

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА И МАСШТАБЫ АДРОННЫХ МАСС

А. И. Вайнштейн

Институт ядерной физики СО АН СССР Новосибирск

В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Основываясь на существующем знании хромодинамического вакуума, мы исследуем мезоны, построенные из u -, d -, s -кварков и (или) глюонов. Предложена новая классификация адронов — по характеру взаимодействия составляющих кварков и глюонов с вакуумными полями. Найдено, что масштаб масс, присущий резонансным структурам в различных каналах, неуниверсален; большой масштаб масс обнаружен, например, в глюонных каналах 0^\pm . Исходя из нашей классификации, мы устанавливаем иерархию масштабов. Находят естественное объяснение закономерности адронной феноменологии (правило Цвайга, приближенная $SU(6)$ -симметрия и т. п.). Довольно подробно обсуждаются свойства глюония. Выведено несколько низкоэнергетических теорем, которые дают, в частности, новое массовое соотношение для η' -мезона.

Basing on existing knowledge of the chromodynamic vacuum we investigate mesons built from u -, d -, s -quarks and/or gluons. A new classification of hadrons is proposed which reflects the strength of interaction of various currents with vacuum fields. It is found that the mass scale intrinsic to the resonance structures in different channels is not universal; a large mass scale is discovered, for instance, in the 0^- , 0^+ gluonic channels. Starting from our classification we establish the hierarchy of scales. Regularities of the hadronic phenomenology (Zweig's selection rule, approximate $SU(6)$ -symmetry and so on) are naturally explained. The properties of glueballs are discussed in some detail. A few low-energy theorems are derived, which imply, in particular, a new mass relation for the η' -meson.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена следствиям квантовой хромодинамики (КХД) [1] для традиционных старых адронов, т.е. адронов, не включающих тяжелые кварки. Мы постараемся убедить читателя в том, что их свойства гораздо более разнообразны, чем это представляется на первый взгляд. Согласно стандартной точке зрения [2] характерный масштаб адронных масс во всех случаях задается m_0^2 , или универсальным наклоном траекторий Чу — Фраучи, $\alpha' \sim 1 \text{ ГэВ}^{-2}$. Мы же, однако, убеждены, что даже для наименее состояний существует богатый спектр возможностей: квадраты масс и другие параметры могут отличаться на порядок и более. В частности, мы ожидаем, что масса легчайшего псевдоскалярного

глюония составляет

$$M_{0^-}^2, \text{ глюоний} \sim 10m_p^2. \tag{1}$$

Таким образом, кажущаяся универсальность адронов — следствие ограниченности экспериментальных данных.

Утверждение о существовании разных масштабов в традиционной адронной физике основывается на анализе правил сумм КХД. Соответствующий подход развивается уже на протяжении нескольких лет [3—5]. Сначала рассматривались классические векторные мезоны: ρ , ω , ϕ , J/ψ [4]. Успех превзошел все ожидания. Оказалось, что, обладая лишь скудной информацией о структуре вакуума, которая имеется на сегодняшний день, удается с помощью правил сумм в значительной степени фиксировать их свойства. Затем круг приложений существенно вырос. В недавних работах [6, 7] найдены массы Δ -изобары и P -уровней чармония, причем теоретические результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Были рассмотрены также правила сумм для глюонных каналов [5]. С ростом числа разобранных примеров росла и уверенность в адекватности основных представлений [3—4]. Сейчас, однако, особенно важно не это обстоятельство, а те существенные отличия в устройстве адронов, та неуниверсальность, которая стала явной [5] в процессе работы с правилами сумм.

Следует сразу же оговорить, что развиваемый подход не решает проблему спектра в полном смысле этого слова. (Под полным решением можно понимать, скажем, ситуацию, имеющую место в квантовой механике, где известно уравнение Шредингера, известны методы его решения и, таким образом, уровни энергии для любой системы фиксированы, хотя бы в принципе.) Вместо прямого вычисления спектра мы вынуждены полагаться на некоторую рафинированную дуальность. Именно, рассмотрим двухточечную функцию, индуцированную током j с теми же квантовыми числами, что и резонанс, свойства которого надо предсказать. Например, для скалярного глюония соответствующий ток имеет вид:

$$j_s = \frac{3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \tag{2}$$

где $G_{\mu\nu}^a$ — тензор напряженности глюонного поля; α_s — константа связи сильного взаимодействия (множитель $3\alpha_s/4\pi$ введен для удобства, как это станет очевидным из дальнейшего). Соответствующая двухточечная функция определяется как

$$S(Q^2) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ j_s(x) j_s(0) \} | 0 \rangle, \tag{3}$$

$$Q^2 \equiv -q^2.$$

Простейшая диаграмма, которая дает вклад в $S(Q^2)$, представлена на рис. 1. Более того, это единственная диаграмма, которая выживает в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$, или в пределе расстояния x между вершинами, стремящегося к нулю: $x \sim 1/Q$. Это утверждение является следствием асимптотической свободы квантовой хромодинамики. В однозначном соответствии с асимптотической



Рис. 1. Однопетлевой график, определяющий асимптотическое поведение двухточечной функции глюонных токов:

— — — — глюон; ~ — ток

свободой в глубоко евклидовой области находится простое, партоноподобное поведение сечения аннигиляции при высоких энергиях.

На больших расстояниях эта простота нарушается взаимодействием, которое в евклидовой области устанавливает некоторый масштаб масс. Соответственно в физической области гладкое при больших энергиях сечение искажается резонансами при малых энергиях. Гипотеза состоит в том, что асимптотическая свобода нарушается, в первую очередь, взаимодействием кварков и глюонов с флуктуирующими вакуумными полями. Образование резонансов является феноменологическим проявлением этого взаимодействия.

Взаимодействие различных токов с вакуумными полями не универсально. Эта не универсальность должна проявляться и в свойствах резонансов.

Чтобы пояснить это замечание, необходимо ввести какую-то, хотя бы и наивную, картину физического вакуума. Прежде всего в вакууме присутствуют флуктуации, описываемые обычной теорией возмущений, которые по существу подобны хорошо изученным флуктуациям фотонного поля в квантовой электродинамике. Для хромодинамики специфично существование флуктуаций нового типа, которые описываются классическими решениями уравнений Янга — Миллса. Амплитуда поля в этом случае составляет величину порядка

$$\langle G_{\mu\nu}^a \rangle_{\text{клас}} \sim 1/g_s, \quad (4)$$

где g_s — константа сильных взаимодействий. Хорошо известный пример подобных флуктуаций представляют инстантоны [8].

Одним из феноменологических проявлений полей (4) служит так называемый глюонный конденсат

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = (330 \text{ МэВ})^4, \quad (5)$$

существование которого надежно обосновано [3—4].

Глюонные вакуумные поля индуцируют, в свою очередь, вакуумные кварковые поля, существование которых проявляется

прежде всего в спонтанном нарушении киральной инвариантности, или в матричном элементе [9]

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = - (250 \text{ МэВ})^3. \quad (6)$$

Кварковый конденсат очевидным образом не может возникнуть в теории возмущений, поскольку $\langle \bar{q}q \rangle_{\text{т. в}} \sim m_q$, где m_q — масса кварка, и $\langle \bar{q}q \rangle$ исчезает в киральном пределе.

Грубой моделью кварковых полей могут служить нулевые фермионные моды в поле инстантона [10]. Они составляют величину порядка

$$\bar{q}q \sim (1/g_s)^0, \quad (7)$$

и эта оценка относится ко всем решениям уравнения Дирака во внешнем глюонном поле порядка (4).

После этих предварительных замечаний попытаемся классифицировать токи. Во-первых, существуют токи, которые смешиваются с вакуумом на классическом уровне. Например, коррелятор



Рис. 2. Непертурбативный вклад в глюонную корреляционную функцию, возникающий на классическом уровне

Импульс Q , принесенный входящим током, поглощается вакуумной флуктуацией (заштрихованный кружок) и затем возвращается выходящему току в другой вершине. Крестиками отмечены непертурбативные линии

Рис. 3. Корреляционная функция кварковых токов, смешивающихся с вакуумом.

Кварковые линии, помеченные крестиком, поглощаются непертурбативным вакуумным полем. Внешний импульс Q протекает через полевую флуктуацию.

$S(Q^2)$ содержит вклад диаграммы рис. 2, на которой все глюонные поля, входящие в определение тока (2), заменены классическими полями в вакууме. В этом случае взаимодействие с вакуумом наиболее сильное, поскольку $(G_{\mu\nu}^a)_{\text{класс}}$ обратно пропорционально константе связи. Подобная сильная связь с вакуумными полями (несколько условно мы назовем это явление смешиванием с вакуумом) имеет место для скалярных и псевдоскалярных глюонных токов.

Некоторые кварковые токи также могут аннигилировать в вакуум как целое. Очевидным кандидатом является скалярный ток $\bar{q}q$, поскольку соответствующий коррелятор содержит диаграмму, представленную на рис. 3, где крестиками отмечены нулевые фермионные моды. Однако кварковый конденсат слабее глюонного [см. (4) и (7)], и поэтому масштаб масс для кварковых токов, смешанных с вакуумом, меньше, чем для глюонных.

Наконец, есть много токов, которые взаимодействуют с вакуумными полями только в результате квантовых флуктуаций. Например, существование глюонного конденсата сказывается на двухточечной функции, ассоциированной с кварковым векторным током только из-за петлевых диаграмм, типа представленной на рис. 4. В результате множитель $1/g_s$ [см. (4)] сокращается (не говоря уже о численной малости, связанной с интегрированием по петле). В этом случае масштаб нарушения асимптотической свободы минимален.

Последний случай больше всего подходит для количественного анализа. Действительно, токи в этом случае возмущают вакуум относительно слабо и не удивительно, что свойства резонансов

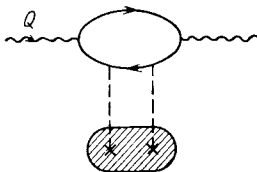


Рис. 4. Боковое непertурбативное взаимодействие, связанное с глюонным конденсатом.

Соответствующая поправка возникает на квантовом уровне, — — кварк; ~ — ток

можно выразить через грубые характеристики невозмущенного вакуума. Эта программа была фактически реализована [4]. Некоторое представление о возникающих при этом результатах дает соотношение

$$m_p^2 \approx 9 |\langle \bar{q}q \alpha_s^4 \rangle|^2/3 \quad (8)$$

(коэффициент в правой части — результат численного расчета, а не явного аналитического выражения).

В настоящей статье рассмотрен случай токов, сильно смешанных с вакуумом. Рождение кварков или глюонов такими токами сильно возмущает вакуум, и знание только простых средних характеристик вакуумных полей недостаточно.

Некоторое представление о волновой функции вакуума дают инстантоны. В частности, их вклад в $S(Q^2)$ можно найти в явном виде:

$$[S(Q^2)]_{\text{инст+антиинст}} = 18Q^4 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} d(\rho) [K_2(Q\rho)]^2, \quad (9)$$

где $d(\rho)$ — плотность инстантонов размера ρ ; $K_2(x)$ — функция Макдональда. Более того, если Q достаточно велико, то (9) представляет собой точный ответ для диаграммы рис. 2: можно доказать, что инстантоны доминируют в этом пределе над всеми другими непertурбативными флуктуациями.

Главный вопрос, однако, заключается в том, насколько далеко можно продвинуться с инстантонными вычислениями. Чтобы полу-

чить предсказания в резонансной области, надо уметь вычислять $S(Q^2)$ в области Q^2 порядка $1-2 \text{ ГэВ}^2$.

В попытке ответить на этот вопрос мы приходим к выводу, что инстантоны дают полуколичественное решение проблемы. Именно, инстантоны делают явным представление о смешивании токов с вакуумом, введенное выше на интуитивном уровне. Более того, они указывают, что масштаб масс нарушения асимптотической свободы действительно велик для диаграмм типа представленных на рис. 2. С другой стороны, вклад инстантонов недостаточно хорошо фиксирован в настоящее время численно и, что более важно, другие непертурбативные флуктуации, по-видимому, вступают в игру наряду с инстантонами, как только мы выходим из области асимптотической свободы.

Поэтому мы не пытаемся построить количественную схему, основанную на инстантонах, а полагаемся на качественные моменты. Исходя из некоторых общих свойств инстантонных решений, мы предлагаем классификацию токов, которая оказывается чрезвычайно полезной, так как позволяет понять закономерности адронной феноменологии.

Следует заметить, что диаграммы, аналогичные представленной на рис. 2, рассматривались в литературе ранее. Соответствующие вычисления были инициированы прежде всего работой [10], автор которой показал, что инстантоны посредством нулевых фермионных мод индуцируют эффективное $U(1)$ -неинвариантное взаимодействие, которое могло бы быть ответственным за массу η' . Попытки использовать это эффективное взаимодействие также для объяснения спонтанного нарушения киральной симметрии содержатся в работах [11, 12]. Первые попытки провести реалистические расчеты с помощью взаимодействия t' Хофта могут быть найдены в работах [4, 13]. Наиболее подробно прямые инстантоны (диаграммы типа рис. 3) изучены в работе Гешкенбейна и Иоффе [14]. Здесь подчеркнута, в частности, роль инстантонов в нарушении правила Цвайга в псевдоскалярном кварковом канале. Мы разделяем многие идеи названных статей. Но наш подход содержит и существенные новые моменты, как это будет ясно из дальнейшего.

Несколько слов о результатах настоящей работы. Исходя из классификации токов по характеру их взаимодействия с вакуумными полями, мы приходим к выводу о существовании некоторой иерархии масштабов масс M^2 нарушения асимптотической свободы в различных каналах. В частности,

$$M_{0^-}^2, \text{ глюоны} \gg M_{0^-}^2, \text{ кварки} \gg M_{1^-}^2, \text{ кварки} \quad (10)$$

(много больше может означать здесь лишь фактор 3; однако мы имеем дело с высокими степенями M^2 , так что различие в 3 раза действительно существенно).

Затем используем экспериментальные данные и некоторые теоретические утверждения для того, чтобы проверить (10) независимым образом. Эти предсказания оправдываются.

Одним из приложений служит физика η' -мезонов. Как известно, масса η' исчезает в пределе большого числа цветов N_c [15]:

$$m_{\eta'}^2 \sim 1/N_c.$$

Однако экспериментально $m_{\eta'}^2 \sim 1,8 m_\rho^2$. Это один из немногих известных примеров, где обычное предположение об универсальности адронных масштабов неверно явным образом. Мы нашли разрешение парадокса: η' получает массу от смешивания с псевдоскалярными глюонными состояниями, которые должны быть тяжелыми. Масса η' мала в естественном масштабе. Более того, следуя такой логике, можно получить новое массовое соотношение для η' :

$$m_{\eta'}^2 f_{\eta'}^2 \approx \frac{18}{b} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle, \quad (11)$$

которое оказывается успешным феноменологически в пределах неопределенности порядка фактора 2 (b — коэффициент в функции Гелл-Манна — Лоу, и константа $f_{\eta'}$ определена стандартным образом: $if_{\eta'} p_\mu = \langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu^5 u + \bar{d} \gamma_\mu^5 d + s \gamma_\mu^5 s | \eta' \rangle$).

Среди других результатов следует упомянуть о некоторых новых низкоэнергетических теоремах, позволяющих, скажем, оценить плотность энергии вакуума в мире без легких кварков.

Довольно подробно обсуждаются свойства глюония. Приведены соображения относительно массы наименьших глюонных состояний с различными квантовыми числами, полной ширины. Предсказания несут отчасти качественный характер; следует иметь в виду, что они относятся к разделу КХД, который изучен значительно хуже других.

Мы предлагаем интерпретацию, которая сводит воедино отдельные наблюдения и делает наглядными отличие в устройстве адронов, возникновение разных масштабов масс. Основные моменты можно сформулировать на языке модели мешков, хотя он и не является вполне адекватным, поскольку сама модель, на наш взгляд, не реализуется в квантовой хромодинамике. Если все же воспользоваться языком модели мешков, огрубляя ситуацию, то оказывается, что мешковая константа B зависит от кваркового (глюонного) содержания, квантовых чисел адрона и что значение B изменяется в пределах фактора 10—20. Наша модель решает старый вопрос: почему существует приближенная $SU(6)$ -симметрия? Находят объяснение и другие закономерности низкоэнергетической физики.

В заключительном разделе обсуждается соотношение между развиваемым подходом и так называемой многоцветной хромодинамикой [15, 16].

Следует заметить, что в настоящей статье авторы попытались изложить свое общее понимание теории, свести в одну картину результаты, полученные на протяжении последних лет. Некоторые из них уже докладывались на различных школах и конференциях [17].

1. ОТСТУПЛЕНИЕ В КВАНТОВУЮ МЕХАНИКУ

Чтобы ввести читателя в технику правил сумм, начнем с рассмотрения случая квантовой механики, которая, конечно, много проще КХД, но все же имитирует в известном смысле как асимптотическую свободу, так и невывлетание кварков. Подробно этот вопрос изложен в работе [18] (см. также [19—21]). (Необходимые сведения из квантовой механики можно найти в [22].)

Чтобы имитировать пленение кварков, предположим, что потенциал $V(r)$ растет при $r \rightarrow \infty$. Предположим также, что на малых расстояниях ($r \rightarrow 0$) $V(r)$ не имеет особенностей и, кроме того, будем считать $V(0) = 0$. Тогда частицы движутся как свободные на малых расстояниях.

Следующая сумма является аналогом поляризационного оператора КХД:

$$M(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Psi_k(0)|^2}{(E + E_k)^2}, \tag{12}$$

где E — внешний параметр; E_k — собственное значение, отвечающее k -му уровню, и $\Psi_k(r)$ — соответствующая собственная функция.

Отметим, что из общего представления для функции Грина

$$G(\mathbf{x}, -E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_k(\mathbf{x}) \Psi_k^*(0)}{E + E_k} \tag{13}$$

сразу следует, что

$$M(E) = \left[-\frac{d}{dE} G(\mathbf{x}, -E) \right]_{\mathbf{x}=0}. \tag{14}$$

Выбор большого значения E отвечает малым временам $\tau \sim 1/E$. Для любого несингулярного потенциала функция Грина совпадает на малых временах со свободной и, следовательно,

$$M(E) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \frac{m^{3/2}}{E^{1/2} 2^{3/2} \pi} \equiv M_0(E). \tag{15}$$

Если же уменьшать E , то становятся существенными поправки на взаимодействие. Отметим, что специфичны для данного потенциала именно поправки, поскольку величина $M_0(E)$ универсальна.

Итак, разложение при больших E сводится к борновскому ряду

$$\begin{aligned} & \frac{E^{1/2} 2^{3/2} \pi}{m^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Psi_k(0)|^2}{(E_k + E)^2} = \frac{M(E)}{M_0(E)} = \\ & = 1 - 4m \int_0^{\infty} dr r V(r) \exp(-2r \sqrt{2mE}) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Нет оснований сомневаться в справедливости этих правил сумм. Нас, однако, интересует сейчас не столько принципиальная сторона дела, сколько возможность вывода правил сумм, которые численно насыщаются низшими уровнями.

Чтобы выяснить, полезно ли соотношение (16) с этой точки зрения, рассмотрим классический пример из квантовой механики, а именно трехмерный гармонический осциллятор:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2; \quad |\Psi_k(0)|^2 = \frac{(2k+1)!!}{2^k k!} \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{3/2}; \\ E_k &= \left(\frac{3}{2} + 2k \right) \omega; \quad M(E) = M_0(E) \left(1 - \frac{3}{16} \omega^2/E^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы увеличить вклад низших состояний в $M(E)$, надо выбрать как можно меньшее значение E . С другой стороны, с уменьшением E растут поправки и следует позаботиться, чтобы разложение по $1/E$ еще работало. Разумный компромисс достигается при $E = \omega$.

Положив в (16) $E = \omega$, получаем численно

$$\begin{aligned} 0,255 (1 + 0,308 + 0,206 + 0,147 + 0,111 + 0,0807 + \dots) = \\ = 1 - 3/16 + \dots, \end{aligned}$$

причем в стоящей слева сумме по уровням мы удержали шесть первых уровней, а в правой части — первую борновскую поправку. Видно, что сходимость суммы по уровням плохая. В частности, основной уровень дает около $1/3$ полной суммы. Нам бы не удалось извлечь много информации о нем, если бы существовало только это правило сумм.

Попробуем улучшить ситуацию. Введем с этой целью чисто формально оператор \hat{B} :

$$\hat{B} = \lim_{\substack{E \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \\ E/n = 1/\tau \text{ фиксировано}}} \frac{1}{(n-1)!} (-E)^n \left(\frac{d}{dE} \right)^n. \quad (18)$$

Если подействовать этим оператором на $M(E)$, то спектральное представление (12) со степенным весом переходит в аналогичное с экспоненциальным весом:

$$M(\tau) \equiv \frac{E^2}{n^2} \hat{B} M(E) = \sum_{k=0}^{\infty} |\Psi_k(0)|^2 \exp(-E_k \tau). \quad (19)$$

Последняя формула очень похожа на спектральное представление для так называемой временной функции Грина

$$G(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\mathbf{x}_2) \Psi_k^*(\mathbf{x}_1) \times \\ \times \exp[-iE_k(t_2 - t_1)], \quad t_2 > t_1.$$

[Эту же величину часто называют оператором эволюции, или амплитудой перехода из точки (\mathbf{x}_1, t_1) в точку (\mathbf{x}_2, t_2) .] Действительно, если считать $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 0$, а время мнимым, $t_2 - t_1 = -i\tau$, то получим

$$M(\tau) = G(\mathbf{x} = 0, -i\tau | \mathbf{x} = 0, 0).$$

Ряд теорий возмущений для оператора эволюции хорошо известен. Его можно воспроизвести и из формулы (16), применяя оператор B . Так или иначе, получаем

$$M(\tau) = \left[\frac{m}{2\pi\tau} \right]^{3/2} \left\{ 1 - 4 \int_0^{\infty} dr V(r) mr \times \right. \\ \times \exp[-2mr^2/\tau] + \int \frac{d^3x d^3y}{4\pi^2} \times \\ \times \frac{m^2}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} V(|\mathbf{x}|) V(|\mathbf{y}|) \exp[-2m(|\mathbf{x}| + \\ \left. + |\mathbf{y}| + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2/\tau] + \dots \right\}. \quad (20)$$

В случае гармонического осциллятора, однако, известен и точный ответ:

$$M(\tau) = \left[\frac{m\omega}{2\pi\hbar\omega\tau} \right]^{3/2}. \quad (21)$$

Физический смысл оператора \hat{B} объясняется в [4]: он осуществляет борелевское преобразование, улучшает сходимость степенного ряда. Например,

$$\hat{B} \frac{1}{E^k} = \frac{1}{\Gamma(k)} \tau^k.$$

Таким образом, мы достигли определенного успеха как в теоретической части правил сумм (20), где удалось факториально подавить высокие степенные члены, так и в экспериментальной части (19), которая из-за экспоненциального веса стала менее чувствительна к вкладу высоковозбужденных уровней. Можно ожидать, что новые правила сумм дадут больше информации о низших уровнях.

Проверим наши ожидания. Разложим (21) по τ и удержим две первые поправки на взаимодействие:

$$M(\tau) = \left(\frac{m}{2\pi\tau}\right)^{3/2} \left\{1 - \frac{1}{4}(\omega\tau)^2 + \frac{19}{480}(\omega\tau)^4 - \dots\right\}. \quad (22)$$

Видно, что при $\tau = \omega^{-1}$ асимптотическая свобода еще хорошо работает, если же удержать первую поправку на взаимодействие, то мы обеспечим 5%-ую точность. С другой стороны, при $\tau = \omega^{-1}$ сумма по уровням практически насыщается двумя первыми уровнями

$$M(\tau = \omega^{-1}) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{3/2} \left[e^{-3/2} + \frac{3}{2}e^{-7/2} + \frac{15}{8}e^{-11/2} + \dots\right]$$

или $1 - 0,25 + 0,04 - \dots = 0,63 (1 + 0,20 + 0,03 + \dots)$.

Таким образом, удалось получить правила сумм, асимптотические по способу вывода и, казалось бы, подразумевающие суммирование по большому числу состояний, но реально насыщающиеся одним-двумя низшими уровнями.

