«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1980, ТОМ 11, ВЫП. 5

УДК 517.9

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В. К. Мельников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложен алгоритм нахождения нелинейных эволюционных уравнений, для исследования которых можно применить метод обратной задачи. Показано, что все получаемые с помощью этого алгоритма уравнения обладают бесконечным числом законов сохранения. Изложение продемонстрировано несколькими известными примерами.

An algorithm is suggested for finding the nonlinear evolution equations, which may be investigated by the inverse scattering method. It is shown that all the equations obtained by this algorithm have an infinite number of conservation laws. Some known examples are demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие математическая физика обогатилась новым методом исследования нелинейных эволюционных уравнений. И хотя он применим к исследованию сравнительно узкого класса уравнений, важность получаемых результатов объясняет тот повышенный интерес, который они вызывают. В течение указанного промежутка времени было показано, что ряд важных с прикладной точки зрения уравнений входит в этот класс. Поиски таких уравнений продолжаются и их число растет с каждым годом. В настоящее время известно около двух десятков уравнений, описывающих нелинейные эволюционные процессы и допускающих исследование с помощью рассматриваемого здесь метода. При своем рождении он получил не совсем точное название метода обратной задачи. Суть его состоит в следующем.

Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение

$$\partial u/\partial t = F\,(u,\ \partial u/\partial x,\ \ldots,\ \partial^n u/\partial x^n). \tag{1}$$

Предположим, что оно обладает решением $u = u\,(x,\ t)$, которое определено при всех $x \in (-\infty,\ \infty)$ и всех $t \geqslant 0$. Пусть, кроме того, при $x \to \pm\infty$ решение $u\,(x,\ t)$ стремится достаточно быстро к нулю при любом фиксированном $t \geqslant 0$, например, так, что условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u(x,\ t)|\,dx < \infty \tag{2}$$

выполнено при любом $t \geqslant 0$. Возьмем теперь оператор Шредингера $L = -\partial^2/\partial x^2 + u$, в котором в качестве потенциала $u = u(x,\ t)$ фигурирует описанное выше решение уравнения (1), и рассмотрим для него стандартную задачу рассеяния. В силу (2) уравнение

$$L\varphi = \zeta^2\varphi \tag{3}$$

при любом действительном ζ имеет два решения $\varphi_1,\ \varphi_2$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_1 \sim \exp(-i\zeta x), \qquad \varphi_2 \sim \exp(i\zeta x), \quad x \to -\infty,$$

и два решения $\psi_1,\ \psi_2$, удовлетворяющие условиям

$$\psi_1 \sim \exp(-i\zeta x), \quad \psi_2 \sim \exp(i\zeta x), \quad x \to +\infty.$$

Нетрудно видеть, что вронскиан $W(\varphi_1,\ \varphi_2) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$ пары решений $\varphi_1,\ \varphi_2$ равен $2i\zeta$ и, следовательно, $W \neq 0$ при любом $\zeta \neq 0$. Значит, решения $\varphi_1,\ \varphi_2$ образуют при любом действительном $\zeta \neq 0$ фундаментальную систему решений и, следовательно, справедливы равенства

$$\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} S_{\alpha\beta}\varphi_\beta, \quad \alpha = 1,\ 2, \tag{4}$$

где элементы $S_{\alpha\beta}$ матрицы S не зависят от x ($\alpha,\ \beta = 1,\ 2$). Далее, нетрудно убедиться, что решения $\psi_1,\ \varphi_2$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость. Отсюда в силу равенства

$$S_{11} = W(\psi_1,\ \varphi_2)/2i\zeta \tag{5}$$

следует, что элемент S_{11} матрицы S также допускает аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость. При этом нули ζ_m, $m = 1, \ldots, m_0$, функции S_{11}, лежащие в нижней полуплоскости, в силу равенства (5) являются точками дискретного спектра, т. е. при $\zeta = \zeta_m$ уравнение (3) имеет решение $\varphi(x,\ \zeta_m)$, обладающее асимптотикой

$$\varphi \sim \begin{cases} \exp(i\zeta_m x), & x \to -\infty; \\ C_m \exp(-i\zeta_m x), & x \to +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Следовательно, решение $\varphi(x,\ \zeta_m)$ интегрируемо по x на всей действительной оси, т. е.

$$N_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x,\ \zeta_m)\,dx < \infty.$$

В силу того что потенциал $u = u(x, t)$, входящий в определение оператора Шредингера L, зависит от времени t как от параметра, данные рассеяния также будут функциями t. Возникает естественный вопрос: а нельзя ли определить зависимость данных рассеяния от времени, не решая само уравнение (1), а только предположив, что потенциал $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию (2). В случае положительного ответа на этот вопрос мы могли бы вместо того, чтобы непосредственно решать уравнение (1), сперва по начальным данным для уравнения (1) найти данные рассеяния для уравнения Шредингера при $t = 0$, затем продолжить данные рассеяния на все $t \geqslant 0$, и, наконец, решив обратную задачу для уравнения Шредингера, найти решение уравнения (1) при любом $t \geqslant 0$. И хотя априори не ясно, будет ли этот путь короче или проще для фактического нахождения решения уравнения (1), все же несомненно, что привлечение нового математического аппарата может помочь обнаружить новые свойства уже известных решений изучавшихся ранее уравнений. Так оно и оказалось! Прежде всего выяснилось, что уравнения, для исследования которых применим метод обратной задачи, обладают весьма специальными решениями типа уединенной волны. Эти решения, получившие название солитонов, характеризуются прежде всего тем, что после взаимодействия друг с другом они восстанавливают свою первоначальную форму. Далее, оказалось, что у таких уравнений произвольное решение типа уединенной волны с ростом t распадается на конечное число солитонов. Наконец, последнее по счету, но не по важности, оказалось что любое решение таких уравнений удовлетворяет бесконечному числу законов сохранения.

Идея применить к исследованию нелинейного эволюционного уравнения метод обратной задачи принадлежит группе американских ученых, в состав которой на разных этапах исследования входили Гарднер, Грин, Забусский, Крускал и Миура. В 1967 г. они применили эту идею к исследованию широко распространенного в теории нелинейных волн уравнения Кортевега — де Вриза (КДВ):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (7)$$

В основе их исследования [1] лежит обнаруженный ими факт, что оператор

$$Q = \partial/\partial t + \partial^3/\partial x^3 - 3(u + \zeta^2)\,\partial/\partial x \qquad (8)$$

переводит любое решение уравнения (3) в некоторое (вообще говоря, другое) решение этого же уравнения, если входящая в равенство (8) и в определение оператора Шредингера L функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (7). Действительно, поскольку комммутатор оператора Q с оператором Шредингера L имеет вид

$$[Q,\ L]=u_t-6uu_x+u_{xxx}+3u_x(L-\zeta^2),$$

в силу уравнений (3), (7) получаем $[Q,\ L]\,\varphi=0$, т. е.

$$(L-\zeta^2)\,Q\varphi=0. \tag{9}$$

Равенство (9) оказалось очень плодотворным. С его помощью авторы работы [1] обнаружили, что если в оператор Шредингера подставить удовлетворяющее условию (2) решение уравнения (7), то зависимость S-матрицы от времени будет определяться уравнением

$$\partial S/\partial t+[\Gamma,\ S]=0,\quad \Gamma=\mathrm{diag}\,(-4i\zeta^3,\ 4i\zeta^3).$$

Действительно, в силу равенства (8) согласно определению решений φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 уравнения (3) имеем:

$$Q\varphi_1=4i\zeta^3\varphi_1;\quad Q\varphi_2=-4i\zeta^3\varphi_2;\quad Q\psi_1=4i\zeta^3\psi_1;\quad Q\psi_2=-4i\zeta^3\psi_2. \tag{10}$$

Кроме того, согласно равенству (4)

$$Q\psi_\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}\left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial t}\varphi_\beta+S_{\alpha\beta}Q\varphi_\beta\right),\quad \alpha=1,\ 2.$$

С учетом равенств (10) отсюда следует:

$$4i\zeta^3\psi_1=(\partial S_{11}/\partial t+4i\zeta^3S_{11})\,\varphi_1+(\partial S_{12}/\partial t-4i\zeta^3S_{12})\,\varphi_2;$$

$$-4i\zeta^3\psi_2=(\partial S_{21}/\partial t+4i\zeta^3S_{21})\,\varphi_1+(\partial S_{22}/\partial t-4i\zeta^3S_{22})\,\varphi_2,$$

т. е. согласно равенству (4) имеем:

$$\partial S_{11}/\partial t=0;\quad \partial S_{12}/\partial t-8i\zeta^3S_{12}=0;$$

$$\partial S_{21}/\partial t+8i\zeta^3S_{21}=0;\quad \partial S_{22}/\partial t=0.$$

Отсюда, в частности, следует, что элемент S_{11} матрицы S не зависит от времени. Значит, от времени не зависит положение нулей этой функции. Таким образом, точки дискретного спектра, а следовательно, и их число не меняются со временем, если потенциал $u=u\,(x,\ t)$, входящий в определение оператора Шредингера L, удовлетворяет уравнению (7) и условию (2). Наконец, для собственных функций дискретного спектра согласно равенствам

$$Q\varphi_2=-4i\zeta_m^3\varphi_2;\quad Q\psi_1=4i\zeta_m^3\psi_1$$

и условию (6) имеем

$$Q\varphi_2=(\partial C_m/\partial t)\,\psi_1+C_mQ\psi_1,$$

т. е.

$$\partial C_m/\partial t+8i\zeta_m^3C_m=0.$$

Таким образом, с помощью оператора Q возможно определить эволюцию во времени всех данных рассеяния для уравнения Шредингера. Это позволило авторам работы [1] применить к решению уравнения КДВ метод обратной задачи. В последовавшей затем за работой [1] серии статей [2—7] названные выше авторы подвергли всестороннему анализу полученное решение, в результате чего было доказано существование солитонов, законов сохранения и установлен ряд других интересных свойств уравнения КДВ. В частности, в [5] установлено, что уравнение КДВ является гамильтоновой системой с бесконечным числом степеней свободы. Несколько позже В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым показано [8], что уравнение КДВ является вполне интегрируемой гамильтоновой системой и найдены переменные типа «действие — угол».

Вскоре после появления работы [1] Лакс обнаружил [9], что тесно связанный с L и Q оператор *

$$A=4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)$$

в силу уравнения КДВ удовлетворяет соотношению

$$\partial L/\partial t+[A,\ L]=0, \tag{11}$$

т. е. оператор A играет роль гамильтониана в известном из квантовой механики уравнении Гейзенберга. Соотношение (11) явилось эффективным средством для нахождения уравнений, допускающих исследование методом обратной задачи. С помощью подходящим образом подобранных пар операторов L и A, получивших название пар Лакса, было исследовано несколько важных с прикладной точки зрения уравнений [10—17]. Первой из приведенных работ была статья В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [10], в которой исследовано нелинейное уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+\varkappa|u|^2u=0,\quad \varkappa>0. \tag{12}$$

В качестве пары Лакса они взяли операторы:

$$L=i\begin{vmatrix}1+p & 0\\ 0 & 1-p\end{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{vmatrix}0 & \bar u\\ u & 0\end{vmatrix},\quad \varkappa=\frac{2}{1-p^2},$$

$$A=-p\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{vmatrix}|u|^2/(1+p) & \mathrm{i}\bar u_x\\ -\mathrm{i}u_x & -|u|^2/(1-p)\end{vmatrix}.$$

При подстановке этих операторов в левую часть равенства

$$\partial L/\partial t+\mathrm{i}\,[A,\ L]=0$$

получится нуль, если комплекснозначная функция $u=u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (12).

Однако в 1973 г. Абловитц, Кауп, Ньюелл и Сегур [18] выполнили аналогичное исследование встречающегося в различных

---

* Справедливо равенство

$$Q=\frac{\partial}{\partial t}+A+3\frac{\partial}{\partial x}(L-\zeta^2).$$

областях математической физики уравнения

$$u_{xt} = \sin u, \tag{13}$$

известного также под названием «sin-Gordon»-уравнения. При этом они первые отказались от поисков пары Лакса, порождающей уравнение (13), а получили это уравнение, как условие существования фундаментальной системы решений $v = |\, v_{\alpha\beta} \,|$, α, $\beta = 1, 2$, общей для двух линейных систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \partial v_1/\partial x + i\zeta v_1 &= q(x, t)\, v_2, \\ \partial v_2/\partial x - i\zeta v_2 &= -q(x, t)\, v_1 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} \partial v_1/\partial t &= (i/4\zeta)(v_1 \cos u + v_2 \sin u), \\ \partial v_2/\partial t &= (i/4\zeta)(v_1 \sin u - v_2 \cos u), \end{aligned}$$

причем в системе (14) нужно положить $q = -u_x/2$. Они же показали, что таким образом можно получить нелинейное уравнение Шредингера, уравнение КДВ и модифицированное уравнение КДВ [19].

Предложенный в работах [18—20] подход оказался настолько воодушевляющим, что после этих работ и на уравнение Гейзенберга (11) распространилась точка зрения как на условие совместности двух линейных уравнений:

$$(L - \eta)\,\varphi = 0, \quad \varphi_t + A\varphi = 0.$$

Однако ни уравнение Гейзенберга, ни условие совместности не являются наиболее адекватным выражением идеи, лежащей в основе работы [1]. Как уже отмечалось ранее, центральным моментом в применении метода обратной задачи является существование пары линейных операторов L и Q, обладающих следующими свойствами.

Пусть оператор L действует на переменные, которые будем условно называть пространственными; пусть, далее, оператор L зависит от времени t как от параметра и пусть, наконец, $\varphi = \varphi(x, t, \eta)$ — решение уравнения

$$(L - \eta)\,\varphi = 0. \tag{15}$$

Посмотрим теперь, при каких условиях существует линейный оператор Q, такой, что для любого φ, удовлетворяющего (15), $\psi = Q\varphi$ также удовлетворяет (15), т. е. равенство

$$(L - \eta)\, Q\varphi = 0 \tag{16}$$

следует из (15). Нетрудно видеть, что если такой оператор Q существует, то он не единственный, поскольку прибавление к Q любого оператора вида $g(L - \eta)$ с произвольным оператором g

сохраняет указанное свойство оператора Q. Далее, из (15) и (16) следует, что для любого φ, удовлетворяющего (15), справедливо равенство

$$[Q,\ L-\eta]\,\varphi=0.$$

Это равенство означает, что в рассматриваемой нами ситуации существует оператор R, такой, что справедливо операторное соотношение

$$[Q,\ L-\eta]=R\,(L-\eta). \tag{17}$$

Соотношение (17) инвариантно относительно порождаемой оператором L коммутативной группы G_L преобразований вида:

$$Q\to Q+g\,(L-\eta),\quad R\to R+[g,\ L-\eta],$$

где оператор $g\in G_L$. Это важное свойство соотношения (17) широко использовано ниже.

