Шредингера для коллективного гамильтониана $H_{\text{кол}}$, разумеется, также зависит и от сложности исходного гамильтониана H .

Выше говорилось о численных методах решения уравнения (94). По общности и наглядности они, как правило, уступают аналитическим методам, поэтому желательно продвинуться вперед при изучении в общем виде свойства гамильтониана $H_{\text{кол}}$. Один шаг в этом направлении можно сделать, разлагая $H_{\text{кол}}$ в операторный ряд, первое слагаемое которого дает простой, по сравнению с $H_{\text{кол}}$, гамильтониан, приближенно описывающий свойства коллективных возбуждений. Сейчас увидим, что можно отыскать такое разложение в рамках описанного в разд. 2 общего метода проецирования операторов с ограниченной динамикой.

Вспомним, что в разд. 2 при обсуждении различных типов ограниченных гамильтонианов, кроме гамильтониана $H_{\text{кол}} \equiv H'_{23}$, введены еще три других оператора, а именно H'_1, H''_1 и H''_{23} . Первые два из них обсудим ниже, а теперь сосредоточим внимание на операторе H''_{23} . По определению этот оператор представляет U_{n-1} -скалярную часть исходного гамильтониана H , и знания этого факта достаточно, чтобы сообразить, что H''_{23} содержится в качестве слагаемого в гамильтониане $H_{\text{кол}}$. Действительно, группа O_{n-1} вложена в U_{n-1} по цепочке $U_{n-1} \supset O_{n-1}$, откуда вытекает, что каждый U_{n-1} -скалярный оператор обязательно является и O_{n-1} -скаляром. Поэтому

$$H_{\text{кол}} = H_{0\text{кол}} + \bar{H}_{\text{кол}}, \tag{123}$$

где $H_{0\text{кол}} \equiv H''_{23}$, а $\bar{H}_{\text{кол}}$ есть все слагаемые оператора $H_{\text{кол}}$, не являющиеся U_{n-1} -скалярами.

Разложение (123) можно осуществить по крайней мере двумя способами, первый из которых, как и разложение (80), основан на координатном представлении коллективных переменных. Практически оно осуществляется заменой в (67) коллективных переменных и их производных операторами рождения и уничтожения осцилляторных квантов с последующим выделением из них U_{n-1} -скалярных слагаемых. Матрица оператора $H_{0\text{кол}}$ вычисляется по формуле (82) с той лишь разницей, что входящая в нее орбитальная субматрица становится дополнительно диагональной по $E\delta$ и независимой от $\delta\omega$. Орбитальные субматрицы вычисляются по формуле (93) с учетом только что отмеченной диагональности.

Скажем несколько слов и о втором способе вывода разложений (80) и (123). При конструировании операторов $H_{\text{кол}}$ и $H_{0\text{кол}}$ в матричном представлении явная их зависимость от переменных $\rho^{(s_0)}$, G^+ появляется лишь на промежуточном этапе, а затем при вычислении (96) производится усреднение по этим переменным. Возникает вопрос, необходимо ли это промежуточное координатное представление, столь неудобное в практических расчетах, — ведь далеко не просто в случае нетривиальных W осуществить в (67) интегрирование по \bar{q}^+ , и можно надеяться получить ответы в аналитическом виде лишь для простых потенциалов. Затем возникает проблема вычисления в общем случае шестикратных интегралов (93). Ясно, что эта задача тоже не проста.

Координатное представление удобно для понимания смысла коллективных и внутренних степеней свободы ядра, для наглядной реализации базисов в пространстве \mathcal{R} и выяснения исключительной роли групп O_{n-1} и U_{n-1} при изучении коллективных степеней свободы ядра. Однако оно неудобно с практической точки зрения. Хорошо известно (см., например, [27]), что каждый «хороший» оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве, можно представить в матричном виде. Поэтому ясно, что каждый метод, развитый в координатном представлении, можно сформулировать и на матричном языке. Это можно осуществить, опираясь на базис, полный по отношению к физическим операторам, действующим в пространстве \mathcal{R} . Описание этого базиса, включая ссылки на оригинальные работы, можно найти в [1, 4].