Гладкая шивка асимптотической и резонансной областей характерна для любого крутого потенциала, что позволяет приближенно вычислять аннигиляционную ширину и положение низшего уровня из асимптотических правил сумм. Напомним, что под асимптотическими мы имеем в виду формулы, относящиеся к свободным частицам, в которых взаимодействие учтено по теории возмущений*.

Существует, однако, одна серьезная проблема. Представим себе, что потенциал включает два члена:

$$V(r) = V_0 [(r/r_4)^4 + (r/r_{11})^{11}], \quad (23)$$

где показатели степени выбраны таким образом, чтобы имитировать реальный случай (см. ниже).

Тогда при больших значениях параметра E степенная поправка, связанная со вторым членом в потенциале, пропорциональна E^{-11} , намного меньше поправки, связанной с первым членом,

* Для некоторых потенциалов, слишком сингулярных на бесконечности [например, сферическая яма $V(r) = 0$ при $r < R$ и $V(r) = \infty$ при $r > R$] формулы (16), (20) не имеют смысла, и построение теории возмущений по взаимодействию требует специального рассмотрения. Тем не менее утверждение, сформулированное в тексте, применимо и к таким потенциалам.

E^{-4} . Отбрасывая поправку пропорциональную E^{-11} , выводя правила сумм и насыщая их, мы реконструируем, с неплохой точностью, положение основного состояния в потенциале $V_0(r/r_4)^4$. Однако имеет это вычисление отношение к делу или нет, зависит от того, что больше, r_4 или r_{11} . В случае $r_{11} \ll r_4$ именно второй член в (23) ответствен, в первую очередь, за образование связанных состояний.

Какие уроки можно извлечь из этих простых примеров? Во-первых, можно написать правила сумм, формально асимптотические, а фактически с хорошей точностью насыщающиеся основным состоянием. Второй, более важный для дальнейшего урок состоит в том, что необходимо знать масштаб, связанный со всеми взаимодействиями, присутствующими в задаче, независимо от того, насколько быстро исчезают соответствующие поправки при $E \rightarrow \infty$. Тогда применение правил сумм имеет все шансы на успех.

2. ИСТОЧНИКИ НАРУШЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СВОБОДЫ

В КХД нельзя, конечно, ввести потенциал. Можно перечислить, однако, различные взаимодействия, ответственные за нарушение асимптотической свободы, что и сделано ниже.

Теория возмущений. Кварк-глюонная теория возмущений в КХД хорошо сформулирована. В принципе, можно вычислять высшие члены разложения по α_s в любом корреляторе токов. Единственный масштаб масс, который вносят поправки по α_s , сводится к Λ , фиксирующей эффективную константу связи

$$\alpha_s(M^2) = 2\pi/[b \ln(M/\Lambda)]. \quad (24)$$

Центральный вопрос — как велик этот параметр Λ . На протяжении нескольких лет мы защищаем точку зрения, согласно которой Λ невелик:

$$\Lambda = (100 \div 200) \text{ МэВ}. \quad (25)$$

(Схема перенормировки будет уточнена чуть ниже.) Наша вера в оценку (25) связана прежде всего с обработкой данных по e^+e^- -аннигиляции в адроны или, точнее, данных, относящихся к отношению [23]:

$$\begin{aligned} R^{I=1}(s) &= \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны с полным изоспином } 1)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + \dots \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Разложение по α_s для отношения R известно сейчас вплоть до членов порядка α_s^2 [24], мы же, однако, процитировали лишь первый нетривиальный член.

Правила сумм КХД, которые выписаны в следующем разделе, убедительно демонстрируют, что поправка по α_s не может быть большой при $M^2 \sim 0,4 \text{ ГэВ}^2$. Более подробный численный анализ [23] приводит к оценке (25). Отметим, что авторы [23] не включили в обработку более высокие члены по α_s . Отсутствие подобных членов в теоретическом выражении для $R^{I=1}$ фиксирует перенормировочную процедуру и тем самым определение Λ . Сейчас введенную таким образом величину называют $\Lambda_{e^+e^-}$. Следует отметить, однако, что численно $\Lambda_{e^+e^-}$ близка к более привычной $\Lambda_{\overline{MS}}^*$:

$$\Lambda_{e^+e^-} \approx 1,2 \Lambda_{\overline{MS}}$$

Одно время данные по глубокой неупругости противоречили оценке (25). Сейчас возникло существенное расхождение между результатами разных экспериментальных групп: Λ (глубоконеупр.) имеет явную тенденцию уменьшаться со временем. Последние измерения указывают, что $\Lambda \lesssim 200 \text{ МэВ}$. Более того, мы не видим никаких упущений в анализе [23] e^+e^- -аннигиляции и, следовательно, нет причин подвергать сомнению оценку (25).

Таким образом, пертурбативные поправки взрываются при очень малых массах: $M^2 \sim 0,01 \text{ ГэВ}^2$. Более того, прежде чем они станут существенными, в игру вступают непертурбативные члены.

Рассеяние на мягких вакуумных полях. Как упоминалось выше, непертурбативные флуктуации плотно заселяют физиче-

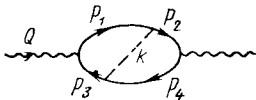


Рис. 5. Первая поправка по α_s в двухточечной функции кварковых токов

ский вакуум. Рассеяние на таких флуктуациях подробно обсуждалось в работах [4], напомним лишь основные моменты.

Рассмотрим для определенности кварковый векторный ток с $I = 1$:

$$j_\mu^{I=1} = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu u - \bar{d} \gamma_\mu d)$$

и двухточечную функцию $\Pi^{I=1}$:

$$(q_\mu q_\nu - q^2 q_{\mu\nu}) \prod^{I=1} = i \int d^4x \exp(iqx) \times \\ \times \langle 0 | T \{ j_\mu^{I=1}(x), j_\nu^{I=1}(0) \} | 0 \rangle.$$

Старшая поправка по α_s связана с диаграммой, приведенной на рис. 5 [см. формулу (26)]. Обратим теперь особое внимание на

* Для полноты процитируем также $\Lambda_{\overline{MS}} \approx 2,66 \Lambda_{MS} \approx 0,28 \Lambda_{\text{МOM}}$.

то, каким образом большой импульс Q передается от одной вершины к другой. Наиболее вероятен случай, когда все кварковые (глюонные) линии несут более или менее равный импульс:

$$p_1 \sim p_2 \sim p_3 \sim p_4 \sim k \sim Q$$

(обозначения см. на рис. 5). Этот вклад и учитывается обычной теорией возмущений. Существует, однако, вероятность того, что глюонная линия мягкая:

$$p_1 \sim p_2 \sim p_3 \sim p_4 \sim Q, \quad k \sim \mu,$$

где μ — характерная адронная масса. Вычисление соответствующего вклада не представляется возможным, поскольку пропагаторы слабовиртуальных линий неизвестны. Все что можно сделать — это параметризовать его. Для этого препарируем диаграмму, как это указано на рис. 6 (также см. рис. 4). Мы стянули

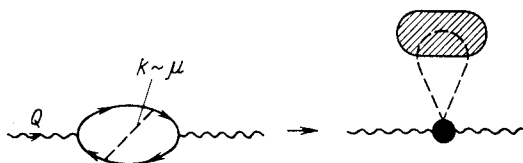


Рис. 6. Мягкие глюоны на больших расстояниях. Они зондируют вакуумные поля далеко от той области, где были испущены.

Последняя имеет размеры порядка $1/Q$ и содержит стянутые кварковые линии

в точку все линии, несущие большой импульс, т. е. пренебрегли расстояниями порядка $1/Q$. Иными словами, мы как бы сконструировали точечный кварковый приемник длинноволновых глюонных полей в вакууме. Устройство приемника известно, а сигнал выражается через средний квадрат напряженности глюонного поля $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$.

Интуитивная картина приобретает строго определенный смысл в рамках общего операторного разложения для произведения двух токов [25]. Жесткие кварковые линии поглощаются при этом в коэффициент перед оператором G^2 . Аналогичным образом, когда глюонная линия жесткая, а некоторые из кварковых линий мягкие, можно прийти к оператору $(\bar{q}q)^2$.

Опуская все промежуточные шаги, приведем сразу правило сумм для борелевского образа от $\Pi^{I=1}(Q^2)$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3M^2} \int ds \exp(-s/M^2) R^{I=1}(s) = \\ & = 1 + \frac{\alpha_s(M^2)}{\pi} + \frac{\pi^2}{3M^4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle - \frac{448}{81} \frac{\pi^3}{M^6} \times \\ & \quad \times \langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q}q \rangle^2 + O(M^{-8}), \end{aligned} \tag{27}$$

или, численно [см. (5), (6), (25)],

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3M^2} \int ds \exp(-s/M^2) R^{I=1}(s) = \\ & = 1 + \frac{b}{2 \ln(M/0,1)} + \left(\frac{0,44}{M}\right)^4 - \left(\frac{0,56}{M}\right)^6 + O(M^{-8}), \end{aligned} \quad (28)$$

где все размерные величины даны в гигаэлектронвольтах. Таким образом мы узнаем массовый масштаб, который возникает из-за существования глюонного и кваркового конденсатов (не стоит и говорить, что в окончательном варианте теории все масштабы сводятся к Λ , но с разными численными коэффициентами). Определим теперь более точно, что понимается под масштабом нарушения асимптотической свободы. Соответствующий массовый параметр обозначим через $M_{\text{кр}}^2$ или, если обсуждается конкретный канал, будем просто указывать квантовые числа в качестве нижнего индекса, скажем, M_{1-} , кварки. Как правило, наши предсказания сформулированы в виде ряда [см., например, (27)], который начинается с единичного члена, отвечающего асимптотической свободе, плюс поправки, приносящие массовый масштаб. Как уже упоминалось, пертурбативные поправки менее важны, чем непертурбативные, в том смысле, что в членах $O(\alpha_s)$ нет ничего интересного в области, где непертурбативные члены уже взрываются. Когда последние становятся заметными (но все же меньше единицы, так как в противном случае теряется контроль над вычислениями), мы, очевидно, приближаемся к границе области асимптотической свободы. Выберем M^2 , чтобы главная степенная поправка достигала 10%, и назовем это значение $M_{\text{кр}}^2$. Подобный выбор не является совершенно произвольным. Действительно, из формулы (28) видим, что в кварковом векторном канале, например, $M_{\text{кр}}^2 \approx 0,6 \text{ ГэВ}^2$. Данное число совпадает с массой наименьшего резонанса в этом канале. [Аналогично в правиле сумм (22) для гармонического осциллятора степенная поправка достигает 10% при $(1/\tau)_{\text{кр}} \approx 1,58\omega$, что очень близко к точному ответу для энергии основного состояния $E_0 = 1,5\omega$.] Было бы упрощением всегда отождествлять $M_{\text{кр}}^2$ с массой низшего резонанса. Наглядный пример — аксиально-векторный канал, где масса низшего резонанса очень мала: $m_\pi^2 \approx 0$. Речь идет скорее о характерном масштабе резонансных структур в спектральной плотности.

Напомним еще раз, что масштаб масс, связанный с членами $O(\alpha_s)$, много меньше: $\Lambda^2 \ll M_{\text{кр}}^2$.

Усиленные степенные поправки. Поправки на рассеяние на мягких вакуумных полях существуют для всех корреляторов. Это не означает, однако, что массовые масштабы, связанные с ними, везде одинаковы.

Рассмотрим опять коррелятор $S(Q^2)$ [см. (3)] или, точнее говоря, его борелевский образ *. Главный степенной член описывается тогда диаграммой, представленной на рис. 7, борновского типа. Асимптотический вклад, выживающий в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$, по-прежнему определяется однопетлевой диаграммой рис. 1. Интегрирование по петле неизбежно влечет численное подавление, характеризваемое множителем типа $(16\pi^2)^{-1}$. Иначе можно сказать,

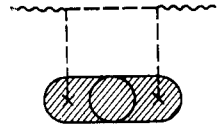


Рис. 7. Поправка к глюонной двухточечной функции, связанная с глюонным конденсатом

что степенная поправка в $S(Q^2)$ усилена в $16\pi^2$ раз по сравнению со случаем ρ -мезона. Поправка пропорциональна матричному элементу $\langle G^2 \rangle$, который имеет размерность 4, поэтому разница в масштабах сводится, грубо говоря, к

$$M_{0+}^2, \text{ глюоны} \sim 4\pi M_{1-}^2, \text{ кварки}. \tag{29}$$

Все множители можно, разумеется, собрать явно и получить

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi^3}{9M^4} \int ds \operatorname{Im} S(s) s^{-1} \exp(-s/M^2) = \\ & = \alpha_s^2(M^2) \left[1 - \frac{2\pi^3}{\alpha_s(M^2)} \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{M^4} + \dots \right] \approx \\ & \approx \alpha_s^2(M^2) \left[1 - 0,1 \left(\frac{2,47}{M} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned} \tag{30}$$

(во избежание недоразумений подчеркнем, что мы учли здесь только поправку на диаграмму рис. 7. Более полный ответ дан ниже). Видно, что поправка достигает 10% при

$$M_{\text{кр}}^2 \approx 6 \text{ ГэВ}^2, \tag{31}$$

что очень близко к наивной оценке (29).

Итак, видим, что масштаб масс заметно меняется при замене кварков на глюоны. Следует, однако, еще раз предостеречь против того, чтобы это утверждение воспринималось как универсальное. Оценка (31) не имеет места для произвольного глюонного канала — и в глюонном мире масштаб зависит от квантовых чисел. Рассмотрим, например, тензорный глюонный ток

$$j_{\mu\nu} = -G_{\mu\alpha}^a G_{\nu\alpha}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a.$$

* Прямое обобщение (18) на релятивистский случай сводится к

$$\hat{B} = \lim_{\substack{Q^2 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \\ Q^2/n \equiv M^2 \text{ фиксировано}}} \frac{1}{(n-1)!} (-Q^2)^n (d/dQ^2)^n.$$

Тогда можно показать [256], что диаграмма, представленная на рис. 7, обращается в нуль, и первая степенная поправка связана с многократным рассеянием (рис. 8). При этом возникает,

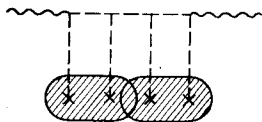


Рис. 8. Главный степенной член в случае тензорных глюонных токов

очевидно, матричный элемент размерности 8. Усиление же, связанное с борновским характером диаграммы, не изменилось. В результате, следуя той же наивной логике, получаем

$$M_{2+, \text{глюоны}}^2 \sim \sqrt{4\pi} M_{1-, \text{кварки}}^2 \sim 2 \text{ ГэВ}^2. \quad (32)$$

Эта догадка также подтверждается фактическим расчетом (см. разд. 12).

Рассеяние на жестких вакуумных полях. Мы не рассмотрели еще одну возможность — весь импульс Q , несомый током, передается вакууму, который затем возвращает его к другой вершине. Поскольку Q велико, вероятность такого процесса зависит от вероятности найти сильные поля в вакууме (напомним, что речь все время идет о непертурбативных вкладах, так как учет теории возмущений не составляет труда).

Справедливость асимптотической свободы подразумевает, что жесткое поле в вакууме — редкое событие, и при больших Q мы имеем дело с малым эффектом. Пример квантовой механики, обсуждавшийся в разд. 1, учит нас не пренебрегать подобными вкладами, не выяснив предварительно масштаб масс, с ними связанный. Более того, общие аргументы, апеллирующие к классической природе рассматриваемых вкладов, наводят на мысль, что соответствующий масштаб масс может быть большим.

3. ПРЯМЫЕ ИНСТАНТОНЫ

Обсудим подробно конкретный пример жестких вакуумных полей, а именно инстантоны. Мы называем их прямыми, чтобы подчеркнуть, что они воспринимают весь импульс Q , принесенный током, в отличие от боковых инстантонов, которые генерируют, наряду с другими флуктуациями, поправки $\sim \langle G^2 \rangle$. Боковые инстантоны отвечают, скажем, графику, представленному на рис. 7, в котором большой импульс течет сбоку от непертурбативной флуктуации, а последняя воспринимает лишь ограниченный импульс μ . Более точное определение прямых вкладов следует фактически из описанной ниже процедуры их вычисления.

Как и в любом инстантонном упражнении, сначала необходимо перейти к евклидову пространству — времени:

$$x_0 \rightarrow -ix_4, \quad g \rightarrow -g, \quad A_0 B_0 - \mathbf{AB} \rightarrow -\sum_i A_i B_i.$$

Чтобы найти прямой инстантонный вклад в $S(Q^2)$, просто заменяем глюонное поле в формулах (2) и (3) на инстантонное решение:

$$A_\mu^a = -\frac{2}{g} \eta_{a\mu\nu} \frac{(x-x_0)_\nu}{(x-x_0)^2 [(x-x_0)^2 + \rho^2]};$$

$$(G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a)_{\text{инст}} = \frac{192}{g^2} \frac{\rho^4}{[(x-x_0)^2 + \rho^2]^4}, \quad (33)$$

где x_0 и ρ — положение и размер инстантона. Соответственно для антиинстантона $\eta_{a\mu\nu} \rightarrow \eta_{a\mu\nu}$, причем определение η -символов стандартное [10].

Выполняя затем интегрирование по x_0 , приходим к (9). Ответ естественно определяется плотностью инстантонов, и уместно прежде всего подытожить наше знание этой величины.

Исходным является вычисление t' Хофта [10], который в случае чистой глюодинамики получил

$$d_0(\rho) = C (2\pi/\alpha_s)^6 \exp(-2\pi/\alpha_s(\rho)) \times \\ \times [1 + O(\alpha_s)] \text{ для } SU(3)_c, \quad (34)$$

где константа C зависит от перенормировочной процедуры, а значение нижнего индекса в d_0 будет вскоре объяснено. Эта зависимость зачастую интерпретируется как неопределенность, присущая $d(\rho)$. Мы хотели бы подчеркнуть, что после того, как фиксирована перенормировочная процедура, никакой дополнительной неопределенности, кроме экспериментальной погрешности в Λ , не существует. Все теоретические факторы однозначны.

Оригинальное вычисление t' Хофта было проведено на однопетлевом уровне. Точность этого приближения недостаточна для того, чтобы установить различие между $(2\pi/\alpha_s)_{\text{затр}}^6$ и $(2\pi/\alpha_s(\rho))^6$ в предэкспоненте. Для того чтобы найти зависимость предэкспоненциального фактора от ρ , требуется двухпетлевое вычисление. Фактически все, что нужно от такого вычисления, — это выражение для эффективной константы связи. Действительно, аргументы, основывающиеся на перенормируемости теории и методе эффективных лагранжианов, говорят, что $d(\rho)$ зависит только от эффективной константы $\alpha_s(\rho)$. Вполне законно удерживать логарифмическую зависимость $\alpha_s(\rho)$ в предэкспоненте при условии, что одновременно в экспоненте учитываются двухпетлевые члены. Стандартная параметризация для $\alpha_s(\rho)$ имеет вид:

$$\frac{2\pi}{\alpha_s(\rho)} = \frac{\tilde{b}}{2} \ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2} + \frac{\tilde{b}}{2b} \ln \ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2} + O\left[\left(\ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2}\right)^{-1}\right], \quad (35)$$

где в чистой глюодинамике с калибровочной группой $SU(3)$ [26]

$$b = 11, \quad b = 102.$$

Подстановка этого выражения дает

$$d_0(\rho) = C \left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2} \right)^6 (\rho \Lambda)^{11} \times \\ \times \left(\ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2} \right)^{-51/11} \left[1 + O \left(\frac{1}{\ln 1/\rho^2 \Lambda^2} \right) \right]. \quad (36)$$

Здесь уместно сделать три поясняющих замечания. Во-первых, обе константы, C и Λ , однозначно зависят от принятой схемы ренормировок. Скажем, в схеме \overline{MS}

$$C_{\overline{MS}} \approx 2,3 \cdot 10^{-3}, \quad (37)$$

а что касается $\Lambda_{\overline{MS}}$, то, по-видимому, наилучшая на сегодняшний день оценка этой величины приведена в формуле (25). Во-вторых, формула (36) отражает тот факт, что предэкспоненциальный фактор $(2\pi/\alpha_s(\rho))^6$ в нашем приближении должен рассматриваться на однопетлевом уровне. В-третьих, поправки $O(1/\ln \rho^2 \Lambda^2)$ в (36) могут быть довольно большими. Полное двухпетлевое вычисление инстантонной плотности фиксировало бы их.

Очевидно, что для всех практических целей можно пренебречь логарифмической зависимостью в (36) и написать

$$d_0(\rho) = (\Lambda_{\text{эф}} \rho)^{11}, \\ \Lambda_{\text{эф}} = C^{1/11} (b/2)^{6/11} \Lambda = (150 - 300) \text{ МэВ}. \quad (38)$$

Поскольку $d_0(\rho)$ пропорциональна Λ^{11} , то, конечно, неопределенность порядка фактора 2 в величине Λ сильно сказывается на вычислении $d_0(\rho)$. Нас, однако, всегда интересует в конечном счете величина размерности квадрата массы, $M_{\text{кр}}^2$, и здесь неопределенность не столь велика.

Обратимся теперь к нижнему индексу 0 в формулах (34), (36), (38). Он указывает, что истинная плотность инстантонов определяется другими, более важными эффектами. Дело в том, что инстантоны фактически развиваются не в математическом вакууме теории возмущений, как подразумевается в (34), а в физическом вакууме, плотно заселенном другими флуктуациями. Взаимодействие данного инстантона с вакуумными полями изменяет эффективное значение инстантонного действия. Если размер инстантона относительно мал, то его собственное поле велико: $G_{\mu\nu}^a \sim 1/\rho^2$, и сторонние вакуумные поля могут рассматриваться по теории возмущений. В результате глюонный конденсат модифицирует плотность $d_0(\rho)$ следующим образом [27a]:

$$d_{\text{эф}}(\rho) = d_0(\rho) \exp \left\{ \frac{\pi^4 \rho^4}{8\alpha_s^2(\rho)} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\rangle \right\}. \quad (39)$$

Поправка на $\langle G^2 \rangle$ собирается в экспоненту при некотором дополнительном, хотя и весьма правдоподобном предположении [27а]. Что же касается первого члена разложения по $\rho^4 \langle G^2 \rangle$, то он модельно независим и ограничивает область применимости инстантонного газа [12] размерами

$$\rho_{\text{разреженный газ}} \lesssim (1,1 \text{ ГэВ})^{-1}, \quad (40)$$

где для численной оценки мы воспользовались формулой (5). Если же поверить в модифицированное выражение, то плотность инстантонов известна вплоть до

$$\rho_{\text{модифицированный инстантон}} \lesssim (0,5 \text{ ГэВ})^{-1}. \quad (41)$$

Для больших размеров нет смысла говорить об инстантонах — они изменены взаимодействием до неузнаваемости.

Следует напомнить, что, если включены (почти) безмассовые кварки, плотность инстантонов в математическом вакууме исчезает пропорционально произведению масс кварков. В физическом вакууме механическая масса заменяется динамической:

$$d_{\text{эф}}(\rho) \sim \prod_q (m_q \rho - (2\pi^2/3) \langle \bar{q}q \rangle \rho^3). \quad (42)$$

Подавление плотности инстантонов, обусловленное безмассовыми кварками, исчезает в той же самой точке [27б] $\rho \approx (0,5 \text{ ГэВ})^{-1}$.