Для того чтобы получаемые с помощью (17) уравнения были дифференциальными по t, возьмем операторы Q, R в виде:

$$Q=\sum_{s=0}^{s_0} Q_{s_0-s}\frac{\partial^s}{\partial t^s},\quad R=\sum_{s=0}^{s_0} R_{s_0-s}\frac{\partial^s}{\partial t^s}, \tag{18}$$

где Q_s, R_s, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0$, действуют только на пространственные переменные и от t зависят только как от параметра. Подставив равенства (18) в (17), получим следующие соотношения для Q_0, R_0 и Q_1, R_1:

$$[Q_0,\ L-\eta]=R_0\,(L-\eta); \tag{19}$$

$$s_0Q_0\,\partial L/\partial t+[Q_1,\ L-\eta]=s_0R_0\,\partial L/\partial t+R_1\,(L-\eta). \tag{20}$$

Далее, вытекающие из (17) соотношения для Q_s, R_s при $s>1$ (если $s_0>1$) не являются не зависящими от (20), и поэтому использование операторов Q, R вида (18) с $s_0>1$ не дает ничего нового по сравнению с операторами первого порядка. Поэтому всюду в дальнейшем ограничимся случаем $s_0=1$. Наконец, если Q_0 — единичный оператор, а R_0 — нулевой, то соотношение (19) оказывается автоматически выполненным, а (20) принимает вид ($s_0=1$):

$$\partial L/\partial t+[\mathscr{A},\ L-\eta]=\mathscr{B}\,(L-\eta). \tag{21}$$

Существует тесная связь между соотношениями (19), (20) и (21). Действительно, если Q_0, R_0 удовлетворяют (19), а $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ удовлетворяют (21), то, как нетрудно убедиться, операторы

$$Q_1=s_0Q_0\mathscr{A};\quad R_1=s_0\,(Q_0\mathscr{B}+R_0\mathscr{A}-R_0\mathscr{B})$$

удовлетворяют (20). Поэтому в данном случае порождаемое соотношением (20) уравнение содержит все решения порождаемого соотношением (21) уравнения. Кроме того, если Q_0, R_0 удовлетворяют (19), а Q_1, R_1 — (20) и существуют Q_0^{-1} и $(Q_0 - R_0)^{-1}$, то, как нетрудно убедиться, операторы

$$\mathscr{A} = (1/s_0)\, Q_0^{-1} Q_1; \quad \mathscr{B} = (1/s_0)\,(Q_0 - R_0)^{-1}\,(R_1 - R_0 Q_0^{-1} Q_1)$$

удовлетворяют соотношению (21). Отсюда следует, что в рассматриваемом случае все решения порождаемого соотношением (20) уравнения также удовлетворяют порождаемому соотношением (21) уравнению. Таким образом, в этом случае (20) и (21) порождают одни и те же уравнения. И хотя, вообще говоря, существуют удовлетворяющие соотношению (19) пары операторов Q_0, R_0, для которых не существует, по крайней мере, один из операторов Q_0^{-1}, $(Q_0 - R_0)^{-1}$, в настоящее время не известно ни одно уравнение, которое можно было бы получить с помощью (19), (20) и нельзя — с помощью (21). Поэтому в дальнейшем речь идет только об уравнениях, порождаемых соотношением (21). При этом мы ограничиваемся случаями, в которых спектральный параметр η — скалярная величина и, следовательно, (21) можно записать в виде

$$\partial L/\partial t + [\mathscr{A}, L] = \mathscr{B}\,(L - \eta). \tag{22}$$

Для широкого класса операторов L мы опишем все зависящие рационально от спектрального параметра η пары операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, для которых (22) эквивалентно системе дифференциальных уравнений. Все полученные таким образом уравнения обладают несколькими бесконечными сериями законов сохранения. Однако применить метод обратной задачи для фактического нахождения решений этих уравнений удается далеко не всегда ввиду того, что в настоящее время сама обратная задача решена в сравнительно небольшом числе случаев.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ МАТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Приступим теперь к систематическому рассмотрению уравнений, порождаемых различными классами операторов L. Начнем с наиболее простого класса дифференциальных операторов первого порядка. Именно, пусть L — оператор вида

$$L = \Lambda^{-1}(\partial + u), \tag{23}$$

где ∂ — оператор дифференцирования по пространственной переменной x; Λ — диагональная матрица с различными диагональными элементами $\lambda_r \in C$, $r = 1, \ldots, r_0$, а $u = u(x, t)$ — квадратная матрица порядка r_0 с равными нулю диагональными элементами. Кроме того, предположим, что среди диагональных элементов матрицы Λ нет равных нулю. В действительности все получаемые результаты инвариантны относительно замены $\Lambda \to \Lambda + \lambda E$, где E — единичная матрица, а λ — комплексный параметр, и поэтому это предположение не существенно. Однако, чтобы придать смысл некоторым выражениям типа (23), будем считать это предположение выполненным.

Мы опишем сейчас все решения операторного соотношения (22), являющиеся дифференциальными операторами вида

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m \partial^m; \quad \mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n} \beta_m \partial^m, \tag{24}$$

коэффициенты которых зависят рационально от спектрального параметра η. Однако в силу сделанных предположений любой оператор $\mathcal{A}$ вида (24) при $n > 0$ можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + g(L - \eta), \tag{25}$$

где g — дифференциальный оператор $(n-1)$-го порядка, а $\mathcal{A}'$ — оператор нулевого порядка, т. е. просто матрица. Полагая далее

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' + [g, L], \tag{26}$$

получаем, что если пара операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ удовлетворяет (22), то пара операторов $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, полученных с помощью (25) и (26), также удовлетворяет (22). При этом нетрудно видеть, что если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ зависели рационально от η, то полученные согласно (25) и (26) $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ также будут зависеть от η рационально. Более того, если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ были полиномами от η, то $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ также будут полиномами. Далее, из соотношения (22) следует, что $\mathcal{B}'$ также имеет нулевой порядок, т. е. является матрицей. С учетом этого факта всюду, если не оговорено противное, будем считать, что операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ есть просто матрицы. В указанном случае с помощью (23) и (22) легко убеждаемся в справедливости равенства

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \Lambda^{-1}\mathcal{A}\Lambda,$$

с учетом которого (22) можно записать в виде

$$\partial u/\partial t - \partial\mathcal{A}/\partial x - [u, \mathcal{A}] + \eta[\Lambda, \mathcal{A}] = 0. \tag{27}$$

Это равенство является условием существования общего фундаментального решения у двух линейных систем уравнений:

$$\partial\varphi/\partial x + u\varphi = \eta\Lambda\varphi; \quad \partial\varphi/\partial t + \mathcal{A}\varphi = 0.$$

Попробуем теперь удовлетворить (27) с помощью матрицы $\mathcal{A}$, зависящей полиномиально от η, т. е.

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях η, получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&[\Lambda,\ A_0]=0;\\&[\Lambda,\ A_m]-[u,\ A_{m-1}]-\partial A_{m-1}/\partial x=0,\quad m=1,\ \ldots,\ n;\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

$$\partial u/\partial t-\partial A_n/\partial x-[u,\ A_n]=0.\tag{30}$$

Таким образом, если матрица A_0 диагональная, а матрицы $A_1,\ \ldots,\ A_n$ при $n>0$ такие, что выполняется условие (29), то вытекающее из (27) эволюционное уравнение имеет вид (30). Структура получаемого уравнения целиком определяется матрицей A_n. Поэтому необходимо выяснить вопрос о разрешимости и характере решения уравнений (29).

Уравнения (29) представляют собой рекуррентное соотношение, связывающее элементы матрицы A_m с элементами матрицы A_{m-1} при $m>0$. Поэтому естественно попытаться определить последовательно матрицы $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$. Действительно, из (29) следует, что элементы $A_{m,\ \mu\nu}$ матрицы A_m, стоящие вне главной диагонали, легко определяются с помощью равенства

$$A_{m,\ \mu\nu}=\frac{1}{\lambda_\mu-\lambda_\nu}\left\{\frac{\partial A_{m-1,\ \mu\nu}}{\partial x}+\sum_{r=1}^{r_0}\left(u_{\mu r}A_{m-1,\ r\nu}-A_{m-1,\ \mu r}u_{r\nu}\right)\right\}.\tag{31}$$

Однако для нахождения диагональных элементов матрицы A_m получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial A_{m,\ \mu\mu}}{\partial x}=\sum_{r=1}^{r_0}\left(A_{m,\ \mu r}u_{r\mu}-u_{\mu r}A_{m,\ r\mu}\right).\tag{32}$$

И хотя правая часть этого равенства, очевидно, не содержит элемент $A_{m,\ \mu\mu}$, для его нахождения все же необходима одна квадратура. Однако, как было впервые показано в работе [21], если диагональные элементы матрицы A_0 взять независящими от x, то правая часть (32) при любом $m>0$ представима в виде

$$\sum_{r=1}^{r_0}\left(A_{m,\ \mu r}u_{r\mu}-u_{\mu r}A_{m,\ r\mu}\right)=\frac{d}{dx}\,p_{m,\ \mu},$$

где $p_{m,\ \mu}$ — полином от элементов матрицы u и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка. Отсюда следует, что если

$$A_0=\operatorname{diag}\left(a_1,\ \ldots,\ a_{r_0}\right),$$

причем элементы a_r не зависят от x, то элементы матриц A_m при $m>0$ — полиномы от элементов матрицы u и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка, а коэффициенты этих полиномов не зависят от x и t, а зависят только от диагональных элементов матриц A_0 и Λ, точнее, от их попарных разностей $\lambda_\mu - \lambda_\nu$ и $a_\mu - a_\nu$. Далее, из равенств (31) и (32) следует, что соотношение (29) определяет матрицу A_m с точностью до постоянной диагональной матрицы. При этом, конечно, матрица A_m зависит еще и от того, как использован произвол в выборе констант интегрирования при определении диагональных элементов матриц $A_{m'}$ с $m' < m$. Среди всех указанных решений необходимо выделить одно специальное решение, получаемое при условии, что на всех этапах постоянные интегрирования равны нулю. Это решение характеризуется следующим свойством: элементы матрицы A_m в рассматриваемом случае либо равны нулю, либо являются квазиоднородными многочленами ранга m от элементов матрицы u и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка*. С помощью этого решения любое другое решение уравнений (29) можно получить согласно равенству

$$A'_m = A_m + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{r=1}^{r_0} c_r^{(\mu)} \frac{\partial A_{m-\mu}}{\partial a_r}, \quad m > 0,$$

где величины $c_r^{(\mu)}$ не зависят от x.

Следует обратить внимание на то, что определение матриц A_m не зависит от степени n полинома (28). Поэтому, определив с помощью (29) матрицы A_m для любого $m > 0$, получим возможность брать полиномы вида (28) с произвольным $n \geqslant 0$. Получаемые таким образом уравнения вида (30) в силу (29) можно записать в виде

$$u_t = [\Lambda, A_{n+1}], \tag{33}$$

что находится в полном соответствии со сделанным ранее предположением о равенстве нулю диагональных элементов матрицы u. Так как элементы матрицы A_{n+1} являются полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x до n-го порядка, уравнение (33) представляет собой систему $r_0(r_0-1)$ уравнений в частных производных первого порядка по t и n-го порядка по x. Ввиду принципиальной важности этого утверждения приведем его доказательство.

---

* Полином Q от элементов матрицы u и ее производных по x называется квазиоднородным ранга m, если при подстановке в Q величины λ^{k+1} вместо элементов матрицы $u^{(k)} = \partial^k u/\partial x^k$ каждый одночлен Q_α принимает вид $c_\alpha \lambda^m$, где c_α — отличная от нуля константа.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ (29)

Рассмотрим уравнение

$$\partial A/\partial x + [u, A] - \eta[\Lambda, A] = 0, \tag{34}$$

которое получается из (27) после отбрасывания члена $\partial u/\partial t$. Общее решение уравнения (34) можно записать в виде

$$A = \varphi A_0 \varphi^{-1}, \tag{35}$$

где $\varphi = \varphi(x, \eta)$ — фундаментальное решение системы

$$\partial\varphi/\partial x + u\varphi = \eta\Lambda\varphi, \tag{36}$$

а матрица A_0 не зависит от x. Предположим теперь, что матрица $u = u(x)$, входящая в систему (36), при любом $x \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \|u(z)\|\, dz < \infty, \tag{37}$$

где $\|u\| = \max\limits_{\alpha} \sum\limits_{\beta} |u_{\alpha\beta}|$. Предположим далее, что диагональные элементы матрицы Λ — чисто мнимые. В этих условиях система (36) при любом действительном η имеет фундаментальную матрицу решений, удовлетворяющую условию

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x, \eta)\exp(-\eta\Lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-\eta\Lambda x)\,\varphi(x, \eta) = E. \tag{38}$$

Действительно, положим

$$\varphi = \exp(\eta\Lambda x)\,\Phi. \tag{39}$$

Подставив это выражение в (36), получим дифференциальное уравнение для Φ:

$$\Phi_x + \exp(-\eta\Lambda x)\,u(x)\exp(\eta\Lambda x)\,\Phi = 0.$$

Из последнего уравнения следует интегральное уравнение

$$\Phi = \Phi_0 - \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\eta\Lambda z)\,u(z)\exp(\eta\Lambda z)\,\Phi(z, \eta)\,dz, \tag{40}$$

которое можно решить методом последовательных приближений. Действительно, положим $\Phi_0 = E$, а при $m > 0$ определим Φ_m с помощью рекуррентного соотношения

$$\Phi_m = E - \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\eta\Lambda z)\,u(z)\exp(\eta\Lambda z)\,\Phi_{m-1}(z, \eta)\,dz.$$

Покажем теперь, что ряд

$$\Phi_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\Phi_m-\Phi_{m-1}) \tag{41}$$

сходится равномерно по x на любом полуинтервале $(-\infty, c]$, где c — произвольное. В самом деле, разность

$$\Psi_m=\Phi_m-\Phi_{m-1}, \quad m>0, \quad \Psi_0=E,$$

при любом $m>0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Psi_m=-\int_{-\infty}^{x}\exp(-\eta\Lambda z)\,u(z)\exp(\eta\Lambda z)\,\Psi_{m-1}(z, \eta)\,dz.$$

Отсюда легко получаем, что при любом $m>0$ справедливо неравенство

$$\|\Psi_m(x, \eta)\|\leqslant\int_{-\infty}^{x}\|u(z)\|\,\|\Psi_{m-1}(z, \eta)\|\,dz.$$

С помощью этого неравенства методом математической индукции легко доказывается неравенство

$$\|\Psi_m(x, \eta)\|\leqslant\frac{1}{m!}\left(\int_{-\infty}^{x}\|u(z)\|\,dz\right)^m,$$

откуда непосредственно следует справедливость нашего утверждения о сходимости ряда (41). Отсюда же следует, что определяемая с помощью (41) матрица Φ является решением интегрального уравнения (40), причем $\Phi\to E$ при $x\to-\infty$, и на основании (39) убеждаемся в справедливости (38).