Матрица оператора $H_{0\text{кол}}$ диагональна по отношению к U_{n-1} -неприводимому представлению $[E_1 E_2 E_3]$. Размерность этого представления конечна, следовательно, и оператор $H_{0\text{кол}}$ задается конечномерной эрмитовой матрицей. Это означает, что уравнение Шредингера

$$H_{0\text{кол}} \Psi_{0\text{кол}} = E_{0\text{кол}} \Psi_{0\text{кол}} \quad (124)$$

решается точно. Иными словами, разложение (123) обладает тем важным с точки зрения практического применения свойством, что

первое его слагаемое дает точно решаемую часть гамильтониана $H_{\text{кол}}$. Поэтому отпадают все проблемы сходимости, и уравнение (124) можно решить для широкого диапазона массовых чисел, включая и примеры из области средних и тяжелых ядер.

Можно кое-что сказать о спектрах $E_{\text{кол}}$ и $E_{0\text{кол}}$, рассматривая степень их вырождения. В разд. 7 уже отмечалось, что $H_{\text{кол}}$ действует в $\mathcal{R}^{(\Lambda\omega\lambda T)}$, следовательно, гамильтониан $H_{\text{кол}}$ в дополнение к Λ сохраняет и квантовые числа $\omega\lambda T$. Несмотря на то обстоятельство, что орбитальная субматрица в (82) для оператора $H_{\text{кол}}$ вырождена по квантовым числам $\alpha\lambda$, зависимость матрицы (82) от λ восстанавливается благодаря спин-изоспиновым операторам: их матричные элементы зависят от $\tilde{\lambda}$, а $\tilde{\lambda}$, в свою очередь, находится в однозначном соответствии с λ . В итоге получаем, что $E_{\text{кол}} = E_{\text{кол}}(\pi J, \omega\lambda T)$, причем из-за бесконечной размерности пространства $\mathcal{R}^{(\Lambda\omega)}$ этот спектр для данных ω, λ, T состоит из бесконечного числа уровней.

Орбитальная субматрица для оператора $H_{0\text{кол}}$ вырождена по квантовым числам $\delta\omega\alpha\lambda$, зависимость его спектра от λ восстанавливается по той же причине, что и для $H_{\text{кол}}$, поэтому $E_{0\text{кол}} = E_{0\text{кол}}(\pi J, E\lambda T)$. В противоположность $E_{\text{кол}}$ этот спектр для данных E, λ, T состоит из конечного числа уровней. Остаточное взаимодействие $H_{\text{кол}} - \bar{H}_{\text{кол}}$ снимает вырождение по $\delta\omega$, образуя тем самым из конечных полос спектра $E_{0\text{кол}}$ полный спектр $E_{\text{кол}}$ коллективного гамильтониана $H_{\text{кол}}$.

Интересно проследить, насколько вырожден спектр $E_{\text{кол}}$ по сравнению со спектром E полного гамильтониана H . Оценить степень вырождения $E_{\text{кол}}$ можно по числу значений индекса повторения α . Известно (см., например, таблицы Приложения 12 в [4]), что этот индекс, как правило, несуществен для низколежащих состояний, а это означает, что во многих практически важных случаях неколлективная часть $H - H_{\text{кол}}$ гамильтониана H сдвигает, но не расщепляет энергетические уровни, даваемые микроскопической коллективной моделью. Указанное свойство спектра $E_{\text{кол}}$ (отмеченное в [25]) показывает, что в формирование подавляющего большинства низколежащих уровней свой вклад вносят и коллективные степени свободы. Важно выяснить величину вклада; эта проблема требует тщательного изучения.

При увеличении энергии коллективных возбуждений, т. е. для менее симметрических схем Юнга λ , а также менее энергетически выгодных значений квантового числа λ , индекс α может принимать все большее и большее число значений. Известны примеры, когда это число достигает сотен и даже тысяч. В этих случаях из-за вырождения по α плотность уровней спектра коллективных возбуждений все более отличается от плотности уровней спектра полного гамильтониана H , и, если только уровни являются

в достаточной мере стационарными существует интересный, отмеченный в [4] эффект, а именно — многократное расщепление уровней коллективного гамильтониана $H_{\text{кол}}$ остаточным взаимодействием $H - H_{\text{кол}}$. Без конкретных расчетов трудно установить, о каких энергиях возбуждения здесь идет речь.