После этих предварительных замечаний можно вернуться к интегрированию по ρ в соотношении (9). Рассмотрим сначала чистую глюодинамику и затравочную плотность d_0 . Тогда мы имеем дело с интегралами типа

$$\int \rho^9 \exp(-2Q\rho) d\rho, \quad (43)$$

где функция Макдональда K_2 заменена на ее асимптотику

$$K_2(z) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp - z.$$

Интеграл в этом случае сразу вычисляется. Обратим внимание на то, что характерные, или перевальные значения $\rho_{\text{хар}} \sim 5/Q$. С учетом (40) видим, что инстантонный газ можно использовать только при очень больших Q^2 :

$$(Q^2)_{\text{разреженный газ}} \gtrsim 30 \text{ ГэВ}^2. \quad (44)$$

При таких Q^2 сам по себе инстантонный вклад очень мал. Переход к борелевскому образу несколько улучшает ситуацию. Действительно, легко показать, что

$$\hat{B} \frac{1}{Q} \exp(-2Q\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{M} \exp(-M^2\rho^2)$$

и соответственно

$$\hat{B}Q^h \exp(-2Q\rho) = (d/d\rho)^{h+1} (-1/2)^{h+1} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{M} \exp(-M^2\rho^2).$$

Вместо интегралов (43) с экспоненциальным весом мы имеем дело теперь с гауссовыми интегралами, например:

$$\int \rho^9 \exp(-M^2\rho^2) d\rho.$$

Вспоминая ограничение (40), делаем вывод, что можно опуститься до

$$M^2 \gtrsim 6 \text{ ГэВ}^2,$$

что близко к границе интересующей области [см. (31)]. Таким образом, инстантонный вклад заслуживает более тщательного рассмотрения. Оценим масштаб масс, связанный с прямыми инстантонами. Если воспользоваться приближенным выражением (38) для инстантонной плотности, интеграл (9) берется явно [28]:

$$S_{\text{инст} + \text{антиинст}}(Q) = \pi^2 \cdot Q^4 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^{-10} d_0 \quad (\rho = 1/Q)$$

или, после преобразования Бореля,

$$S_{\text{инст} + \text{антиинст}}(M) = \pi^{9/2} \cdot M^4 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^{-16} d_0 \quad (\rho = 1/M).$$

Учитывая, что асимптотически (см. рис. 1)

$$S_0(M) = \frac{9\alpha_s^2(M^2)}{8\pi^4} M^4,$$

приходим к

$$\frac{S_{\text{инст} + \text{антиинст}}(M)}{S_0(M)} \approx \left(\frac{4,5\Lambda_{\text{эф}}}{M} \right)^{11} \approx \left(\frac{0,7-1,4}{M} \right)^{11}, \quad (45)$$

где мы подставили $\alpha_s = 0,2$. Даже эти числа сигнализируют о довольно большом масштабе нарушения асимптотической свободы [ср. с (28)]. Это, однако, вовсе не конец истории. Истинная критическая масса еще выше, так как глюонный конденсат увеличивает плотность инстантонов и усиливает рост $d(\rho)$ при больших ρ . Для грубой оценки эффекта можно вычислить

$$S_{\text{инст} + \text{антиинст}}(M) \approx 9 \sqrt{\pi} M^3 \int \frac{d\rho}{\rho^2} d(\rho) \times \\ \times \left[M^4 \rho^4 - 3M^2 \rho^2 + \frac{3}{4} \right] \exp(-M^2 \rho^2) \quad (46)$$

с заменой $d(\rho)$ на $d_{\text{эф}}(\rho)$, хотя подобная процедура и не является вполне последовательной (см. ниже). Оказывается, что в результате этой подстановки область, насыщающая интеграл (46), сдвигается с $\rho_{\text{хар}}^2 = \text{const}/M^2$ к границе $\rho^2 \sim (0,5 \text{ ГэВ})^{-2}$, если M^2

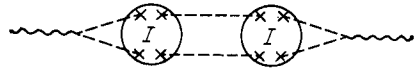
не слишком велико. Было бы бессмысленно уточнять здесь числа, поскольку они очень чувствительны к выбору Λ и к способу обрезания интеграла на верхнем пределе $\rho = 0,5 \text{ ГэВ}^{-1}$. Что вне всякого сомнения, так это факт значительного усиления вклада прямых инстантонов по сравнению с (45). Чтобы получить представление о порядке величины эффекта, заметим, что при $\rho = 0,5 \text{ ГэВ}^{-1}$

$$d_{\text{эф}}(\rho)/d_0(\rho) \sim 10^3 \div 10^8$$

(чем меньше Λ , тем больше отношение $d_{\text{эф}}/d_0$). Складывается впечатление, что критическая масса, отвечающая точке $S_{\text{инст}}(M) \approx \approx 0,1 S_0(M)$, вполне может быть в два-три раза больше, чем фигурирующая в (45), и асимптотическая свобода нарушается в этом

Рис. 9. Пример многоинстантонного вклада в $S(Q^2)$.

Цепочка прямых инстантонов



канале при $M^2 \gtrsim 6 \text{ ГэВ}^2$. Мы сможем проверить эту догадку с помощью определенной низкоэнергетической теоремы, которая обсуждается ниже.

Подставляя в (9) $d_{\text{эф}}(\rho)$ вместо $d_0(\rho)$, мы фактически перешли к многоинстантонным конфигурациям. Вполне понятно, что эффективная плотность далеко не исчерпывает все такие конфигурации. Например, существование диаграмм 9, 10 не отражено вовсе.

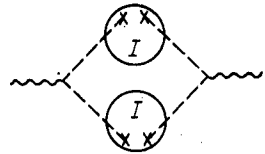


Рис. 10. Прямая флуктуация, содержащая два инстантона параллельно

Учет их тем не менее не меняет наших выводов качественно. Действительно, роль многократных перерасеяний (рис. 9) сводится к сглаживанию острой зависимости $S_{\text{инст}}$ от M ниже критической точки, где прямой инстантонный вклад становится доминирующим. Крутое поведение $S_{\text{инст}}$ ничему не противоречит до тех пор, пока $S_{\text{инст}}(M) \ll S_0(M)$, но становится физически бессмысленным, когда $S_{\text{инст}}(M) > S_0(M)$. Перерасеяние на инстантонах является механизмом, ответственным за смену режимов; оно предположительно не сдвигает критическую массу. В явном виде это явление прослежено в работе [12], в которой рассматривались похожие вклады в кварковые двухточечные функции.

Что касается графиков, представленных на рис. 10, с первого взгляда они представляются чем-то новым, кажется, что входящий (и выходящий) импульс Q делится, грубо говоря, пополам

между обоими инстантонами. Это, однако, не так. Действительно, после интегрирования по цветовой ориентации результат пропорционален

$$\int d^4x \exp(-iqx) G_{\mu\nu}^{a(1)}(x) G_{\mu\nu}^{a(2)}(x) \times \\ \times G_{\alpha\beta}^{b(1)}(0) G_{\alpha\beta}^{b(2)}(0) d^4x_1 d^4x_2, \quad (47)$$

где $G_{\mu\nu}^{a(i)}(x)$ — тензор напряженности поля, соответствующий i -му инстантону ($i = 1, 2$):

$$G_{\mu\nu}^{a(i)}(x) = \frac{8}{g} \left[\frac{(x-x_i)_\mu (x-x_i)_\nu - (x-x_i)_\nu (x-x_i)_\mu}{(x-x_i)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \right] \bar{\eta}_{a\nu\varphi} \frac{\rho_i^2}{[(x-x_i)^2 + \rho_i^2]^2} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

и интегрирование по инстантонным размерам ρ_1, ρ_2 подразумевается в самом конце. Если воспользоваться тождеством

$$G_{\mu\nu}^{a(2)}(x) = \int G_{\mu\nu}^{a(2)}(y) \exp[-i\tilde{q}(y-x)] \frac{d^4\tilde{q}}{(2\pi)^4} d^4y,$$

все интегралы в (47) легко берутся явно, за исключением интеграла по $d\tilde{q}$. Последний оказывается инфракрасно-нестабильным, существенный вклад в него дает область $\tilde{q} \sim 1/\rho_2 \sim 0,5$ ГэВ. Другими словами, один из инстантонов на графике (см. рис. 10) большой и превращается эффективно в боковую флуктуацию. Мы уже имели дело с подобными конфигурациями, когда заменяли $d_0(\rho) \rightarrow d_{\text{эф}}(\rho)$ в (9). Теперь видно, что диаграмма на рис. 10 приводит к членам, очень похожим на те, которые рассматривались выше, хотя и не сводится к ним в буквальном смысле. В частности, вместо K_2 мы получили бы в (47) другую функцию Макдональда и, что более важно, эффекты, обусловленные глюонным конденсатом, в инстантонной плотности усилены в $1/\alpha_s$ раз по сравнению со вкладом диаграммы рис. 10. Поэтому мы ожидаем, что последняя менее важна.

Подводя итог, можно сказать, что прямые инстантоны действительно указывают на существование нового и большого масштаба для тех токов, которые смешиваются с вакуумом на классическом уровне. Количественную схему развить трудно, поэтому в дальнейшем будем пользоваться только квантовыми числами инстантонов, чтобы понять, в каких случаях вообще возможны диаграммы типа представленной на рис. 2. Соответствующая классификация токов разработана ниже.

4. ИЕРАРХИЯ МАСС

Выше были приведены аргументы в пользу того, что характер взаимодействия с вакуумными полями существенно зависит от квантовых чисел. Попробуем превратить эти соображения в общую классификацию токов и получить хотя бы грубые оценки критических масс в различных каналах.

В основном мы имеем дело со степенными поправками. Каждая из них характеризуется степенью $1/g$, числом петель и степенью M^{-2} .

Будем учитывать только члены, дающие начало новым сериям, так как итерации старых членов не меняют ситуации. Гарантией этого является «правило 10-ти%», согласно которому не разрешается рассматривать такие M^2 , при которых степенные члены доминируют над асимптотическим.

Оценка степенных членов, которую мы хотим здесь предложить, игнорирует зависимость от M^2 , которая отражает r -зависимость взаимодействия типа $(r/r_0)^h$, где r_0 — характерный размер. Поскольку адроны все равно имеют размеры порядка r_0 , то поведение при $r \rightarrow 0$ не кажется существенным (соответствующее обсуждение для квантовой механики можно найти в разд. 1). В КХД мы тоже уже сталкивались с ситуациями, когда зависимость от r при малых r не имела значения: кулоновские поправки $O(\alpha_s)$ доминируют при больших M^2 над любыми степенными членами, но сильно уступают по величине при $M^2 \sim m_0^2$ эффектам кваркового и глюонного конденсата в ρ -мезонных правилах сумм. Прямые константы начинают как ничтожный вклад при больших M^2 , но все же приносят наибольший масштаб масс.

Таким образом, мы остаемся с параметрами $1/g$ и l , где l — малый численный параметр, присущий каждой петле, возможно, порядка $1/16\pi^2$ или $1/4\pi^2$. Если диаграмма содержит k петель, то согласно нашему счету приписываем ей l^k . Чтобы найти относительную значимость обоих параметров, обратимся к хорошо изученным правилам сумм для ρ -мезона. Легко понять, что в этом канале отношение

$$\frac{\text{Глюонный конденсат}}{\text{Асимптотически свободный член}} \sim 1,$$

$$\frac{\text{Кварковый конденсат}}{\text{Асимптотически свободный член}} \sim g^2 l^{-1}$$

[рис. 11 и соотношения (4), (7)]. Кроме того, оба вклада, грубо говоря, важны в одинаковой мере — они достигают 10% при $M^2 \sim 0,6 \text{ ГэВ}^2$. Следовательно,

$$l \sim g^2. \tag{48}$$

Следующая задача — понять, как скоррелированы масштабы масс с появлением лишнего множителя l или g^2 . Тут нам могут помочь результаты, относящиеся к эффектам, пропорциональным

$\langle G^2 \rangle$ в скалярном глюонном канале (см. разд. 2). Сравнивая диаграммы, изображенные на рис. 1 и 7, замечаем, что

глюоны $J^P = 0^+$;

$$\frac{\text{Глюонный конденсат}}{\text{Асимптотически свободный член}} \sim g^2 l^{-1}.$$

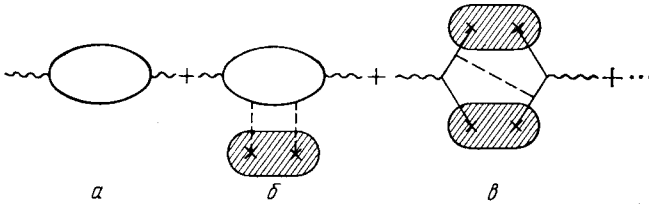


Рис. 11. Различные члены, возникающие в ρ -мезонном правиле сумм: *a* — член, определяемый асимптотической свободой; *b* — поправка на глюонный; *v* — на кварковый конденсат

Соответствующий масштаб масс [см. (31)] примерно в десять раз превышает M_{1-}^2 , кварки. Отсюда возникает правило: каждый множитель g^2 или l^{-1} утраивает $M_{кр}^2$.

Теперь предскажем масштаб масс для еще неразобранных случаев. Наиболее интересные примеры — псевдоскалярный кварковый ток с пионными квантовыми числами

$$j^\pi = \frac{i}{2} (\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d) \tag{49}$$

и скалярный (псевдоскалярный) глюонный ток. В обоих случаях возникают эффекты, связанные с прямыми инстантонами (см. рис. 3 и 2 соответственно). Для двухточечной функции, индуцированной j^π ,

$$\frac{\text{Прямые инстантоны}}{\text{Асимптотически свободный член}} \sim g^0 l^{-1},$$

поэтому ожидаемое значение $M_{крит}^2$ составляет

$$M_{0-, \text{кварки}}^2 \sim 0,6 \text{ ГэВ}^2 \times 3 \sim 2 \text{ ГэВ}^2. \tag{50}$$

В глюонном случае ($j_s \sim G^2$, $j_{ps} \sim G\tilde{G}$)

$$\frac{\text{Прямые инстантоны}}{\text{Асимптотически свободный член}} \sim g^{-4} l^{-1},$$

и, следовательно,

$$M_{0^+}^2 \text{ или } 0^-, \text{ глюоны} \sim 0,6 \text{ ГэВ}^2 \times 3^3 \sim 15 \text{ ГэВ}^2. \quad (51)$$

Итак, предсказывается некоторая иерархия масштабов масс: $0,6 \text{ ГэВ}^2$, 2 ГэВ^2 , 6 ГэВ^2 , 15 ГэВ^2 . Позже мы обратимся к феноменологическому анализу правильности этих ожиданий.

До сих пор мы не касались более высоких порядков теории возмущений. Предложенная выше классификация ставит в соответствие каждой пертурбативной петле и l , и g^2 , что неудобно. Отметим, что, существенно не изменяя предсказаний, удастся ввести однопараметрическую классификацию. Если обозначить соответствующий параметр L , рецепт можно сформулировать следующим образом:

калибровочная константа $g \sim L^{1/2}$;

глюонная линия, уходящая в вакуум, $(G_{\mu\nu})_{\text{вак}} \sim L^{-1/2}$;

кварковая линия, уходящая в вакуум, $(q)_{\text{вак}} \sim L^{-1/4}$;

пертурбативные кварковые и глюонные линии $(G_{\mu\nu}, q)_{\text{пт}} \sim L^0$.

Этот набор полезно дополнить правилом, согласно которому $L^{1/2}$ приписывается каждому билинейному внешнему току, L^1 — трилинейному и т. д. Последнее правило не сказывается на относительной величине различных членов, а фиксирует общую нормировку. Собирая все степени L , получаем оценку рассматриваемого вклада. (Каждая степень L^{-1} утраивает $M_{\text{крит}}^2$). Смысл параметра L в теории возмущений тривиален. Легко показать, что график теории возмущений, содержащий k петель, дает L^k . (Например, диаграмма на рис. 5 включает два внешних тока $L^{1/2} \times L^{1/2}$, две константы связи $L^{1/2} \times L^{1/2}$ и несколько пертурбативных линий L^0 — итого L^2). Поскольку петли отвечают квантовым поправкам, то такая классификация реализует идею разложения по классичности наиболее прямым образом. Единственный ее недостаток — правило $L^{-1/4}$ для кварковых линий. Это правило обеспечивает равенство поправок на кварковый и глюонный конденсат в ρ -мезонных правилах сумм, но не имеет независимого теоретического обоснования.

Отметим, что предложенная схема подчеркивает выделенную роль токов, смешивающихся с вакуумом. На сегодняшний день последние слова означают (по определению), что эти токи допускают прямые инстантоны. Важно, что последние существуют только в скалярном и псевдоскалярном каналах как кварковом, так и глюонном. Это правило отбора кажется вполне естественным в свете непосредственных вычислений, проведенных в работах [14, 25б], и более подробно обсуждается в Приложении А. Что касается кварков, то смешиваются с вакуумом как синглетные, так и несинглетные (по аромату) токи, а их общая структура определяется структурой нулевой моды [10].

С чисто феноменологической точки зрения квантовые числа $JPC = 0^+, 0^-$ также выделены. Достаточно упомянуть $U(1)$ -проблему [29], большие отклонения от правила Цвайга [30] и т. п. Такое совпадение не может быть случайным; оно свидетельствует в пользу основной гипотезы, согласно которой доминирующие вакуумные флуктуации помнят об устройстве инстантона, хотя они вряд ли сводятся к инстантонам буквально. Интересно, что такая же ситуация имеет место [31] в двумерной сигма-модели, решенной точно.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Прежде чем перейти к рассмотрению специфических каналов, опишем еще один общий метод, помогающий получить информацию о масштабах масс, а именно низкоэнергетические теоремы КХД. К сожалению, метод не является универсальным, так как мы не в состоянии найти любую двухточечную функцию при малых Q .

Низкоэнергетические теоремы, которые больше всего подходят в рассматриваемом случае, записываются следующим образом:

$$\lim_{q \rightarrow 0} i \int \exp(iqx) dx \langle 0 | T \left\{ O(x), \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G^2(0) \right\} | 0 \rangle = (-d) \langle O \rangle \times \\ \times [1 + \text{члены, линейные по массам кварков}], \quad (52)$$

где $O(x)$ — некоторый локальный оператор канонической размерности d , а $\beta(\alpha_s)$ — функция Гелл-Мана — Лоу: $\beta(\alpha_s) = -b\alpha_s^2/2\pi + O(\alpha_s^3)$; $b = 11N_c/3 - 2N_f/3$. В частности,

$$i \int dx \langle 0 | T \left\{ \frac{3\alpha_s}{4\pi} G^2(x), \frac{3\alpha_s}{4\pi} G^2(0) \right\} | 0 \rangle \simeq \\ \simeq \frac{18}{b} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle + O(m_q), \quad (53a)$$

$$i \int dx \langle 0 | T \left\{ \sum_{u, d, s} m_q \bar{q}q(x), \frac{\alpha_s}{\pi} G^2(0) \right\} | 0 \rangle \approx \frac{24}{b} \sum_{u, d, s} \langle m_q \bar{q}q \rangle + O(m_q^2). \quad (53b)$$

Начнем доказательство с переопределения глюонного поля

$$\bar{G}_{\mu\nu}^a \equiv g_0 G_{\mu\nu}^a,$$

где g_0 — затравочная калибровочная константа. Тогда зависимость от g_0 в лагранжиане сводится к $(-1/4g_0^2) \bar{G}_{\mu\nu}^a \bar{G}_{\mu\nu}^a$, и, следовательно,

$$i \int dx \langle 0 | T \{ O(x), \bar{G}^2(0) \} | 0 \rangle \equiv -\frac{d}{d(1/4g_0^2)} \langle O \rangle.$$

Кроме того, аргументы, основанные на ренорм-группе, плюс отсутствие других массовых параметров, кроме M_0 (ультрафиолетового обрезания), диктуют *

$$\langle O \rangle = \text{const} [M_0 \exp(-8\pi^2/bg_0^2)]^d, \quad (54)$$

где $g_0 \equiv g(M_0)$. Выполняя дифференцирование, приходим к (52).

Мы предполагали, что оператор O построен из полей глюонов или легких кварков. Включение тяжелых кварков привносит новый массовый параметр, и соотношение (52) более не выполняется. (Вакуумные ожидания операторов, построенных из полей тяжелых кварков Q , исчезают в пределе большой массы кварка, например [4], $\langle \bar{Q}Q \rangle = -\frac{1}{12} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle m_{\bar{Q}}^4 + \dots$).

Простой вывод низкоэнергетических теорем, приведенный выше, должен быть дополнен на самом деле какой-либо регуляризацией, поскольку в большинстве случаев $\langle O \rangle$ сильно расходится в теории возмущений (редкое исключение из этого правила — оператор $\bar{q}q$, вакуумное ожидание которого исчезает в теории возмущений, если $m_q = 0$). Во всех случаях мы определяем O так, чтобы в теории возмущений $\langle O \rangle = 0$. Тогда ультрафиолетовое обрезание M_0 действительно появляется только в комбинации (54). В Приложении Б показано, что исчерпывающе корректная регуляризационная процедура, включающая достаточное число регуляторных полей, дает те же ответы.

Отметим очевидное обобщение (52):

$$\begin{aligned} i^2 \int dx dy \langle O | T \left\{ \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G^2(x), \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G^2(y), O(0) \right\} | 0 \rangle = \\ = (-d^2) \langle O \rangle \end{aligned} \quad (55)$$

и т. д. Полный анализ подобных соотношений увел бы нас в сторону, поэтому пока оставим его. В некоторых конкретных случаях аналогичные низкоэнергетические теоремы существуют также и для нелокальных операторов O . Интересный пример приведен в Приложении Б.

В заключение процитируем также низкоэнергетические теоремы для амплитуд, которые включают наряду с виртуальными кварками и глюонами также и мягкие фотоны:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}_{\alpha\beta}^a | \gamma(k_1) \gamma(k_2) \rangle = \\ = \frac{\alpha}{\pi} N_c \langle Q_q^2 \rangle F_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(2)}; \end{aligned} \quad (56a)$$

* Формула (54) учитывает только первый член в функции Гелл-Мана — Лоу. Не составляет труда включить и другие члены, присутствующие в полной β -функции. Фактически, это было сделано при выводе (52).

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a | \gamma(k_1) \gamma(k_2) \rangle = \\ = \frac{\alpha}{3\pi} N_c N_f \langle Q_q^2 \rangle F_{\mu\nu}^{(1)} F_{\mu\nu}^{(2)}, \end{aligned} \quad (566)$$

где $F_{\mu\nu}^{(i)} = k_{\mu\nu}^{(i)} \varepsilon_{\nu}^{(i)} - k_{\nu}^{(i)} \varepsilon_{\mu}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), $\tilde{F}_{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, а $\langle Q_q^2 \rangle$ означает средний электрический заряд кварков

$$\langle Q_q^2 \rangle = \frac{1}{N_f} \sum_q Q_q^2.$$

При выводе (56) предполагается, что передача импульса $(k_1 + k_2)^2$ мала, а кварки рассматриваются как безмассовые. [В противном случае следует включить члены $O(m_q)$.] Отметим, что первая теорема, по-видимому, известна уже давно. Доказательство второй теоремы основано на том обстоятельстве, что фотонный матричный элемент от полного тензора энергии — импульса $\theta_{\mu\nu}$ сводится в низкоэнергетическом пределе к

$$\begin{aligned} \langle 0 | \theta_{\mu\nu}^{\text{полн}} | \gamma(k_1) \gamma(k_2) \rangle = \text{const} [F_{\mu\nu}^{(1)} F_{\nu\beta}^{(2)} - \\ - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)}] + O(k)^4. \end{aligned}$$

Последнее соотношение следует из поперечности по обоим фотонам и сохранения $\theta_{\mu\nu}$. Оно приводит к формуле (566), если учесть, что [32]

$$\theta_{\mu\mu} = \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G^2 + \frac{\alpha}{6\pi} N_c N_f \langle Q_q^2 \rangle F^2 + \dots$$

В дальнейшем мы используем низкоэнергетические теоремы по-разному. Оказывается, что наиболее продуктивный способ — переработать их в главные степенные члены при больших M^2 . Это можно сделать, так как асимптотическое поведение любого коррелятора в КХД определяется теорией возмущений (более подробно см. в Приложении В).

6. ДУАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПИОНА

В последующих нескольких разделах попытаемся проверить предсказания (50), (51) и им подобные независимым образом. В определенном отношении пион уникален по своим свойствам. Дело в том, что следует ожидать доминантности пиона в двух различных каналах: связанном с аксиальным током

$$a_\mu = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d), \quad (57)$$

и с псевдоскалярным током (49). Двойственная роль пиона — следствие его голдстоуновской природы.

Это тем более интересно, что счет по параметрам $l, 1/g$ (или L) в этих случаях различен. В смысле классификации аксиальный ток не отличается от векторного (и рассматривался одновременно [4]). Соответствующий коррелятор поперечен в киральном пределе (мы ограничимся пределом $m_q \rightarrow 0$) и определяется одной инвариантной функцией $A(Q^2)$:

$$(q_\mu q_\nu - q^2 q_{\mu\nu}) A = i \int dx \exp(iqx) \langle 0 | T \{ a_\mu(x), a_\nu(0) \} | 0 \rangle. \quad (58)$$

Прямые инстантоны в $A(Q^2)$ отсутствуют; главная непертурбативная поправка связана с кварковым (глюонным) конденсатом. В итоге, так же как и в векторном канале, M_{1^+} , кварки $\approx 0,6$ ГэВ².