Полученная выше фундаментальная матрица решений системы (36) обладает еще одним замечательным свойством, а именно:

$$\lim_{\eta\to\pm\infty}\varphi(x, \eta)\exp(-\eta\Lambda x)=\lim_{\eta\to\pm\infty}\exp(-\eta\Lambda x)\,\varphi(x, \eta)=E, \tag{42}$$

причем переход к пределу будет равномерным по x на любом полуинтервале $(-\infty, c]$, где c — произвольное. Действительно, полагая в (40)

$$\Phi=\Phi_0+\Psi, \quad \Phi_0=E, \tag{43}$$

получим уравнение для Ψ:

$$\Psi=f(x, \eta)-\int_{-\infty}^{x}\exp(-\eta\Lambda z)\,u(z)\exp(\eta\Lambda z)\,\Psi(z, \eta)\,dz, \tag{44}$$

где

$$f = -\int_{-\infty}^{x} \exp(-\eta\Lambda z)\, u(z) \exp(\eta\Lambda z)\, dz.$$

Учитывая сделанное ранее предположение о равенстве нулю диагональных элементов матрицы u, имеем

$$f_{\mu\nu} = -\int_{-\infty}^{x} u_{\mu\nu}(z) \exp[\eta(\lambda_\nu - \lambda_\mu) z]\, dz, \quad \mu \neq \nu, \quad f_{\mu\mu} = 0.$$

Согласно теореме Римана — Леберга в силу неравенства (37) $|f_{\mu\nu}| \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$, причем, как нетрудно понять, предельный переход будет равномерным по x на любом полуинтервале $(-\infty, c]$, где c — произвольное. Отсюда следует, что решение уравнения (44) удовлетворяет условию $\|\Psi\| \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$ равномерно по x на любом полуинтервале $(-\infty, c]$. Значит, согласно (39) и (43) равенство (42) справедливо.

Пусть теперь матрица A_0, входящая в (35),— диагональная с разными диагональными элементами a_r, $r = 1, \ldots, r_0$. Предположим, что a_r не зависят от x и параметра η. В силу (38) и (42) справедливо равенство

$$\lim_{x\to-\infty} A = \lim_{\eta\to\pm 0} A = A_0. \tag{45}$$

Предположим теперь, что элементы матрицы u обладают непрерывными производными по x любого порядка, которые при любом $x \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{x} \| u^{(k)}(z) \|\, dz < \infty, \tag{46}$$

где $u^{(k)} = \partial^k u/\partial x^k$, $k > 0$. В этих условиях решение (35) обладает асимптотическим при $\eta \to \pm\infty$ разложением вида

$$A \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \eta^{-m}, \tag{47}$$

где матрица A_0 в силу (45) та же самая, что и в равенстве (35), а A_m при $m > 0$ удовлетворяют (29) и некоторому дополнительному условию, которое приведено немного ниже.

Начнем с построения асимптотического ряда (47). Определим матрицы A_m при $m > 0$ последовательно согласно уравнению (29), причем элементы, стоящие вне главной диагонали, определим с помощью равенства (31), а элементы, стоящие на главной диагонали, с помощью равенства

$$A_{m,\mu\mu} = \sum_{r=1}^{r_0} \int_{-\infty}^{x} (A_{m,\mu r}(z)\, u_{r\mu}(z) - u_{\mu r}(z)\, A_{m,r\mu}(z))\, dz. \tag{48}$$

Используя (37) и (46), нетрудно убедиться, что определенные таким образом матрицы A_m при любых $m > 0$, $k > 0$ и любом $x \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\int_{-\infty}^{x} \| [\Lambda, A_m(z)] \| dz < \infty; \qquad \int_{-\infty}^{x} \| A_m^{(k)}(z) \| dz < \infty, \tag{49}$$

где $A_m^{(k)} = \partial^k A_m / \partial x^k$, $k > 0$. Отсюда, в частности, следует корректность формулы (48).

Покажем, что так определенный ряд (47) является асимптотическим разложением решения (35). Действительно, пусть

$$K_n = A - \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{-m}.$$

Тогда согласно (29) и (34)

$$\partial K_n / \partial x + [u, K_n] - \eta [\Lambda, K_n] = -[\Lambda, A_{n+1}] \eta^{-n}. \tag{50}$$

Полагая теперь

$$K_n = \varphi \mathcal{K}_n \varphi^{-1}, \tag{51}$$

где $\varphi = \varphi(x, \eta)$ — удовлетворяющее условиям (38) и (42) фундаментальное решение системы (36), с учетом (36) и (50) получаем уравнение для $\mathcal{K}_n$:

$$\partial \mathcal{K}_n / \partial x = -\varphi^{-1} [\Lambda, A_{n+1}] \varphi \eta^{-n}.$$

С помощью (36) это уравнение можно преобразовать к виду

$$\partial \mathcal{K}_n / \partial x = \{\partial (\varphi^{-1} A_{n+1} \varphi) / \partial x - \varphi^{-1} (\partial A_{n+1} / \partial x + [u, A_{n+1}]) \varphi\} \eta^{-(n+1)},$$

т. е. согласно (29) имеем

$$\partial \mathcal{K}_n / \partial x = \{\partial (\varphi^{-1} A_{n+1} \varphi) / \partial x - \varphi^{-1} [\Lambda, A_{n+2}] \varphi\} \eta^{-(n+1)}.$$

Отсюда, учитывая (51), получаем

$$K_n = \{A_{n+1} -$$

$$- \varphi(x, \eta) \int_{-\infty}^{x} \varphi^{-1}(z, \eta) [\Lambda, A_{n+2}(z)] \varphi(z, \eta) dz \varphi^{-1}(x, \eta)\} \eta^{-(n+1)}.$$

Из этого равенства в соответствии с (42) и (49) следует, что $\eta^n K_n \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$ равномерно по x на любом полуинтервале $(-\infty, c]$. Следовательно, ряд (47) действительно является асимптотическим при $\eta \to \pm\infty$ разложением решения (35).

Подставим теперь в полином $p(z) = \det | A_0 - zE |$ вместо z решение (35). Получим матричное равенство $p(A) = 0$. Подставим в это равенство вместо A ряд (47). Группируя члены с одинаковыми степенями η и приравнивая нулю полученную сумму, находим равенства вида

$$\sum_{r=1}^{r_0} p_r \sum_{k=0}^{r-1} A_0^{r-k-1} A_m A_0^k = P_m(A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}), \tag{52}$$

где p_r — коэффициент при z^r полинома $p(z)$, а P_m — полином от матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$, причем $P_1 \equiv 0$. Нетрудно убедиться, что в левой части равенства (52) стоит диагональная матрица с элементами $p'(a_\mu) A_{m,\,\mu\mu}$ на главной диагонали. Отсюда следует, что $A_{1,\,\mu\mu} = 0$ при $\mu = 1, \ldots, r_0$, а при $m > 1$ диагональные элементы матриц A_m полиномиально выражаются через элементы матриц $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Пользуясь этими фактами, легко доказать по индукции, что элементы матриц A_m являются полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка. Далее, нетрудно доказать, что элементы матрицы A_m либо равны нулю, либо являются квазиоднородными полиномами ранга m от элементов матрицы u и ее производных по x соответствующего порядка.

Из (31) и (48) следует, что элементы матриц A_m при $m > 0$ являются однородными многочленами m-й степени от величин $\lambda_{\mu\nu} = (\lambda_\mu - \lambda_\nu)^{-1}$ с $\mu \neq \nu$. Отсюда ясно, что уравнение (29) имеет зависящее полиномиально от элементов матрицы u и ее производных по x решение A_m не только при чисто мнимых λ_r, как это предполагалось ранее, но и при любых комплексных, лишь бы выполнялось условие $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$. Наконец, необходимо отметить, что условия (37) и (46) также не являются необходимыми для разрешимости уравнения (29). Действительно, умножив элементы матрицы u на бесконечно дифференцируемую функцию $w(x)$, равную нулю при $x \leqslant x_0$ и единице при $x \geqslant x_1 > x_0$, мы сведем случай произвольной бесконечно дифференцируемой матрицы u к рассмотренному здесь случаю, поскольку при $x \geqslant x_1$ уравнения (29) с матрицей u и с матрицей wu совпадают.

Откажемся теперь от требования равенства нулю диагональных элементов матрицы u. Нетрудно убедиться, что при исследовании разрешимости (29) это требование использовалось всего один раз, а именно при доказательстве равенства (42). При отказе от этого требования равенство (42) нарушается, однако справедливо следующее равенство:

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} \varphi(x, \eta) \exp(-\eta\Lambda x) = \\ = \lim_{\eta\to\pm\infty} \exp(-\eta\Lambda x)\, \varphi(x, \eta) = \sigma(x), \tag{53}$$

где $\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_0})$, $\sigma_r = \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{x} u_{rr}(z)\,dz\right)$, $r = 1, \ldots, r_0$.

Действительно, если $\varphi = \varphi(x, \eta)$ — удовлетворяющее условию (38) решение системы (36), то $\psi = \sigma^{-1}\varphi$ — удовлетворяющее условию (38) решение системы

$$\partial\psi/\partial x + v\psi = \eta\Lambda\psi, \tag{54}$$

причем у матрицы v диагональные элементы равны нулю. Следовательно, равенство (42) справедливо для решения системы (54). Значит, для решения системы (36) справедливо равенство (53). Далее, нетрудно убедиться, что замена (42) на (53) не создает трудностей ни при доказательстве (45), ни при доказательстве асимптотических свойств ряда (47). Таким образом, если условия (37) и (46) выполнены, а диагональные элементы матрицы Λ чисто мнимые, то решение (35) уравнения (34) обладает асимптотическим при $\eta \to \pm\infty$ разложением вида (47) независимо от того будут ли диагональные элементы матрицы u равны нулю или нет. Это замечание существенным образом использовано в следующем разделе.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Уравнение (33) обладает рядом замечательных свойств. Прежде всего оно имеет r_0 бесконечных серий законов сохранения, т. е. существует r_0 бесконечных последовательностей величин T_{mr}, $m > 0$, $r = 1, \ldots, r_0$, являющихся полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x соответствующего порядка таких, что при подстановке в T_{mr} любого решения уравнения (33) имеет место равенство

$$\partial T_{mr}/\partial t = \partial X_{mnr}/\partial x, \tag{55}$$

где величины X_{mnr} также являются полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x достаточно высокого порядка. При этом полиномы T_{mr} не зависят явно от номера n уравнения (33), а полиномы X_{mnr} явно зависят от n. Величины T_{mr} определяются через след матрицы ΛA_{m+1} с помощью равенства

$$T_{mr} = \partial\,\mathrm{Sp}\,(\Lambda A_{m+1})/\partial a_r. \tag{56}$$

Для доказательства (55) нам потребуется следующее важное равенство:

$$\delta T_{mr}/\delta\tilde{u} = m\,\partial A_m/\partial a_r, \tag{57}$$

где знак «$\sim$» над матрицей u означает транспонирование, а вариационная производная $\delta T_{mr}/\delta\tilde{u}$ определяется равенством

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta\tilde{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}^{(k)}}, \quad u^{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}. \tag{58}$$

Равенство (57) впервые было доказано в работе [21]. Мы покажем (57) сначала для случая, когда элементы матрицы u равны тождественно нулю при $x \leqslant x_0$. При этом будем предполагать, что элементы матрицы u обладают непрерывными производными по x любого порядка и, следовательно, все они равны тождественно нулю при $x \leqslant x_0$. Кроме того, временно будем предполагать, что диагональные элементы матрицы Λ чисто мнимые.

Рассмотрим функционал

$$H = \int_{x_0}^{x_0'} \mathrm{Sp}\,(\Lambda A)\,dx, \tag{59}$$

где A — решение (35) уравнения (34), а $x_0' > x_0$ — произвольно. Найдем теперь вариационную производную $\delta H/\delta\tilde{u}$ при варьировании элементов матрицы u в точке $x \in (x_0,\ x_0')$. В силу равенства (35) имеем

$$\delta H = \int_{x_0}^{x_0'} \mathrm{Sp}\,(\Lambda\delta\varphi A_0\varphi^{-1} + \Lambda\varphi A_0\delta\varphi^{-1})\,dx, \tag{60}$$

где $\delta\varphi$ — вариация решения $\varphi = \varphi\,(x,\ \eta)$ уравнения (36), удовлетворяющего условию $\varphi = \exp\,(\eta\Lambda x)$ при $x \leqslant x_0$, а вариация $\delta\varphi^{-1}$ матрицы φ^{-1}, очевидно, равна

$$\delta\varphi^{-1} = -\varphi^{-1}\,(\delta\varphi)\,\varphi^{-1}. \tag{61}$$

Вариация $\delta\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\partial\,(\delta\varphi)/\partial x + u\delta\varphi - \eta\Lambda\delta\varphi = -(\delta u)\,\varphi$$

и условию $\delta\varphi = 0$ при $x \leqslant x_0$. Полагая

$$\delta\varphi = \varphi\Phi, \tag{62}$$

легко находим

$$\Phi_x = -\varphi^{-1}\,(\delta u)\,\varphi,$$

т. е. при $x > x_0$ имеем

$$\Phi = -\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}\,(z,\ \eta)\,\delta u\,(z)\,\varphi\,(z,\ \eta)\,dz. \tag{63}$$

Подставляя (61) и (62) в (60), получаем

$$\delta H = \int_{x_0}^{x_0'} \mathrm{Sp}\,(\Lambda\varphi\Phi A_0\varphi^{-1} - \Lambda\varphi A_0\Phi\varphi^{-1})\,dx. \tag{64}$$

С учетом (63) произведем в (64) интегрирование по частям. В результате получим

$$\delta H = \int\limits_{x_0}^{x_0'} \mathrm{Sp}\left\{\varphi(x,\eta)\int\limits_{x}^{x_0'}[\varphi^{-1}(z,\eta)\Lambda\varphi(z,\eta), A_0]\,dz \times \right.$$

$$\left. \times\, \varphi^{-1}(x,\eta)\,\delta u(x)\right\} dx.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\frac{\delta H}{\delta \tilde{u}} = \varphi(x,\eta)\int\limits_{x}^{x_0'}[\varphi^{-1}(z,\eta)\Lambda\varphi(z,\eta), A_0]\,dz\varphi^{-1}(x,\eta). \tag{65}$$

Найдем теперь матрицу $\partial A/\partial\eta$. В силу (34) имеем уравнение для $B = \partial A/\partial\eta$:

$$\partial B/\partial x + [u, B] - \eta[\Lambda, B] = [\Lambda, A].$$

Пусть $B = \varphi\mathscr{B}\varphi^{-1}$. В соответствии с (35) и (36) отсюда следует уравнение для $\mathscr{B}$:

$$\partial\mathscr{B}/\partial x = [\varphi^{-1}\Lambda\varphi, A_0].$$

Интегрируя это уравнение, с учетом равенства $\partial A/\partial\eta = 0$ при $x \leqslant x_0$ получаем, что при $x > x_0$

$$\frac{\partial A}{\partial\eta} = \varphi(x,\eta)\int\limits_{x_0}^{x}[\varphi^{-1}(z,\eta)\Lambda\varphi(z,\eta), A_0]\,dz\varphi^{-1}(x,\eta). \tag{66}$$

Заметим, что при выводе (65) и (66) мы не пользовались предположением о равенстве нулю диагональных элементов матрицы u. Более того, чтобы получить диагональные элементы матрицы $\delta H/\delta\tilde{u}$, нам нужно проварьировать диагональные элементы матрицы u, т. е. рассмотреть функционал (59) для случая, когда диагональные элементы матрицы u отличны от нуля.