До сих пор изучалась цепочка пространств $\mathcal{H}^{(\Lambda)} \supset \mathcal{H}^{(\Lambda\omega)} \supset \supset \mathcal{H}^{(\Delta E)}$ и соответствующая ей цепочка гамильтонианов $H \supset \supset H_{\text{кол}} \supset H_{0\text{кол}}$, действующих в этих пространствах. «Спускаясь» по этим цепочкам, увеличиваем симметрию модельных гамильтонианов, упрощая тем самым проблему нахождения их собственных функций. В разд. 7 выяснили, что коллективное слагаемое $H_{\text{кол}}$ (или $H_{0\text{кол}}$) содержится лишь в $S_n^{(\sigma)} \times S_n^{(\sigma\tau)}$ -скалярной компоненте $H^{[n]}$ гамильтониана H . Из этого вытекает, что, учитывая лишь коллективные эффекты, совершенно пренебрегаем несимметрическими компонентами $H^{[n-1,1]}$ и $H^{[n-2,2]}$. Величина матричных элементов этих компонент оценена в [48] (см. также [4]); найдено, что они не малы, а это свидетельствует о важности слагаемых $H^{[n-1,1]} + H^{[n-2,2]}$. Следовательно, в ограниченном гамильтониане H_0 наряду с $H_{\text{кол}}$ (или $H_{0\text{кол}}$) должны быть учтены слагаемые, имеющие неисчезающие компоненты симметрии $[n-1, 1]$ и $[n-2, 2]$.

В теории, построенной в рамках ограниченной динамики, такие слагаемые уже встречались — это два оператора H'_1 и H''_1 , получаемые путем ограничения H соответственно на O_3^+ - и U_3 -неприводимые пространства. В рамках ограниченной динамики они учитывают взаимодействие между коллективными и внутренними степенями свободы ядра, а также в определенном смысле и эффекты, противоположные коллективным. Коротко рассмотрим смысл и значение этих операторов.

Оба гамильтониана H'_1 и H''_1 имеют слагаемые симметрии $[n]$, $[n-1, 1]$ и $[n-2, 2]$, и, следовательно, матрица оператора \hat{O} в (76) для них не исчезает. Орбитальные субматрицы этих гамильтонианов зависят от λ . Другими словами, в противоположность $H_{\text{кол}}$ и $H_{0\text{кол}}$, операторы H'_1 и H''_1 непосредственно «чувствуют» орбитальную схему Юнга. Очевидно, что при подборе специальных потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия эта чувствительность может быть повышена до желаемой величины. Тогда H'_1 и H''_1 станут напоминать гамильтонианы спаривания, которые, как хорошо известно, обладают аналогичными свойствами. Заключаем, что существует некоторое сходство между операторами H'_1 или H''_1 и короткодействующими силами в том смысле, что и те, и другие чувствительны к эффектам, обусловленным принципом Паули.

Качественно и количественно эти эффекты проще всего обсудить на примере оператора H''_1 , имеющего несравненно более простую структуру по сравнению с оператором H'_1 . В настоящее время

известен спектр оператора H_1'' для многих состояний в области массовых чисел $A \leq 40$. Уровни в этих спектрах расположены таким образом, что состояния с наиболее симметричными схемами Юнга по энергетической шкале достаточно четко отделены от состояний с менее симметричными λ (подробности см. в [4, 1]). Поэтому можно сделать вывод, что оператор H_1'' в (13) является прототипом сил спаривания. Гамильтониан (13) содержит еще и слагаемое H_3' , представляющее собой обобщение рассмотренного в [49] оператора квадрупольного взаимодействия, действующего в рамках одной SU_3 -конфигурации. В итоге заключаем, что, ограничивая H неприводимым пространством группы $U_3 \times U_{n-1}$, получаем эффекты, сходные с эффектами, обусловливаемыми дальнедействующими и короткодействующими силами.

Структуру оператора H_1'' можно обогатить, если «спускаться» по цепочке пространств $\mathcal{H}^{(\Lambda E)} \supset \mathcal{H}^{(\Lambda L)}$, заданной цепочкой группы $U_3 \supset O_3^+$ и соответственно «подниматься» по цепочке гамильтонианов $H_1'' \subset H_1'$. К сожалению, оператор H_1'' в (12) является слишком сложным, что сильно затрудняет изучение свойств его собственных состояний. Фактически H_1'' состоит из суммы операторов кинетической энергии и центрального взаимодействия (а также при необходимости и кулоновского слагаемого), в которой исключена лишь O_{n-1} -скалярная часть. Чтобы иметь дело с обозримым гамильтонианом, необходимо сильно упростить H_1' . Представляется привлекательным использовать H_1' для короткодействующего взаимодействия вида

$$V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = V_0 \delta(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \tag{125}$$