С другой стороны, в корреляторе токов j^π прямые инстантоны дают существенный вклад. Действительно, инстантоны за счет нулевых мод генерируют эффективное кварковое взаимодействие [10, 276]:

$$\begin{aligned} \Delta L = \frac{d\rho}{\rho^5} d_0(\rho) \left\{ \prod_{i=1,2} \left(-\frac{4}{3} \pi^2 \rho^3 \bar{q}_{iR} q_{iL} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{32} \left(\frac{4}{3} \pi^2 \rho^3 \right)^2 \left[\bar{q}_{1R} t^a q_{1L} \bar{q}_{2R} t^a q_{2L} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{4} \bar{q}_{1R} \sigma_{\mu\nu} t^a q_{1L} \bar{q}_{2R} \sigma_{\mu\nu} t^a q_{2L} \right] \right\} \quad (59) \end{aligned}$$

(группа $SU(3)_c$),

где мы ограничились случаем двух (почти) безмассовых кварков, так что индексы 1 и 2 относятся к u - и d -кваркам соответственно; $q_L = 1/2(1 + \gamma_5) q$; t^a -матрицы Гелл-Мана в цветном пространстве. Для антиинстантона $L \leftrightarrow R$. Хотя выражение (59) справедливо лишь в локальном пределе ($\rho \rightarrow 0$) и не годится для явного вычисления инстантонного вклада в двухточечные функции, в нем компактно записаны все кварковые токи без производных, допускающие прямые инстантоны.

Определив двухточечную функцию как

$$B^\pi(Q^2) = i \int dx \exp(iqx) \langle 0 | T \{ j^\pi(x), j^\pi(0) \} | 0 \rangle, \quad (60)$$

легко оценим относительную величину прямого вклада в терминах параметров $l, 1/g$ (или L). Фактически это сделано в разд. 4 [см. (50)]. Отметим, что явная одноинстантонная формула для $B^\pi(Q^2)$ похожа на (9) и получена, например, в работах [4, 12, 14].

Опустив несколько промежуточных этапов, приведем правила сумм для аксиальной и псевдоскалярной спектральных плотностей

[4]:

$$\begin{aligned}
& \frac{8\pi}{M^2} \int ds \exp(-s/M^2) \operatorname{Im} A(s) = 1 + \frac{\alpha_s(M^2)}{\pi} + \\
& + \frac{\pi^2}{3M^4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle + \frac{704}{81} \frac{\pi^3}{M^6} \langle V \overline{\alpha_s} \bar{q}q \rangle^2 + \\
& + \text{итерации кваркового и глюонного конденсатов}; \quad (61) \\
& \frac{16\pi}{3M^4} \int ds \exp(-s/M^2) \operatorname{Im} B^\pi(s) = \\
& = \left[\frac{\alpha_s(M^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right]^{8/6} \left[1 + \frac{\pi^2}{3M^4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle + \right. \\
& \left. + \frac{896}{81} \frac{\pi^3}{M^6} \langle V \overline{\alpha_s} \bar{q}q \rangle^3 + \text{итерации} \right] + \text{прямые вклады}. \quad (62)
\end{aligned}$$

Обратимся теперь к феноменологии. Для обсуждаемых каналов нельзя непосредственно измерить спектральную функцию в широкой области энергии (впрочем, распады τ -лептона измеряют: $\operatorname{Im} A$ при $\sqrt{s} < m_\tau$). Заведомо хорошо известен только пионный вклад:

$$(\operatorname{Im} A)_{\text{пол}} = \frac{1}{2} \pi \delta(s) f_\pi^2; \quad (63a)$$

$$(\operatorname{Im} B^\pi)_{\text{пол}} = \frac{1}{2} \pi \delta(s) \left(\frac{f_\pi m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2, \quad (63b)$$

где $f_\pi \approx 133$ МэВ — константа $\pi \rightarrow \mu\nu$ -распада, и m_u , m_d — массы кварков в низкой точке нормировки μ , формально для $\alpha_s(\mu) \sim 1$. Согласно оценкам Лейтвилера [33] (современное обсуждение и подробный список литературы см. в [4, 34])

$$m_u(\mu) + m_d(\mu) \approx 11 \text{ МэВ}. \quad (64)$$

Разумеется, правила сумм могут быть переписаны в терминах масс, нормированных в другой точке; никакие заключения не изменяются.

Следует подчеркнуть, что оценка (64) подтверждается анализом [23] правил сумм для ρ -мезона, так что нет большого простора для маневра числами.

Теперь можно проверить экспериментально наши представления о критических массах. Пренебрежем всеми резонансами, кроме π -мезона, и найдем такое M^2 , при котором один только пион превышает на 10% вклад простейшей кварковой петли. Поскольку мнимые части $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} B^\pi$ положительно определены, очевидно, что таким образом найдем нижние границы для $M_{\text{кр}}^2$. Подставляя (63) и (64) в (61) и (62), получаем

$$\text{ток } a_\mu : M_{\text{кр}}^2 \gtrsim 0,6 \text{ ГэВ}^2, \quad (65)$$

$$\text{ток } j^\pi : M_{\text{кр}}^2 \gtrsim 1,9 \text{ ГэВ}^2.$$

Здесь учтено, что при нашем выборе параметров [$\Lambda \approx 100$ МэВ, $\alpha_s(\mu) \approx 0,71$] фактор $[\alpha_s(2 \text{ ГэВ}^2)/\alpha_s(\mu^2)]^{4/b}$, связанный с аномальной размерностью тока j^a , составляет 0,6.

Отметим, что вариация параметров в разумных пределах не изменяет качественно оценки (65) в том смысле, что различие между $M_{1^+, \text{кварки}}^2$ и $M_{0^-, \text{кварки}}^2$ всегда остается. При типичном выборе параметров

$$M_{0^-, \text{кварки}}^2 \approx 3M_{1^+, \text{кварки}}^2 \quad (66)$$

в прекрасном согласии с предложенной схемой. Очевидно, что разница в масштабах скоррелирована с наличием прямых инстантонов в канале 0^- .

Сделаем еще несколько замечаний, относящихся к теоретическим аспектам пионных правил сумм (61), (62). Во-первых, в аксиальном случае численный анализ может быть проведен в деталях. Наиболее важное утверждение заключается в том, что поправки на кварковый и глюонный конденсат становятся заметными как раз при $M^2 \approx 0,6 \text{ ГэВ}^2$, и правила сумм самосогласованы. Более того, результатом численного анализа [4] является соотношение $f_\pi \approx m_\rho/2\pi$, которое прекрасно согласуется с экспериментом.

Наоборот, в случае 0^- обычные степенные поправки заведомо очень малы при $M^2 \approx 2 \text{ ГэВ}^2$:

$$\frac{\text{Кварковый, глюонный конденсат}}{\text{Асимптотически свободный член}} \leq 10^{-2} \quad (\text{кварки, } J^P = 0^-)$$

и если бы не было вклада прямых флуктуаций, то пришлось бы говорить о противоречии КХД с экспериментом.

Итак, мы еще раз убеждаемся, что прямые флуктуации определяют низкоэнергетическое поведение нескольких важных с практической точки зрения двухточечных функций.

7. СМЕШИВАНИЕ

В мезонной физике хорошо известно, что переходы между кварками разных сортов и между кварками и глюонами, как правило, подавлены. Феноменологически это обстоятельство проявляется, скажем, в узости ϕ -мезона, малой разности масс ρ и ω , отсутствию на опыте глюонных мезонов, предположительно слабо связанных с кварковым миром, и т. п. Еще до создания хромодинамики было сформулировано правило Цвайга [35], запрещающее аннигиляцию кварковых линий. В большинстве случаев отклонения от него очень малы.

Какова теоретическая интерпретация этого явления? В этом контексте обычно ссылаются на многоцветную хромодинамику [16, 36, 37]. Действительно, в пределе большого числа цветов все недиагональные корреляторы подавлены факторами $1/N_c$ по сравнению с диагональными, и всякое смешивание содержит $1/N_c$ в положительной степени. При $N_c = \infty$ смешивание выключается.

Трудность, возникающая в данном подходе, заключается в том, что в природе существуют очень важные исключения из правил Цвайга. Например, в нонете псевдоскалярных мезонов смешивание порядка единицы. Является ли этот эффект простой игрой чисел?

Согласно нашей точке зрения нарушение правила Цвайга в псевдоскалярном нонете — естественная закономерность. Более того, можно предсказать, что в каналах с квантовыми числами $J^P = 0^+, 0^-$ велики переходы не только между кварками разных сортов, но и между кварками и глюонами.

Сформулируем утверждение более подробно. Заметим, что диаграммы с аннигилирующими кварковыми линиями (т. е. нарушающие правило Цвайга) содержат, вообще говоря, лишние петли.



Рис. 12. Прямая флуктуация в недиагональном корреляторе.

Входящий ток построен из кварков, выходящий — из глюонов

В рамках нашего подхода каждая петля характеризуется малым фактором l . Недиагональные корреляторы содержат l в положительной степени по сравнению с диагональными, что и объясняет запрет Цвайга.

В некоторых случаях, однако, возможны переходы типа $ss \leftrightarrow \bar{u}u$ или $\bar{u}u \leftrightarrow gg$ на классическом уровне (рис. 12). Используя правила счета по параметра $l, 1/g$, легко убедиться, что при этом недиагональные корреляторы порядка диагональных, и можно ожидать, что смешивание порядка единицы. Прямые флуктуации эффективно превращают кварки в глюоны и кварки одного сорта в кварки другого сорта. Напомним, что прямые инстантоны существуют только в каналах 0^+ и 0^- .

Роль инстантонов в нонете π, k, η, η' подробно проанализирована в работе [14]. Мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе более подробно, а сконцентрируем внимание на кварк-глюонном смешивании. Обычно считается априори, что мезоны, построенные из кварков и глюонов, слабо связаны друг с другом. Постараемся убедить читателя, что для бесспиновых состояний это не так.

То обстоятельство, что правило Цвайга сильно нарушено для $J^P = 0^+$, видно, например, из низкоэнергетической теоремы (56б). Она описывает переход глюонов в фотоны через виртуальную кварковую петлю (фотоны не взаимодействуют с глюонами непосредственно). Взглянув на кварковый график рис. 13, а, наивно можно было бы заключить, что амплитуда

$$\langle 0 | -\frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2 | 2\gamma \rangle = O\left(\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \frac{\alpha}{\pi}\right),$$

выше низкоэнергетических теорем не противоречит ему. В реальном мире ($N_c = 3$) более существенным, однако, оказывается параметр $(M_{\text{крит}}/1 \text{ ГэВ})^2$, который для $J^P = 0^\pm$ достигает 15.

Обратим внимание еще на один аспект проблемы. Сильное смешивание, существующее между кварковыми и глюонными мезонами со спином 0, неразрывно связано со спонтанным нарушением киральной симметрии. Хорошей иллюстрацией этому утверждению служит, например, формула (536). В случае ненарушенной киральной симметрии переход бесспиновый глюоний \leftrightarrow бесспиновый кварконий был бы строго запрещен. И наоборот, стоит сказать, что он существует, как автоматически возникает $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Правая часть (536) усилена (благодаря прямым флуктуациям) в $l^2 g^2$ раз по сравнению с наивным ожиданием, что влечет, в свою очередь, соответствующее усиление в параметре смешивания.

8. ГЛЮОНИЙ. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В последующих разделах применим наш подход к глюонным токам, ожидая, что именно здесь реализуется все разнообразие массовых масштабов. Начнем, однако, с общих замечаний, касающихся в основном литературы и классификации глюонных мезонов.

Существование этих специфических объектов в КХД было впервые упомянуто Фритчем и Гелл-Маном [1]. Открытие тяжелых кварков и глюонного механизма аннигиляции тяжелого кваркония [40] придало новый импульс теории глюония. В частности, вскоре после этого открытия появилась интересная статья Фритча и Минковского [41], авторы которой впервые попытались систематизировать глюонные мезоны и начали обсуждение их свойств. Стандартная модель мешков MIT [42] также не обошла этот предмет стороной. В рамках этой модели предсказывается большое семейство глюонных состояний с относительно малой массой (см., например, [43, 44]). Отметим также попытки извлечь информацию о глюонии из свойств траектории Померанчука [45, 46] и данных по распадам чармония [47]. Довольно подробное обсуждение феноменологических аспектов, а также репрезентативный список литературы содержатся в работе [48] и очень интересной лекции [49].

Как правило, думают о глюонии в терминах составных моделей. Мы стартуем с токовых глюонов. Попытаемся понять свойства глюония, рассматривая корреляторы различных глюонных токов и используя всю доступную информацию о глюонных двухточечных функциях. При этом любой мощный пик в соответствующей спектральной плотности должен интерпретироваться как глюоний — только такой подход последователен в квантовой теории поля.

Первый шаг, однако, заключается в классификации разных токов, и, как ни странно, уже здесь мы расходимся с более ранними работами. Скажем, спектр модели мешков включает 1-состоя-

ния, сделанные из двух глюонов, что трудно понять в свете известных правил отбора Ландау — Померанчука — Янга. Остановимся на этом более подробно. Наиболее общий бесцветный ток, построенный из двух операторов $G_{\mu\nu}^a$ (без производных), имеет вид:

$$G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a \sim (J^P = 2^+, 2^+, 2^-, 1^-, 0^+, 0^+, 0^-), \quad (68)$$

где мы привели также разложение по представлениям группы вращений. Разложение действительно содержит векторное состояние; однако нетрудно понять, что речь идет фактически о векторе Пойнтинга, который в релятивистских обозначениях является компонентой глюонного тензора энергии импульса $\theta_{\alpha\beta}^G$:

$$\varepsilon_{ikl} E_i^a H_k^a \sim \theta_{0l}^G.$$

В чистой глюодинамике тензор энергии — импульса глюонов сохраняется, и векторное состояние является фиктивным. Именно записывая матричный элемент от $\theta_{\alpha\beta}^G$ по векторному состоянию в виде

$$\langle 0 | \theta_{\mu\nu}^G | 1^- \rangle = (\varepsilon_\mu p_\nu + \varepsilon_\nu p_\mu) C,$$

где ε_μ — вектор поляризации, p_ν — импульс мезона, убеждаемся сразу, что в чистой глюодинамике константа $C = 0$.

Если включить легкие кварки, то константа C сводится к матричному элементу

$$\langle 0 | G_{\mu\alpha}^a \bar{q} \gamma_\alpha t^a q | 1^- \rangle,$$

и соответствующий 1^- -мезон следует рассматривать скорее как кварковую экзотику. Истинный глюоний должен выживать в пределе чистой глюодинамики, и простейшее 1^- — состояние такого типа, генерируется тремя глюонными операторами, например:

$$\text{Tr} [G_{\mu\nu} (D_\alpha G_{\nu\rho}) G_{\rho\mu}].$$

В итоге характерный масштаб масс в этом канале большой.

Итак, если не рассматривать спин 3 и выше, то набор двухглюонных мезонов (т. е. таких, которые могут быть рождены билинейными токами) сводится к следующему:

$$J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 2^{++}, 2^{-+}. \quad (69)$$

Эти состояния выделены также и тем, что их удобно изучать в радиационных распадах типа $J/\psi \rightarrow X\gamma$: аннигиляция тяжелых кварков $c\bar{c} \rightarrow gg\gamma$ служит точечным источником глюонов. Рассматривая амплитуду $c\bar{c} (J^P = 1^-) \rightarrow gg\gamma$ в теории возмущений и трактуя глюоны как свободные частицы, можно убедиться [51], что квантовые числа пары gg таковы: $0^{++}, 0^{-+}, 2^{++}$. Не запрещена также и амплитуда 2^{-+} , которая, однако, подавлена численно [51].

Совпадение с (69), конечно, не случайно: в распаде $\bar{c}c \rightarrow gg\gamma$ образуются два глюона на малых расстояниях, так что их орбитальный момент равен нулю.

Ниже рассмотрены глюонные каналы с квантовыми числами (69), а также обсуждены смежные вопросы, в частности свойства вакуума в гипотетическом мире без легких кварков, массовые формулы для η' и т. п. Забегая вперед, дадим грубый набросок ситуации, не претендующий на правильную передачу деталей, а являющийся скорее полезной мнемонической схемой, аналогично тому, как полезна для ориентации модель конституэнтных кварков. К чему сводится эта модель? Возьмем два кварка со спином $1/2$ и массой около 350 МэВ, сложим их в S -волновое состояние, получим кварковый мезон с массой около 700 МэВ. Для P -волновых состояний из-за орбитального движения следует добавить около 500 МэВ и т. д. Как ни наивна подобная процедура, в целом она верно воспроизводит грубую структуру семейства кварковых мезонов. Результаты для глюонного мира, полученные ниже, становятся наглядными, если принять, что числа удвоились: конституэнтный глюон (некая частица со спином 1) весит около 700 МэВ, переход от S -волны к P -волне добавляет к массе глюбола около 1 ГэВ, и т. д. Отметим, что независимые аргументы в пользу тяжелого конституэнтного глюона (с массой около 0,7 ГэВ) приведены в работе [52].

9. СКАЛЯРНЫЙ ГЛЮОНИЙ

Экспериментальные данные о глюонии практически отсутствуют, поэтому под феноменологией придется понимать независимые теоретические высказывания. В частности, в данном случае основную роль играет низкоэнергетическая теорема (53).

Первое замечание относится к большим N_c . Если мы попытаемся насытить соотношения (53) одним резонансом, то этого не удастся. Нужны два резонанса: кварковый σ_q и глюоний σ_g , причем их вычеты удовлетворяют обычным правилам, например:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}q | \sigma_q \rangle &\sim N_c^{1/2}, \quad \langle 0 | \frac{3\alpha_s}{4\pi} G^2 | \sigma_q \rangle \sim N_c^{-1/2}, \quad m_{\sigma_q} \sim N_c^0; \\ \langle 0 | \frac{3\alpha_s}{4\pi} G^2 | \sigma_g \rangle &\sim N_c^0, \quad \langle 0 | \bar{q}q | \sigma_g \rangle \sim N_c^0, \quad m_{\sigma_g} \sim N_c^0. \end{aligned} \quad (70)$$

Как будет видно ниже, ситуация в псевдоскалярном канале иная.

Главное утверждение состоит в том, что низкоэнергетическую теорему (53а) можно использовать для вычисления лидирующей степенной поправки при больших M^2 (см. Приложение В). Этот

вывод был сделан в работе [5], приведем здесь лишь результат:

$$\begin{aligned}
 & \frac{8\pi^3}{9M^4} \int ds \operatorname{Im} S(s) s^{-1} \exp(-s/M^2) = \\
 & = \alpha_s^2(M^2) \left[1 + \frac{1}{M^4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \left(-\frac{2\pi^3}{\alpha_s M^2} + \frac{16\pi^4}{b\alpha_s^2(M^2)} \right) + O(M^{-6}) \right] + \\
 & \quad + \text{прямые вклады.} \quad (71)
 \end{aligned}$$

Мы разбили степенную поправку на две части из-за их различного генезиса: первая часть есть обычный эффект рассеяния на мягких вакуумных полях [ср. с (30)]; вторая — напоминание о низкоэнергетической теореме (53а). Первую часть мы уже обсуждали. Во второй части мы узнали поправку порядка g^{-4} , существование которой можно было бы предвидеть, исходя из смешивания токов с вакуумом на классическом уровне [см. (51) и предшествующее обсуждение]. Мы пытались найти эту поправку явно, используя инстантонное исчисление, но не очень успешно. В данном канале удастся найти некоторый интеграл от нее точно.

Подставляя числа, убеждаемся, что поправка достигает 10% асимптотического вклада (вклада глюонной петли) при

$$M_{\delta^+, \text{глюоны}}^2 \sim 20 \text{ ГэВ}^2, \quad (72)$$

что находится в замечательном согласии с догадкой (51).

Второстепенная роль поправок, связанных с рассеянием на мягких полях, проявляется в данном случае и по-другому. Дело в том, что можно оценить следующие регулярные члены разложения по M^{-2} [см. [5], где вычисление проведено вплоть до $O(M^{-8})$]. Старший член, приведенный в (71), оказывается много больше остальных регулярных членов разложения. В принципе такая ситуация мыслима, но только в том случае, если существует почти безмассовая частица. Если бы, выписав в правиле сумм (71) ряд по M^{-2} , мы попытались оценить массу такой частицы, то пришли бы к весьма странному результату:

$$m_{\sigma_g} \sim 20 \text{ МэВ} \quad (??)$$

(Буквально возникает мнимая масса; чтобы получить $m^2 > 0$, следует уповать на неточности в оценках матричных элементов, которые должны были бы изменить результат по знаку.)

Ясно, что партнерами лидирующей поправки, пропорциональной M^{-4} , являются не регулярные по M^{-2} члены, а те же прямые инстантоны или другие флуктуации, дающие вклад порядка g^{-4} . Они и должны уладить вопрос о массе скалярного глюония.

Все же следует иметь в виду, что мы ожидаем аномально легких, в естественном масштабе масс скалярный глюоний:

$$m_{\sigma_g} \ll 1,4 \text{ ГэВ}. \quad (73)$$

Обсуждения легкого σ_g -резонанса содержатся в [5], а подробный количественный анализ, приведший к оценке (73), дан в [53]. Наблюдение, на котором основана эта работа, таково. По квантовым числам количество мод распада относительно легкого скалярного глюония невелико; основная мода — распад на пару голдстоуновских мезонов, например $\pi^+\pi^-$. Поэтому о массе σ_g можно судить по положению пика в $\text{Im}S^{(\pi\pi)}$, где $\text{Im}S^{(\pi\pi)}$ — мнимая часть двухточечной функции (3), связанная с пионным разрезом. Воспользовавшись низкоэнергетическими теоремами (53а), (67), убеждаемся, что $\text{Im}S$ содержит структуру (плечо) при $s \leq 2 \text{ ГэВ}^2$. То обстоятельство, что двухпионное (т. е. кварковое) промежуточное состояние насыщает коррелятор (3) при низких энергиях, обусловлено, конечно, большим смешиванием в канале 0^+ (см. разд. 7). Упомянутая выше структура является, по-видимому, суперпозицией двух резонансов σ_g и σ_q , в каждом из которых глюонные и кварковые степени свободы присутствуют, грубо говоря, в равных пропорциях. Выделение чистого 0^+ -глюония возможно лишь в вымышленном мире $N_c \rightarrow \infty$, N_f фиксировано.

Резюмируя, можно сказать, что ситуация отчасти похожа на π -мезон в псевдоскалярном канале: масса наименьшего резонанса не реализует характерный масштаб нарушения асимптотической свободы.

10. ПСЕВДОСКАЛЯРНЫЙ ГЛЮОНИЙ

Соответствующий коррелятор определен как

$$P(Q^2) = i \int dx \exp(iqx) \langle 0 | T \{ j_p(x), j_p(0) \} | 0 \rangle, \quad (74)$$

где

$$j_p = \frac{3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a, \quad \tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a.$$

В том, что касается счета по параметрам l , $1/g$ (см. разд. 4), существует полная аналогия между скалярным и псевдоскалярным глюонными каналами. Однако в мире с легкими кварками феноменология мезонов в этих каналах различна.

Действительно, нетрудно убедиться, что в отличие от скалярной двухточечной функции

$$P(Q^2 = 0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m_q \rightarrow 0. \quad (75)$$

Причина обращения $P(Q^2 = 0)$ в нуль проста — j_p является полной дивергенцией калибровочно-инвариантного тока:

$$j_p = \partial_\mu (\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d + s \gamma_\mu \gamma_5 s), \quad m_u = m_d = m_s = 0. \quad (76)$$

Существование большого масштаба, предсказываемого теорией [см. (51)], не удается теперь доказать с помощью низкоэнергети-

ческой теоремы. Мы сможем сделать это другим способом: привлекая феноменологию η' -мезона.

Именно, связь η' с глюонным током представим в виде

$$\langle 0 | j_p | \eta' \rangle = f_{\eta'} m_{\eta'}^2 \quad (77)$$

где

$$f_{\eta'} p_{\mu} = \langle 0 | \bar{u} \gamma_{\mu} \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_{\mu} \gamma_5 d + s \gamma_{\mu} \gamma_5 s | \eta' \rangle.$$

Для дальнейшего весьма критично, что масштаб $f_{\eta'}$ правильно определяется наивной кварковой моделью:

$$f_{\eta'} = \sqrt{3} f_{\pi} \approx 230 \text{ МэВ (кварковая модель)}. \quad (78)$$

Посмотрим, насколько обоснованна и точна эта оценка.