Из (65) и (66) следует равенство

$$\delta H/\delta\tilde{u} + \partial A/\partial\eta = \varphi(x,\eta)\,J(\eta)\,\varphi^{-1}(x,\eta), \tag{67}$$

где

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_0'}[\varphi^{-1}(z,\eta)\Lambda\varphi(z,\eta), A_0]\,dz.$$

Определенная таким образом величина J стремится к нулю при $\eta\to\pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени η, т. е при любом $n > 0$ имеем

$$\lim_{\eta\to\pm\infty}\eta^n J(\eta) = 0. \tag{68}$$

Действительно, в силу равенства (67) величина $J(\eta)$ совпадает со значением матрицы $\exp(-\eta\Lambda x)(\delta H/\delta\tilde{u})\exp(\eta\Lambda x)$ в точке $x = x_0$. В соответствии с (59) матрица $\delta H/\delta\tilde{u}$ обладает асимптотическим при $\eta \to \pm\infty$ разложением вида

$$\frac{\delta H}{\delta\tilde{u}} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta H_m}{\delta\tilde{u}} \eta^{-m}, \tag{69}$$

где

$$H_m = \int_{x_0}^{x_0'} \mathrm{Sp}\,(\Lambda A_m)\,dx. \tag{70}$$

Поскольку A_0 не зависит от u, то и H_0 не зависит от u, и, следовательно, $\delta H_0/\delta\tilde{u} = 0$. Далее, имеем $H_1 = 0$, поскольку диагональные элементы матрицы A_1, как уже было отмечено ранее, равны нулю. Наконец, при $m > 1$ имеем $\delta H_m/\delta\tilde{u} = 0$ в точке $x = x_0$, поскольку в силу того, что элементы матрицы A_m являются квазиоднородными полиномами ранга $m > 1$, элементы матрицы $\delta H_m/\delta\tilde{u}$ будут квазиоднородными полиномами ранга $m - 1 > 0$, т. е. не будут содержать свободных членов. Так как в точке $x = x_0$ элементы матрицы u и всех ее производных по x равны нулю, отсюда следует, что $\delta H_m/\delta\tilde{u} = 0$ в точке $x = x_0$ при $m > 1$. Таким образом, равенство (68) доказано. В силу этого равенства на основании (67) получаем, что асимптотические при $\eta \to \pm\infty$ разложения величин $\delta H/\delta\tilde{u}$ и $\partial A/\partial\eta$ отличаются только знаком. Далее, нетрудно убедиться, что асимптотическое при $\eta \to \pm\infty$ разложение величины $\partial A/\partial\eta$ имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial\eta} \sim -\sum_{m=1}^{\infty} m A_m \eta^{-(m+1)}. \tag{71}$$

Отсюда следует, что асимптотические ряды (69) и (71) отличаются только знаком. Значит, при любом $m > 0$ справедливо равенство

$$\delta H_{m+1}/\delta\tilde{u} = m A_m. \tag{72}$$

Из последнего равенства с учетом (56), (58) и (70) следует справедливость (57) для случая $u \equiv 0$ при $x \leqslant x_0$. Однако, умножая элементы матрицы u на бесконечно дифференцируемую функцию $w(x)$, равную нулю при $x \leqslant x_0$ и единице при $x \geqslant x_1 > x_0$, мы сведем случай произвольной бесконечно дифференцируемой матрицы u к рассмотренному сейчас случаю. Далее, учтя характер зависимости правой и левой частей равенства (57) от диагональных элементов матрицы Λ, без труда убеждаемся, что это равенство справедливо при любых комплексных λ_r, удовлетворяющих условию $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$.

Посмотрим теперь, как меняется со временем определенная с помощью равенства (56) величина T_{mr}, если в нее подставить какое-нибудь решение уравнения (33). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \operatorname{Sp}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \widetilde{u}^{(s)}} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}\right) = \operatorname{Sp}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \widetilde{u}^{(s)}} \left[\Lambda, \frac{\partial^s A_{n+1}}{\partial x^s}\right]\right).$$

Положим

$$Z_{mnr} = \operatorname{Sp}\left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{s-1} (-1)^{\sigma} \left[\Lambda, \frac{\partial^{s-\sigma-1} A_{n+1}}{\partial x^{s-\sigma-1}}\right] \frac{\partial^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \widetilde{u}^{(s)}}\right).$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \operatorname{Sp}\left(\frac{\delta T_{mr}}{\delta \widetilde{u}} [\Lambda, A_{n+1}]\right) + \frac{\partial}{\partial x} Z_{mnr}.$$

Отсюда в силу (57) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = m\Theta_{mnr} + \frac{\partial}{\partial x} Z_{mnr},$$

где

$$\Theta_{mnr} = \operatorname{Sp}\left\{\frac{\partial A_m}{\partial a_r} [\Lambda, A_{n+1}]\right\}.$$

Умножим теперь равенство

$$\left[\Lambda, \frac{\partial A_{m+1}}{\partial a_r}\right] - \left[u, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}\right] - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_m}{\partial a_r} = 0$$

справа на A_n и сложим с равенством

$$[\Lambda, A_{n+1}] - [u, A_n] - \frac{\partial A_n}{\partial x} = 0,$$

умноженным слева на $\partial A_m / \partial a_r$. В результате получим равенство

$$\frac{\partial A_m}{\partial a_r} [\Lambda, A_{n+1}] - \frac{\partial A_{m+1}}{\partial a_r} [\Lambda, A_n] + \left[\Lambda, \frac{\partial A_{m+1}}{\partial a_r} A_n\right] =$$
$$= \left[u, \frac{\partial A_m}{\partial a_r} A_n\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_m}{\partial a_r} A_n\right),$$

из которого вытекает следующее соотношение:

$$\Theta_{mnr} = \Theta_{m+1,\ n-1,\ r} + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial A_m}{\partial a_r} A_n\right).$$

Решая это рекуррентное соотношение, легко получаем равенство

$$\Theta_{mnr} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Sp}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial A_{m+k}}{\partial a_r} A_{n-k}\right).$$

Положим теперь

$$X_{mnr} = Y_{mnr} + Z_{mnr},$$

где

$$Y_{mnr} = m \operatorname{Sp}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial A_{m+k}}{\partial a_r} A_{n-k}\right).$$

Нетрудно видеть, что определенные таким образом величины X_{mnr} удовлетворяют равенству (55).

Заметим, что в силу равенства (72) уравнение (33) можно записать в следующей гамильтоновой форме:

$$u_t = [\Lambda,\ \delta\hat{H}_n/\delta\tilde{u}],$$

где

$$\hat{H}_n = \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^{x_0'} \operatorname{Sp}(\Lambda,\ A_{n+2})\, dx.$$

Далее, нетрудно убедиться, что в силу (33) выполняется уравнение Гейзенберга

$$\partial L/\partial t + [P,\ L] = 0,$$

где оператор P имеет вид

$$P = \sum_{m=0}^{n} A_m L^{n-m}. \tag{73}$$

Аналогия между равенствами (28) и (73) справедлива и в более общем случае. Она основана на равенстве

$$\mathscr{A} = P + g\,(L - \eta), \tag{74}$$

где

$$g = -\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-m-1} A_m L^{n-m-k-1} \eta^k.$$

Действительно, подставив (74) в (22), получим

$$\partial L/\partial t + [P,\ L] = Q\,(L - \eta),$$

где оператор $Q = \mathscr{B} - [g,\ L]$ зависит полиномиально от параметра η. Поскольку левая часть этого равенства от η не зависит, $Q = 0$.

4. СЛУЧАЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОПЕРАТОРА $\mathscr{A}$ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $\mathscr{A}$ зависит рационально от спектрального параметра η. Учитывая сказанное выше, будем считать, что оператор $\mathscr{A}$ имеет нулевой порядок, т. е.

является просто матрицей. Исходя из этого, положим

$$\mathscr{A}=\sum_{m=0}^{n} A_m\eta^{n-m}+\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu}\frac{\alpha_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p}, \tag{75}$$

где матрицы A_m и $\alpha_{\mu p}$ от η не зависят. Тогда согласно (27): $[\Lambda, A_0] = 0$; матрицы A_m при $m = 1, \ldots, n$, если $n > 0$, удовлетворяют (29); матрицы $\alpha_{\mu p}$ удовлетворяют условиям

$$\partial\alpha_{\mu p}/\partial x+[u, \alpha_{\mu p}]-\eta_\mu[\Lambda, \alpha_{\mu p}]-[\Lambda, \alpha_{\mu, p+1}]=0, \tag{76}$$

причем $\alpha_{\mu p} = 0$ при $p > p_\mu$, и, наконец, вытекающее из (27) эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial A_n}{\partial x}-[u, A_n]+\sum_{\mu=1}^{\mu_0}[\Lambda, \alpha_{\mu 1}]=0. \tag{77}$$

В общем случае уравнение (76) для матриц $\alpha_{\mu p}$ не имеет решения, элементы которого были бы полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x. Поэтому в общем случае уравнение (76) необходимо интегрировать одновременно с интегрированием уравнения (77). Для получения единственного решения в этом случае, кроме значения матрицы u при $t = 0$, нужно еще задавать значения матриц $\alpha_{\mu p}$ при некотором $x = x_0$. Однако в некоторых случаях систему уравнений (76) и (77) можно свести к одному эволюционному уравнению. Подробнее на этом остановимся несколько позднее, а сейчас покажем, что система уравнений (76) и (77) обладает r_0 бесконечными сериями законов сохранения вида

$$\partial T_{mr}/\partial t=\partial\hat{X}_{mnr}/\partial x, \tag{78}$$

где T_{mr} определено с помощью равенства (56), а $\hat{X}_{mnr} = X_{mnr} - \check{X}_{mr}$, причем X_{mnr} определяются описанным в разд. 3 способом и явно не зависят от матриц $\alpha_{\mu p}$, а величины $\check{X}_{mr}$ являются полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x и зависят линейно от элементов матриц $\alpha_{\mu p}$ и их производных по x.

Действительно, пусть

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu}\frac{\alpha_{\mu p}}{(\eta-\eta_\mu)^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\eta^{-k},$$

где

$$\alpha_k=\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_{\mu k}}\frac{(k-1)!}{(k-p)!\,(p-1)!}\eta_\mu^{k-p}\alpha_{\mu p}, \quad p_{\mu k}=\min(p_\mu, k).$$

Тогда из (76) следует уравнение для α_k:

$$\partial\alpha_k/\partial x+[u, \alpha_k]-[\Lambda, \alpha_{k+1}]=0, \quad k>0, \tag{79}$$

а эволюционное уравнение (77) примет вид

$$\partial u/\partial t - \partial A_n/\partial x - [u, A_n] + [\Lambda, \alpha_1] = 0.$$

С учетом (29) это уравнение можно записать в виде

$$u_t = [\Lambda, A_{n+1}] - [\Lambda, \alpha_1]. \tag{80}$$

Посмотрим теперь, как меняется со временем определенная с помощью (56) величина T_{mr}, если в нее подставить какое-нибудь решение уравнения (80). Согласно результатам разд. 3 имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \frac{\partial}{\partial x} X_{mnr} - \mathrm{Sp}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}^{(s)}} \left[\Lambda, \frac{\partial^s \alpha_1}{\partial x^s}\right]\right).$$

Положим теперь

$$\check{Z}_{mr} = \mathrm{Sp}\left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{s-1} (-1)^{\sigma} \left[\Lambda, \frac{\partial^{s-\sigma-1}\alpha_1}{\partial x^{s-\sigma-1}}\right] \frac{\partial^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}^{(s)}}\right).$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \frac{\partial}{\partial x} X_{mnr} - \mathrm{Sp}\left(\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}} [\Lambda, \alpha_1]\right) - \frac{\partial}{\partial x} \check{Z}_{mr}. \tag{81}$$

Пусть

$$\check{\Theta}_{mrk} = \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial A_m}{\partial a_r} [\Lambda, \alpha_k]\right) = -\mathrm{Sp}\left(\alpha_k \left[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}\right)\right]. \tag{82}$$

Умножим равенство

$$\left[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}\right] - \left[u, \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right] - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r} = 0$$

слева на α_k и вычтем из него (79), умноженное справа на $\partial A_{m-1}/\partial a_r$. В результате получим

$$\alpha_k \left[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}\right] - \alpha_{k+1}\left[\Lambda, \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right] + \left[\Lambda, \alpha_{k+1} \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right] = \\ = \left[u, \alpha_k \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_k \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right).$$

Отсюда согласно (82) имеем

$$\check{\Theta}_{mrk} = \check{\Theta}_{m-1, r, k+1} - \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Sp}\left(\alpha_k \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}\right).$$

Решив это рекуррентное соотношение, получим

$$\check{\Theta}_{mrk} = -\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Sp}\left(\sum_{s=0}^{m-1} \alpha_{k+s} \frac{\partial A_{m-s-1}}{\partial a_r}\right).$$

Согласно (82) отсюда следует равенство

$$\mathrm{Sp}\left(\alpha_1\left[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}\right]\right) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{\partial A_{m-k}}{\partial a_r}\right).$$

Положим теперь

$$\check{Y}_{mr} = m\,\mathrm{Sp}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{\partial A_{m-k}}{\partial a_r}\right).$$

Пусть, далее, $\check{X}_{mr} = -\check{Y}_{mr} + \check{Z}_{mr}$, а $\hat{X}_{mnr} = X_{mnr} - \check{X}_{mr}$. Тогда согласно (81) убеждаемся в справедливости равенства (78).