где V_0 — некоторая константа. Введем гамильтониан

$$H_{\text{кол+спар}} = H_{\text{кол}} + H_{\text{спар}}, \tag{126}$$

где $H_{\text{спар}}$ есть H_1' с потенциалами центрального межнуклонного взаимодействия вида (125). Оператор $H_{\text{кол+спар}}$ действует в некотором подпространстве $\mathcal{H}^{(\Lambda)}$ пространства $\mathcal{H}^{(\Lambda)}$, но специфические характеристики $\mathcal{H}^{(\Lambda)}$ не известны. Оператор $H_{\text{спар}}$ разрушает в (126) O_{n-1} -скалярность, которой обладает гамильтониан $H_{\text{кол}}$. Оператор (126) обобщает используемый в теории ядра гамильтониан, содержащий квадрупольное взаимодействие и силы спаривания. Проблема изучения собственных функций и спектра оператора $H_{\text{кол+спар}}$ сложна и ее можно решить сравнительно легко лишь в случае малонуклонных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вспомним основные предпосылки изложенной в настоящем обзоре теории конечных, хорошо локализованных в пространстве ферми-систем, состоящих из тождественных частиц, и обсудим некоторые из ее аспектов. Как было подчеркнуто во введении,

математическая идея, использованная при построении теории, позволяет из сложных операторов проецировать более простые, применяемые для построения конструктивной теории ядра. Физические предпосылки, предшествующие этой математической идее, связаны с теми чрезвычайно специфическими условиями, которые существуют в конечных ферми-системах [3]: с точки зрения «нашего» 3-мерного пространства, в котором происходит движение нуклонов, в ядре нет выделенных силовых центров, вследствие чего отсутствуют и веские причины приписывать 3-мерному пространству особую роль по сравнению с другим, $n - 1$ -мерным пространством, размерность которого задается числом квазичастиц. Необходимо построить теорию, учитывающую в равной мере эффекты, связанные с наличием обоих пространств.

По этой причине удобно с самого начала рассматривать орбитальную часть волновой функции как функцию, зависящую от компонент $r_0 r$ -мерного вектора евклидова пространства $\mathcal{F}_{r_0 r}$, где $r_0 = 3$ и $r = n - 1$. Это пространство охватывает все орбитальные степени свободы ядра. Затем из $\mathcal{F}_{r_0 r}$ проецируется подпространство $\mathcal{F}_{r_0} \times \mathcal{F}_r$ — прямое произведение двух одинаково важных пространств \mathcal{F}_{r_0} и \mathcal{F}_r , введение которых отражает наличие двух типов индексов орбитальных переменных ядра. Теперь, грубо говоря, усредняя динамические уравнения по индексам пространства \mathcal{F}_r , получаем описание коллективных эффектов, а усредняя по индексам пространства \mathcal{F}_{r_0} , — описание эффектов, противоположных коллективным эффектам. Технику такого усреднения предоставляет алгебраический аппарат либо ортогональных групп O_r и O_{r_0} , либо унитарных групп U_r и U_{r_0} . В частности, анализ пространства, в котором действует гамильтониан микроскопической обобщенной ротационно-вибрационной модели ядра, показал, что эта модель соответствует глубоко замороженной в \mathcal{R} картине, когда действующие в этом пространстве операторы группы O_r дают нуль, т. е. когда в теории полностью игнорируется движение в \mathcal{F}_r .

Хотя в данном обзоре больше выделены эффекты, проявляющиеся при усреднении по индексам пространства \mathcal{F}_r , тем не менее на первом этапе построения теории можно наблюдать полную симметрию по отношению к пространствам \mathcal{F}_r и \mathcal{F}_{r_0} . Различие становится заметным при переходе к точным интегралам движения. Ни один из них, кроме четности λ , не обуславливается только орбитальными степенями свободы: для получения JM_J необходимо иметь квантовые числа LM и SM_S , аналогично для построения антисимметрической функции необходимо иметь $\lambda\mu$ и $\tilde{\lambda}\tilde{\mu}$.

С одной стороны, экспериментальные данные непосредственно связаны со значением квантового числа J , а следовательно, кос-

венно — с L и S , когда они комбинируются в J . В общей теории установлено, что J можно ввести даже тогда, когда движение в \mathcal{F}_7 заморожено. С другой стороны, экспериментальные данные косвенно связаны с антисимметричностью, а значит, и с λ и $\tilde{\lambda}$, когда они комбинируются в a . Из общей теории известно, что a можно ввести даже тогда, когда движение в \mathcal{F}_7 заморожено. Однако квантовое число a фиксировано, тогда как J принимает многочисленные значения; в этом и заключается причина, по которой спектры операторов $H_{\text{кол}}$ и $H_{0 \text{ кол}}$ богаты и характеризуются многими значениями наблюдаемых квантовых чисел, а спектры операторов H_1' и H_1'' (подробности см. в [1]) их не дают.