Во-первых, предсказание (78) становится абсолютно точным в многоцветной хромодинамике [15]: $f_{\eta'} = \sqrt{3} f_{\pi} (1 - C_1/N_c + \dots)$, где C_1 — некоторая константа. Адекватность предела $N_c \rightarrow \infty$ отчасти может быть проверена по данным о распаде $\eta' \rightarrow 2\gamma$. При $N_c \rightarrow \infty$ соотношение (56а) насыщается одним η' -мезоном, что фиксирует амплитуду $\eta' \rightarrow 2\gamma$:

$$f_{\eta' \rightarrow 2\gamma} = N_c N_f \langle Q_q^2 \rangle \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\sqrt{3} f_{\pi}} (1 - C_2/N_c + \dots).$$

Для вероятности распада $\eta' \rightarrow 2\gamma$ получаем

$$\Gamma(\eta' \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{48\pi^3} [N_c N_f \langle Q_q^2 \rangle]^2 \alpha^2 \frac{m_{\eta'}^3}{f_{\pi}^2} (1 - 2C_2/N_c + \dots),$$

где мы использовали (78), и C_2 — некоторая константа, вообще говоря, не сводящаяся к C_1 . Можно ожидать, что C_2 порядка C_1 .

Подставив для численной оценки $N_c = N_f = 3$, $f_{\pi} = 133 \text{ МэВ}$, приходим * к

$$\Gamma(\eta' \rightarrow 2\gamma) = 7,1 \text{ кэВ} \left(1 - \frac{2}{3} C_2 + \dots \right),$$

в хорошем согласии с экспериментальными данными [54]

$$\Gamma(\eta' \rightarrow 2\gamma)_{\text{эксп}} = (4-6) \text{ кэВ}.$$

Видно, что $C_2 \leq 0,6$. Если считать, что $C_1 \sim C_2$, то

$$f_{\eta'} = 230 \text{ МэВ} (1 - O(20\%)), \quad (79)$$

* В литературе часто цитируется несколько иное теоретическое значение для двухфотонной ширины η' , $\Gamma(\eta' \rightarrow 2\gamma)_{\text{теор}} \approx 5 \text{ кэВ}$. Это значение возникает, если учесть $\eta\eta'$ — смешивание, т. е. эффекты нарушения $SU(3)$. Мы последовательно работаем в киральном, $SU(3)$ -симметричном пределе $m_u = m_d = m_s = 0$. Отметим, что при больших N_c внесение поправок, пропорциональных m_s , требует довольно тонкого анализа.

и ожидаемое отклонение от наивной кварковой модели (78) относительно невелико.

Независимую информацию о $f_{\eta'}$ можно получить из радиационных распадов J/ψ . Действительно, если распады $J/\psi \rightarrow \eta (\eta') \gamma$ идут через промежуточную глюонную стадию, то [55]

$$\frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta' \gamma)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta \gamma)} = \frac{|\langle 0 | j_P | \eta' \rangle|^2}{|\langle 0 | j_P | \eta \rangle|^2} \left(\frac{|P_{\eta'}|}{|P_{\eta}|} \right)^3, \quad (80)$$

где куб отношения импульсов связан с P -волновой природой этих распадов. Вычет глюонного тока в η определяется одной только $SU(3)$ -симметрией сильных взаимодействий [55]:

$$\langle 0 | j_P | \eta \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} f_{\pi} m_{\eta}^2$$

(поправка к этой формуле порядка нарушения $SU(3)$, т. е. порядка 20%). В наиболее точном эксперименте [56] для отношения (80) имеем $5,9 \pm 1,5$, что дает

$$f_{\eta'} = (0,5 - 0,7) \sqrt{3} f_{\pi} = 120 \div 160 \text{ МэВ} \quad (\text{распад } J/\psi \rightarrow \eta' \gamma). \quad (81)$$

В работе [5] с учетом правил сумм КХД найдено

$$f_{\eta'} \sim 0,5 \sqrt{3} f_{\pi} \sim 120 \text{ МэВ} \quad (\text{правила сумм}). \quad (82)$$

Имея в виду, что три независимых оценки (79), (81) и (82) перекрываются, можно с уверенностью утверждать, что

$$f_{\eta'} = (0,5 - 0,8) \sqrt{3} f_{\pi} = 120 \div 180 \text{ МэВ}. \quad (83)$$

Зная вычет хотя бы одного резонанса, можно найти нижнюю границу на величину $M_{\text{кр}}^2$, где начинает нарушаться асимптотическая свобода. Мы уже пользовались этим в разделе о пионе [причина заключается, разумеется, в положительной определенности спектральной функции $\text{Im } P(s)$]. Посмотрим, при каком M^2 вклад η' в интеграл

$$\frac{8\pi^3}{9M^4} \int \exp[-s/M^2] \frac{ds}{s} \text{Im } P(s)$$

превышает на 10% простую глюонную петлю (см. рис. 1), которая дает для этого интеграла $\alpha_s^2(M^2)$. Воспользовавшись формулами (77) и (83), находим

$$M_{0-}^2, \text{ глюоны} \gtrsim (4,2 - 6,6) \text{ ГэВ}^2. \quad (84)$$

Задержим внимание читателя на этом результате. Удерживая вклад одного η' -мезона, который всегда считался кварковым состоянием, мы уже доказали, что в глюонном канале масштаб нарушения асимптотической свободы по крайней мере на порядок

больше, чем в ρ -мезонном случае. Естественно, что вклад глюонных резонансов (или глюонного континуума) как-то увеличит $M_{\text{кр}}^2$ по сравнению с (84), так что оценка (51) вовсе не кажется преувеличением.

Псевдоскалярный канал интересен также тем, что здесь можно ожидать реализации большого масштаба нарушения асимптотической свободы в виде большой массы наиминимального истинно глюонного резонанса. Было бы странно ожидать глюонного состояния с массой меньше (4—6) ГэВ² — по дуальности этот интервал энергий уже отдан η' -мезону. Итак, по-видимому,

$$\text{масса псевдоскалярного глюония } M_{0^-} \gtrsim 2 \div 2,5 \text{ ГэВ.} \quad (85)$$

Экспериментальное подтверждение этих ожиданий было бы очень важно.

В последнее время интенсивно обсуждается резонанс G (1440), обнаруженный [57] в реакции $J/\psi \rightarrow \gamma K \bar{K} \pi$, который, по-видимому, не совпадает с известным из сильных взаимодействий мезоном E (1420) [58, 59]. Если это так, то G (1440) следует, видимо, отождествить с радиальным возбуждением η' , поскольку собственно глюонный резонанс должен быть тяжелее. Резонанс G (1440) рассматривается как естественный кандидат в глюболлы. Согласно работам [58, 59], хотя $J^P = 1^+, 2^-$ не исключаются, наиболее предпочтительны квантовые числа 0^- .

11. МАССОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ η'

Итак, в определенном смысле η' сильно связан с глюонным миром — при низких энергиях этот мезон доминирует в корреляторе глюонных токов (74). Не будь глюонов, мы имели бы девятый псевдоскалярный голдстоуновский мезон [29] и $m_{\eta'} \rightarrow 0$, что далеко от действительности. Правда, при $N_c \rightarrow \infty$ связь с глюонами выключается и $m_{\eta'}^2 \sim (1/N_c) \rightarrow 0$ [15]. При $N_c = 3$, однако, $m_{\eta'}^2 \approx 1,8m_\rho^2$. (Во введении говорилось о простом объяснении этого феномена: $m_{\eta'}^2$ надо сравнивать не с m_ρ^2 , а с 15 ГэВ²-характерным масштабом нарушения асимптотической свободы в псевдоскалярном канале.)

Отменяет ли сильная связь с глюонами стандартное понимание η' как кваркового мезона? Не обязательно. Если пытаться перевести результаты на язык обычных составных моделей, то можно думать, что глюонная составляющая в волновой функции η' меньше кварковой, причем параметром малости служит, по-видимому,

$$\bar{m}_{\eta'}^2 / M_{0^-, \text{ глюоны}}^2 \sim 10^{-1}. \quad (86)$$

Ниже малость отношения (86) будет использована для получения массовой формулы, связывающей $m_{\eta'}$ с вакуумным ожиданием $\langle \alpha_s G^2 \rangle$.

В предыдущем разделе отмечалось, что все оценки непертурбативных эффектов одинаковы в скалярном и псевдоскалярном глюонных каналах. Различие в феноменологии связано с различием в низкоэнергетическом поведении соответствующих корреляторов [ср. (53а) и (75)]. Будем рассуждать так. В мире без легких кварков корреляторы $P(Q^2)$ и $S(Q^2)$ действительно подобны в низкоэнергетической области. [Инстантонный вклад в $S(Q^2)$ и $P(Q^2)$ одинаков; если верить, что инстантоны правильно передают квантовые числа прямых флуктуаций, то это верно и для главных непертурбативных членов вообще.] Учет кварков приводит к относительно легкому состоянию η' , и η' возмущает коррелятор $P(Q^2 \sim 0)$. В большом масштабе, характерном для $P(Q^2)$, это возмущение почти локально по энергии. Точка $Q^2 = 0$ лежит в этой относительно небольшой области. Поэтому низкоэнергетические теоремы (53а), (75) различны.

Итак, в мире без легких кварков мы бы ожидали, что

$$P_{nlq}(Q^2=0) \approx -S_{nlq}(Q^2=0) = -\frac{18}{b} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{nlq}, \quad (87)$$

где nlq означает *no light quarks*. Тогда возникают следующие правила сумм [ср. с (71)]:

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi^3}{9M^4} \int \text{Im} P_{nlq}(s) \exp\left(-\frac{s}{M^2}\right) \frac{ds}{s} = \\ & = \alpha_s^2(M^2) \left[1 - \frac{1}{M^4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \frac{16\pi^4}{b\alpha_s^2(M^2)} + \dots \right], \end{aligned} \quad (88)$$

где поправка, пропорциональная M^{-4} , отражает то обстоятельство, что $P_{nlq}(Q^2=0) \neq 0$. В реальном мире эффект η' -мезона изменяет $P(Q^2=0)$, так что $P(Q^2=0) = 0$, и нет лидирующей поправки $\sim M^{-4}$ — она в точности сократилась вкладом полюса η' . Тогда

$$\int [\text{Im} P(s)]_{\eta'} \frac{ds}{s} = \frac{18\pi}{b} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle, \quad (89)$$

что и соответствует выписанному ранее массовому соотношению (11)*.

Подставляя числа [см. (5)], находим

$$f_{\eta'} \approx 160 \text{ МэВ (массовая формула)}. \quad (90)$$

Учитывая нетривиальность вывода, согласие с экспериментальным значением (83) хорошее.

Отметим, что малость массы η' использовалась в контексте многоцветной хромодинамики ранее [15]. Результатом является

* После того как вышла работа [17], аналогичное соотношение было получено другим способом и независимо Крютером и Дьяконовым и Эйдесом.

хорошо известное соотношение

$$m_{\eta'}^2 f_{\eta'}^2 = 36 \frac{d^2 \varepsilon_{nlq}}{d\theta^2} (N_c \rightarrow \infty), \quad (91)$$

где ε — плотность энергии вакуума, а угол θ характеризует добавку к лагранжиану квантовой хромодинамики

$$\Delta L = \theta \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a$$

[имеющиеся данные сильно ограничивают значение θ , $\theta_{\text{эксп}} \approx 0$, но это неважно для соотношения (91)].

Наша гипотеза о лидирующей роли самодуальных полей в мире без легких кварков позволяет найти θ -зависимость ε_{nlq} и получить (11) исходя из (91).

Действительно, рассмотрим вакуумные ожидания

$$\langle G^2 + iG\tilde{G} \rangle_{nlq} \quad \text{и} \quad \langle G^2 - iG\tilde{G} \rangle_{nlq}.$$

Для одного из них в функциональном интеграле выпадают дуальные поля, для другого — антидуальные, и эффективные лагранжианы, с помощью которых вычисляются эти матричные элементы, таковы:

$$L_{\text{эвкл}}^{\text{эф}} = \begin{cases} -\frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{g^2} + \frac{i\theta}{8\pi^2} \right) G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \\ -\frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{i\theta}{8\pi^2} \right) G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \end{cases} \quad (92)$$

Видно, что влияние θ -члена сводится к изменению константы. Поэтому зависимость вакуумных средних от θ можно установить с помощью соображений ренорм-инвариантности. В частности,

$$\langle \alpha_s G^2 \rangle_{nlq} = \text{const Re } M_0^4 \exp \left(-\frac{32\pi^2}{bg_0^2} - \frac{4i\theta}{b} \right), \quad (93)$$

где M_0 — масса ультрафиолетового регулятора $g_0 \equiv g(M_0)$, $b = \frac{11}{3} N_c$.

Вспомним теперь, что [4]

$$\varepsilon_{nlq} \simeq -\frac{b}{32} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\rangle_{nlq} \sim \cos \left(\frac{4\theta}{b} \right),$$

и, следовательно, $d^2 \varepsilon_{nlq} / d\theta^2 = -\frac{16}{b^2} \varepsilon_{nlq}$. Подставляя в (91), воспроизводим (11):

$$m_{\eta'}^2 f_{\eta'}^2 = \frac{18}{b} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{nlq}. \quad (94)$$

Отметим, что в этом разделе мы многократно встречались с величинами, относящимися к воображаемому миру без легких кварков. Он интересен и по другим причинам. Вернемся к более систематическому обсуждению в разд. 13.

Здесь же кажется уместным резюмировать, что физика η' -мезона уже сейчас подтверждает существование разных масштабов масс в адронном мире не только качественно, но и количественно. Успех массовой формулы для η' -мезона [см. (90) и (83)] подтверждает нашу гипотезу о роли прямых флуктуаций.

12. ТЕНЗОРНЫЙ ГЛЮОНИЙ

Прежде чем анализировать правила сумм, приведем одно соображение, касающееся рождения тензорного глюония в процессе $J/\psi \rightarrow \gamma +$ адроны. Обычно полагают, что в этой реакции в конечном состоянии доминируют адроны с $J^P = 2^+$, в основном глюонные мезоны. Подобное мнение основано, по-видимому, на пертурбативных результатах работы [51], в которой рассматривалась амплитуда $c\bar{c} \rightarrow \gamma gg$ и было проведено разложение амплитуды по состояниям с определенным значением $J^P (gg)$. Хотелось бы подчеркнуть, что в случае эксклюзивных распадов

$$J/\psi \rightarrow \gamma + \text{мезон} \quad (95)$$

ситуация не столь проста. В каналах 0^\pm , как мы видели, прямые непертурбативные флуктуации эффективно перемешивают кварковые и глюонные степени свободы. В канале 2^+ имеется другой эффект, о котором часто забывают. В процессе аннигиляции глюоны испускаются на расстояниях около $1/m_c$, т. е. возникает оператор $\theta_{\mu\nu}^G(m_c)$, где m_c указывает точку нормировки, а

$$\theta_{\mu\nu}^G = -G_{\nu\alpha}^a G_{\nu\alpha}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a. \quad (96)$$

В волновых функциях мезонов, однако, характерные виртуальности порядка μ , поэтому следует учесть эволюцию операторов от m_c до μ . При этом $\theta_{\mu\nu}^G$ смешивается с кварковым оператором $\theta_{\mu\nu}^q = \bar{q}\gamma_\mu D_\nu q$ в главном логарифмическом приближении за счет членов $\alpha_s \ln 4m_c^2/\mu^2$:

$$\theta_{\mu\nu}^G(m_c) = a\theta_{\mu\nu}^G(\mu) + b\theta_{\mu\nu}^q(\mu),$$

и при реалистическом выборе параметров $a \sim b$. Таким образом, радиационный распад J/ψ служит точечным источником и глюонов, и кварков. [В свое время мы защищали [60] точку зрения, согласно которой наблюдаемая 50%-ная доля глюонов в нуклонах, обнаруженная в глубокой неупругости, связана с логариф-

мическим смешиванием тензорных токов. По существу тот же феномен проявляется в распадах (95).] Вот почему чисто кварковый мезон f рождается в реакции (95) без всякого подавления [61] (точнее говоря, подавление порядка α_s скомпенсировано большим логарифмом $\ln 4m_s^2/\mu^2$).

Обратимся теперь к правилам сумм для тензорного глюония. Наша цель — проверить догадку (32) о критической массе в этом канале. Введем коррелятор

$$P_{\mu\nu, \mu'\nu'} = i \int dx \exp(iqx) \langle 0 | T \{ \theta_{\mu\nu}^G(x), \theta_{\mu'\nu'}^G(0) \} | 0 \rangle, \quad (97)$$

где ток $\theta_{\mu\nu}^G$ определен в (96). Поскольку мы интересуемся резонансной областью, следует с самого начала нормировать ток в низкой точке нормировки μ . Тогда смешиванием с кварками можно пренебречь. (Впрочем, этот эффект практически не влияет на ответ для массы.) Вообще говоря, след $\theta_{\mu\nu}^G$ отличен от нуля (из-за аномалии), и следовало бы произвести соответствующее вычитание. Оно, однако, не сказывается в старшем порядке по α_s . В частности, голая петля (см. рис. 1) приводит к следующему вкладу в $P_{\mu\nu, \mu'\nu'}$:

$$P_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(0)} = \eta_{\mu\nu, \mu'\nu'} \frac{Q^4}{20\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{Q^2}; \quad (98)$$

$$\eta_{\mu\nu, \mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} \eta_{\nu\nu'} + \eta_{\mu\nu'} \eta_{\mu'\nu} - \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\mu'\nu'}; \quad \eta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{\alpha} g_{\beta} / g^2,$$

где тензор $\eta_{\mu\nu, \mu'\nu'}$ пропорционален матрице плотности для спина 2; $g_{\mu} \Pi_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(0)} = 0$; $\Pi_{\mu\mu, \mu'\nu'}^{(0)} = 0$.

Прямые инстантоны не дают вклада в рассматриваемый коррелятор (см. [256] и Приложение А). Поправки на рассеяние на мягких вакуумных полях были вычислены нами ранее [256]. Если ввести инвариантную функцию $T(Q^2)$, $\Pi_{\mu\nu, \mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu, \mu'\nu'} T$, то

$$T(Q^2) = \frac{Q^4}{20\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{5g^2}{12Q^4} \langle 2O_1 - O_2 \rangle, \quad (99)$$

где

$$O_1 = (f^{abc} G_{\mu\alpha}^b G_{\nu\alpha}^c)^2; \quad O_2 = (f^{abc} G_{\mu\nu}^b G_{\alpha\beta}^c)^2$$

и f^{abc} — стандартные $SU(3)$ -символы. Матричный элемент от G^4 можно оценить в предположении факторизации $\langle G^4 \rangle \sim \langle G^2 \rangle^2$. Другими словами, мы насыщаем вакуумным промежуточным состоянием во всех каналах. В интересующем нас контексте подобная процедура была впервые предложена в [4]. Детальное описание для глюонных операторов см. в [62]. Для операторов, входящих в (99), имеем $\langle 2O_1 - O_2 \rangle = (-3/16) \langle G^2 \rangle^2$. Следует отметить, что неопределенность порядка единицы в оценке $\langle 2O_1 - O_2 \rangle$ может сместить предсказание для массы тензорного глюония

примерно на 10%. Переходя как и раньше, к борелевскому образу поляризационного оператора получаем правило сумм:

$$\frac{10\pi}{M^6} \int ds \exp(-s/M^2) \operatorname{Im} T(s) = 1 - \frac{25\pi^5}{8\alpha_s(M^2)} \frac{\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle^2}{M^8} + \dots,$$

и численная оценка, основанная на (5), дает для масштабного фактора

$$\frac{25}{8} \frac{\pi^5}{\alpha_s(M^2)} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle^2 \equiv (\Delta^2)^4, \\ \Delta^2 \approx 0,86 \text{ ГэВ}^2, \quad (\alpha_s(M^2) \approx 0,25).$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$M_{2^+, \text{ глюоны}}^2 \approx 1,6 \text{ ГэВ}^2. \quad (100)$$

Отметим близость окончательного результата (100) к грубой оценке (32).

В отличие от ρ -мезонного случая мы не ожидаем теперь, что параметр $M_{2^+, \text{ глюоны}}^2$ точно совпадает с массой наименьшего тензорного глюбола. Отличие связано с тем фактом, что $\operatorname{Im} T(s)$ растет с s , $\operatorname{Im} T \sim s^2$, и для данного M^2 интеграл $\int ds \operatorname{Im} T \exp(-s/M^2)$, входящий в правило сумм, насыщается областью $s \sim 2M^2$. Оценка (100) служит скорее нижней границей для m (глюбол 2^+). Чтобы получить более аккуратную оценку массы, удобно применить следующую процедуру. Рассмотрим отношение

$$F(M^2) = \int s \exp(-s/M^2) \operatorname{Im} T ds / \int \exp(-s/M^2) \operatorname{Im} T ds.$$

Совершенно очевидно, что $m^2 < F(M^2)$ для всех M^2 и $m^2 = F(M^2 \rightarrow 0)$. (Здесь m тождественно равна массе наименьшего глюбола 2^+ .) Нам известны только два первых члена в разложении $F(M^2)$:

$$F(M^2) = 3M^2 \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta^2}{M^2} \right)^4 + \dots \right)$$

и устремить M^2 к нулю невозможно. Можно, однако, найти минимальное значение $F(M^2)$, и, если этот минимум реализуется при не слишком малых M^2 , он дает надежную верхнюю границу на m^2 :

$$m^2 \leq \min_{M^2} \left\{ 3M^2 \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta^2}{M^2} \right)^4 \right) \right\} = 4 \sqrt{2} \Delta^2 \approx (2,2 \text{ ГэВ})^2. \quad (101)$$

Минимум достигается при $M^2 = \sqrt{2} \Delta^2$, а в этой точке степенная поправка составляет только одну треть, так что можно думать,

что неучтенные степенные члены не могут существенно изменить результат.

Верхняя граница, полученная таким образом, должна быть близка к истинному положению наинизшего уровня. Обратимся опять к гармоническому осциллятору, обсуждавшемуся в разд. 1, рассмотрим каналы с различным значением углового момента $l = 0, 2, \dots$. В этом случае минимизационная процедура, описанная выше, дает $\left(\frac{3}{2}\omega + l\right)\frac{2}{\sqrt{3}}$, что превышает точное положение наинизшего уровня $\left(\frac{3}{2}\omega + l\right)$ всего на 15%. Пример тензорного кваркония, f -мезона, еще более поучителен, поскольку это — ближайший родственник глюбола 2^+ , и соответствующие правила сумм имеют много общего. Написав правила сумм для f -мезона, можно получить

$$m_f^2 \leq \min_{M^2} \left\{ 3M^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{20}{27} \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{M^4} \right) \right\} = 2\sqrt{3} \left(\frac{20}{27} \langle g^2 G^2 \rangle \right)^{1/2}.$$

Значение $m_f^2 \approx 1,6 \text{ ГэВ}^2$, в то время как правая часть равна примерно 2 ГэВ^2 . Естественно ожидать, что ситуация в глюонном канале 2^+ похожа, и масса² наинизшего 2^+ -глюбола составляет примерно 2 ГэВ^2 [ср. с формулой (101)].

Отметим, что в рассматриваемом приближении результат не зависит от четности, состояния $J^P = 2^\pm$ вырождены. Далее, поскольку прямые инстантоны отсутствуют, мы ожидаем относительно небольшого смешивания между кварковыми и глюонными степенями свободы. Наше ожидание косвенно подтверждается тем, что кварковый нонет 2^+ устроен так же, как и 1^- [30]: $f \sim \bar{u}i + \bar{d}d$, $f' \sim \bar{s}s$. Малость D -волнового вклада в распаде $\psi' \rightarrow J/\psi \ell \ell$ по сравнению с S -волновым свидетельствует об этом же (см. разд. 7).

13. В МИРЕ БЕЗ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

Мы закончили рассмотрение различных токов и переходим к обсуждению некоторых общих для всего предмета аспектов. В разд. 11 нам понадобились сведения о мире без легких кварков. Здесь мы обсудим этот мир подробнее.

Вопрос заслуживает пристального внимания по следующей причине. Все эмпирические данные относятся, естественно, к миру с легкими кварками. С другой стороны, в КХД прямое вычисление спектра адронов пока невозможно. Есть, однако, надежды на численное решение решеточного варианта теории. По причинам, которые здесь не место обсуждать, вычисления на решетке пока не идут дальше чистой глюодинамики. Результаты сравни-

вать с опытом, только если известно, как меняется спектр глюоболов с выключением легких кварков.

Выше неоднократно упоминалось, что все массовые масштабы задаются вакуумными средними, прежде всего $\langle \alpha_s G^2 \rangle$. Поэтому в первую очередь было бы важно выяснить, как меняется $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ с выключением легких кварков. Мы покажем, что $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ возрастает в 2—3 раза.

Первый шаг в доказательстве состоит в следующем. Воспользуемся низкоэнергетической теоремой

$$\frac{d}{dm_q} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\rangle = -\frac{24}{b} \langle \bar{q}q \rangle, \quad (102)$$

которая справедлива при малых массах кварка $m_q \ll \mu$ (отметим, что $\langle \bar{q}q \rangle < 0$). Она вытекает, в свою очередь, из соотношения

$$\frac{d}{dm_q} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle = -i \int dx \langle 0 | T \left\{ \frac{\alpha_s}{\pi} G^2(0), \bar{q}(x) q(x) \right\} | 0 \rangle, \quad (103)$$

и соответствующий коррелятор был уже найден [см. (53б)].

В связи с теоремой (102) кажутся уместными два замечания. Во-первых, знак производной согласуется с тем, что можно было бы ожидать на примере инстантонов. Действительно, увеличивая массу кварка, мы высвобождаем инстантоны из-под кирального запрета (см. обсуждение в разд. 3) и тем самым увеличиваем G^2 . Далее можно оценить, какова была бы величина $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ в мире с ненарушенной $SU(3)$ -симметрией, т. е. при $m_u = m_d = m_s = 0$. Действительно, увеличивая массу странного кварка от нуля до значения $m_s = 150$ МэВ, получаем

$$\Delta \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \approx -\frac{24}{b} m_s \langle \bar{s}s \rangle \approx 0,5 (0,012 \text{ ГэВ}^4). \quad (104)$$

Используя (5) в качестве эмпирической оценки $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$, заключаем, что в киральном пределе $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{\text{кир}} \approx 0,5 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{\text{эксп}}$ (индексом *кир* отмечен киральный предел). Прирост оказывается неожиданно большим: значение $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$ примерно удвоилось от включения массы странного кварка.

Вернемся теперь к оценке $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ в мире без легких кварков (или, что то же самое, в мире, где все кварки очень тяжелые). Для начала сдвинем массы *u*- и *d*-кварков в точку $m_q = 150$ МэВ:

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{m_u, d, s=150 \text{ МэВ}} \approx 2 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{\text{эксп}}. \quad (105)$$

Дальнейшие заключения менее определены: у нас нет больше строгих теорем. Ясно, однако, что как только кварк станет доста-

точно тяжелым: $m_q \sim \mu$, дальнейшее изменение m_q не важно. Мы думаем, что эта критическая точка расположена не так далеко: около $m_q \approx 200$ МэВ. Тогда дальнейшее увеличение массы от точки (105) до бесконечности не столь существенно, и

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{nlq} = (2 \div 3) \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{\text{экср}}. \quad (106)$$

Попробуем оценить $\langle \alpha_s G^2 \rangle_{nlq}$, приближаясь к критической по массе точке сверху. Если стартовать с очень тяжелого кварка Q , то можно показать [4], что

$$\langle \bar{Q}Q \rangle = -\frac{1}{12m_Q} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{nlq} + O(m_Q^{-3}). \quad (107)$$

Подставляя ту же массу $m_Q = 200$ МэВ и невозмущенное значение $\langle \bar{Q}Q \rangle = \langle \bar{q}q \rangle$, имеем *

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{nlq} \approx 0,0375 \text{ ГэВ}^4 \approx 3 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle_{\text{экср}}. \quad (108)$$

Последнее замечание сводится к тому, что при малых m_q можно вычислить и вторую производную от $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ по массе кварка. Действительно, пусть для простоты массы u - и d -кварков совпадают: $m_u = m_d = m$. Тогда

$$\frac{d^2}{dm^2} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle = -\frac{24}{b} \frac{d}{dm} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle,$$

и**

$$\frac{d}{dm} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -\frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2 \ln \frac{M_0^2}{m_\pi^2} + (\text{члены, регулярные при } m_\pi^2 \rightarrow 0). \quad (109)$$

Наше оригинальное замечание сводится к тому, что эта теорема, по всей видимости, верна только при очень малых массах m и не представляет поэтому большого интереса с практической точки зрения. Уже при $m \sim 35$ МэВ знак второй производной от $\langle \alpha_s G^2 \rangle$, скорее всего, меняется. Причина заключается в том, что соотношение (109) основано на доминантности двухпионного разреза над всеми другими адронными вкладками. Числа, однако, неблагоприятны для двухпионного разреза, и хотя теорема (109) точна в пределе m или $m_\pi^2 = 0$, ее область применимости мала. (Подробнее см. Приложение Г.)

* Внимательный читатель, возможно, заметил, что при численных оценках в разд. 11 мы пренебрегли разницей между $\langle \alpha_s G^2 \rangle_{nlq}$ и $\langle \alpha_s G^2 \rangle_{\text{экср}}$ [ср. (11) и (94)]. Можно провести более детальный анализ, учитывающий подрастание $\langle \alpha_s G^2 \rangle_{nlq}$. При этом необходимо одновременно учесть, что начало континуума в nlq -мире также сдвигается. Оба эффекта компенсируют друг друга.

** Результат, видимо, известен давно.

Резюмируя, можно сказать, что с выключением легких кварков $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ увеличивается раза в 2—3 и соответственно квадраты масс мезонов увеличиваются примерно в 1,5 раза.

14. МОДЕЛЬ МЕШКОВ И КХД

В данной статье мы отстаиваем точку зрения, согласно которой массовые масштабы адронной физики меняются от канала к каналу. Между тем широко распространено убеждение, что все адроны можно описать более или менее универсально в модели мешков. Здесь мы покажем, что в модели мешков есть некоторый скрытый параметр — потенциальный источник неуниверсальности.

Напомним, как может возникнуть в КХД нечто похожее на модель мешков [4, 63]. В вакууме присутствуют непертурбативные флуктуации, которые понижают энергию вакуума по сравнению с теорией возмущений. То обстоятельство, что инстантоны понижают энергию вакуума, известно давно [12]. Более того, знак эффекта может быть установлен в общем виде. Именно, используя строгие уравнения движения КХД, легко убедиться [4], что

$$\epsilon_{\text{вак}} \approx -\frac{9}{32} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \approx -(0,25 \text{ ГэВ})^4, \quad (110)$$

где $\epsilon_{\text{вак}}$ — плотность энергии вакуума, точнее, разница между этой величиной в физическом вакууме и математическом вакууме теории возмущений. (Соответственно мы определяем вакуумное ожидание $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ таким образом, чтобы оно равнялось нулю в теории возмущений.)

Внесение кварков подавляет непертурбативные флуктуации внутри адронов. Этот факт опять явно демонстрируется инстантонами во внешнем цветном электрическом поле [63] и имеет достаточно общий характер. В итоге внутри адронов среднее значение $\langle \alpha_s G^2 \rangle$ меньше по модулю, чем в вакууме.

Открытым остается вопрос о том, насколько сильно это подавление вакуумных флуктуаций внутри адронов. Попытка теоретического ответа содержится в работе [63a]: утверждается, что имеет место фазовый переход и подавление флуктуаций полное; однако, на наш взгляд, используются столь сильные приближения (особенно если думать о реальных адронах), что результату вряд ли можно доверять.

Попробуем ответить на вопрос о степени подавления флуктуаций полем кварков феноменологически. Разность между плотностью энергии внутри адрона и $\epsilon_{\text{вак}}$ описывается феноменологически мешковой константой B , которая оценивается численно как [42, 64].

$$B \approx (0,10 \div 0,12 \text{ ГэВ})^4.$$

Обозначая плотность энергии внутри, скажем, ρ -мезона ϵ_ρ , имеем

$$(\epsilon_\rho - \epsilon_{\text{вак}})/|\epsilon_{\text{вак}}| \sim B/|\epsilon_{\text{вак}}| \sim \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right). \quad (111)$$

(Независимо этот факт отмечен в [65].) Помимо этого эмпирического свидетельства имеются и теоретические аргументы в пользу того, что непertурбативные флуктуации внутри адрона заморожены относительно слабо [62, 66]. Например, в пределе большого числа цветов $B \sim N_c^0$, $\epsilon_{\text{вак}} \sim N_c^2$ и

$$(\epsilon_\rho - \epsilon_{\text{вак}})/|\epsilon_{\text{вак}}| \sim 1/N_c^2, \quad (112)$$

так что в этом пределе нет никакого фазового перехода.

Соотношение (111) явно демонстрирует, что замораживание вакуумных флуктуаций мало в случае токов, которые общаются с вакуумом только на уровне квантовых поправок (см. Введение). Если бы мы не могли установить этого независимым образом, то следовало бы выдумать неравенство $(\epsilon_\rho - \epsilon_{\text{вак}}) \ll |\epsilon_{\text{вак}}|$, чтобы объяснить поразительный численный успех ρ -мезонных правил сумм.

Примем поэтому (111) и обсудим некоторые следствия этого результата, а именно:

а) происхождение $SU(6)$ -симметрии; б) КХД-экзотики.

а) В киральном пределе π -мезон безмассовый, так как это голдстоуновское возбуждение. С другой стороны, $SU(6)$ -симметрия связывает свойства π -мезона с классическим адроном, ρ -мезоном, что давно вызывает недоумение. Решение проблемы, по-видимому, сводится к следующему. Чтобы представить себе π -мезон, вспомним, что в вакууме всегда есть пары в состоянии 3P_0 (конденсат $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$). Если перевернуть спин, ${}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0$, то образуется псевдоскалярное состояние, пион. В силу безмассовости π -мезона переворот спина не требует затрат энергии ($\epsilon_\pi = \epsilon_{\text{вак}}$) — вакуумные поля в известном смысле не возмущены вовсе. Теперь мы узнали, что внутри ρ -мезона возмущение вакуума тоже мало: ϵ_ρ хотя и не совпадает с $\epsilon_{\text{вак}}$, но весьма близко к этой величине. Следовательно, приближенная $SU(6)$ -симметрия, связывающая π - и ρ -мезоны, может быть обусловлена общей малостью перестройки вакуума внутри обычных адронов, а не буквальным совпадением кваркового взаимодействия. Аналогично $SU(3)$ -симметрия означает не совпадение масс кварков, а то, что эти массы малы по сравнению с характерным масштабом КХД.

Отметим, что в рамках развиваемой картины кварковые волновые функции (и размеры) 0^- - и 1^- -мезонов приблизительно равны и, что более интересно, совпадают с волновой функцией конденсатной пары.

б) Как только установлено, что внутри обычных адронов подавление вакуумных флуктуаций слабое, естественно предположить существование экзотических состояний, в которых это подавление значительно сильнее. Рассмотрим две экстремальные возможности. Предположим сначала, что одновременно с тем, как растет степень вытеснения флуктуаций, уменьшается радиус адронов. Иными словами, имеет место нечто вроде модели мешков, но с изменяющейся константой B . Тогда при полном вытеснении масса соответствующего мезона $m^2 \approx m_\rho^2 [\epsilon_{\text{вак}}/(\epsilon_{\text{вак}} - \epsilon_\rho)]^{1/2} \approx 4m_\rho^2$. Если же думать, что размер адрона во всех случаях совпадает с размером характерной вакуумной флуктуации, то в ситуации с полностью замороженным вакуумом $m^2 \approx m_\rho^2 [\epsilon_{\text{вак}}/(\epsilon_{\text{вак}} - \epsilon_\rho)]^2 \approx \approx 250m_\rho^2$. По-видимому, истина где-то посередине.

Мы не хотели бы сейчас делать выбор между этими возможностями. Более того, мы не думаем, что язык модели мешков в действительности адекватен проблеме. Мы должны показать, что эта часто обсуждаемая модель также не исключает иерархии масштабов масс. Правила сумм КХД утверждают, что явление иерархии масс заведомо существует.

В заключение отметим, что вариация константы B при переходе от мезонов к барионам была введена впервые на феноменологическом уровне в работе [64]. Однако так как в модели мешков вовсе не учитывается кварковый конденсат, играющий особенно важную роль в формировании барионного спектра, то трудно судить, насколько это (впрочем, относительно небольшое) изменение константы B связано с рассмотренным выше явлением. Более того, в работе [6], где массы барионов были вычислены исходя из правил сумм КХД, показано, что задача о нуклоне и Δ -резонансе в принципиальных аспектах не отличается от ρ -мезонной задачи. Следовательно, воздействие кварков на вакуум как в ρ -мезоне, так и в нуклоне приблизительно одинаково.

15. КОММЕНТАРИИ К БОЛЬШИМ N_c

За последние годы стало привычным обсуждать адронную динамику в пределе большого числа цветов. Мы разделяем некоторые технические моменты с этим подходом, например в обоих случаях приходится стартовать с двухточечных функций в эвклидовой области, а не в физической. Вместе с тем следует подчеркнуть, что иерархия массовых масштабов, на которой мы хотели бы настаивать, никак не проявляется при стандартном подсчете степеней N_c . Когда говорят о следствиях многоцветной хромодинамики, обычно подразумевают, что все размерные параметры более или менее универсальны. На наш взгляд, более правильна следующая точка зрения. В каналах, характеризующихся небольшой критической массой асимптотические предсказания, относящиеся к $N_c \rightarrow \infty$,

действительно являются неплохим приближением к трехцветному миру. С увеличением $M_{\text{крит}}^2$ точность разложения по $1/N_c$ падает. В каналах с максимальным значением $M_{\text{крит}}^2$ картина, возникающая в многоцветной хромодинамике, существенно (качественно) отличается от реальной ситуации с тремя цветами.

С одним из примеров, подтверждающих этот вывод, мы уже сталкивались в разд. 7. Смешивание между кварками разных ароматов, выключающееся в пределе $N_c = \infty$, в нонете псевдоскалярных мезонов оказывается порядка единицы. (Напомним, что для классических векторных мезонов смешивание составляет несколько процентов.)

Поучителен и другой пример, относящийся к каналу 0^+ . Пусть $m_u = m_d = m_s = m \rightarrow 0$. Тогда низкоэнергетическая теорема (102) гласит:

$$\frac{d}{dm} \ln \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle = -\frac{24}{b} \frac{\langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle}{\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle}, \quad (113)$$

что означает, конечно,

$$(d/dm) \ln \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \sim 1/N_c \rightarrow 0 \text{ при } N_c \rightarrow \infty. \quad (114)$$

(Впрочем, последнее обстоятельство — нечувствительность глюонного конденсата к изменению массы легкого кварка при $N_c = \infty$ — очевидно и само по себе. Действительно, m_q может входить только через кварковые петли, которые подавлены фактором $1/N_c$.)

С другой стороны, в разд. 13 показано, что изменение только массы странного кварка от $SU(3)$ -симметричного значения $m_s = 0$ до реального числа $m_s = 150$ МэВ меняет значение $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$ примерно в 2 раза. Если подставить эмпирические значения $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$ и $\langle \bar{q}q \rangle$, то

$$(d/dm) \ln \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \sim 1/100 \text{ МэВ},$$

что следует сравнивать с естественной оценкой $(1/\Delta m) \sim (1/200)$ МэВ. Независимо от существующей неопределенности в числах (около 1,5—2) видно, что эффект велик.

Подобное отклонение от асимптотических по N_c результатов представляется естественным, если исходить из способа оценок, принятого в настоящей работе. Действительно, обе части (113) одного порядка по $1/g$ (см. Введение), и изменение массы кварка от нуля до граничного значения порядка 200 МэВ, вообще говоря, изменяет $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$ на 100%.

Еще хуже работает $1/N_c$ -разложение в корреляторе

$$\left\langle \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2(x), \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2(0) \right\rangle. \quad (115)$$

Рассмотрим, следуя работе [53], безразмерное отношение спектральных плотностей

$$r = \frac{\left| \langle 0 \left| \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2 \right| 2_{\text{глюона, теор. возм.}} \rangle \right|^2}{\left| \langle 0 \left| \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2 \right| \text{пл., } K\bar{K}, \eta\eta \right|^2}, \quad (116)$$

которое удобно тем, что все нормировки в нем сокращаются. Знаменатель, содержащий кварковые петли, подавлен при $N_c \rightarrow \infty$ по сравнению с числителем [53]:

$$r = (N_c^2 - 1) \left(16 \ln^2 \frac{q}{\Lambda} \right) \sim N_c^2, \quad (117)$$

где q^2 — инвариантная масса конечной пары, и для оценки знаменателя (в киральном пределе) мы воспользовались низкоэнергетическими теоремами типа (67). Легко убедиться, что при $N_c = 3$ отношение r мало. Скажем, при $q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ и $\Lambda \sim 100 \text{ МэВ}$ $r \approx 0,1$. Обратим внимание на яркий контраст между этим числом и асимптотическим результатом $r \sim N_c^2$. В рамках рассмотренной схемы, однако, он не кажется удивительным. Напомним, что для коррелятора (115) масштаб нарушения асимптотической свободы максимален. Поскольку в канале 0^+ смешивание кварковых и глюонных степеней свободы велико, большой параметр проникает и в матричные элементы типа $\langle 0 \left| \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2 \right| \text{пл} \rangle$. Кроме того, вычисляя простейший график теории возмущений, мы пропускаем этот большой параметр. В результате счет по $1/N_c$ резко нарушается.

Этими примерами мы вовсе не хотим умалить эвристической ценности многоцветной хромодинамики. Замечательная ее черта, которая не имеет аналога в настоящей схеме, состоит в том, что появляется настоящий свободный параметр $1/N_c$. Петлевой параметр малости l , фигурирующий в рассматриваемом подходе, численный, $l \sim (4\pi^2)^{-1}$. В настоящее время не известно, как можно было бы последовательно устремить его к нулю*.

В некоторых случаях оба подхода успешно сосуществуют и дополняют друг друга. Один из самых интересных случаев — физика η' -мезона. Масса η' исчезает в пределе больших N_c , а оценка критического параметра $M^2_{0^-}$, глюоны придает смысл этому утверждению, определяя масштаб, в котором мала величина $m_{\eta'}^2$.

* Этот параметр, по-видимому, связан с размерностью D пространства-времени, $l \rightarrow 0$, если $D \rightarrow \infty$. Обобщение КХД на $D > 4$ нам неизвестно.

При больших энергиях $E \gg M_{кр}$, счет по $1/N_c$ восстанавливается во всех каналах. В этой области спектральные плотности, отвечающие $N_c = 3$ и $N_c = \infty$, близки в смысле дуальности. Первая спектральная плотность представляет собой гладкую кривую, определяемую кварк-глюонными графиками ($E \gg M_{крит}$ — область развитых струй); вторая — сводится к гребенке бесконечно узких резонансов. Усреднив по нескольким резонансам, воспроизведем гладкую кривую с высокой точностью, порядка $M_{кр}/E$ в положительной степени.

Остановимся на этом вопросе несколько более подробно. На первый взгляд динамика, обеспечивающая столь точную дуальность, сложна. Фактически же в ее основе лежат лишь самые общие и простые свойства квантовой хромодинамики. Обсудим их на примере аннигиляции $e^+e^- \rightarrow$ старые адроны. При больших энергиях движение пары $q\bar{q}$, рожденной виртуальным фотоном, можно рассматривать квазиклассически. Если оставить пока в стороне редкие процессы, типа излучения жесткого глюона, можно считать, что каждый из кварков путешествует как свободный в течение времени $T_{своб} \sim E/\Lambda^2$. Действительно, в собственной системе координат каждого из кварков время, необходимое на перестройку вакуума, порядка $1/\Lambda$; при переходе к лабораторной системе появляется дополнительный лоренц-фактор E/Λ . Иными словами, пока кварк голый, вакуум не реагирует на его присутствие. E/Λ^2 — время, за которое каждый из кварков приобретает глюонную шубу. Поскольку оценка $T_{своб}$ очень важна, то следует отметить, что такой результат получается и в точно решаемых двумерных моделях с конфайнментом [67]; более подробное обсуждение $T_{своб}$ см. в [68].

На расстоянии порядка E/Λ^2 разлетающиеся кварки натыкаются на стенки, разворачиваются, затем движутся в обратном направлении, снова натыкаются на стенки и т. д. Таким образом, возникает пульсирующая система $q\bar{q}$, причем трубка, соединяющая кварки, не рвется, если $N_c = \infty$. Уровни энергии такой системы дискретны и следуют на расстоянии порядка Λ^2/E друг от друга, т. е. сгущаются. Если прибор, измеряющий сечение аннигиляции, имеет постоянное энергетическое разрешение, он автоматически суммирует по большому числу уровней, и на выходе мы получаем гладкую кривую, совпадающую с голым кварковым сечением.

Чтобы убедиться в этом, вспомним, что один из способов вычисления $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ как раз и состоит в том, что система $q\bar{q}$ искусственно помещается в ящик очень больших размеров L . В ящике мы всегда имеем дело с дискретным спектром уровней, расположенных на расстоянии порядка $1/L$. После суммирования по большому числу близких уровней получаем обычную формулу

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = (3Q_q^2) 4\pi\alpha^2/3s. \quad (118)$$

Существенно, что область, в которой рождаются кварки, значительно меньше L , а неопределенность в энергии — импульсе значительно больше $1/L$. Тогда форма ящика, его ориентация и т. п. не влияют на ответ.

При $N_c \rightarrow \infty$ и $E \gg M_{\text{крит}}$ подобная ситуация возникает динамически. Расстояние до стенки ящика (т. е. до области, где кварки начинают чувствовать эффекты конфайнмента в полной мере) порядка E/Λ^2 велико, и детали устройства стенок, которые мы пока не знаем, выпадают из задачи после суммирования по близким уровням.

Легко понять, к чему приводит возможное излучение одного жесткого глюона в процессе кварковых пульсаций. Вместо (118) резонансные вклады оказываются дуальными подправленному сечению $(3Q_q^2) (4\pi\alpha^2/3s) (1 + \alpha_s(E)/\pi)$. Для двух глюонов нужно включить следующий порядок по α_s и т. д. Таким образом, при фиксированном энергетическом разрешении сумма по резонансам при $N_c \rightarrow \infty$ не отличается от описания сечений на языке кварковых и глюонных струй, стандартном для высокоэнергетической области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы привели аргументы в пользу того, что одинаковость всех адронов, которую обычно принимают на веру, кажущаяся. Они существенно отличаются по характеру взаимодействия с вакуумом. Проще всего «классические» мезоны — векторные и аксиальные. Их взаимодействие с вакуумом мало возмущает последний. Вакуумные поля можно рассматривать как внешние; кварки воспринимают лишь некоторые средние характеристики вакуумных полей. Находит объяснение феноменологический успех $SU(6)$ -симметрии. Организация π -мезонов вовсе не требует энергии: это те же пары кварков, что и в вакууме. Кварки в векторном состоянии (ρ -мезоны) также мало возмущают вакуум. Мы имеем дело не столько с независимостью сил от спина, сколько с малостью возмущений вакуума и в π^- , и в ρ -мезоне.

Другой предельный случай — это скалярные или псевдоскалярные глюонии. Их теорию нельзя построить, не зная деталей волновой функции вакуума. Внесение глюонов в (псевдо) скалярном состоянии полностью перестраивает среду. Знание характеристик невозмущенного вакуума помогает мало. Вычисление коррелятора скалярных (псевдоскалярных) токов и построение теории вакуума одна и та же задача.

Феноменологически разные случаи отличаются разными массовыми масштабами. Было бы проще, если бы они отличались уже

массой низшего состояния. К сожалению, это не так. Во многих случаях есть специальные причины иметь относительно легкий адрон. Так, безмассовость пиона поддерживается киральной симметрией. В глюонном канале легким оказывается случайно повернувшийся η' . Даже в скалярном глюонном случае правила сумм указывают на относительно легкий мезон с $m \lesssim 1,5$ ГэВ. И все же существование иерархии масштабов оставляет четкий след в традиционной низкоэнергетической феноменологии. Мы ожидаем, что в семействе глоболов проявления этой иерархии будут еще ярче.

Авторы благодарны М. Б. Волошину, Д. И. Дьяконову, В. Н. Грибову, Б. Л. Иоффе, И. Ю. Кобзареву, Р. Крютеру, А. А. Мигдалу, А. М. Полякову, Л. Б. Окуню, В. Черняку, Э. В. Шуряку и М. Эйдесу за полезные обсуждения.

П Р И Л О Ж Е Н И Е А

ИНСТАНТОННЫЕ ПРАВИЛА ОТБОРА

В рамках рассматриваемого подхода все токи классифицируются по характеру связи с вакуумными полями. Мы говорим, что существует прямой вклад, если все поля, которые составляют данный ток, можно заменить на вакуумные. (На рис. 2 и других подобных рисунках соответствующие линии помечены крестиками.)

Прямые вклады являются одним из важнейших элементов классификации — каналы, которые допускают их, выделены. Покажем теперь, что они появляются только в каналах со спином нуль.

Приведем два независимых рассуждения. Оба используют в той или иной степени инстантоны как модель вакуумного поля. Конечно, буквально инстантоны вряд ли могут служить основой последовательного динамического описания вакуума. Мы полагаемся, однако, только на самые общие свойства этих классических решений, которые, скорее всего, присущи любым доминирующим вакуумным флуктуациям.

Рассмотрим локальный бесцветный ток $j_{\alpha\beta\dots\mu\nu}$ с произвольной лоренцевой структурой и кварковым (глюонным) содержанием. Он может нести любое число лоренцевых значков и включать любую комбинацию безмассовых кварков и глюонов:

$$j_{\alpha\beta\dots\mu\nu} = j_{\alpha\beta\dots\mu\nu} [q(x), G(x), D(x)],$$

где $D(x)$ обозначает ковариантную производную. По определению, для того чтобы найти прямой вклад в

$$\prod_{\alpha'\beta'\dots\mu'\nu'}^{\alpha\beta\dots\mu\nu} (q) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ j_{\alpha\beta\dots\mu\nu}(x), j_{\alpha'\beta'\dots\mu'\nu'}(0) \} | 0 \rangle,$$

заменяем все поля, входящие в $j_{\alpha\beta\dots\mu\nu}$, на классические. Из-за трансляционной инвариантности теории последние могут зависеть от x только в комбинации $x - x_0$, где x_0 — внешний произвольный параметр, по которому следует проинтегрировать. (В частном случае $BPST$ -инстантона x_0 является

центром инстантона). Тогда

$$\left[\prod_{\alpha'\beta' \dots \mu'\nu'}^{\alpha\beta \dots \mu\nu} \right]_{\text{прям}} \sim \int \exp(iq(x-x_0)) d(x-x_0) \times \\ \times j_{\alpha\beta \dots \mu\nu} [q^{\text{кл}}(x-x_0)], \quad G^{\text{кл}}(x-x_0), \quad D^{\text{кл}}(x-x_0) \int \exp[iqx_0] dx_0 \times \\ \times j_{\alpha'\beta' \dots \mu'\nu'} [q^{\text{кл}}(-x_0), \quad G^{\text{кл}}(-x_0), \quad D^{\text{кл}}(-x_0)],$$

и мы получаем факторизованное произведение двух фурье-образов.

До сих пор рассмотрение было общим. Предположим теперь, что аналогично инстантонному случаю отсутствуют какие-либо внутренние векторы, от которых мог бы зависеть ток $j_{\alpha\beta \dots \mu\nu} [q^{\text{кл}}(x), \quad G^{\text{кл}}(x), \quad D^{\text{кл}}(x)]$. Тогда из-за свойства факторизации лоренцева структура $\left[\prod_{\alpha'\beta' \dots \mu'\nu'}^{\alpha\beta \dots \mu\nu} \right]_{\text{прям}}$ упро-

щается. Именно $\left[\prod_{\alpha'\beta' \dots \mu'\nu'}^{\alpha\beta \dots \mu\nu} \right]_{\text{прям}}$ может содержать только q_α, \dots, q_ν и g -символы типа $g_{\alpha\beta}, g_{\mu\nu}$ или $g^{\alpha'\beta'}, g^{\mu'\nu'}$, смешанные g -символы вроде $g_{\alpha\alpha'}, g_{\alpha\beta'}, g_{\mu\nu} \dots$, запрещены. Это автоматически означает, что присутствуют только прямые вклады со спином нуль.

Сделаем теперь более сильное утверждение с учетом определенных характерных черт инстантонов. Предположим, что ток $j_{\alpha\beta \dots \mu\nu}$, введенный выше, не содержит ковариантных производных*. Тогда для всех полей, чья лоренцева и цветовая структура аналогична инстантонной (см. ниже), ток $j_{\alpha\beta \dots \mu\nu}$ обращается в нуль тождественно, если только он отвечает ненулевому спину**. Инстантон описывается самодуальным полем, и поэтому, как указал М. Б. Волошин, удобна классификация по подгруппам $SU(2) \times SU(2)$, на которые разбивается группа вращений эвклидова пространства—времени, $O(4) = SU(2) \times SU(2)$. Возьмем, например, тензорный ток

$$\theta_{\mu\nu} = -G_{\mu\alpha}^a G_{\nu\alpha}^a + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a \sim (1,1), \tag{П.1}$$

где мы выписали представление тока по $SU(2) \times SU(2)$. Ясно, что из самодуального поля $G_{\mu\nu}^a \sim (0,1)$ нельзя построить представления (1.1). Никакое самодуальное поле не дает прямого вклада в коррелятор тензорных токов — факт, который был ранее доказан нами явно [256]. Кроме того, для более общего тока $G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a$ получаем

$$G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a \sim (0,2) + (2,0) + (1,1) + (0,0) + (0,0). \tag{П.2}$$

Поэтому на первый взгляд кажется, что самодуальное поле дает вклад не только в скалярную часть (0,0), но и в ток спина 2, а именно (0,2) + (2,0). Вспомним, однако, что инстантоны обладают еще одним специфическим свойством. До сих пор мы не учитывали цвета. Инстантон же является синглетом по группе $SU(2)_{\text{цвет}} \otimes SU(2)_{\text{простр}}$, т. е. относительно одновременных вращений в цветовой и пространственной $SU(2)$ -подгруппе. Поскольку мы всегда имеем дело только с белыми токами, чей полный цветовой спин

* Этот класс токов практически наиболее важен: $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, G_{\mu\alpha}^a G_{\nu\alpha}^a$ и другие популярные токи принадлежат к нему.

** Для токов с ковариантными производными последнее не всегда

верно, например $(\overleftarrow{q} D_\rho q)_{\text{инст}} = 0$, но $(\overleftrightarrow{q} \sigma_{\mu\nu} D_\rho q)_{\text{инст}} \neq 0$. Для кварковых полей существенна структура нулевых мод.

равен нулю, это автоматически приводит к правилу отбора и по спину группы пространственных вращений самодуальных полей $\vec{S} = 0$. В результате прямые вклады возможны только для скалярных (псевдоскалярных) глюонных токов. Обобщение на случай кварковых токов также достаточно просто.

Итак, прямые флуктуации проявляются только в каналах с $J^P = 0^{\pm}$. Все типы корреляторов — глюон-глюонные, кварк-глюонные и кварк-кварковые — допускают прямые вклады, причем в последнем случае они присутствуют даже для несинглетных по $SU(3)_{fl}$ токов.

П Р И Л О Ж Е Н И Е Б

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ:
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ

Различные низкоэнергетические теоремы, возникающие в КХД, неоднократно использовались в тексте статьи. Важный пример приведен в формуле (52). Обсудим теперь другую низкоэнергетическую теорему, относящуюся к нелокальному оператору, который представляет определенный интерес. Начнем однако с обсуждения формальных аспектов. При доказательстве формулы (52) совершенно игнорировался тот факт, что в квантовой теории поля такие величины, как токи, T -произведения и т. д., требуют доопределения. Ниже намечена последовательная процедура регуляризации и дано строгое доказательство теоремы (53а).

Удобно изменить нормировку и ввести вместо S другую корреляционную функцию

$$\tilde{S} = i \int \exp(iqx) d^4x \langle 0 | T \left\{ \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2(x), \frac{b\alpha_s}{8\pi} G^2(0) \right\} | 0 \rangle,$$

где $b\alpha_s^2/2\pi$ — первый член в функции Гелл-Мана — Лоу. Низкоэнергетическая теорема для \tilde{S} гласит:

$$\tilde{S}(Q^2 = 0) = 4 \frac{b}{8\pi} \langle 0 | \alpha_s G^2 | 0 \rangle. \tag{П.3}$$

Общий ход доказательства следующий.

Рассматривают коррелятор $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ двух регуляризованных тензоров энергии — импульса безмассовых кварков и глюонов. Затем выводят тождество Уорда для $T_{\mu\nu,\alpha\beta}(q)$, которое позволяет вычислить след $T_{\mu\mu,\alpha\alpha}$ при нулевом импульсе $q = 0$; и, наконец, след $T_{\mu\mu,\alpha\alpha}(q = 0)$ сводят к $\tilde{S}(0)$ с помощью хорошо известной треугольной аномалии [32]:

$$\theta_{\mu\mu} = -\frac{b\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \tag{П.4}$$

Напомним, что наличие аномалии в $\theta_{\mu\mu}$ связано с необходимостью доопределять операторы в квантовой теории. Один из способов доопределения сводится к следующему. Каждой безмассовой частице, появляющейся в петлях, сопоставляется несколько вспомогательных тяжелых партнеров с правилами квантования, подобранными таким образом, чтобы сделать все петли конечными. Это так называемый метод Паули — Вилларса. Регуляризация фермионных полей не вызывает никаких затруднений, в отношении же калибровочных полей следует проявить некоторую осторожность. Во-первых, при фиксации калибровки возникают духи Фаддеева — Попова, и регуляторы нужны как для векторных полей, так и для духов. Во-вторых, введение массы в лагранжиан векторного поля разрушает, вообще говоря,

калибровочную инвариантность и свойство перенормируемости. Чтобы обойти эту трудность, мы, следуя т'Хофту [10], будем работать в фоновой калибровке, т. е. введем классическое внешнее поле $A_\mu^{a\text{ кл}}$, удовлетворяющее уравнению движения $D_\mu^{\text{кл}} G_{\mu\nu}^{a\text{ кл}} = 0$, и на его фоне рассмотрим распространение квантовых возмущений a_μ^a . В результате удастся сразу же выделить калибровочно-инвариантную структуру ответа, зависящую от тензора $G_{\mu\nu}^{a\text{ кл}}$ и его ковариантных производных. Регуляризация же коэффициента при такой структуре уже не вызывает затруднений (по крайней мере, в одной петле).

Регуляторные поля описываются следующей добавкой в лагранжиане:

$$\Delta L = \sum_{R, a, \varphi} \left\{ \bar{R} (i\hat{D} - M) R + (+D_\mu \varphi^\dagger D_\mu \varphi - M^2 \varphi^\dagger \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (D_\mu^{\text{кл}} a_\alpha^a)^2 - g f a b c G_{\mu\nu}^{a\text{ кл}} a_\mu^b a_\nu^c + \frac{M^2}{2} a_\mu^a a_\mu^a \right\}, \quad (\text{II.5})$$

где суммирование проводится по всем регуляторным полям; $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a$; матрицы T^a являются генераторами в соответствующем представлении; R, a, φ — регуляторы Паули — Вилларса для фермионов, глюонов и духов соответственно. Выбранная калибровка отвечает добавлению к лагранжиану члена $\frac{1}{2} (D_\mu^{\text{кл}} a_\mu^a)^2$.

Регуляризованный сохраняющийся и симметричный тензор $\theta_{\mu\nu}^R$ имеет вид:

$$\theta_{\mu\nu}^R = \theta_{\mu\nu}^{\text{naive}} + \sum_{R, a, \varphi} \left\{ \frac{i}{2} \bar{R} (\gamma_\mu D_\nu + \gamma_\nu D_\mu) R - D_\mu a_\alpha^a D_\nu a_\alpha^a + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial_\alpha a_\beta^a)^2 - M^2 a_\beta^a a_\beta^a) - g f a b c (G_{\mu\alpha}^a a_\nu^b a_\alpha^c + G_{\nu\alpha}^a a_\mu^b a_\alpha^c - g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a a_\alpha^b a_\beta^c) + \right. \\ \left. + D_\mu \varphi^\dagger D_\nu \varphi + D_\nu \varphi^\dagger D_\mu \varphi - g_{\mu\nu} (D_\alpha \varphi^\dagger D_\alpha \varphi - M^2 \varphi^\dagger \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_\lambda (a_\nu^a D_\mu a_\lambda^a - a_\lambda^a D_\mu a_\nu^a + a_\mu^a D_\nu a_\lambda^a - a_\lambda^a D_\nu a_\mu^a) \right\},$$

где под D и G следует понимать $D^{\text{кл}}$ и $G^{\text{кл}}$. След этого выражения уже отличен от нуля:

$$\theta_{\mu\mu}^R = 0 + \sum_{R, a, \varphi} \left\{ M \bar{R} R + \varphi^\dagger (4M^2 - \overleftarrow{D}_\mu \overrightarrow{D}_\mu) \varphi - 2M^2 a_\mu^a a_\mu^a + \right. \\ \left. + a_\alpha^a (-D^2 \delta^{ac} g_{\alpha\beta} - 2g f a b c G_{\alpha\beta}^b) a_\beta^c + \partial_\lambda (a_\mu^a D_\mu a_\lambda^a - a_\lambda^a D_\mu a_\mu^a + g_{\mu\lambda} a_\alpha^a D_\mu a_\alpha^a) \right\}.$$

Здесь 0 отвечает главной части $\theta_{\mu\nu}^R$.

В конечных ответах следует снять регуляризацию, т. е. устремить массы регуляторов к бесконечности. Эта процедура приводит к нулевым ответам для матричных элементов $\theta_{\mu\mu}^R$ по любым физическим состояниям, за единственным исключением — матричный элемент между вакуумом и двумя глюонами оказывается отличным от нуля. Этот факт легко понять из соображений размерности. Действительно, размерность $\theta_{\mu\mu}^R$ равна $[m]^4$, рассматриваемый матричный элемент $\theta_{\mu\mu}^R$ должен выражаться только через G^2 (мы позаботились о сохранении калибровочной инвариантности) и поэтому

имеет ту же размерность, равную четырем. Таким образом, если $\langle 0 | \theta_{\mu\mu} | 2 \text{ глюона} \rangle = CG^2$, масса регулятора в коэффициент C не входит. Для доказательства теоремы рассмотрим амплитуду

$$T_{\mu\nu, \alpha\beta}(q) = i \int d^4x \exp(iqx) T \{ \theta_{\mu\nu}^R(x), \theta_{\alpha\beta}^R(0) \}, \quad (\text{П.6})$$

причем $\langle 0 | T_{\mu\nu, \alpha\beta} | 0 \rangle$ описывается несколькими инвариантными амплитудами и теперь необходимо найти для них низкоэнергетические соотношения с помощью сохранения $\theta_{\mu\nu}^R$. После того как это будет сделано, найдем $\langle 0 | T_{\mu\nu, \alpha\alpha} | 0 \rangle$ при нулевом импульсе. Следует отметить, что при вычислениях $q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}$, очевидно, возникают коммутаторы типа

$$i [\theta_{0\nu}(t, \mathbf{x}), \theta_{\alpha\beta}(t, \mathbf{y})],$$

отличные от нуля. Отдельные компоненты таких коммутаторов были найдены впервые Швингером [69], в частности

$$i [\theta_{00}(t, \mathbf{x}), \theta_{00}(t, \mathbf{y})] = -[\theta_{0i}(t, \mathbf{x}) + \theta_{0i}(t, \mathbf{y})] \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{П.7})$$

Поскольку в (П.7) содержатся пространственные производные от δ -функции, то это означает, что $T_{\mu\nu, \alpha\beta}$ нековариантно. Операторное разложение пишется для ковариантных амплитуд, поэтому следует найти контактный член, дополняющий $T_{\mu\nu, \alpha\beta}$ до ковариантного выражения $T_{\mu\nu, \alpha\beta}^*$, а также вычислить остальные коммутаторы $[\theta_{\mu\nu}, \theta_{\alpha\beta}]$. Проще всего выполнить эту программу с помощью рецепта Бьеркена [70]: по правилам Фейнмана построить какой-нибудь ковариантный матричный элемент от $T_{\mu\nu, \alpha\beta}^*$ и найти разложение матричного элемента $T_{\mu\nu, \alpha\beta}$ по q_0 в пределе $q_0 \rightarrow \infty$, q фиксировано. Полином по q_0 даст нам контактный член, а коэффициент при q_0^{-1} — коммутатор при равных временах. Контактные члены выражаются через компоненты того же тензора энергии — импульса, но оказываются различными для бозонов и фермионов. Мы вычислили контактный член и коммутаторы, исходя из формальной амплитуды комптоновского рассеяния гравитонов на фермионах, глюонах, духах. Опуская промежуточные ответы, приведем результат для $q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}^*$:

$$\begin{aligned} \langle R(p) | q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}^* | R(p) \rangle &= \langle R(p) | -q_\nu \theta_{\alpha\beta} - \frac{3}{4} (q_\beta \theta_{\nu\alpha} + q_\alpha \theta_{\nu\beta}) + \\ &+ \frac{1}{4} q_\gamma (g_{\beta\nu} \theta_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\nu} \theta_{\beta\gamma}) | R(p) \rangle; \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$\begin{aligned} \langle a_\gamma^\alpha(p) | q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}^* | a_\delta^\alpha(p) \rangle &\left(-\frac{1}{4} g_\gamma \delta \right) = \\ &= \langle a_\gamma^\alpha(p) | g_{\alpha\beta} q_\gamma \theta_{\nu\gamma} - q_\beta \theta_{\alpha\nu} - q_\alpha \theta_{\beta\nu} | a_\gamma^\alpha(p) \rangle; \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$\langle \Phi(p) | q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}^* | \Phi(p) \rangle = \langle \Phi(p) | g_{\alpha\beta} q_\gamma \theta_{\nu\gamma} - q_\beta \theta_{\nu\alpha} - q_\alpha \theta_{\nu\beta} | \Phi(p) \rangle. \quad (\text{П.10})$$

Хотя мы вычислили только матричные элементы, ясно, что равенства (П.8) — (П.10) операторные, если в правых частях заменить $\theta_{\mu\nu}$ на фермионную часть тензора $\theta_{\mu\nu}^f$, глюонную $\theta_{\mu\nu}^g$ и духовую $\theta_{\mu\nu}^{gh}$ соответственно. (Это, конечно, правильно в низшем порядке по α_s , которым мы интересуемся.) После этого замечания можно найти вакуумное среднее:

$$\begin{aligned} \langle 0 | q_\mu T_{\mu\nu, \alpha\beta}^* | 0 \rangle &= \frac{1}{4} \langle 0 | \theta_{\sigma\sigma}^f | 0 \rangle \left\{ -q_\nu g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (g_{\nu\alpha} q_\beta + g_{\nu\beta} q_\alpha) \right\} - \\ &- \frac{1}{4} [\langle 0 | \theta_{\sigma\sigma}^g | 0 \rangle + \langle 0 | \theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle] \left\{ -q_\nu g_{\alpha\beta} + (g_{\nu\alpha} q_\beta + g_{\nu\beta} q_\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Напомним, что $\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \langle 0 | \theta_{\sigma\sigma} | 0 \rangle$. Если теперь записать инвариантные амплитуды в виде

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{\mu\nu, \alpha\beta}^* | 0 \rangle &= A_0 g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + A_1 (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}) + \\ &+ A_2 (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) + A_3 g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + A_4 (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \end{aligned}$$

то тождество Уорда (II.11) сведется к равенствам

$$A_3 (q^2=0) = \langle 0 | -\frac{1}{4} \theta_{\sigma\sigma}^F + \frac{1}{4} \theta_{\sigma\sigma}^G + \frac{1}{4} \theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle,$$

$$A_4 (q^2=0) = \langle 0 | -\frac{1}{8} \theta_{\sigma\sigma}^F - \frac{1}{4} \theta_{\sigma\sigma}^G - \frac{1}{4} \theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle,$$

что позволяет вычислить след

$$\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle_{q^2=0} = \langle 0 | -5\theta_{\sigma\sigma}^F + 2\theta_{\sigma\sigma}^G + 2\theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle. \quad (\text{II.12})$$

На первый взгляд кажется, что формула (II.12) решает поставленную задачу, поскольку след $\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle$ совпадает с искомой амплитудой.

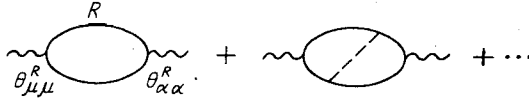


Рис. 14. Регуляризованная двухточечная функция $\langle \theta_{\mu\mu}^R(x), \theta_{\alpha\alpha}^R(0) \rangle$ в теории возмущений.

Сплошные линии обозначают регуляторные поля

Однако это не так и требуется более осторожный анализ. В амплитуду $\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle$ дают вклады различные классы диаграмм. (Напомним, что для $T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^*$ выживают только регуляторные вклады.) Рассмотрим диаграммы, изображенные на рис. 14, которые дают вклад в единичный оператор в $T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^*$. Условия регуляризации

$$\sum_i C_i = 0; \quad \sum_i C_i M_i^2 = 0, \quad \sum_i C_i M_i^4 = 0 \quad (\text{II.13})$$

приводят к тому, что эти диаграммы становятся конечными. (Здесь M_i — масса i -го регулятора, C_i — вес, с которым он входит в петли.) Можно проверить, что структура обсуждаемых диаграмм соответствует вакуумным петлям для матричных элементов $\langle 0 | \theta_{\sigma\sigma}^{F,G,gh} | 0 \rangle$, входящих в правую часть (II.12), и эти вклады взаимно сокращаются.

Ненулевой вклад приходит от диаграмм рис. 15. Так же как и в предыдущем случае, они характеризуются одной регуляторной петлей. В пределе большой массы регулятора возникают только члены, пропорциональные $\langle \alpha_s G^2 \rangle$, а члены, пропорциональные G^3 и операторам более высокой размерности, подавлены степенями M^{-1} . Графики, представленные на рис. 15, конечны и локальны в пределе бесконечно тяжелых регуляторов, а их вычисление не составляет труда. Дадим сразу окончательный ответ:

$$\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle = \langle 0 | -\theta_{\sigma\sigma}^F + 6\theta_{\sigma\sigma}^G + 6\theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle. \quad (\text{II.14})$$

Рассмотрим теперь второй класс графиков, определяющих $\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle$. Несколько простейших примеров приведено на рис. 16. В отличие от графи-

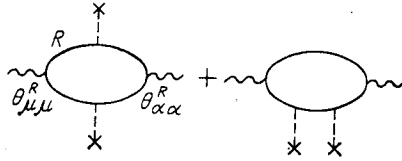


Рис. 15. Непертурбативные члены в регуляризованной двухточечной функции $\langle \theta_{\mu\mu}^R(x), \theta_{\alpha\alpha}^R(0) \rangle$.

Когда массы регуляторов стремятся к бесконечности, коэффициент перед оператором $G_{\sigma\delta}^a G_{\sigma\delta}^a$ остается конечным, в то время как все другие операторы подавлены степенями M^{-1}

ков, рассмотренных выше, здесь регуляторные линии образуют две различных петли, соединенные глюонными линиями. Очевидно, что в пределе

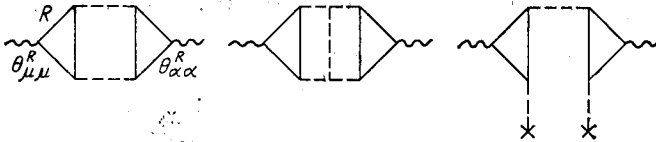


Рис. 16. Диаграммы для $\langle \theta_{\mu\mu}^R(x), \theta_{\alpha\alpha}^R(0) \rangle$, содержащие две регуляторные петли.

В пределе $M \rightarrow \infty$ их сумма сводится к корреляционной функции $\tilde{S}(Q^2)$, введенной в Приложении Б

бесконечно тяжелых регуляторов сумма таких графиков воспроизводит $\tilde{S}(Q^2)$ [см. (П.4)]. Другими словами (см. рис. 15 и 16),

$$\langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle = \langle 0 | T_{\mu\mu, \alpha\alpha}^* | 0 \rangle = \tilde{S} + \langle 0 | -\theta_{\sigma\sigma}^F + 6\theta_{\sigma\sigma}^G + 6\theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle. \quad (\text{П.15})$$

Комбинируя (П.15) и (П.12), получаем

$$\tilde{S}(0) = -4 \langle 0 | \theta_{\sigma\sigma}^F + \theta_{\sigma\sigma}^G + \theta_{\sigma\sigma}^{gh} | 0 \rangle, \quad (\text{П.16})$$

что точно соответствует теореме (П.3).

Другие наивные низкоэнергетические теоремы с участием $\alpha_s G^2$ можно доказать тем же способом.

В заключение разберем пример, относящийся к нелокальному оператору. Введем отношение

$$R(x, C) = \frac{\langle \alpha_s G^2(x) W(C) \rangle}{\langle \alpha_s G^2 \rangle \langle W(C) \rangle}, \quad (\text{П.17})$$

где $W(C)$ — вилсоновский петлевой оператор,

$$W(C) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} P \exp \oint_C i g A_\mu(x) dx_\mu.$$

Физический смысл $W(C)$ прост — эта величина описывает эффект бесконечно тяжелых кварков, проведенных вдоль контура C . Ясно, что $R(x, C)$ измеряет влияние этих кварков ($Q\bar{Q}$) на энергию вакуумных флуктуаций; именно $R(x, C)$ дает локальную плотность энергии в присутствии $Q\bar{Q}$ в единицах плотности энергии вакуума:

$$\varepsilon_{\text{вак}} \approx -\frac{b}{32} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle. \quad (\text{П.18})$$

Другими словами, $[1 - R(x, C)]$ отражает степень заморозки вакуумных флуктуаций.

Покажем теперь, что если площадь контура C велика, $A(C) \rightarrow \infty$, то

$$2|\varepsilon_{\text{вак}}| \int d^4x [1 - R(x, C)] = \sigma A, \quad (\text{П.19})$$

где σ — натяжение струны

$$\langle W(C) \rangle_{A(C) \rightarrow \infty} \sim \exp(-A\sigma), \quad (\text{П.20})$$

и формула (П.19) относится к евклидову пространству — времени.

Здесь уместно сделать поясняющее замечание. Предположим, что контур C — прямоугольный, разделим обе части (П.19) на T (рис. 17). Тогда

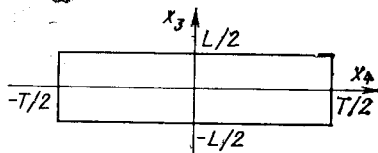


Рис. 17. Прямоугольный контур в вилсоновском петлевом операторе. Можно представлять его как траекторию бесконечно тяжелых кварков в мнимом времени. L — расстояние между кварком и антикварком, $T \rightarrow \infty$

в правой части получим полную энергию струны σL , а в левой части остаемся с интегралом

$$2|\varepsilon_{\text{вак}}| \int d^3x [1 - R(x, C)]. \quad (\text{П.21})$$

[Следует учесть, что $R(x, C)$ отличается от единицы только вблизи прямоугольника, определяемого контуром C .] Ясно, что (П.21) представляет увеличение энергии вакуума из-за присутствия $Q\bar{Q}$.

Перейдем теперь к выводу (П.19). Рассмотрим $\ln \langle W(C) \rangle_{A \rightarrow \infty}$ и продифференцируем этот логарифм по $(-1/g_s^2)$. Тогда, с одной стороны, стандартные режорм-групповые аргументы плюс (П.20) дают

$$-\frac{16\pi^2}{b} \sigma A.$$

С другой стороны, прямое дифференцирование приводит к

$$\int d^4x \left\{ \left\langle \frac{1}{4} g^2 G^2(x) W(C) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{4} g^2 G^2 \right\rangle \langle W(C) \rangle \right\} \{ \langle W(C) \rangle \}^{-1}.$$

Приравнявая оба представления и используя (П.18), получаем (П.19).

П Р И Л О Ж Е Н И Е В

КАК ВЫЧИТАТЕЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ В ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЯХ СВЯЗАНЫ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В рамках квантовой хромодинамики вычитательные константы при $Q^2 = 0$ в двухточечных функциях не являются произвольными. Знание высокоэнергетического поведения позволяет выразить их через интегралы от спектральной плотности. Поведение при больших эвклидовых Q^2 фиксируется асимптотической свободой.

Пусть Π — корреляционная функция локальных бесцветных токов j , предположим для определенности, что имеет место дисперсионное соотношение с одним вычитанием:

$$\Pi(Q^2) = \Pi(0) - \frac{Q^2}{\pi} \int \frac{ds \operatorname{Im} \Pi(s)}{s(s+Q^2)}. \tag{П.22}$$

Кроме того, при $Q^2 \rightarrow \infty$ коррелятор $\Pi(Q^2)$ можно записать в виде ряда

$$\Pi(Q^2) = \Pi^{p.t}(Q^2) + h_0 + \frac{h_1}{Q^2} + \dots, \tag{П.23}$$

где $\Pi^{p.t}(Q^2)$ — пертурбативный вклад*:

$$\Pi^{p.t}(Q^2) = -\frac{Q^2}{\pi} \int \frac{ds \operatorname{Im} \Pi^{p.t}}{s(s+Q^2)}, \tag{П.24}$$

а коэффициенты h_0, h_1, \dots отражают непертурбативные взаимодействия с вакуумными полями. Фактически они соответствуют божовому взаимодействию, поскольку прямое взаимодействие вымирает как более высокая степень Q^{-1} , если только размерность токов j не превышает шести. Важно, что коэффициенты h_0, h_1, \dots вычисляются теоретически, точнее, выражаются через вакуумные ожидания различных операторов. Строго говоря, они не являются константами, так как могут содержать логарифмическую зависимость от Q^2 , связанную с аномальными размерностями. Здесь мы для простоты пренебрежем этим эффектом, учет которого не составляет труда.

Приравняем (П.22) и (П.23) и разделим обе части на Q^2 :

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{ds}{s(s+Q^2)} [\operatorname{Im} \Pi - \operatorname{Im} \Pi^{p.t}] = \frac{\Pi(0)}{Q^2} - \frac{h_0}{Q^2} - \frac{h_1}{Q^4} - \dots \tag{П.25}$$

После перехода к борелевскому образу $\Pi(Q^2)$ (определение см. в тексте) окончательно получаем:

$$\frac{1}{\pi M^2} \int \exp(-s/M^2) \frac{\operatorname{Im} \Pi - \operatorname{Im} \Pi^{p.t}}{s} ds = \frac{\Pi(0) - h_0}{M^2} - \frac{h_1}{M^4} - \dots \tag{П.26}$$

Обратим внимание на то, что низкоэнергетическая константа $\Pi(0)$ переработалась в степенную поправку при больших M^2 . Если теперь M^2 в формуле (П.26) устремить к бесконечности, то

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} \Pi - \operatorname{Im} \Pi^{p.t}}{s} ds = \Pi(0) - h_0. \tag{П.27}$$

* Отметим, что интеграл в правой части (П.24) предполагается инфракрасно-стабильным. Это означает, что $\operatorname{Im} \Pi^{p.t}(s)$ пропорциональна положительной степени s . Мы не добавляем явно $\Pi^{p.t}(0)$ и фактически $\Pi(0)$ относится к разности $\Pi(0) - \Pi^{p.t}(0)$.

Часто оказывается, что $h_0 \ll \Pi(0)$, либо h_0 строго равна нулю. Последнее имеет место, например, для любых токов с размерностью три. В этом случае Π имеет размерность $[m]^2$, и не существует локальных бесцветных операторов, через которые можно было бы выразить h_0 .

П Р И Л О Ж Е Н И Е Г

О ЗАВИСИМОСТИ КВАРКОВОГО КОНДЕНСАТА ОТ МАСС КВАРКОВ

Предположим, что механическая масса u - и d -кварков — свободный параметр, который можно произвольно изменить. Что происходит при этом с вакуумным ожиданием $\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle$? Ниже мы исследуем этот вопрос при $m_{u,d} \ll \mu$, где μ^{-1} — обратный радиус конфайнмента.

Пусть для простоты $m_u = m_d = m$. При $m \rightarrow 0$ производная

$$\zeta = \frac{d}{dm} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle \quad (\text{П.28})$$

имеет логарифмическую сингулярность, причем коэффициент при ней фиксируется модельно независимым образом. Действительно, рассмотрим (вспомогательную) двухточечную функцию

$$\sigma(q^2) = i \int \exp(iqx) d^4x \langle 0 | T \{ \bar{u}(x) u(x) + \bar{d}(x) d(x), \bar{u}(0) u(0) + \bar{d}(0) d(0) \} | 0 \rangle. \quad (\text{П.29})$$

Легко убедиться, что

$$\zeta = -\sigma(q^2 = 0). \quad (\text{П.30})$$

Кроме того (см. Приложение В), $\sigma(q^2 = 0)$ представляется в виде

$$\sigma(q^2 = 0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s} (\text{Im } \sigma(s) - \text{Im } \sigma^{p.t}(s)), \quad (\text{П.31})$$

где $\text{Im } \sigma$ — физическая спектральная плотность, а $\text{Im } \sigma^{p.t}$ относится к теории возмущений:

$$\text{Im } \sigma^{p.t}(s) = \frac{3s}{4\pi} (1 + O(\alpha_s)). \quad (\text{П.32})$$

Важно, что при малых энергиях в физической спектральной плотности остается лишь двухкионный вклад, который однозначно фиксируется гипотезой PCAC. Именно:

$$\langle \pi^+ \pi^- | \bar{d}d + \bar{u}u | 0 \rangle_{p_{\pi^{\pm}} \rightarrow 0} = \frac{2m_{\pi}^2}{m_u + m_d}$$

и

$$\text{Im } \sigma(\pi^+ \pi^- + \pi^0 \pi^0) = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{m_{\pi}^2}{2m} \right)^2 v_{\pi}, \quad s \ll 1 \text{ ГэВ}^2, \quad (\text{П.33})$$

где $v_{\pi} = (1 - 4m_{\pi}^2/s)^{1/2}$. Напомним, что, если $m \gg \mu$, то $m_{\pi}^2 = \text{const } m$ и интеграл (П.31) при $m \rightarrow 0$ логарифмически расходится,

$$\zeta = -\sigma(q^2 = 0) = -\frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{m_{\pi}^2}{2m} \right)^2 \ln \frac{M_0}{m_{\pi}^2} + \text{несингулярные члены}, \quad (\text{П.34})$$

$$m_{\pi}^2 = \text{const } m \rightarrow 0.$$

Каковы пределы применимости этого соотношения? Чтобы ответить на вопрос, нужно знать константу M_0^2 и несингулярные члены, которые, к сожалению, модельно зависимы. Мы воспользуемся следующей простой моделью, которая подсказана отчасти данными по e^+e^- -аннигиляции, отчасти анализом родственного кваркового канала 0^- (см. разд. 6):

$$\text{Im } \sigma = \begin{cases} \frac{3}{8\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{2m} \right)^2 v_\pi + \pi r \delta(s - M_0^2), & 4m_\pi^2 \leq s \leq M_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2, \\ 0, & M_0^2 < s \leq s_0 = 3 \text{ ГэВ}^2, \\ \text{Im } \sigma^{p.t} = \frac{3s}{4\pi} \left(\frac{\alpha_s(s)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{8/b}, & s > s_0. \end{cases} \quad (\text{П.35})$$

Здесь правильно передано асимптотическое поведение при низкой [ср. с (П.33)] и при высокой энергии, где физическая спектральная плотность совпадает с партонной. Мы заложили резкий выход на партонный режим при $s = s_0$, причем значение этого параметра (3 ГэВ²) заимствовано из псевдоскалярного канала. Введен также резонансный пик при $s = M_0^2$. В реальной ситуации он, по-видимому, широкий; однако, поскольку нам важны лишь интегральные характеристики, мы заменили его δ -функцией. Области низких и высоких энергий разделены провалом точно так же, как это имеет место в e^+e^- -аннигиляции. Наличие провала, прилегающего к резонансному пику, необходимо для того, чтобы обеспечить соотношение дуальности:

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds (\text{Im } \sigma - \text{Im } \sigma^{p.t}) = \frac{1}{4} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle. \quad (\text{П.36})$$

Фактически правая часть в этом соотношении мала и ею можно пренебречь. При фиксированном M_0 (положим $M_0 = 1$ ГэВ и не будем варьировать этот параметр) соотношение (П.36) позволяет определить вычет r :

$$r \approx \frac{3}{8\pi^2} \left\{ s_0^2 \left(\frac{\alpha_s(s_0)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{8/b} - \left(\frac{m_\pi^2}{2m} \right)^2 M_0^2 \left(v_0 - 2 \frac{m_\pi^2}{M_0^2} \ln \frac{(1+v_0)^2 M_0^2}{4m_\pi^2} \right) \right\}, \quad (\text{П.37})$$

где $v_0 = (1 - 4m_\pi^2/M_0^2)^{1/2}$.

Разумеется, модель (П.35) является лишь грубой схемой физической спектральной плотности, однако можно надеяться, что основные черты переданы правильно, по крайней мере в интегральном смысле.

Приняв эту модель и воспользовавшись формулами (П.30), (П.31), (П.37), получим

$$\zeta = -\frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2}{2m} \right)^2 \left\{ \ln \frac{M_0^2}{m_\pi^2} - a \right\}, \quad (\text{П.38})$$

где

$$a = 3v_0 + s_0 \left(\frac{m_\pi^2}{2m} \right)^{-2} \left(\frac{\alpha_s(s_0)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{8/b} \left(2 - \frac{s_0}{M_0^2} \right) - \left(1 + \frac{2m_\pi^2}{M_0^2} \right) \ln \frac{(1+v_0)^2}{4} - \frac{2m_\pi^2}{M_0^2} \ln \frac{M_0^2}{m_\pi^2} \approx 3v_0 - 0,5.$$

[Для численной оценки мы подставили $(m_\pi^2/2m)^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$, $(\alpha_s(s_0)/\alpha_s(\mu^2))^{8/b} = 0,4$, и $M_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$.]

Видно, что ζ меняет знак (становится положительной) при $2m \sim 70$ МэВ, т. е. $m_{\pi}^2 \sim 0,1$ ГэВ². К сожалению, не удастся пройти в интересную область $m \sim m_s = 150$ МэВ, поскольку при таких массах результат целиком определяется модельно зависимыми членами и, кроме того, низкоэнергетические

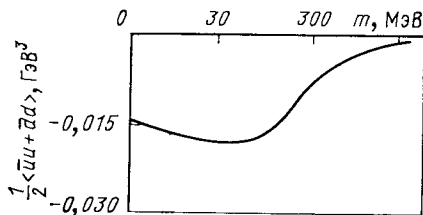


Рис. 18. Зависимость кваркового конденсата от масс кварков (схематический набросок).

Предполагается, что $m_u = m_d = m$. При $m \rightarrow 0$ вакуумное ожидание $\frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d)$ сводится к $\langle \bar{q}q \rangle_{ch} \approx -(250 \text{ МэВ})^3$, а производная $(d/dm)(\bar{u}u + \bar{d}d)$ стремится к бесконечности. В минимуме значение $\frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d)$ отличается от $\langle \bar{q}q \rangle_{ch}$ на 10–20%. При $m \gg 300$ МэВ кварковый конденсат убывает по закону $-(1/12)(1/m) \langle (\alpha_s/\pi) G^2 \rangle_{n|q}$ [последний матричный элемент равен $(2-3) \cdot 10^{-2}$ ГэВ⁴]

соотношения типа (II.32) резко нарушаются*. Если, однако, воспользоваться обратным разложением

$$\langle \bar{Q}Q \rangle = -\frac{1}{12m_Q} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle + O(m_Q^{-3}),$$

справедливым для больших масс, можно получить качественное представление о поведении $\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle$ в зависимости от m (рис. 18) во всей области изменения m .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nambu Y. In: *Preludes in Theoretical Physics*. Ed. A de Shalit. Amsterdam, North-Holland, 1966; Fritzsche H., Gell-Mann M.— In: *Proc. XVI Intern. Conf. on High Energy Physics*. V.2, p. 135. Batavia, 1972; Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.— *Phys. Lett. B*, 1973, v. 74, p. 365; Weinberg S.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 494; Politzer H. D.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 1346; Gross D. J., Wilczek F.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 1343.
2. Chew G. F., Frautschi S. C.— *Phys. Rev. Lett.*, 1961, v. 7, p. 394; Veneziano G. *Nuovo cimento*, 1968, v. 37A, p. 190; Johnson K., Thorn C.— *Phys. Rev. D.*, 1976, v. 13, p. 1934.
3. Вайнштейн А., Захаров В., Шифман М.— Письма в ЖЭТФ, 1978, v. 27, p. 60; Shifman M., Vainshtein A., Voloshin M., Zakharov V.— *Phys. Lett. B*, 1978, v. 77, p. 80.

* По этой же причине низкоэнергетический подход не дает предсказаний для разности $\langle \bar{u}u - \bar{d}d \rangle$, возникающей при $m_u \neq m_d$. Соотношения, аналогичные (II.29), (II.30), разумеется, существуют, но не имеют двухпикетного вклада.

4. Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 147, p. 385, 448; Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 297.
5. Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Phys. Lett. B, 1979, v. 86, p. 347; Nucl. Phys. B, 1980, v. 165, p. 67.
6. Ioffe B. L. Nucl. Phys. B, 1981, v. 188, p. 317.
7. Reinders L. J., Rubinstein H. R., Yazaki S.— Phys. Lett. B, 1980, v. 95, p. 103; Nucl. Phys. B, 1981, v. 186, p. 109.
8. Belavin A., Polyakov A., Schwarz A., Tyupkin Yu.— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 85.
9. Nambu Y.— Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 380; Nambu Y., Jona-Lasinio G.— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345; 1961, v. 124, p. 246; Gell-Mann M., Oakes R., Renner B.— Phys. Rev., 1968, v. 175, p. 2195.
10. 't Hooft G.— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3432.
11. Caldi D. G.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 121.
12. Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.— Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2717.
13. Carlitz R. D.— Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 3225; Carlitz R. D., Cremer D. B.— Ann. Phys., 1979, v. 118, p. 429.
14. Geshkenbein B. V., Ioffe B. D.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 166, p. 340.
15. Witten E.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 156, p. 269; Veneziano G.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 159, p. 213.
16. 't Hooft G.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 72, p. 461.
17. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А. КХД-вакуум и феноменология старых адронов.— В кн.: Физика высоких энергий (Материалы 15-й зимней школы физики ЛИЯФ). Т. 2, с. 5—83. Л.: 1980. Препринты ИТЭФ № 87 и 88, 1980; Zakharov V. Rapporteur Talk at the XX Intern. Conf. on High Energy Physics. Madison, 1980; Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V. Talk at the XX Intern. Conf. on High Energy Physics. Madison, 1980; Shifman M. Invited Talk at the Intern. Sympos. Hadron Structure '80. Bratislava, 1980.
18. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.— Ядерная физика, 1980, т. 32, с. 1622.
19. Novikov V. e.a.— Phys. Rept., 1979, v. 41, N 1, Sects. 7.4, 7.5.
20. Voloshin M. B.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 154, p. 365.
21. Bell J.S., Bertlmann R.— Nucl. Phys. B, 1981, v. 177, p. 218.
22. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1963; Feynman R., Hibbs A. Quantum Mechanics and Path Integrals, N. Y., McGraw-Hill Book Co., 1965.
23. Eidelman S., Kurdadze L., Vainshtein A.— Phys. Lett. B, 1979, v. 82, p. 278.
24. Chetyrkin K., Kataev A., Tkachev S.— Phys. Lett. B, 1979, v. 85, p. 277; Dine M., Sapistein J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 668.
25. a. Wilson K.— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499; б. Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 174, p. 378.
26. Politzer H. D. см. [1]; Gross D. J., Wilczek F. см. [1]; Caswell W.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 244; Белавин А. А., Мигдал А. А.— Лекция в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 317; В кн.: Элементарные частицы. Труды 2-й школы физики ИТЭФ. Т. 3. М., Атомиздат, 1975, с. 73; Jones D.R.T.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 75, p. 531.
27. а. Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 165, p. 45; б. Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 163, p. 46.
28. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971.
29. Weinberg S.— Phys. Rev. D, 1975, v. 11, p. 3583.
30. Okubo S.— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 2336.

31. Fateev V., Frolov I., Schwarz A.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 165, p. 1; Bukhvostov A., Lipatov L.— Nucl. Phys. B, 1981, v. 180, p. 116.
32. Crewther R.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1424; Chanowitz M., Ellis J.— Phys. Lett. B, 1972, v. 40, p. 397; Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2490; Collins J., Duncan A., Joglekar S.— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 438.
33. Leutwyler H.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 76, p. 413.
34. Hubschmid W., Mallik S. Bern Preprint, 1980.
35. Zweig G.— CERN Preprints TH-401, TH-412, 1964; Okubo S. Phys. Lett., 1963, v. 5, p. 165; Iizuka J.— Prog. Theor. Phys. Sup., 1966, v. 37, 38, p. 21.
36. Witten E.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 160, p. 57.
37. Coleman S. Preprint SLAC-PUB-2484, 1980 (1979 Erice Lectures).
38. Voloshin M., Zakharov V.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 688.
39. Novikov V., Shifman M.— Z. Phys. C, 1981, v. 8, p. 43.
40. Appelquist T., Politzer H. D.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 43.
41. Fritsch H., Minkowski P.— Nuovo cimento A, 1975, v. 30, p. 393.
42. Chodos A. e.a.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 3471; De Grand T. e.a.— Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 2060.
43. Jaffe R., Johnson K.— Phys. Lett. B, 1976, v. 60, p. 201.
44. Кобзарев И. Ю., Мартемьянов Б. В., Щепкин М. Г.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 600.
45. Freund P., Nambu Y.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1646.
46. Veneziano G.— Nucl. Phys., 1976, v. 117, p. 519.
47. Bolzan J. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 419; Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 3202.
48. Robson D.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 130, p. 328.
49. Bjorken J. D.— In: Proc. of the SLAC Summer Inst. on Particle Physics, Stanford, 1979 (SLAC Rept, 1980, N 224, p. 219).
50. Donoghue J. VI Intern. Conf. on Meson Spectroscopy. Brookhaven Preprint MITCTP-854, 1980.
51. Billoire A., Lacage R., Morel A., Navelet H.— Phys. Lett. B, 1979, v. 80, p. 381.
52. Parisi G., Petronzio R.— Phys. Lett. B, 1980, v. 94, p. 51.
53. Shifman M. Z. Phys. C, 1981, v. 9, p. 347.
54. Wiik B. Invited Talk at the XX Intern. Conf. on High Energy Phys., Madison, 1980.
55. Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 165, p. 55.
56. Partridge R. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 712.
57. Scharre D. e.a. Preprint SLAC-PUB-2514, 1980.
58. Chanowitz M. Preprint LBL-11977, 1980.
59. Donoghue J., Johnson K., Bing An. Li.— Phys. Lett. B, 1981, v. 99, p. 416.
60. Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Ann. Phys., 1977, v. 105, p. 276.
61. Particle Data Group.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, N 2.
62. Shifman M.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 173, p. 13.
63. a. Callan C., Dashen R., Gross D.— Phys. Rev. D, 1979, v. 19, p. 1826; б. Shuryak E. V.— Phys. Lett. B, 1978, v. 79, p. 135.
64. Кобзарев И. Ю., Мартемьянов Б. В., Щепкин М. Г.— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 1620.
65. Shuryak E. V.— Phys. Repts, 1980, v. 61, p. 72.
66. Bardcen W., Zakharov V.— Phys. Lett. B, 1980, v. 91, p. 111.
67. Данилов Г. С., Дятлов И. Т., Петров В. Ю.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 1314.
68. Азимов Я. И., Докшицер Ю. Л., Хозе В. А. В кн.: Физика высоких энергий (Материалы 16-й зимней школы физики. ЛИЯФ). Т. 2, Л., 1981.
69. Schwinger J.— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 324.
70. Bjorken J. D.— Phys. Rev., 1966, v. 148, p. 1467.