В заключение отметим, что в силу (76) и (77) выполнено уравнение Гейзенберга. Действительно, положим

$$P = \sum_{m=0}^{n} A_m L^{n-m} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu}\alpha_{\mu p}(L-\eta_\mu)^{-p}.$$

Тогда согласно (75) имеем

$$\mathcal{A} = P + g\,(L-\eta),$$

где

$$g = -\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-m-1} A_m L^{n-m-k-1}\eta^k +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu}\alpha_{\mu p}\sum_{k=1}^{p}(\eta-\eta_\mu)^{-p+k-1}(L-\eta_\mu)^{-k}.$$

Отсюда согласно (22) имеем

$$\partial L/\partial t + [P, L] = Q\,(L-\eta), \tag{83}$$

где оператор $Q = \mathcal{B} - [g, L]$ зависит рационально от спектрального параметра η. Поскольку левая часть (83) от η не зависит, то отсюда следует, что $Q = 0$, т. е. левая часть равенства обращается в нуль в силу уравнений (76) и (77). Заметим, что в приведенных выше рассуждениях мы не пользовались явным видом оператора L, а использовали только его независимость от параметра η. Поэтому приведенное рассуждение проходит и в более общем случае. Впервые связь между соотношением (22) и уравнением Гейзенберга была установлена в работах [22, 23].

5. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Для нахождения решения уравнений (33) и (77) применим метод обратной задачи. Однако возможности этого метода в настоящее время далеко не соответствуют возникшим потребностям.

Наиболее полно исследован случай матриц второго порядка ($r_0 = 2$). В указанном случае используем подход, первоначально примененный И. М. Гельфандом, Б. М. Левитаном и В. А. Марченко к решению обратной задачи для уравнения второго порядка (уравнение Штурма — Лиувилля или уравнение Шредингера) [24].

Итак, рассмотрим систему

$$\partial\varphi/\partial x + U\varphi = \mathrm{i}\zeta\Lambda\varphi, \tag{84}$$

где

$$U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

причем функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u(x)| + |v(x)|)\, dx < \infty. \tag{85}$$

Согласно результатам разд. 2 система (84) при любом действительном ζ имеет фундаментальное решение $\varphi^- = \varphi^-(x, \zeta)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi^-(x, \zeta)\exp(-\mathrm{i}\zeta\Lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\exp(-\mathrm{i}\zeta\Lambda x)\,\varphi^-(x, \zeta) = E,$$

и фундаментальное решение $\varphi^+ = \varphi^+(x, \zeta)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^+(x, \zeta)\exp(-\mathrm{i}\zeta\Lambda x) = \lim_{x\to\infty}\exp(-\mathrm{i}\zeta\Lambda x)\,\varphi^+(x, \zeta) = E.$$

Эти два решения связаны соотношением

$$\varphi^+ = \varphi^- S, \tag{86}$$

где матрица $S = S(\zeta)$ не зависит от x. Далее, в силу неравенства (85) первый столбец матрицы φ^- и последний столбец матрицы φ^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость, а последний столбец матрицы φ^- и первый столбец матрицы φ^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Действительно, положим

$$\varphi_{11}^- = \exp(\mathrm{i}\zeta x)\,\Phi_1; \quad \varphi_{21}^- = \exp(-\mathrm{i}\zeta x)\,\Phi_2. \tag{87}$$

Тогда согласно (40) вектор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 - \int_{-\infty}^{x} u(z)\exp(-2\mathrm{i}\zeta z)\,\Phi_2(z, \zeta)\,dz; \\ \Phi_2 &= -\int_{-\infty}^{x} v(z)\exp(2\mathrm{i}\zeta z)\,\Phi_1(z, \zeta)\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Положим теперь

$$\Phi_1 = \Psi_1; \quad \Phi_2 = \exp(2i\zeta x)\,\Psi_2. \tag{89}$$

Тогда система (88) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= 1 - \int_{-\infty}^{x} u(z)\,\Psi_2(z, \zeta)\,dz; \\ \Psi_2 &= -\exp(-2i\zeta x)\int_{-\infty}^{x} v(z)\exp(2i\zeta z)\,\Psi_1(z, \zeta)\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Для решения системы (90) применим при $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0$ метод последовательных приближений. При этом получаемое решение удовлетворяет условию

$$|\Psi_1 - 1| + |\Psi_2| \to 0, \quad |\zeta| \to \infty,$$

равномерно по $\arg\zeta$ при $-\pi \leqslant \arg\zeta \leqslant 0$. Отсюда согласно (87) и (90) следует, что первый столбец матрицы φ^- удовлетворяет условию

$$|\varphi_{11}^-(x, \zeta)\exp(-i\zeta x) - 1| + |\varphi_{21}^-(x, \zeta)\exp(-i\zeta x)| \to 0, \quad |\zeta| \to \infty, \tag{91}$$

равномерно по $\arg\zeta$ при $-\pi \leqslant \arg\zeta \leqslant 0$. Аналогичным образом доказывается, что последний столбец матрицы φ^- удовлетворяет условию

$$|\varphi_{12}^-(x, \zeta)\exp(i\zeta x)| + |\varphi_{22}^-(x, \zeta)\exp(i\zeta x) - 1| \to 0, \quad |\zeta| \to \infty, \tag{92}$$

равномерно по $\arg\zeta$ при $0 \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi$.

Рассмотрим теперь интегралы

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi_{11}^-(x, \zeta) - \exp(i\zeta x)\}\exp(-i\zeta y)\,d\zeta; \\ K_{21} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{21}^-(x, \zeta)\exp(-i\zeta y)\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Убедимся, что при $y > x$ справедливо равенство

$$K_{11} = K_{21} = 0. \tag{94}$$

Действительно, возьмем на плоскости ζ ориентированный по часовой стрелке контур C, ограниченный отрезком $[-R, R]$ действительной оси и нижней половиной окружности $|\zeta| = R$, и рассмотрим интеграл

$$I_C = \frac{1}{2\pi}\oint_C f(x, \zeta)\exp(i\zeta(x - y))\,d\zeta,$$

где

$$f = \varphi_{11}^-(x, \zeta)\exp(-i\zeta x) - 1.$$

В силу аналитичности подынтегрального выражения имеем $I_C = 0$. Далее, пуста

$$I_C = I_R + I_R^*,$$

где

$$I_R = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} f(x, \zeta) \exp(i\zeta(x-y))\, d\zeta.$$

Пользуясь леммой Жордана, с учетом (91) получаем, что при $y > x$ имеет место равенство

$$\lim_{R\to\infty} I_R^* = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$, т. е. $K_{11} = 0$ при $y > x$. Аналогично доказывается равенство $K_{21} = 0$ при $y > x$. Совершим теперь в (93) обратное преобразование Фурье. С учетом (94) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{11}^- &= \exp(i\zeta x) + \int_{-\infty}^{x} K_{11}(x, y) \exp(i\zeta y)\, dy; \\ \varphi_{21}^- &= \int_{-\infty}^{x} K_{21}(x, y) \exp(i\zeta y)\, dy, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

причем равенства (95) справедливы в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \leqslant 0$.

Аналогичным образом с помощью (92) доказывается, что последний столбец матрицы φ^- можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{12}^- &= \int_{-\infty}^{x} K_{12}(x, y) \exp(-i\zeta y)\, dy; \\ \varphi_{22}^- &= \exp(-i\zeta x) + \int_{-\infty}^{x} K_{22}(x, y) \exp(-i\zeta y)\, dy, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

причем равенства (96) справедливы в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$.

Равенства (95) и (96) можно объединить в одно матричное равенство

$$\varphi^- = \exp(i\zeta\Lambda x) + \int_{-\infty}^{x} K(x, y) \exp(i\zeta\Lambda y)\, dy. \tag{97}$$

Подставляя (97) в (84), с помощью несложных вычислений получаем, что ядро $K(x, y)$ при $y \leqslant x$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) + \Lambda \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \Lambda^{-1} + U(x) K(x, y) = 0 \tag{98}$$

13*

и условию на прямой $y = x$

$$\Lambda K(x, x)\Lambda^{-1} - K(x, x) = U(x),$$

т. е.

$$u(x) = -2K_{12}(x, x); \quad v(x) = -2K_{21}(x, x). \tag{99}$$

Далее, согласно (86) имеем:

$$S_{11} = \varphi_{11}^{+}\varphi_{22}^{-} - \varphi_{12}^{-}\varphi_{21}^{+}; \quad S_{12} = \varphi_{12}^{+}\varphi_{22}^{-} - \varphi_{12}^{-}\varphi_{22}^{+};$$
$$S_{21} = \varphi_{11}^{-}\varphi_{21}^{+} - \varphi_{11}^{+}\varphi_{21}^{-}; \quad S_{22} = \varphi_{11}^{-}\varphi_{22}^{+} - \varphi_{12}^{+}\varphi_{21}^{-}.$$

Из этих равенств следует, что S_{11} — аналитическая функция ζ в верхней полуплоскости, причем $S_{11} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$, а S_{22} — аналитическая функция ζ в нижней полуплоскости и $S_{22} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$. Нулям функции S_{11}, лежащим в верхней полуплоскости, соответствуют точки дискретного спектра, т. е. если $S_{11} = 0$ при $\zeta = \zeta_m$, то существует константа C_m, такая, что

$$\varphi_{11}^{+}(x, \zeta_m) = C_m\varphi_{12}^{-}(x, \zeta_m); \quad \varphi_{21}^{+}(x, \zeta_m) = C_m\varphi_{22}^{-}(x, \zeta_m). \tag{100}$$

Из (100) следует, что при $\zeta = \zeta_m$ система (84) имеет решение, убывающее экспоненциально при $x \to \pm\infty$. Аналогично нулям функции S_{22}, лежащим в нижней полуплоскости, также соответствуют точки дискретного спектра, т. е. если $S_{22} = 0$ при $\zeta = \zeta_n^*$, то существует константа C_n^*, такая, что

$$\varphi_{12}^{+}(x, \zeta_n^*) = C_n^*\varphi_{11}^{-}(x, \zeta_n^*); \quad \varphi_{22}^{+}(x, \zeta_n^*) = C_n^*\varphi_{21}^{-}(x, \zeta_n^*). \tag{101}$$

Следовательно, система (84) при $\zeta = \zeta_n^*$ обладает решением, которое убывает экспоненциально при $x \to \pm\infty$.

Набор S-матрицы, нулей $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_0}$ функции S_{11}, лежащих в верхней полуплоскости, нулей $\zeta_1^*, \ldots, \zeta_{n_0}^*$ функции S_{22}, лежащих в нижней полуплоскости, а также констант C_m и C_n^*, входящих в (100) и (101), называется данными рассеяния. Нахождение данных рассеяния по заданной матрице U называется прямой задачей рассеяния. Обратная задача рассеяния состоит в определении матрицы U по данным рассеяния. Достигается это следующим образом.

Предположим, что S_{11} не обращается в нуль на действительной оси, а нули S_{11} в верхней полуплоскости все простые, т. е. если $S_{11} = 0$ при $\zeta = \zeta_m$, то $S_{11}'(\zeta_m) \neq 0$. Далее, рассмотрим вытекающее из (86) равенство

$$\varphi_{11}'/S_{11} = \varphi_{11}^{-} + (S_{21}/S_{11})\,\varphi_{12}^{-}.$$

Из этого равенства следует, что

$$I_1 = I_2 + I_3, \tag{102}$$

где

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi_{11}^{+}(x,\zeta)}{S_{11}(\zeta)}-\exp(\mathrm{i}\zeta x)\right]\exp(-\mathrm{i}\zeta y)\,d\zeta=$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{m=1}^{m_0}\frac{\varphi_{11}^{+}(x,\zeta_m)}{S_{11}'(\zeta_m)}\exp(-\mathrm{i}\zeta_m y);$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_{11}^{-}(x,\zeta)-\exp(\mathrm{i}\zeta x)]\exp(-\mathrm{i}\zeta y)\,d\zeta=2\pi K_{11}(x,y);$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)}\varphi_{12}^{-}(x,\zeta)\exp(-\mathrm{i}\zeta y)\,d\zeta=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}K_{12}(x,z)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)}\exp[-\mathrm{i}\zeta(z+y)]\,d\zeta\,dz.$$

Полагая

$$f_1(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)}\exp(-\mathrm{i}\zeta w)\,d\zeta;$$

$$g_{11}=\mathrm{i}\sum_{m=1}^{m_0}\frac{\varphi_{11}^{+}(x,\zeta_m)}{S_{11}'(\zeta_m)}\exp(-\mathrm{i}\zeta_m y),$$

запишем (102) в виде

$$K_{11}(x,y)+\int_{-\infty}^{x}K_{12}(x,z)f_1(z+y)\,dz=g_{11}(x,y). \qquad (103)$$

Рассмотрим равенство

$$\varphi_{21}^{+}/S_{11}=\varphi_{21}^{-}+(S_{21}/S_{11})\,\varphi_{22}^{-}.$$

Из этого равенства следует, что

$$J_1=J_2+J_3, \qquad (104)$$

где

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{21}^{+}(x,\zeta)}{S_{11}(\zeta)}\exp(-\mathrm{i}\zeta y)\,d\zeta=2\pi\mathrm{i}\sum_{m=1}^{m_0}\frac{\varphi_{21}^{+}(x,\zeta_m)}{S_{11}'(\zeta_m)}\exp(-\mathrm{i}\zeta_m y);$$

$$J_2=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{21}^{-}(x,\zeta)\exp(-\mathrm{i}\zeta y)\,d\zeta=2\pi K_{21}(x,y);$$

$$J_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)} \varphi_{22}^-(x, \zeta) \exp(-i\zeta y)\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)} \exp[-i\zeta(x+y)]\, d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{x} K_{22}(x, z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{21}(\zeta)}{S_{11}(\zeta)} \exp[-i\zeta(z+y)]\, d\zeta\, dz.$$

Полагая

$$g_{21} = i \sum_{m=1}^{m_0} \frac{\varphi_{21}^+(x, \zeta_m)}{S'_{11}(\zeta_m)} \exp(-i\zeta_m y),$$

запишем равенство (104) в виде

$$K_{21}(x, y) + f_1(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{22}(x, z) f_1(z+y)\, dz = g_{21}(x, y). \quad (105)$$

Предположим теперь, что S_{22} также не обращается в нуль на действительной оси, а ее нули в нижней полуплоскости все простые, т. е. если $S_{22} = 0$ при $\zeta = \zeta_n^*$, то $S'_{22}(\zeta^*) \neq 0$. Аналогично (см. выше), преобразуя равенства

$$\varphi_{12}^+/S_{22} = (S_{12}/S_{22})\varphi_{11}^- + \varphi_{12}^-; \quad \varphi_{22}^+/S_{22} = (S_{12}/S_{22})\varphi_{21}^- + \varphi_{22}^-,$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} &K_{12}(x, y) + f_2(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{11}(x, z) f_2(z+y)\, dz = g_{12}(x, y); \\ &K_{22}(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{21}(x, z) f_2(z+y)\, dz = g_{22}(x, y), \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

где

$$f_2(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{12}(\zeta)}{S_{22}(\zeta)} \exp(i\zeta w)\, d\zeta;$$

$$g_{12} = -i \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varphi_{12}^+(x, \zeta_n^*)}{S'_{22}(\zeta_n^*)} \exp(i\zeta_n^* y);$$

$$g_{22} = -i \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varphi_{22}^+(x, \zeta_n^*)}{S'_{22}(\zeta_n^*)} \exp(i\zeta_n^* y).$$

Заменим теперь в выражениях для $g_{\alpha\beta}$ решение $\varphi^{+}_{\alpha\beta}$ с помощью равенств (100) и (101) через решение $\varphi^{-}_{\alpha\beta}$, α, $\beta = 1, 2$. Воспользуемся далее для решения φ^{-} представлением (97). В результате получим следующие равенства:

$$g_{11} = \int\limits_{-\infty}^{x} K_{12}(x, z)\, g_1(z+y)\, dz;$$

$$g_{12} = g_2(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{11}(x, z)\, g_2(z+y)\, dz;$$

$$g_{21} = g_1(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{22}(x, z)\, g_1(z+y)\, dz;$$

$$g_{22} = \int\limits_{-\infty}^{x} K_{21}(x, z)\, g_2(z+y)\, dz,$$

где

$$g_1(w) = \mathrm{i} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{C_m}{S'_{11}(\zeta_m)} \exp(-\mathrm{i}\zeta_m w);$$

$$g_2(w) = -\mathrm{i} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{C_n^*}{S'_{22}(\zeta_n^*)} \exp(\mathrm{i}\zeta_n^* w).$$

Положим теперь

$$F_1 = f_1 - g_1; \quad F_2 = f_2 - g_2.$$

В результате уравнения (103), (105) и (106) примут вид:

$$K_{11}(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{12}(x, z)\, F_1(z+y)\, dz = 0;$$

$$K_{12}(x, y) + F_2(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{11}(x, z)\, F_2(z+y)\, dz = 0;$$

$$K_{21}(x, y) + F_1(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{22}(x, z)\, F_1(z+y)\, dz = 0;$$

$$K_{22}(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K_{21}(x, z)\, F_2(z+y)\, dz = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} K(x, z) F(z+y)\, dz = 0, \tag{107}$$

где

$$F = \begin{vmatrix} 0 & F_2 \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, с помощью данных рассеяния мы определяем элементы матрицы F. Далее, решаем интегральное уравнение (107) и находим $K(x, y)$. Наконец, с помощью равенств (99) находим функции u и v, т. е. матрицу U в уравнении (84). Такова схема решения обратной задачи.

Вообще говоря, решение интегрального уравнения (107) представляет собой не простую задачу. Однако в одном случае решение можно получить в явном виде. Это случай так называемых безотражательных потенциалов, когда S-матрица имеет диагональный вид. При этом ядро F интегрального уравнения (107) вырождено, и, следовательно, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Именно безотражательные потенциалы соответствуют солитонным решениям нелинейных эволюционных уравнений.

6. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Пусть S-матрица имеет диагональный вид, т. е. $S_{12} = S_{21} = 0$. Тогда на действительной оси имеет место равенство $S_{11}S_{22} = 1$, и, следовательно, функция S_{11} допускает продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость как мероморфная функция с простыми полюсами в точках $\zeta_1^*, \ldots, \zeta_{n_0}^*$. Аналогично функция S_{22} допускает продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость как мероморфная функция с простыми полюсами в точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_0}$. Отсюда следует, что функции

$$S_1 = \frac{\prod\limits_{n=1}^{n_0} (\zeta - \zeta_n^*)}{\prod\limits_{m=1}^{m_0} (\zeta - \zeta_m)} S_{11}(\zeta), \quad S_2 = \frac{\prod\limits_{m=1}^{m_0} (\zeta - \zeta_m)}{\prod\limits_{n=1}^{n_0} (\zeta - \zeta_n^*)} S_{22}(\zeta)$$

определены во всей комплексной плоскости ζ и не имеют в ней особенностей. Далее, нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} \zeta^{m_0 - n_0} S_1(\zeta) = \lim_{|\zeta| \to \infty} \zeta^{n_0 - m_0} S_2(\zeta) = 1.$$

Отсюда непосредственно следует, что по крайней мере либо S_1 ($m_0 \geqslant n_0$), либо S_2 ($n_0 \geqslant m_0$) ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. Значит, согласно теореме Лиувилля получаем, что либо S_1, либо S_2 есть константа, откуда в силу равенства $S_1S_2 = 1$ следует, что обе функции S_1 и S_2 являются константами, а это возможно только при $m_0 = n_0$. Из последнего факта с учетом того, что $S_{11} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$ и $S_{22} \to 1$ при $|\zeta| \to \infty$, следует справедливость равенств:

$$S_{11} = \prod_{m=1}^{m_0} \left(\frac{\zeta-\zeta_m}{\zeta-\zeta_m^*}\right); \quad S_{22} = \prod_{m=1}^{m_0} \left(\frac{\zeta-\zeta_m^*}{\zeta-\zeta_m}\right). \tag{108}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задание $2m_0$ точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_0}, \zeta_1^*, \ldots, \zeta_{m_0}^*$ полностью определяет S-матрицу. Зададим еще $2m_0$ констант $C_1, \ldots, C_{m_0}, C_1^*, \ldots, C_{m_0}^*$. С помощью этих данных ядро F интегрального уравнения (107) определяется полностью. Оно имеет вид:

$$F_1 = -\mathrm{i} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{C_m}{S'_{11}(\zeta_m)} \exp(-\mathrm{i}\zeta_m w);$$

$$F_2 = \mathrm{i} \sum_{m=1}^{m_0} \frac{C_m^*}{S'_{22}(\zeta_m^*)} \exp(\mathrm{i}\zeta_m^* w),$$

где $S'_{11}(\zeta_m)$ и $S'_{22}(\zeta_m^*)$ определяются равенствами (108).

Положим теперь

$$N_m = \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{12}^-(x, \zeta_m)\, \varphi_{22}^-(x, \zeta_m)\, dx\right)^{-1/2};$$

$$N_m^* = \left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{11}^-(x, \zeta_m^*)\, \varphi_{21}^-(x, \zeta_m^*)\, dx\right)^{-1/2}.$$

Тогда справедливы равенства:

$$N_m = (-\mathrm{i}C_m/S'_{11}(\zeta_m))^{1/2}; \quad N_m^* = (-\mathrm{i}C_m^*/S'_{22}(\zeta_m^*))^{1/2}.$$

Действительно, пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — какое-нибудь решение системы (84), а $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — решение системы (84) при $\zeta = \zeta'$. С помощью (84) нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$d(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)/dx = \mathrm{i}(\zeta - \zeta')(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1). \tag{109}$$

Дифференцируя это равенство по ζ, а затем полагая $\zeta' = \zeta$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta}\psi_2 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\psi_1\right) = \mathrm{i}(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1). \tag{110}$$

Аналогично, дифференцируя (109) по ζ', а затем полагая $\zeta' = \zeta$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta} - \varphi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta}\right) = -\mathrm{i}\,(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1). \tag{111}$$

Положим теперь в равенствах (110) и (111)

$$\varphi_1 = \varphi^+_{11}(x, \zeta_m); \quad \varphi_2 = \varphi^+_{21}(x, \zeta_m);$$
$$\psi_1 = \varphi^-_{12}(x, \zeta_m); \quad \psi_2 = \varphi^-_{22}(x, \zeta_m).$$

Далее, проинтегрируем (110) по пространственной переменной от x до ∞, а (111) — от $-\infty$ до x и вычтем один результат из другого. Тогда с учетом (100) получим

$$S'_{11}(\zeta_m) = -2\mathrm{i}C_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^-_{12}(x, \zeta_m)\,\varphi^-_{22}(x, \zeta_m)\,dx. \tag{112}$$

Полагая в равенствах (110) и (111)

$$\varphi_1 = \varphi^-_{11}(x, \zeta^*_m); \quad \varphi_2 = \varphi^-_{21}(x, \zeta^*_m);$$
$$\psi_1 = \varphi^+_{12}(x, \zeta^*_m); \quad \psi_2 = \varphi^+_{22}(x, \zeta^*_m),$$

аналогичным способом получаем

$$S'_{22}(\zeta^*_m) = 2\mathrm{i}C^*_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^-_{11}(x, \zeta^*_m)\,\varphi^-_{21}(x, \zeta^*_m)\,dx. \tag{113}$$

Заметим теперь, что если в (84) $v = -\bar{u}$, то точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m_0}$, $\zeta^*_1, \ldots, \zeta^*_{m_0}$ можно пронумеровать так, что $\zeta^*_m = \bar{\zeta}_m$, $m = 1, \ldots, m_0$. Отсюда согласно (108), (112) и (113) следует, что $C^*_m = -\bar{C}_m$, $m = 1, \ldots, m_0$. Следовательно, определенные выше величины $N_1, \ldots, N_{m_0}, N^*_1, \ldots, N^*_{m_0}$ удовлетворяют в этом случае условию $N^*_m = \bar{N}_m$, $m = 1, \ldots, m_0$.

Пусть теперь

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= \sum_{m=1}^{m_0} N_m p_{11,\,m}(x) \exp(-\mathrm{i}\zeta_m y);\\ K_{12} &= \sum_{m=1}^{m_0} N^*_m p_{12,\,m}(x) \exp(\mathrm{i}\zeta^*_m y). \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Подставляя (114) в (107), получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11,\,m} + \sum_{\mu=1}^{m_0} N_m N^*_\mu \frac{\exp(\mathrm{i}(\zeta^*_\mu - \zeta_m)x)}{\mathrm{i}(\zeta^*_\mu - \zeta_m)} p_{12,\,\mu} = 0;\\ &-\sum_{\mu=1}^{m_0} N_\mu N^*_m \frac{\exp(\mathrm{i}(\zeta^*_m - \zeta_\mu)x)}{\mathrm{i}(\zeta^*_m - \zeta_\mu)} p_{11,\,\mu} + p_{12,\,m} = N^*_m \exp(\mathrm{i}\zeta^*_m x). \end{aligned}\right\}$$

Матрица R этой системы имеет вид

$$R=\begin{vmatrix} E & \widetilde{M} \\ -M & E \end{vmatrix}.$$

Пусть матрица R_m получается из R при замене ее m-го столбца на столбец

$$(0, \ldots, 0, N_1^* \exp(i\zeta_1^* x), \ldots, N_{m_0}^* \exp(i\zeta_{m_0}^* x)).$$

Пусть, далее

$$\Delta = \det R = \det |E + M\widetilde{M}|; \quad \Delta_m = \det R_m.$$

Тогда согласно правилу Крамера

$$p_{11,\, m} = \Delta_m/\Delta; \quad p_{12,\, m} = \Delta_{m_0+m}/\Delta. \tag{115}$$

Положим также

$$\left.\begin{aligned} K_{21} &= \sum_{m=1}^{m_0} N_m p_{21,\, m}(x) \exp(-i\zeta_m y); \\ K_{22} &= \sum_{m=1}^{m_0} N_m^* p_{22,\, m}(x) \exp(i\zeta_m^* y). \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Подставляя (116) в (107), получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$p_{21,\, m} + \sum_{\mu=1}^{m_0} N_m N_\mu^* \frac{\exp(i(\zeta_\mu^* - \zeta_m) x)}{i(\zeta_\mu^* - \zeta_m)} p_{22,\, \mu} + N_m \exp(-i\zeta_m x) = 0;$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m_0} N_\mu N_m^* \frac{\exp(i(\zeta_m^* - \zeta_\mu) x)}{i(\zeta_m^* - \zeta_\mu)} p_{21,\, \mu} + p_{22,\, m} = 0.$$

Пусть матрица R_m^* получается из R при замене ее m-го столбца на столбец

$$(N_1 \exp(-i\zeta_1 x), \ldots, N_{m_0} \exp(-i\zeta_{m_0} x), 0, \ldots, 0).$$

Пусть далее

$$\Delta_m^* = \det R_m^*.$$

Тогда согласно правилу Крамера

$$p_{21,\, m} = -\Delta_m^*/\Delta; \quad p_{22,\, m} = -\Delta_{m_0+m}^*/\Delta. \tag{117}$$

С учетом (99) согласно (114) и (115) имеем:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= -\frac{2}{\Delta}\sum_{m=1}^{m_0} N_m^*\Delta_{m_0+m}\exp(i\zeta_m^* x); \\ v(x) &= \frac{2}{\Delta}\sum_{m=1}^{m_0} N_m\Delta_m^*\exp(-i\zeta_m x). \end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Формулы (118) дают выражения для искомых потенциалов. Далее, пользуясь определением матриц R_m и R_m^*, нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\Delta = \sum_{m=1}^{m_0}\left[-N_m\frac{\Delta_m}{\Delta}\exp(-i\zeta_m x) + N_m^*\frac{\Delta_{m_0+m}^*}{\Delta}\exp(i\zeta_m^* x)\right].$$

Отсюда в силу равенств (114)—(117) получаем

$$K_{11}(x, x) + K_{22}(x, x) = -\partial\ln\Delta/\partial x.$$

Кроме того, из уравнения (98) имеем:

$$dK_{11}(x, x)/dx + u(x)K_{21}(x, x) = 0;$$
$$dK_{22}(x, x)/dx + v(x)K_{12}(x, x) = 0.$$

С учетом (99) отсюда следует, что

$$d[K_{11}(x, x) + K_{22}(x, x)]/dx = u(x)v(x).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\partial^2\ln\Delta/\partial x^2 = -u(x)v(x).$$

7. ПРИМЕРЫ

Посмотрим теперь, какие конкретно уравнения можно получить описанным выше способом в случае $r_0 = 2$. Полагая

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{vmatrix}; \quad A_m = \begin{vmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{vmatrix},$$

согласно уравнению (29) (матрица u заменена в нем на U)

$$[\Lambda, A_{m+1}] - [U, A_m] - \partial A_m/\partial x = 0,$$

получаем следующие рекуррентные соотношения для определения элементов матрицы A_m:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\alpha_m/\partial x - v\beta_m + u\gamma_m = 0; \\ &2\beta_{m+1} + (\alpha_m - \delta_m)u - \partial\beta_m/\partial x = 0; \\ &2\gamma_{m+1} + (\alpha_m - \delta_m)v + \partial\gamma_m/\partial x = 0; \\ &\partial\delta_m/\partial x + v\beta_m - u\gamma_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Из первого и последнего уравнений этой системы следует, что $\partial(\alpha_m+\delta_m)/\partial x=0$, т.е. $\alpha_m+\delta_m=c_m$, где c_m от x не зависит. Взяв $c_m=0$, получим $\delta_m=-\alpha_m$. С учетом этого замечания система (119) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\partial\alpha_m/\partial x=v\beta_m-u\gamma_m;\\&\beta_{m+1}=-u\alpha_m+(1/2)\,\partial\beta_m/\partial x;\\&\gamma_{m+1}=-v\alpha_m-(1/2)\,\partial\gamma_m/\partial x.\end{aligned}\right\}\qquad(120)$$

Возьмем матрицу A_0 в виде $A_0=\mathrm{diag}\,(c,-c)$, т. е. $\alpha_0=c$; $\beta_0=\gamma_0=0$. Тогда с помощью системы (120) находим:

$$\left.\begin{aligned}&\beta_1=-cu;\quad \gamma_1=-cv;\quad \alpha_1=0;\\&\beta_2=-cu_x/2;\quad \gamma_2=cv_x/2;\quad \alpha_2=-cuv/2;\\&\beta_3=cu^2v/2-cu_{xx}/4;\quad \gamma_3=cuv^2/2-cv_{xx}/4;\\&\alpha_3=c\,(uv_x-u_xv)/4;\\&\beta_4=3cuu_xv/4-cu_{xxx}/8;\quad \gamma_4=-3cuvv_x/4+cv_{xxx}/8.\end{aligned}\right\}\qquad(121)$$

Далее, определяемые согласно (33) уравнения в нашем случае имеют вид:

$$u_t=2\beta_{n+1};\quad v_t=-2\gamma_{n+1}.$$

При $n=2$ согласно (121) получаем систему:

$$u_t=cu^2v-cu_{xx}/2,\quad v_t=-cuv^2+cv_{xx}/2.$$

При $c=-2i$ и $v=\pm\bar u$ эта система эквивалентна одному уравнению для комплекснозначной функции $u=u\,(x,\,t)$, известному как нелинейное уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}=\pm 2\,|u|^2u.\qquad(122)$$

При $n=3$ согласно (121) имеем

$$u_t+3cuu_xv/2-cu_{xxx}/4;\quad v_t=3cuvv_x/2-cv_{xxx}/4.$$

При $c=4$ и $v=u\pm$ полученная система сводится к одному уравнению

$$u_t+u_{xxx}=\pm 6u^2u_x,\qquad(123)$$

известному под названием модифицированного уравнения КДВ.

Каждое из уравнений (122) и (123) обладает бесконечной последовательностью уравнений, которые по аналогии с высшими КДВ-уравнениями можно было бы назвать высшими для нелинейного уравнения Шредингера или высшими для модифицированного КДВ-уравнения. В случае нелинейного уравнения Шредингера высшие уравнения имеют вид

$$u_t=2g_{k+1},\quad k>0,\qquad(124)$$

где функции g_m и f_m при $v=\bar{u}$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\partial f_m/\partial x = \bar{u} g_m - (-1)^m u \bar{g}_m; \; g_{m+1} = -u f_m + (1/2)\, \partial g_m/\partial x,$$

а при $v = -\bar{u}$ — соотношениями:

$$\partial f_m/\partial x = -\bar{u} g_m + (-1)^m u \bar{g}_m; \quad g_{m+1} = -u f_m + (1/2)\, \partial g_m/\partial x.$$

Само уравнение (122) получается из (124) при $k = 1$. Аналогично в случае модифицированного КДВ-уравнения высшие уравнения имеют вид

$$u_t = 2 g_{2k+2}, \quad k > 0, \tag{125}$$

где функции g_m и f_m при $v = u$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\partial f_m/\partial x = [1 + (-1)^m] u g_m; \quad g_{m+1} = -u f_m + (1/2)\, \partial g_m/\partial x,$$

а при $v = -u$ — соотношениями:

$$\partial f_m/\partial x = -[1 + (-1)^m] u g_m; \quad g_{m+1} = -u f_m + (1/2)\, \partial g_m/\partial x.$$

Само уравнение (123) получается из (125) при $k = 1$.

Выясним теперь, какие уравнения можно получить в рассматриваемом нами случае $r_0 = 2$ с помощью матрицы $\mathcal{A}$, зависящей рационально от спектрального параметра. Рассмотрим простейший случай, когда матрица $\mathcal{A}$ вида (75) имеет единственный полюс первого порядка в точке $\eta = 0$. Согласно (77) эволюционное уравнение имеет вид

$$U_t + [\Lambda, \alpha] = [\Lambda, A_{n+1}], \tag{126}$$

где матрица α с учетом (76) удовлетворяет условию

$$\partial \alpha/\partial x + [U, \alpha] = 0, \tag{127}$$

а матрица A_{n+1} определяется с помощью соотношения (29). Возьмем матрицу U в виде

$$U = \begin{vmatrix} 0 & a\theta_x \\ b\theta_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда из (127) следует

$$\alpha = \begin{vmatrix} f & ag \\ -bg & -f \end{vmatrix}, \tag{128}$$

где $f = f(\theta)$ и $g = g(\theta)$ — произвольное решение системы

$$f' - 2abg = 0; \quad g' - 2f = 0.$$

При $4ab = -1$ общее решение этой системы имеет вид:

$$f = \mu \cos\theta + \nu \sin\theta; \quad g = 2\mu \sin\theta - 2\nu \cos\theta, \tag{129}$$

а при $4ab = 1$ общее решение имеет вид:

$$f = \mu \exp\theta + \nu \exp(-\theta); \quad g = 2\mu \exp\theta - 2\nu \exp(-\theta). \tag{130}$$

С помощью системы (119) находим

$$A_{n+1}=\begin{vmatrix} f_{n+1} & ag_{n+1} \\ (-1)^n bg_{n+1} & -f_{n+1}\end{vmatrix},$$

где функции f_{n+1} и g_{n+1} определяются рекуррентными соотношениями:

$$\partial f_n/\partial x=[1+(-1)^n]\,abg_n\theta_x; \quad g_{n+1}=-f_n\theta_x+(1/2)\,\partial g_n/\partial x.$$

Отсюда следует, что (126) определяет непротиворечивую систему только при $n = 2k + 1$, $k \geqslant 0$. Эта система согласно (128) состоит из двух одинаковых уравнений вида

$$\theta_{xt}+2g=2g_{2k+2}, \quad k\geqslant 0. \tag{131}$$

Кроме того, к указанному семейству необходимо добавить еще уравнение

$$\theta_{xt}+2g=0, \tag{131'}$$

которое получается, если в выражении для матрицы $\mathcal{A}$ сохранить только полюсный член. Формально уравнение (131′) получается из (131) при $k = -1$. При этом уравнения (131) с $k \geqslant 0$ будут высшими для (131′). Если в (129) принять $\mu = -1/4$, $\nu = 0$, то (131′) превратится в sin-Cordon-уравнение

$$\theta_{xt}=\sin\theta.$$

Если же в (130) принять $\mu = -1/4$, $\nu = 0$, то (131′) превратится в уравнение Лиувилля

$$\theta_{xt}=\exp\theta.$$

Для исследования всех полученных выше уравнений при определенных граничных условиях применим метод обратной задачи. Чтобы воспользоваться этим методом, необходимо найти зависимость от времени данных рассеяния для оператора L, если коэффициенты этого оператора удовлетворяют какому-нибудь из приведенных выше уравнений.

Начнем с рассмотрения случая, когда матрица $\mathcal{A}$ имеет вид (28), т. е. зависит полиномиально от спектрального параметра. Предположим, что функции $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$, входящие в матрицу U, при любом фиксированном $t \geqslant 0$ стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$.

По определению матрицы $\mathcal{A}$ оператор $\partial/\partial t + \mathcal{A}$ переводит любое решение уравнения $(L - \eta)\,\varphi = 0$ в некоторое решение этого же уравнения. Действительно, согласно (22) имеем

$$(\partial L/\partial t)\,\varphi-(L-\eta)\,\mathcal{A}\varphi=0.$$

Кроме того, продифференцировав равенство $(L - \eta)\,\varphi = 0$ по t, получим

$$(\partial L/\partial t)\,\varphi+(L-\eta)\,\varphi_t=0.$$

Из этих равенств следует

$$(L-\eta)(\varphi_t+\mathcal{A}\varphi)=0,$$

т. е. $\psi=\varphi_t+\mathcal{A}\varphi$ удовлетворяет уравнению $(L-\eta)\psi=0$, если φ удовлетворяет этому же уравнению. Следовательно, в рассматриваемом случае существуют не зависящие от x матрицы Γ_+ и Γ_-, такие, что

$$\partial\varphi^+/\partial t+\mathcal{A}\varphi^+=\varphi^+\Gamma_+;\quad \partial\varphi^-/\partial t+\mathcal{A}\varphi^-=\varphi^-\Gamma_-. \tag{132}$$

Переходя к пределу при $x\to\infty$ в первом из равенств (132) и к пределу при $x\to-\infty$ во втором, получаем

$$\Gamma_+=\Gamma_-=\Gamma=A_0\eta^n=\operatorname{diag}(\gamma_1,\gamma_2)=\operatorname{diag}(c\eta^n,-c\eta^n), \tag{133}$$

где n — степень полинома (28). Далее, в силу равенства $\varphi^+=\varphi^-S$ из первого равенства (132) имеем

$$(\partial\varphi^-/\partial t+\mathcal{A}\varphi^-)S+\varphi^-\partial S/\partial t=\varphi^-S\Gamma.$$

С учетом второго равенства (132) отсюда следует

$$\partial S/\partial t+[\Gamma,S]=0, \tag{134}$$

т. е.

$$S=\exp(-\Gamma t)S_0\exp(\Gamma t),$$

где S_0 от t не зависит. Из последнего равенства следует, что диагональные элементы матрицы S не зависят от времени. Это значит, что положение и число точек дискретного спектра также не меняется со временем.

Посмотрим теперь, как меняются со временем постоянные C_m и C_n^*, входящие в равенства (100) и (101). Пусть

$$\varphi_1^+=(\varphi_{11}^+(x,\zeta_m),\varphi_{21}^+(x,\zeta_m));\quad \varphi_2^-=(\varphi_{12}^-(x,\zeta_m),\varphi_{22}^-(x,\zeta_m)).$$

Тогда из рассмотрения асимптотики при $x\to\infty$ получаем

$$(\partial/\partial t+\mathcal{A})\varphi_1^+=\gamma_1\varphi_1^+, \tag{135}$$

а из рассмотрения асимптотики при $x\to-\infty$ получаем

$$(\partial/\partial t+\mathcal{A})\varphi_2^-=\gamma_2\varphi_2^-. \tag{136}$$

При этом диагональные элементы γ_1, γ_2 матрицы Γ взяты согласно (133) при $\eta=\eta_m=i\zeta_m$. Далее, пользуясь равенством $\varphi_1^+=C_m\varphi_2^-$, из (135) получаем

$$(\partial C_m/\partial t)\varphi_2^-+C_m(\partial/\partial t+\mathcal{A})\varphi_2^-=\gamma_1C_m\varphi_2^-.$$

Отсюда на основании (136) имеем

$$\partial C_m/\partial t=(\gamma_1-\gamma_2)C_m. \tag{137}$$

Аналогично получается уравнение для C_n^*. Оно имеет вид

$$\partial C_n^*/\partial t + (\gamma_1 - \gamma_2) C_n^* = 0, \tag{138}$$

где диагональные элементы γ_1, γ_2 матрицы Γ взяты согласно (133) при $\eta = \eta_n^* = i\zeta_n^*$. При этом для уравнения (124) матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \operatorname{diag}(c\eta^{2k}, -c\,\eta^{2k}) = \operatorname{diag}((-1)^{k+1}2i\zeta^{2k}, (-1)^k 2i\zeta^{2k}).$$

В частности, при $k = 1$ (нелинейное уравнение Шредингера) имеем

$$\Gamma = \operatorname{diag}(2i\zeta^2, -2i\zeta^2). \tag{139}$$

Что касается дискретного спектра, то при $v = \bar{u}$ его вообще нет, а при $v = -\bar{u}$ точки дискретного спектра образуют пары ζ_m, $\zeta_m^* = \bar{\zeta}_m$. Для уравнения (125) матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \operatorname{diag}(c\eta^{2k+1}, -c\eta^{2k+1}) = \operatorname{diag}((-1)^k 4i\zeta^{2k+1}, (-1)^{k+1}4i\zeta^{2k+1}).$$

В частности, при $k = 1$ (модифицированное КДВ-уравнение) имеем

$$\Gamma = \operatorname{diag}(-4i\zeta^3, 4i\zeta^3). \tag{140}$$

При $v = u$ дискретного спектра вообще нет, а при $v = -u$ точки дискретного спектра образуют квартеты ζ_m, $\bar{\zeta}_m$, $-\zeta_m$, $-\bar{\zeta}_m$, если $\zeta_m \neq -\bar{\zeta}_m$, и дуэты ζ_m, $\bar{\zeta}_m = -\zeta_m$ — в противном случае.

Таким образом, задав значение $u = u_0(x)$ при $t = 0$, можем, решив прямую задачу рассеяния, найти данные рассеяния при $t = 0$. Затем продолжим данные рассеяния для $t > 0$ с помощью уравнений (134), (137) и (138). Наконец, решив обратную задачу рассеяния, получим решение $u = u(x, t)$ для $t > 0$. При больших t в ядре $F(w)$ интегрального уравнения (107) основную роль играют солитонные члены, поскольку согласно (139) и (140) элементы S_{12} и S_{21} матрицы S осциллируют во времени, а определяемые согласно (137) и (138) величины C_m и C_n^*, вообще говоря, экспоненциально растут со временем либо при $t \to \infty$, либо при $t \to -\infty$.

Для sin-Gordon-уравнения метод обратной задачи применялся при нахождении решений $\theta = \theta(x, t)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\theta \to 2k_+\pi, \quad x \to \infty; \quad \theta \to 2k_-\pi, \quad x \to -\infty, \tag{141}$$

где k_+ и k_- — произвольные целые числа. При указанных граничных условиях решение находится описанным выше способом с той только разницей, что в данном случае находится с помощью решения обратной задачи не само решение θ, а производная θ_x, и для нахождения решения нужно проинтегрировать полученный результат. При этом оказывается, что если при $t = 0$ выполнялось условие (141), то оно будет выполняться и при любом $t > 0$, т. е. величина $k = k_+ - k_-$ не меняется со временем. Заметим только, что в этом случае матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \operatorname{diag}(\mathrm{i}/4\zeta, -\mathrm{i}/4\zeta),$$

а дискретный спектр, как и в случае модифицированного КДВ-уравнения, образует квартеты ζ_m, $\bar{\zeta}_m$, $-\zeta_m$, $-\bar{\zeta}_m$, если $\zeta_m \neq -\bar{\zeta}_m$, и дуэты ζ_m, $\bar{\zeta}_m = -\zeta_m$ в противном случае.

Обратная задача для уравнения Лиувилля сильно вырождена. Поэтому изложим другой подход к решению задач Коши и Гурса для этого уравнения. Для решения задачи Гурса рассмотрим уравнение Лиувилля в форме

$$\theta_{xt} = 2\exp(-\theta). \tag{142}$$

Найдем решение $\theta = \theta(x, t)$, удовлетворяющее условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\theta(x, 0) = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty);\\ &\theta(0, t) = g(t), \quad t \in (-\infty, \infty),\end{aligned}\right\} \tag{143}$$

причем $f(0) = g(0) = c$. Искомое решение имеет вид

$$\theta = \ln[\varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t)]^2, \tag{144}$$

где

$$\varphi_1 = \exp\left[\frac{1}{2} f(x) - \frac{c}{4}\right]; \quad \varphi_2 = \varphi_1(x)\int\limits_0^x \frac{dz}{\varphi_1^2(z)}; \tag{145}$$

$$\psi_1 = \exp\left[\frac{1}{2} g(t) - \frac{c}{4}\right]; \quad \psi_2 = \psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi_1^2(\tau)}. \tag{146}$$

Действительно, непосредственной подстановкой проверяется, что решение (144) удовлетворяет уравнению (142) и условиям (143). Это решение единственно.

Доказательство единственности основывается на следующем. Как нетрудно убедиться, величина

$$I = \theta_{xx} + \theta_x^2/2 \tag{147}$$

не зависит от t, а величина

$$J = \theta_{tt} + \theta_t^2/2 \tag{148}$$

не зависит от x, если $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет уравнению (142). Положим теперь

$$\theta = \ln\Phi^2. \tag{149}$$

Подставив (149) в (147), получим

$$\Phi_{xx} - I\Phi/2 = 0, \quad I = f_{xx} + f_x^2/2. \tag{150}$$

Отсюда следует

$$\Phi = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \tag{151}$$

где φ_1, φ_2 — определяемая равенствами (145) фундаментальная система решений уравнения (150), а c_1, c_2 не зависят от x. Подставив далее (149) в (148), получим

$$\Phi_{tt} - J\Phi/2 = 0, \quad J = g_{tt} + g_t^2/2. \tag{152}$$

Отсюда согласно (151) следует:

$$c_1 = c_{11}\psi_1(t) + c_{12}\psi_2(t); \quad c_2 = c_{21}\psi_1(t) + c_{22}\psi_2(t),$$

где ψ_1, ψ_2 — определяемая равенствами (146) фундаментальная система решений уравнения (152), а $c_{\alpha\beta}$, α, $\beta = 1, 2$, не зависят от x и t. Нетрудно убедиться, что полученное таким образом решение удовлетворяет условиям (143) только при $c_{11} = c_{22} = 1$; $c_{12} = c_{21} = 0$.

Для решения задачи Коши возьмем уравнение Лиувилля в виде

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = 8\exp(-\theta).$$

Найдем решение $\theta = \theta(x, t)$, удовлетворяющее условиям:

$$\theta(x, 0) = f(x); \quad \theta_t(x, 0) = g(x); \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Искомое решение имеет вид

$$\theta = \ln[\varphi_1(x-t)\,\psi_1(x+t) + \varphi_2(x-t)\,\psi_2(x+t)]^2,$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\zeta)$ — фундаментальная система решений уравнения

$$\varphi_{\zeta\zeta} - M\varphi/8 = 0, \tag{153}$$

а $\psi_1 = \psi_1(\eta)$, $\psi_2 = \psi_2(\eta)$ — фундаментальная система решений уравнения

$$\psi_{\eta\eta} - N\psi/8 = 0. \tag{154}$$

При этом справедливы равенства:

$$M = -8\exp[-f(\zeta)] + 2f''(\zeta) - 2g'(\zeta) + [f'(\zeta) - g(\zeta)]^2/2;$$

$$N = -8\exp[-f(\eta)] + 2f''(\eta) + 2g'(\eta) + [f'(\eta) + g(\eta)]^2/2.$$

Кроме того, решения φ_1, φ_2 выбираются произвольно, но с соблюдением условия $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = 1$, а решения ψ_1, ψ_2 выбираются с соблюдением условия $\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 = 1$ так, чтобы имели место равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x)\,\psi_1(x) + \varphi_2(x)\,\psi_2(x) = \exp[f(x)/2];\\ &-\varphi_1'(x)\,\psi_1(x) + \varphi_1(x)\psi_1'(x) - \varphi_2'(x)\psi_2(x) +\\ &+\varphi_2(x)\,\psi_2'(x) = g(x)\exp[f(x)/2]/2.\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Покажем, что это возможно. Действительно, пусть

$$F_0 = \exp[f(x)/2]; \quad F_+ = [f'(x) + g(x)]\, F_0(x)/4;$$
$$F_- = [f'(x) - g(x)]\, F_0(x)/4.$$

Пусть, далее,

$$\psi_1 = F_0(x)\, \varphi_2'(x) - F_-(x)\, \varphi_2(x);$$
$$\psi_2 = -F_0(x)\, \varphi_1'(x) + F_-(x)\, \varphi_1(x).$$

Тогда непосредственно можно проверить, что определенные таким образом ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению (154), если φ_1 и φ_2 удовлетворяют (153). Кроме того, выполняется равенство $\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 = 1$, если аналогичное равенство справедливо для φ_1 и φ_2. Наконец, с помощью равенств

$$\psi_1' = F_+(x)\, \varphi_2'(x) - \{[F_+(x)\, F_-(x) + 1]/F_0(x)\}\, \varphi_2(x);$$
$$\psi_2' = -F_+(x)\, \varphi_1'(x) + \{[F_+(x)\, F_-(x) + 1]/F_0(x)\}\, \varphi_1(x)$$

нетрудно убедиться в справедливости (155). Отсюда же следует единственность решения задачи Коши для уравнения Лиувилля.

В заключение следует отметить, что аналогичный подход использован в [25] для построения глобального решения уравнения Лиувилля. В работе [26] уравнение Лиувилля исследуется с помощью стандартного метода обратной задачи. В последние годы интерес к уравнению Лиувилля был в значительной мере вызван, с одной стороны, применением уравнения Лиувилля к теории релятивистской струны [27, 28], а с другой стороны, обнаруженной в работе [29] связью уравнения Лиувилля с уравнением Борна — Инфельда для скалярного безмассового поля в двумерном пространстве — времени [30]. Связь между уравнением Борна — Инфельда и релятивистской струной рассматривается в [31].

8. СЛУЧАЙ, КОГДА ОПЕРАТОР L ЗАВИСИТ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

До сих пор мы рассматривали случай, когда оператор L вида (23) не зависел от спектрального параметра. Однако примененный выше метод позволяет рассмотреть и случай, когда оператор L зависит рационально от спектрального параметра. Рассмотрим теперь случай, когда матрица u, входящая в (23), имеет вид

$$u = \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x, t)\, \zeta^{k_0 - k} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{u_{\mu p}(x, t)}{(\zeta - \zeta_\mu)^p}.$$

где целое число $k_0 \geqslant 0$. Далее, возьмем матрицу $\mathcal{A}$ в виде

$$\mathcal{A}=\sum_{m=0}^{n} A_m \zeta^{n-m}+v,$$

где

$$v=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_\nu}\frac{v_{\nu q}(x,t)}{(\zeta-\zeta'_\nu)^q}.$$

При этом точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\mu_0}, \zeta'_1, \ldots, \zeta'_{\nu_0}$ лежат в комплексной плоскости ζ и все различны.

Положим теперь

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,\ t)\,\zeta^{k_0-k}, \quad v=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,\ t)\,\zeta^{-k}.$$

Пусть матрицы A_m, $m \geqslant 0$, таковы, что при $m=0$ выполняется соотношение

$$[\Lambda,\ A_0]=0; \tag{156}$$

при $1 \leqslant m \leqslant k_0$, если $k_0>0$, выполняется соотношение

$$[\Lambda,\ A_m]-\sum_{k=0}^{m-1}[u_k,\ A_{m-k-1}]=0. \tag{157}$$

а при $m>k_0$ выполняется соотношение

$$[\Lambda,\ A_m]-\sum_{k=0}^{m-1}[u_k,\ A_{m-k-1}]-\frac{\partial}{\partial x}A_{m-k_0-1}=0. \tag{158}$$

Рассмотрим равенство

$$\partial u/\partial t-\partial\mathcal{A}/\partial x-[u,\ \mathcal{A}]+\zeta^{k_0+1}[\Lambda,\ \mathcal{A}]=0, \tag{159}$$

которое получается из (27) при $\eta=\zeta^{k_0+1}$. В рассматриваемой ситуации равенство (159) эквивалентно системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial u_0/dt=[\Lambda,\ A_{n+1}]-[\Lambda,\ v_1];\\
&\partial u_k/\partial t=[\Lambda,\ A_{n+k+1}]-[\Lambda,\ v_{k+1}]-\\
&-\sum_{\varkappa=0}^{k-1}[u_\varkappa,\ A_{n+k-\varkappa}]+\sum_{\varkappa=0}^{k-1}[u_\varkappa,\ v_{k-\varkappa}],\quad 1\leqslant k\leqslant k_0;\\
&\partial u_{\mu p}/\partial t+\sum_{s=0}^{p_\mu-p}[V_{\mu s},\ u_{\mu,\ p+s}]=0;\\
&\partial v_{\nu q}/\partial x+\sum_{s=0}^{q_\nu-q}[U_{\nu s},\ v_{\nu,\ q+s}]=0,
\end{aligned}\right\} \tag{160}$$

где $U_{\nu s}$ равно значению матрицы

$$\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\zeta^s}(u-\zeta^{k_0+1}\Lambda)$$

в точке $\zeta=\zeta'_\nu$, а $V_{\mu s}$ равно значению матрицы

$$\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\zeta^s}\left(\sum_{m=0}^{n} A_m\eta^{n-m}+v\right)$$

в точке $\zeta=\zeta_\mu$.

Система (160) обладает рядом замечательных свойств. Прежде всего определяемые соотношениями (156) — (158) матрицы A_m таковы, что их элементы являются полиномами от элементов матриц u_k и их производных по x соответствующего порядка. Таким образом, система (160) является системой дифференциальных уравнений. Далее, система (160) имеет r_0 бесконечных серий законов сохранения вида (55). Наконец, рассматриваемый в этом разделе подход допускает распространение на случай произвольного числа пространственных переменных. Доказательства всех перечисленных утверждений содержатся в работе [32].

В заключение отметим, что примененный здесь метод для нахождения уравнений, порождаемых операторным соотношением (22), состоит в следующем. Мы преобразовали для рассмотренного здесь случая соотношение (22) к виду (27), затем рассмотрели стационарное уравнение (34), полученное из (27) после отбрасывания члена $\partial u/\partial t$, и нашли точное решение A уравнения (34). Далее мы построили при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на оператор L, асимптотическое разложение

$$A\sim\sum_{m=0}^{\infty} A_m\eta^{-m} \qquad (*)$$

полученного ранее точного решения A уравнения (34). Без дополнительных ограничений на оператор L ряд (*) является формальным решением уравнения (34). Однако все замечательные свойства членов ряда (*) сохраняются и после отказа от дополнительных ограничений. Наконец, частные суммы вида

$$\sum_{m=0}^{n} A_m\eta^{n-m}=\eta^n\sum_{m=0}^{n} A_m\eta^{-m}$$

ряда (*) дают все (с точностью до эквивалентности) зависящие полиномиально от параметра η операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}=\Lambda^{-1}[\Lambda,\mathscr{A}]$, для которых соотношение (22) превращается в нелинейное эволюционное уравнение вида (33). Оказывается, что эта программа осуществима не только в случае операторов первого порядка, но и в случае операторов произвольного порядка. Центральным моментом здесь является рассмотрение стационарного соотношения

$$[A, L] = B(L - \eta),$$

получаемого из (22) после отбрасывания члена $\partial L/\partial t$ и построения формального решения вида

$$A \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \eta^{-m}; \quad B \sim \sum_{m=0}^{\infty} B_m \eta^{-m}$$

этого соотношения. Тогда операторы

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m}; \quad \mathcal{B} = \sum_{m=0}^{n} B_m \eta^{n-m}$$

дают все (с точностью до эквивалентности) зависящие полиномиально от η пары операторов, для которых (22) превращается в систему нелинейных эволюционных уравнений. Указанная программа осуществлена полностью в работах [22, 23]. Эта же программа осуществима в некоторых других случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gardner C. e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, N 19, p. 1095—1097.
2. **Miura R.**—J. Math. Phys., 1968, v. 9, N 8, p. 1202—1204.
3. **Miura R., Gardner C., Kruskal M.**— Ibid., 1968, v. 9, N 8, p.1204—1209.
4. **Su C., Gardner C.**— Ibid., 1969, v. 10, N 3, p. 536—539.
5. **Gardner C.**— Ibid., 1971, v. 12, N 8, p. 1548—1551.
6. **Kruskal M. e.a.**— Ibid., 1970, v. 11, N 3, p. 952—960.
7. **Gardner C. e.a.**— Comm. Pure Appl. Math., 1974, v. XXVII, N 1, p. 97—133.
8. **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**,— Функциональный анализ, 1971, т. 5, № 4, с. 18—27.
9. **Lax P.**— Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. XXI, № 5, p. 467—490.
10. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, № 1, с. 118—134.
11. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.**— Там же, 1973, т. 64, №5, с. 1627—1637.
12. **Захаров В. Е.**— Там же, 1973, т. 65, № 1, с. 219—225.
13. **Тахтаджян Л. А.**— Там же, 1974, т. 66, № 2, с. 476—489.
14. **Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**—Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1334—1337.
15. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.**—Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова, 1976, т. 142, с. 254—266.
16. **Захаров В. Е., Манаков С. В.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 69, № 5, с. 1654—1673.
17. **Манаков С. В.**— Теорет. и мат. физ., 1976, т. 28, № 2, с. 172—178.
18. **Ablowitz M. e.a.**—Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, № 25, p. 1262—1264.
19. **Ablowitz M. e.a.**— Ibid., 1973, v. 31, N 2, p. 125—127.
20. **Ablowitz M. e.a.**— Stud. Appl. Math., 1974, v. LIII, N 4, p. 249—315.
21. **Мельников В. К.** Препринт ОИЯИ, Р2-10966. Дубна, 1977.
22. **Мельников В. К.** Препринт ОИЯИ, Р5-12060. Дубна, 1978.
23. **Мельников В. К.** Симметрии и законы сохранения. Препринт ОИЯИ Р2-12304. Дубна, 1979.
24. **Chadan K., Sabatier P. C.** Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. N. Y., Springer Verlag, 1977.
25. **Джорджадзе Г. П., Погребков А. К., Поливанов М. К.**— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 2, с. 318—320.

26. **Андреев В. А.**— Теорет. и мат. физ., 1976, т. 29, № 2, с. 213.
27. **Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л.**— Там же, 1979, т. 39, № 1, с. 27—34.
28. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.**— Там же, 1979, 40, № 1, с. 15—27.
29. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Chervjakov A. M.** Preprint JINR, E2-11669. Dubna, 1978.
30. **Барбашов Б. М., Черников Н. А.**— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1966, т. 51, № 2, с. 658—668.
31. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.**—ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 5, с. 709—758.
32. **Мельников В. К.**— Математический сб., 1979, т. 108, № 3, с. 378—392.