Это также позволяет понять, почему на первой стадии развития феноменологической ротационно-вибрационной модели ядра, когда еще не учитываются одночастичные степени свободы, так подчеркнуты коллективные эффекты: они связаны с наблюдаемыми квантовыми числами. Мы также выяснили, что из-за недопустимо глубокого замораживания в \mathcal{F}_7 (это случилось при использовании билинейных форм вместо $\rho^{(s_0)}$) собственные векторы гамильтониана, зависящего от $(\rho^{(s_0)})^2$, лежат в нефизическом подпространстве $\mathcal{R}^{(0)}$ пространства $\mathcal{R}^{(\omega)}$. Как следствие, при таком подходе теряются многие важные черты спектра настоящих коллективных возбуждений.

Дальнейшее развитие феноменологической теории было направлено на учет связи между коллективным и одночастичным движением. В кинематически корректной теории, строго говоря, нет места для такой связи и не только потому, что кинематика запрещает возникновение в ядре одночастичного поля: оно может быть заменено квазичастичным полем (подробности см. в [1—3]). Основная причина кроется в том, что использование коллективных переменных исключает возможность введения одноквазичастичных переменных. Это утверждение вытекает из простого подсчета: общее число переменных есть $3(n-1)$, шесть из них — коллективные переменные, значит, остается $3(n-3)$ переменных, а этого числа уже недостаточно, чтобы приписать тройку переменных каждой из $n-1$ квазичастиц. Поэтому пользуемся набором внутренних переменных и говорим о взаимодействии между коллективными и внутренними степенями свободы ядра.

Теория, изложенная в настоящей работе, основана на равенстве (7), обеспечивающем условие для ограниченной динамики. Условие выглядит простым только с первого взгляда. В действительности, оно трудно выполнимо. Как можно изолировать некоторый ящик, отрезая все недиагональные элементы, соединяющие его с остальной частью матрицы оператора энергии? Как найти такой подходящий механизм обрезания недиагональных элементов, чтобы получить ограниченный гамильтониан H_0 , не слишком сложный, но также и не слишком тривиальный? С технической

точки зрения, это удастся сделать лишь благодаря очень специальной реализации гильбертова пространства, основанной на чисто алгебраических свойствах построенного базиса. В чем же причина? Вспомним следующую деталь, касающуюся правил приведения на цепочке $U_{3(n-1)} \supset U_3 \times U_{n-1}$: $U_{3(n-1)}$ -неприводимые представления $[E0 \dots 0]$ на этой цепочке распадаются на представления $[E_1 E_2 E_3]$, одновременно характеризующие неприводимые пространства для обеих групп U_3 и U_{n-1} . Другими словами, U_3 -неприводимое представление однозначно определяет U_{n-1} -неприводимое представление, и наоборот. Это и есть то хорошее свойство базиса, которое обеспечивает возможность проецирования операторов с ограниченной динамикой: когда осуществляется ограничение на неприводимом пространстве группы U_{n-1} (замораживается движение в \mathcal{P}_{n-1}), обрезаются все недиагональные элементы не только по отношению к квантовым числам группы U_{n-1} , но также и по отношению к квантовым числам группы U_3 . Несмотря на это, движение в 3-мерном пространстве \mathcal{P}_3 не замораживается и получается достаточно сложный и практически решаемый гамильтониан $H_{\text{юкл}}$. Роль пространств \mathcal{P}_{n-1} и \mathcal{P}_3 меняется при осуществлении ограничения на неприводимом пространстве группы U_3 .

С математической точки зрения унитарная группа $U_{3(n-1)}$ дает большую совокупность пространств, маркируемых как $[E_1 E_2 \dots E_{3(n-1)}]$. Эти пространства натянуты на функции, зависящие, вообще говоря, от большого числа переменных, намного превышающего число орбитальных степеней свободы ядра (см., например, [50]). Если осуществить приведение этих представлений на цепочке $U_3 \times U_{n-1}$, то обнаружится, что, кроме случая представлений класса $[E0 \dots 0]$, неприводимые представления одной из групп U_3 или U_{n-1} не определяют однозначно неприводимое представление другой группы и, следовательно, уже не имеет места вышеотмеченное свойство замораживания. Почему же в теории ядра используется столь ничтожная часть этих пространств, а именно пространство $[E0 \dots 0]$, столь подходящее для наших целей? Дело в том, что изучается многочастичная проблема в теории ядра в рамках нерелятивистской квантовой механики. Тогда число частиц и их вид сохраняются и, как следствие этого, гильбертово пространство, в котором действует гамильтониан ядра, можно натянуть на $U_{3(n-1)}$ -неприводимые пространства $[E0 \dots 0]$.

Отметим также, что реализация гильбертова пространства с помощью функций, заданных на соответствующем фактор-пространстве компактной группы $U_{3(n-1)}$, отражает свойства компактности физической системы, т. е. хорошую пространственную локализацию ядра. О возможности расширения гильбертова пространства до оснащенного гильбертова пространства упомянуто в разд. 8.

Нельзя рассчитывать на выяснение картины строения ядра без упрощения до разумного предела динамической задачи многих тел. В изложенной в настоящем обзоре теории многочастичная задача упрощена выделением H'_0 или H''_0 из H , обнаружением тем самым некоторых определенным образом сглаженных свойств исходного гамильтониана ядра. Полученная картина строения ядра скрыта в гамильтонианах H'_0 или H''_0 и предстоит еще проделать большую работу по выяснению всех ее деталей. Потенциалы нуклон-нуклонного взаимодействия не известны, что и обусловило приспособление изложенной теории к произвольному гамильтониану H , т. е. к множеству гамильтонианов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(\Lambda)}$. Эта особенность теории, будучи весьма ценной благодаря общности, поднимает ряд вопросов, ответы на которые должны быть найдены в будущем. Один из них связан с чувствительностью результатов к деталям нуклон-нуклонного взаимодействия. Как отразится изменение вида или интенсивности этого взаимодействия на средних значениях различных операторов, вычисленных в собственных состояниях гамильтонианов H'_0 или H''_0 ? В частности, насколько чувствительны наблюдаемые величины к форме потенциалов центральных, векторных и тензорных сил?

Этот вопрос слишком сложен, чтобы дать на него ответ в общей форме. Чувствительность результатов, полученных с приближенными волновыми функциями, неодинакова для различных наблюдаемых величин, например: спектра, матричных элементов операторов, описывающих форму ядра, вероятности переходов и других статических и динамических характеристик атомных ядер. Разумеется, что наиболее важным из них является энергетический спектр, ибо можно говорить о свойствах данного состояния лишь после того, как установлена его энергия и другие квантовые числа.

По отношению к вышепоставленным вопросам гамильтониан H''_0 обладает тем ценным с технической точки зрения свойством, что уравнение Шредингера для него решается точно. В определенном смысле H''_0 есть наибольшая, еще точно решаемая часть гамильтониана H ; правдоподобно, что до тех пор, пока H есть произвольный гамильтониан, каждое его слагаемое, дополнительное к H''_0 , ведет к оператору, уравнение Шредингера для которого не поддается аналитическим методам решения.

Весьма неожиданно, на первый взгляд, высказанное утверждение, что каждый H содержит точно решаемую часть H''_0 . Слишком уж укоренилось мнение, что в квантовой теории многочастичных систем имеется лишь несколько точно решаемых гамильтонианов, таких, как гамильтониан гармонического осциллятора и некоторые другие простые гамильтонианы. Такое мнение возникло в связи с традицией иметь дело с операторами в координатном представлении. Однако это не единственный способ задавать их в сепар-

рабельном гильбертовом пространстве [27]. Часто удобнее пользоваться более гибким матричным представлением. Именно эта гибкость и позволила спроецировать из произвольного H его точно решаемую часть H_0'' . В преимуществе матричного представления перед координатным можно убедиться при попытке построить H_0'' в чисто координатном представлении. Это привело бы к трудно обозримым разложениям, некоторое впечатление о которых можно получить по описанному в [1] полному операторному базису, приспособленному для таких разложений.

В квантовой теории многочастичных систем точно решаемые гамильтонианы принято называть нулевыми гамильтонианами. Следуя этой традиции, назовем H_0'' *нулевым гамильтонианом с ограниченной динамикой*. Этот гамильтониан определяет некоторую модель ядра, предложенную в [5]. Она отражает, хотя и в очень упрощенной форме, динамику, заложенную в уравнение Шредингера для исходного гамильтониана H . Как подчеркнуто в соответствующих местах данного обзора, H_0'' порождается парой операторов H и \hbar , где \hbar есть «маленький» кинематический гамильтониан, не способный даже в упрощенном виде отразить свойства исходного, «большого» гамильтониана H .

Картина строения ядра, описываемая собственными функциями гамильтониана \hbar , очень проста. Согласно этой картине ядро представляет систему невзаимодействующих квазичастиц, ансамбль которых отражает лишь простейшие кинематические свойства гамильтониана H (подробности см. в [2, 3]). Когда пара H и \hbar порождает гамильтониан H_0'' , вводится динамическая картина строения ядра. Исходный гамильтониан H , запертый в двойной ящике E (двойной — потому что E выступает в качестве U_3 - и U_{n-1} -неприводимого представления), превращается в модельный гамильтониан H_0'' , состоящий из двух слагаемых H_1'' и $H_{0 \text{ кол}}''$, физический смысл которых прямо противоположен. Одно из них, а именно $H_{0 \text{ кол}}''$, в пространстве \mathcal{P}_3 есть коллективное слагаемое. Другое же, а именно H_1'' , есть также «коллективное» слагаемое, но уже не в пространстве \mathcal{P}_3 , а в пространстве \mathcal{P}_{n-1} . Действительно, в пространстве, где координатные оси маркируются индексами квазичастиц, «коллективное» означает нечто усредненное по декартовым индексам. С точки зрения «нашего» пространства \mathcal{P}_3 , этот тип замораживания порождает эффекты, которые для наглядности можно назвать «антиколлективными» эффектами [1].

Эти два вида взаимодействия обуславливают очень определенные черты спектра, некоторые свойства которого обсуждены в [1]. В частности, выяснено, что гамильтонианы H_1'' и $H_{0 \text{ кол}}''$, вообще говоря, не коммутируют, хотя изредка встречаются такие $U_3 \times U_{n-1}$ -ящики E , в которых они коммутируют. Поэтому диагонализация матрицы оператора H_0'' ведет к некоторому смешиванию коллективного и «антиколлективного» эффектов. Векторные и тен-

зорные слагаемые оператора $H_{0 \text{ яол}}$ обуславливают специфическое расщепление спектра оператора, порожденного центральным взаимодействием. Характер этого расщепления, кроме других факторов, зависит и от характеристик данного ящика E , в котором заперт гамильтониан H . В некоторых ящиках векторные и тензорные слагаемые не играют роли и можно ожидать спектра, сходного в случае четных ядер со спектром феноменологической теории. В других же ящиках исчезает только тензорное слагаемое, и все расщепления по квантовому числу J обуславливаются лишь векторными силами. В феноменологической теории чисто коллективные эффекты возникают в четных ядрах; в микроскопической теории они одинаково важны как для четных, так и для нечетных n . Собственные функции гамильтониана H_0'' достаточно сложны и разнообразны и трудно поддаются наглядной интерпретации.

Структура нулевого гамильтониана H_0'' несравненно богаче структуры гамильтониана h . Тем не менее на H нужно смотреть как на нулевой гамильтониан, со всеми вытекающими из этой трактовки последствиями. Не следует ожидать, что его собственные функции способны достаточно хорошо описать большинство свойств низколежащих уровней. Атомные ядра являются слишком сложными объектами, чтобы можно было надеяться объяснить их свойства с волновыми функциями нулевого гамильтониана ядра. Некоторые важные особенности структуры ядра заведомо скрыты в остаточном взаимодействии $H - H_0''$. Не исключено, что можно выделить достаточно простое слагаемое в H , ответственное за сильное взаимодействие между орбитальными и спиновыми степенями свободы ядра (на языке, используемом в оболочечной модели, его принято называть сильным спин-орбитальным взаимодействием). При построении теории ядра в рамках ограниченной динамики учтены коллективные и «антиколлективные» эффекты, причем их можно изучать в точно решаемом (гамильтониан H_0'') и приближенно решаемом (гамильтониан H_0') вариантах теории. В обоих случаях также учитывалась связь между орбитальными и спиновыми степенями свободы, что видно из структуры матрицы (82), но, по-видимому, в этой форме указанное взаимодействие учтено в недостаточной мере. Наводящие идеи, подсказывающие, как это сделать, можно получить из свойств разложения (59). Математический аппарат, необходимый для таких исследований, развит в достаточной мере, известны также некоторые детали. Однако эти вопросы выходят за рамки данного обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vanagas V. Lecture Notes, University of Toronto, Toronto, 1977.
2. Ванагас В. В. Конспект лекций школы МИФИ. М., 1974.
3. Ванагас В. В. ЭЧАЯ, 1976, т. 7, вып. 2, с. 309.
4. Ванагас В. В. Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс, 1971.

5. Vanagas V. In: Proc. Internat. Conf. on Selected Topics in Nuclear Structure. V. 1. Dubna, 1976, p. 46.
6. Wigner E. P.— Phys. Rev., 1937, v. 51, p. 106.
7. Wigner E. P.— Ibid., 1939, v. 56, p. 519.
8. Айзенбуд Л., Вигнер Е. Структура ядра. М., 1959.
9. Ванагас В. В.— Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 950.
10. Дзюблик А. Я. Препринт ИТФ-71-122Р. Киев, 1971.
11. Дзюблик А. Я. и др. Препринт ИТФ-71-134Р. Киев, 1971; Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 869.
12. Филиппов Г. Ф.— ЭЧАЯ, 1973, т. 4, вып. 4, с. 992.
13. Zickendraht W.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 1663.
14. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.— Ядерная физика, 1973, т. 18, с. 768.
15. Калинаускас Р. К., Тауринкас М. В., Ванагас В. В.— Лит. физ. сб., 1976, т. 16, с. 177.
16. Тауринкас М. В., Ванагас В. В.— Там же, 1975, т. 15, с. 329.
17. Ашерова Р. М. и др.— Ядерная физика, 1975, т. 21 с. 1126.
18. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.— Лит. физ. сб., 1972, т. 12, с. 217.
19. Ванагас В. В.— Лит. физ. сб., 1977, т. 17, с. 409.
20. Калинаускас Р. К., Ванагас В. В.— Там же, 1974, т. 14, с. 491.
21. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.
22. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.— Лит. физ. сб., 1974, т. 14, с. 549.
23. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К.— Там же, 1973, т. 13, с. 11.
24. Калинаускас Р. К., Ванагас В. В.— Там же, 1973, т. 13, с. 25.
25. Vanagas V. In: Proc. Internat. Symp. on Nuclear Structure. V. 1. Balatonfured, 1975. 1976, p. 167.
26. Петраускас А. К., Ванагас В. В.— Лит. физ. сб., 1965, т. 5, с. 215.
27. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М., 1964.
28. Ванагас В. В., Тауринкас М. В.— Лит. физ. сб., 1977, т. 17, с. 717.
29. Moshinsky M.— Rev. Mod. Phys., 1962, v. 34, p. 813.
30. Asherova R. M., Smirnov Yu. F.— Nucl. Phys. A, 1970, v. 144, p. 116.
31. Ванагас В. В.— Лит. физ. сб., 1977, т. 17, с. 421.
32. Bohr A.— Kgl. danske-vid. selskab., mat-fys. medd., 1952, v. 26, N 14.
33. Bohr A., Mottelson B. R.— Ibid., 1953, v. 27, N 16
(См. рус. пер. в кн.: Проблемы современной физики. Вып. 9. М., 1955).
34. Rainwater J.— Phys. Rev., 1950, v. 79, p. 432.
35. Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. М., 1967.
36. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. Т. 2, М., 1977.
37. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Т. 1. М., 1975.
38. Гречухин Д. П. Конспект лекций школы МИФИ. М., 1971.
39. Михайлов И. Н. и др.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 6, с. 1338.
40. Bohr A. Rotational States of Atomic Nuclei. Copenhagen. 1954.
41. Vanagas V., Nadjakov E., Raychev P. Preprint C/75/40 Trieste.
42. Littlewood D. E. The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups. Oxford. 1950.
43. Wybourne V. C. Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy. N. Y., 1970. (См. рус. пер. в кн.: Джадд Б., Вайборн Б. Теория сложных спектров. М., 1973).
44. Алишускас С. И., Ванагас В. В.— Лит. физ. сб., 1972, т. 12, с. 533.
45. Chacón E., Moshinsky M., Sharp R. T.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 668.
46. Chacón E., Moshinsky M.— Ibid., 1977, v. 18, p. 870.
47. Vanagas V., Nadjakov E., Raychev P.— Bulg. J. Phys., 1975, v. 2, p. 558.
48. Ванагас В. В., Петраускас А. К.— Ядерная физика, 1967, т. 5, с. 552.
49. Elliott J. P.— Proc. Roy. Soc. A., 1958, v. 245, p. 128; 1958, v. 245, p. 562.
50. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. В кн.: Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова.