

## УЧЕТ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ТРЕКОВЫХ ДЕТЕКТОРАХ (ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ)

*В. П. Жигунов, С. Н. Соколов*

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В обзоре изложен математический аппарат, пригодный для описания движения частиц в любых рассеивающих и тормозящих средах и при наличии магнитных полей, методы оценивания импульсов частиц при совместном учете как многократного рассеяния, так и погрешностей измерения. Приводится явный вид возникающих при этом матриц и удобные приближенные выражения, полезные при проектировании приборов.

Достаточно универсальный подход, принятый в обзоре, позволяет с единой точки зрения рассмотреть все описанные в литературе методы совместного учета рассеяния и погрешностей измерения, выводя их как приближенные частные варианты общего метода.

Review begins with an exposure of the mathematical formalism adequate for the description of the motion of particles in scattering and decelerating media in the presence of magnetic fields. After that it describes several methods to estimate the particle momenta which take into account both multiple scattering and measurement errors. The explicit expressions for the relevant matrices are written out and convenient approximate formulae useful for the design of detectors are given.

A sufficiently universal approach adopted in the review allows to consider from the common point of view all the methods proposed in the literature for the combined account of multiple scattering and measurement errors, deducing them as approximate and particular versions of a general method.

### ВВЕДЕНИЕ

В методике физики высоких энергий важное значение имеет корректный учет рассеивающих свойств среды, в которой движется изучаемая частица. Это относится и к прямой задаче, когда задан импульс частицы на входе в прибор и требуется определить траекторию частицы (расчет каналов, моделирование детекторов), и к обратной задаче, когда по измерениям траектории частицы необходимо найти ее импульс. Длина каналов и толщина детекторов, используемых в экспериментах, растут из года в год, и многократное рассеяние становится важным, а часто и главным, фактором, ограничивающим разрешение приборов.

Проблеме учета многократного рассеяния, ионизационных потерь энергии и погрешности измерения посвящено множество работ

[1—8], предлагающих различные частные приемы для различных частных, обычно весьма упрощенных, ситуаций. При составлении обзора этих работ выяснилось, что они содержат различные (обычно неоговоренные) приближения, исходят из различных теоретических предпосылок и плохо увязываются между собой, поэтому пришлось значительно их переработать и из обзора работ превратить в систематический обзор наиболее важных и типичных методов. Эти методы даются как частные случаи и приближенные варианты универсального метода совместного учета многократного рассеяния, ионизационных потерь и погрешностей измерения.

Теоретическая основа такого метода — принцип максимума правдоподобия и кинетические уравнения. Эти уравнения предсказывают изменение распределения вероятности  $P(\mathbf{r}, t)$  импульса  $\mathbf{p}$  и координаты  $\mathbf{r}$  частицы при изменении времени  $t$ . В эти уравнения непосредственно входят дифференциальные сечения рассеяния частицы на атомах среды, и они могут учитывать любые рассеяния, в том числе редкие рассеяния на большие углы. Однако кинетические уравнения, будучи интегральными уравнениями, неудобны на практике.

Кинетические уравнения можно свести к более простым уравнениям в частных производных, если дифференциальное сечение приближенно считать сосредоточенным в малой области около нуля. Простейшее уравнение этого типа — уравнение Колмогорова, из которого в различных приближениях получают все используемые на практике описания многократного рассеяния. Уравнение Колмогорова математически эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих случайную силу (белый шум) и определяющих случайную траекторию  $\mathbf{r}(t)$ . Эти уравнения, называемые стохастическими, непосредственно обобщают уравнения Ньютона и Лоренца, наглядны и поддаются решению методами, известными большинству физиков. На практике наиболее удобно пользоваться именно стохастическими уравнениями, но входящие в них коэффициенты перед белыми шумами брать из уравнения Колмогорова. В обзор включены описание всех упомянутых уравнений и явное решение практически важных стохастических уравнений, учитывающих магнитные поля и торможение.

Встречающиеся в литературе методы оценки начального импульса  $\mathbf{p}(0)$  по измерениям траектории весьма разнообразны в зависимости от того, какой считается процедура измерения (измерения на проекции или в пространстве, в соответственных точках или нет и т. п.) и насколько подробно восстанавливается случайная траектория  $\mathbf{r}(t)$ . Затруднительно, да и вряд ли полезно, разбирать все эти варианты. В обзор включено описание трех главных вариантов: старого метода фита к средней траектории, в котором оценивают только  $\mathbf{p}(0)$ ,  $\mathbf{r}(0)$  и измерения сопоставляются оптическим лучам, скрещивающимся вблизи траектории; нового метода фита к случайной траектории, в котором  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  оценивают для каждой измеренной точки и измерения рассматривают в плоскостях снимков; ком-

промиссного метода брейк-поинтс, где траекторию аппроксимируют ломаной спиралью и  $p, r$  оценивают после каждого излома. Комбинируя эти методы и делая дополнительные приближения (например, заменяя окружность параболой), можно получить большинство известных вариантов\*.

В экспериментах все более широко используют многопластинчатые спектрометры. Так как в этих приборах многократное рассеяние сильно проявляется и его учет имеет определенную специфику, в обзор включена отдельная глава, посвященная им. Точность, с которой можно восстановить импульс  $p(0)$  в детекторе заданной конструкции, поддается аналитической оценке. В литературе довольно подробно оценивают влияние измерительных погрешностей, но о роли многократного рассеяния имеются только отрывочные сведения. Приводимые ниже оценки влияния многократного рассеяния на точность определения начального импульса и углов главным образом основаны на вычислениях авторов обзора, в частности на результатах аналитического обращения информационных матриц.

### 1. СВЯЗЬ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ОПИСАНИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Движение частицы, испытывающей многократные столкновения с атомами среды, можно описать двумя способами: с помощью кинетических уравнений и с помощью стохастических уравнений. Приведем здесь введение в формализм тех и других уравнений и поясним их связь.

При многократном рассеянии каждое рассеяние меняет немного 1) направление импульса частицы и 2) его значение. Первый эффект, накапливаясь, приводит к искривлению траекторий, а второй — к неравномерному торможению частиц и разбросу их пробегов (страглингу). Неравномерное торможение частиц обычно является второстепенным эффектом. Однако с математической точки зрения этот эффект является одновременно и более простым, и более поучительным. Поэтому введение в формализм кинетических и стохастических уравнений построим на примере описания именно этого эффекта.

**Равномерное торможение.** Прежде чем рассматривать эффекты рассеяния, напомним, как протекает процесс торможения частицы в однородной среде, и попутно введем нужные в дальнейшем переменные.

Пусть частица с импульсом  $p$  движется в однородной тормозящей среде по некоторой траектории, форма которой нас пока не интересует. Будем следить только за тем, как меняется модуль  $p = |p|$  импульса с пройденным путем  $s$ . В классическом приближении

\* В литературе имеется также много предложений по рационализации вычислительных процедур, например по использованию особых приемов обращения матриц и т. д. Из-за ограниченности объема обзора почти не будем касаться этих вопросов.

тормозящая сила пропорциональна скорости  $v$ :

$$dp/dt \equiv \dot{p} = -v\gamma, \quad (1)$$

где коэффициент  $\gamma$  слабо зависит от  $v$ , и будем его пока считать константой. Так как в релятивистском случае скорость  $v = p/E = p/\sqrt{m^2 + p^2}$  нелинейно зависит от  $p$ , удобнее перейти от времени  $t$  либо к переменной  $s$ , связанной с  $t$  соотношением

$$ds = v dt, \quad (2)$$

либо к переменной  $\tau$

$$d\tau = dt/E. \quad (3)$$

В этих переменных уравнение (1) и его решение имеют соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} dp/ds \equiv p' &= -\gamma; & p &= p_0 - \gamma s; \\ dp/d\tau &= -\gamma p; & p &= \exp(-\gamma\tau) p_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Переменные  $s$  и  $\tau$  связаны соотношениями

$$s = (p_0/\gamma) [1 - \exp(-\gamma\tau)]; \quad \tau = (1/\gamma) \ln [p_0/(p_0 - \gamma s)]. \quad (5)$$

**Кинетическое уравнение.** Уравнение (1) не учитывает того, что частица, двигаясь в рассеивающей среде, тормозится на самом деле не плавно, а рывками, теряя \* при каждом столкновении с атомом вещества некоторую часть импульса, зависящую от параметров столкновения (и квантовых флуктуаций). Хаотический характер этих потерь можно учесть различными способами.

Наиболее общий способ описать случайные изменения импульса — это задать вероятность  $\beta(p, p_0) ds dp$ , т. е. вероятность частицы с начальным импульсом  $p_0$ , пройдя путь  $ds$ , рассеяться и приобрести импульс, лежащий в интервале  $(p, p + dp)$ . Полная вероятность рассеяния

$$ds \int dp \beta(p, p_0) \equiv \alpha ds. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем интегрирование выполняется по всей области определения подинтегральной функции \*\*. Вероятность не рассеяться, очевидно, равна  $1 - \alpha ds$ . Следовательно, плотность вероятности того, что частица с начальным импульсом  $p_0$ , пройдя путь  $ds$ , будет иметь импульс  $p$  и равна

$$P(p, ds | p_0) = \delta(p - p_0) (1 - \alpha ds) + \beta(p, p_0) ds. \quad (7)$$

Это распределение, нормированное по построению на единицу, называется *переходной вероятностью*. Входящие в него величины  $\beta$  и  $\alpha$  связаны с дифференциальным  $d\sigma/dp$  и полным сечениями рас-

\* Предполагается, что скорость частицы много больше средней скорости теплового движения в среде.

\*\* В данном случае интегрирование проводится от 0 до  $\infty$ , а фактически, так как  $\beta(p, p_0) = 0$  при  $p > p_0$ , — от 0 до  $p_0$ .

сеяния  $\sigma_{\text{tot}}$  соотношениями

$$\beta(p, p_0) = \rho d\sigma(p_0)/dp, \quad \alpha = \sigma_{\text{tot}}\rho,$$

где  $\rho$  — число атомов в единице объема.

Рассмотрим переходную вероятность  $P(p, s | p_0)$  при конечных  $s$ . Эта величина по ее смыслу и в силу независимости процесса рассеяния на разных участках траектории должна удовлетворять равенству \*

$$P(p, s_1 + s | p_0) = \int dp' P(p, s_1 | p') P(p', s | p_0). \quad (8)$$

В частности,

$$P(p, ds + s | p_0) = \int dp' P(p, ds | p') P(p', s | p_0). \quad (9)$$

Учитывая, что  $P(p, ds + s | p_0) = P(p, s | p_0) + P'_s(p, s | p_0) ds$ , и подставляя в правую часть (9) выражение (7), получаем

$$P + P'_s ds = P + I(P) ds, \quad (10)$$

где так называемый *интеграл столкновений*

$$I(P) = \int dp' w(p, p') P(p', s | p_0),$$

а функция  $w$  имеет вид:

$$w(p, p') = -\alpha\delta(p - p') + \beta(p, p').$$

Упрощая равенство (10), получаем уравнение

$$P'_s = I(P), \quad (11)$$

называемое *кинетическим*. Интеграл  $I(P)$  можно, используя определение (6) величины  $\alpha$ , переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} I(P) &= \int dp' \beta(p, p') P(p', s | p_0) - \\ &- \alpha P(p, s | p_0) = \int dp' [\beta(p, p') P(p', s | p_0) - \\ &- \beta(p', p) P(p, s | p_0)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Кинетическое уравнение есть просто закон сохранения частиц: первый член под интегралом в (12) описывает изменение плотности  $P(p, s | p_0)$  за счет попадания частиц в интервал импульсов  $(p, p + dp)$  из других интервалов  $(p', p' + dp')$ , а второй — за счет выбывания частиц из интервала  $(p, p + dp)$  при рассеянии. Уравнение (11) справедливо при любом законе рассеяния  $\beta(p, p_0)$ , в том числе законе, позволяющем большие изменения импульса при

\* Написанное равенство называют уравнением Чепмена. Это уравнение получается интегрированием по  $p'$  равенства  $P(p, p' | p_0) = P(p | p') P(p' | p_0)$ , выражающего свойство независимости процессов рассеяния на разных участках. Процесс с этим свойством называется марковским.

отдельных столкновениях. Однако оно сложно для точного решения. Попробуем упростить это уравнение за счет аппроксимации функции  $\beta$  выражением специального вида.

Оценим скорость роста моментов распределения  $P(p, s | p_0)$  с ростом  $s$ , т. е. производную

$$\frac{d}{ds} \overline{(p - \bar{p})^n} = \frac{d}{ds} \int dp (p - \bar{p})^n P(p, s | p_0)$$

(здесь  $\bar{p}$  и далее черта означает среднее по распределению  $P$ ). Так как  $\bar{p}$  зависит от  $s$ , то

$$\frac{d}{ds} \overline{(p - \bar{p})^n} = \int dp (p - \bar{p})^n P'_s(p, s | p_0) - n \bar{p}'_s \overline{(p - \bar{p})^{n-1}}, \quad (13)$$

где

$$\bar{p}'_s = \int dp p P'_s(p, s | p_0). \quad (14)$$

Подставляя в (14)  $I(P)$  вместо  $P'_s$ , получим

$$\bar{p}'_s = \int dp dp' w(p, p') P(p', s | p_0).$$

Так как

$$\int dp p w(p, p') = \int dp (p - p') w(p, p') = \int dp (p - p') \beta(p, p'),$$

то

$$\bar{p}'_s = \int dp' \widetilde{\Delta p}(p') P(p', s | p_0) = \overline{\widetilde{\Delta p}(p)},$$

где

$$\widetilde{\Delta p}^k = \int dp_1 (p_1 - p)^k \beta(p_1, p). \quad (15)$$

Приближенно  $\overline{f(\bar{p})} \approx f(\bar{p})$ , поэтому

$$\bar{p}'_s \approx \widetilde{\Delta p}(p). \quad (16)$$

Далее, подставляя в (13)  $I(P)$  вместо  $P'_s$  и записывая под интегралом  $(p - \bar{p})^n$  как  $\sum_{h=0}^n C_n^h (p - p')^h (p' - \bar{p})^{n-h}$ , находим

$$\frac{d}{ds} \overline{(p - \bar{p})^2} \approx \widetilde{\Delta p}^2(\bar{p}); \quad \frac{d}{ds} \overline{(p - \bar{p})^3} \approx \widetilde{\Delta p}^3(\bar{p}); \quad (17)$$

$$\frac{d}{ds} \overline{(p - \bar{p})^n} \approx \sum_{h=2}^{n-2} C_n^h \widetilde{\Delta p}^h(\bar{p}) \overline{(p - \bar{p})^{n-h}} + \widetilde{\Delta p}^n(\bar{p}), \quad (18)$$

где приближенные равенства становятся точными, если  $\widetilde{\Delta p}^k(p)$  не зависят от  $p$ .

Из (17) и (18) видно, что дисперсия распределения  $P$  растет пропорционально  $s$ , высшие центральные четные моменты растут как  $s^{n/2}$ , а нечетные — как  $s^{(n-1)/2}$ . Поэтому начиная с некоторого  $s = s_0$  нечетные центральные моменты оказываются относительно малыми, а для четных моментов все члены в правой части (18), кроме члена, содержащего  $\overline{\Delta p^2}(p)$ , становятся несущественными. Следовательно, при  $s > s_0$  эволюция распределения  $P$  определяется первыми двумя моментами  $\overline{\Delta p}$ ,  $\overline{\Delta p^2}$  функции  $\beta$ . Более детальное рассмотрение, которое мы опустим, показывает, что отношения четных моментов становятся близкими к отношениям, характерным для распределения Гаусса.

Легко убедиться, что длина  $s_0$  — величина порядка нескольких  $1/\alpha$ . Такая оценка для  $s_0$  получается как из требования, чтобы дисперсия  $(p - \bar{p})^2 \sim s \overline{\Delta p^2}$  заметно превышала дисперсию распределения  $\beta$ , равную  $\overline{\Delta p^2}/\alpha$ , так и из требования, чтобы относительная примесь нечетных моментов, имеющая вид  $\overline{\Delta p^3 s} / (\overline{\Delta p^2 s})^{3/2} \approx (\alpha s)^{-1/2}$ , была мала. В плотных средах  $1/\alpha$  — очень малая длина порядка нескольких межатомных расстояний.

Пусть  $s > s_0$ . Аппроксимируем функцию  $\beta$  функцией  $\beta_1(p, p')$ , имеющей нулевой, первый и второй моменты те же, что и  $\beta$ , но имеющей все остальные моменты, равные нулю. Такая функция имеет вид:

$$\beta_1(p, p') = \alpha \delta(p - p') - \delta'(p - p') \overline{\Delta p}(p') + \delta''(p - p') \overline{\Delta p^2}(p')/2 \quad (19)$$

где  $\delta'$ ,  $\delta''$  — производные от  $\delta$ -функции. Подставляя  $\beta_1$  в (14), получаем уравнение Фоккера

$$P'_s = -(\overline{\Delta p} P)'_p + (\overline{\Delta p^2} P)''_{pp}/2, \quad (20)$$

известное в теории марковских процессов [9] как второе уравнение Колмогорова. Замена  $\beta$  на  $\beta_1$  физически означает замену редких рассеяний с большими передачами импульса частыми рассеяниями с малыми передачами импульса.

Уравнение (20) при  $\beta(p, p') = \beta(p - p')$  можно формально получить и другим способом [10], а именно разлагая в  $I(P)$  функцию  $P(p', s | p_0)$  под знаком интеграла в ряд по степеням  $\Delta p = p - p'$  и сохраняя только первые три члена разложения. Однако при таком выводе остается неясной область применимости полученного уравнения, а при формальной подстановке в полученные выражения функции  $\beta(p, p')$  общего вида возникают не совсем правильные коэффициенты перед  $P'_p$ ,  $P''_{pp}$ .

Вернемся теперь к выражению (18) и рассмотрим подробнее величины  $\overline{\Delta p}$ ,  $\overline{\Delta p^2}$ . Величина  $\overline{\Delta p}$  отрицательна, равна средней потере импульса на единицу пути и по своему смыслу совпадает с коэффициентом торможения  $\gamma$  в классическом уравнении (1). Она связана со средним изменением импульса в одном акте рассеяния  $\overline{\Delta p}$ , вычисляемом по нормированному распределению  $\beta/\alpha$ , соотношением  $\overline{\overline{\Delta p}} = \overline{\Delta p}/\alpha$ .

Величина  $\overline{\Delta p^2}$  согласно (17) — скорость роста дисперсии распределения  $P(p, s | p_0)$ . Величина  $\overline{\Delta p^2}$  пропорциональна центральному второму моменту распределения  $P(p, ds | p_0)$ , но для распределения  $\beta(p, p')$  — нецентральный момент. С центральным вторым моментом

$$\overline{(p - \overline{p})^2} = \int dp (p - \overline{p})^2 \beta(p, p_0),$$

где  $\overline{p} = p_0 + \overline{\overline{\Delta p}}$ , эта величина связана соотношением

$$\overline{\Delta p^2} = (\overline{\Delta p})^2/\alpha + \overline{(p - \overline{p})^2}.$$

Первый член в правой части задает скорость роста дисперсии импульса за счет того, что между импульсом рассеянной и нерассеянной частицы в среднем есть разница  $\overline{\Delta p}$ , а второй — скорость роста разброса импульса за счет разброса импульсных потерь  $\Delta p$  в различных актах рассеяния. Для кулоновского рассеяния распределение  $\beta$  круто растет при  $p \rightarrow 0$  и первый член много меньше второго.

Решение уравнения Колмогорова (20) можно найти многими методами, разработанными в теории марковских процессов [9]. Не будем здесь приводить эти методы, а используем для нахождения переходной вероятности другой подход, а именно формализм стохастических дифференциальных уравнений.

**Стохастическое уравнение.** Рассмотрим процесс торможения частицы с микроскопической точки зрения. Представим себе, что сила, действующая на частицу со стороны атомов, детально известна. Тогда эволюцию ее импульса можно найти как решение дифференциального уравнения  $p'_s = -\gamma(s)$ . Разобьем функцию  $\gamma$ , которая с точностью до множителя  $1/v$  есть сила торможения, на два слагаемых: среднюю сглаженную силу  $\overline{\gamma}$ , медленно меняющуюся с  $s$  из-за постепенного изменения  $p$ , и добавку  $\Delta$ , меняющуюся быстро и хаотически, в среднем на макроскопическом участке равную нулю и имеющую большую амплитуду только вблизи рассеивающих центров. Рассмотрим решение уравнения

$$p'_s = -\overline{\gamma} - \Delta \quad (24)$$



при начальном условии  $p(0) = p_0$  на достаточно малом макроучастке, на котором изменение функции  $\bar{\gamma}(p)$  несущественно. Это решение имеет вид:

$$p(s) = p_0 - \bar{\gamma}s - \int_0^s ds \Delta(s).$$

Свойства интеграла от хаотически меняющейся величины подобны свойствам суммы многих случайных величин, так что при макроскопическом пути  $s$  интеграл  $J(s) = \int_0^s ds \Delta(s)$  при случайном выборе начальной точки движения частицы будет в хорошем приближении нормально распределенной случайной величиной, имеющей нулевое среднее. Так как дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий и число хаотических выбросов функции  $\Delta(s)$  на участке  $(0, s)$  пропорционально  $s$ , то дисперсия  $J(s)$  пропорциональна  $s$ :

$$\overline{J^2(s)} = a^2 s, \quad (22)$$

где  $a$  — некоторая константа.

Идеализируем функцию  $\Delta(s)$ , введя обобщенную случайную функцию  $\xi(s)$ , интеграл от которой при всех  $s$  имеет те свойства, которые  $J(s)/a$  имеет при макроскопических  $s$ . Функция  $\xi(s)$ , называемая *белым шумом* [9, 11], формально определяется соотношениями \*:

$$\overline{\xi(s)} = 0; \quad \overline{\xi(s)\xi(s')} = \delta(s-s'); \quad \int_0^s ds' \xi(s') \in N(0, \sqrt{s}). \quad (23)$$

Здесь черта означает среднее значение, а последнее соотношение есть краткая запись того, что интеграл от  $\xi$  — случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и стандартным отклонением  $\sqrt{s}$ .

Из (23) вытекает следующий закон преобразования белого шума при замене аргумента:

$$\xi(s(t)) = \xi(t) / \sqrt{ds/dt}. \quad (24)$$

Белый шум можно наглядно представлять как кусочно-непрерывную функцию, которая состоит из большого числа маленьких участков и средние (по участку) значения которой на каждом участке являются случайными некоррелированными между собой величина-

\* Последнее соотношение является следствием первых двух и соотношения:  $\xi(s_1)\xi(s_2)\dots\xi(s_n)\xi(s'_1)\xi(s'_2)\dots\xi(s'_m) = \xi(s_1)\dots\xi(s_n)\xi(s'_1)\dots\xi(s'_m)$ , если ни одно из  $s_i$  не совпадает ни с одним из  $s_j$ .

ми, которые имеют нулевые средние и дисперсии, обратно пропорциональные длинам участков.

Заменяв в (21) функцию  $\Delta$  на  $a\xi$ , получим стохастическое уравнение [11]:

$$p'_s = -\bar{\gamma} - a\xi(s). \quad (25)$$

Оно имеет решение

$$p(s) = p_0 - \bar{\gamma}s - a \int_0^s ds' \xi(S'). \quad (26)$$

Так как  $p(s)$  линейно зависит от  $\xi$ , то  $p(s)$  — нормально распределенная величина. Ее среднее и дисперсия, очевидно, равны:

$$\bar{p}(s) = p_0 - \bar{\gamma}s; \quad D(p(s)) = D\left(a \int_0^s ds' \xi(s')\right) = a^2s. \quad (27)$$

Иначе говоря, плотность вероятности частицы иметь импульс  $p$ , пройдя путь  $s$ , есть \*:

$$P(p, s | p_0) = (2\pi a^2 s)^{-1/2} \exp\{-[p - (p_0 - \bar{\gamma}s)]^2 / (2a^2s)\}. \quad (28)$$

Вернемся к уравнению Колмогорова (20). Нетрудно проверить прямой подстановкой, что функция (28) удовлетворяет (20), если положить  $\bar{\gamma} = \overline{\Delta p}$ ,  $a^2 = \overline{\Delta p^2}$ . Таким образом, стохастическое уравнение (25) эквивалентно уравнению Колмогорова (20) и приводит к той же переходной вероятности (28).

**Эквивалентность уравнений.** Эквивалентность стохастических уравнений и уравнений Колмогорова имеет место и в более общем случае, когда путь  $s$  не мал, коэффициенты  $\gamma$ ,  $a^2$  зависят от  $s$  и от искомой величины, а сама искомая величина  $x(s)$  многокомпонентна и удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$dx_i/ds = -\gamma_i(s) + \sum_j a_{ij} \xi_j(s). \quad (29)$$

Здесь  $\xi_j$  — белые шумы, независимые в смысле

$$\overline{\xi_j \xi_k} = 0 \text{ при } j \neq k. \quad (30)$$

В случае (29) переходная вероятность  $P(x, s | x^0)$  удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$P'_s = \sum_i (\gamma_i P)'_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (b_{ij} P)''_{x_i x_j}, \quad (31)$$

\* В [10] получено аналогичное распределение для потерь энергии исходя из приближенного решения кинетического уравнения. Отметим, что для потерь импульса предположение о постоянстве коэффициента  $\gamma$  является более оправданным, чем сделанное в [10] предположение о постоянстве аналогичного коэффициента, определяющего средние энергетические потери.

где

$$b = a^2.$$

Из (29) видно, что элемент  $a_{ij}$  матрицы  $a$  определяет величину влияния случайной силы  $\xi_j$  на компоненту  $x_i$ . Матрица  $b$  задает скорость роста ковариаций

$$b_{ij} = \frac{d}{ds} \overline{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}.$$

Ее можно записать также как предел:

$$b_{ij} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \overline{[x_i(s + \Delta) - x_i(s)][x_j(s + \Delta) - x_j(s)]}.$$

Преимуществом стохастического уравнения перед эквивалентным ему кинетическим уравнением является его наглядность и относительная простота его составления и решения, что особенно важно при обсуждении дополнительных приближений, которые приходится делать в ряде случаев. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться именно стохастическими уравнениями. Однако множители, стоящие перед белыми шумами, будем предполагать взятыми из соответствующих кинетических уравнений, где они просто и естественно связаны с сечениями рассеяния.

Ниже в основном будем конкретизировать систему уравнений (29), упрощать и рассматривать ее решения.

**Распределение Ферми.** Проиллюстрируем метод стохастических уравнений на примере многократного рассеяния без торможения, в котором возникает распределение Ферми.

Пусть частица испытывает многократное рассеяние. Пренебрежем ее торможением и учтем только случайные силы, перпендикулярные импульсу. Для импульса  $\mathbf{p}$  и координаты  $\mathbf{r}$  получим в общем случае уравнения:

$$\dot{\mathbf{p}} = (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) \mathbf{n}_1 + (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) \mathbf{n}_2; \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/E, \quad (32)$$

где  $\xi_1 = \xi_1(t)$ ,  $\xi_2 = \xi_2(t)$  — независимые случайные силы;  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  — единичные векторы, ортогональные  $\mathbf{p}$  и друг другу, и точка означает производную по времени  $t$ .

Матрица  $a$  равна  $V\bar{b}$ , где  $b = \beta\nu\rho$  и  $\beta$  — матрица вторых моментов дифференциального сечения \*  $d^2\sigma/dp_1 dp_2$  передачи импульса в направлениях  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ :  $\rho$  — число центров рассеяния в единице объема. Для поляризованной среды смешанный момент  $\beta_{12}$ , а вместе с ним недиагональные элементы  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  не равны нулю, но их можно сделать равными нулю, выбрав  $\mathbf{n}$  ортогональным направлению поляризации. Далее будем предполагать, что это сделано и  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Чтобы избавиться от зависимости коэффициентов  $a_{ij}$

\*В приближении малых потерь энергии

$$\frac{d^2\sigma}{dp_1 dp_2} = \frac{1}{p^2 \sin \theta \cos \theta} \frac{d^2\sigma}{d\varphi d\theta}.$$

от  $v$ , которая будет неудобна в будущих, более сложных примерах, возьмем за независимую переменную путь  $s$ .

Учитывая, что белые шумы преобразуются по правилу (24), получаем

$$\mathbf{p}' = a_1 \xi_1 \mathbf{n}_1 (s) + a_2 \xi_2 \mathbf{n}_2 (s); \quad \mathbf{r}' = \mathbf{n} (s) \equiv \mathbf{p}/p, \quad (33)$$

где штрих означает производную по  $s$ ;  $\xi_i = \xi_i (s)$ ;  $a_i^2 = a_{i_i}^2/v = \beta_{i_i}^2$  — слабо зависящая от  $p$  величина, которую будем считать в первом приближении константой.

Чтобы прийти к более привычным уравнениям, записанным в терминах углов, начнем с того, что разделим обе части первого уравнения (33) на  $p$ :

$$\mathbf{n}' = \tilde{a}_1 \xi_1 \mathbf{n}_1 + \tilde{a}_2 \xi_2 \mathbf{n}_2; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{n}. \quad (34)$$

Константа  $\tilde{a}_i = a_i/p$  равна среднеквадратичному углу рассеяния на единичном пути и имеет вид [12]  $\tilde{a}_i = 14,8 \text{ МэВ}/pv \sqrt{L_{\text{rad}(i)}}$ , где  $L_{\text{rad}(i)}$  — радиационная длина в направлении  $\mathbf{n}_i$ . Следовательно, для неполяризованной среды

$$a = a_1 = a_2 = 14,8 \text{ МэВ}/v \sqrt{L_{\text{rad}}}.$$

Система уравнений (34), так же как и исходная система (32), справедлива при любых отклонениях траектории от прямолинейной.

Ограничимся теперь не слишком большими  $s$ , при которых характерный угол отклонения импульса от первоначального направления невелик, и положим

$$\mathbf{n}_i (s) \approx \mathbf{n}_i (0) \equiv \mathbf{n}_i; \quad \mathbf{n} (s) \approx \mathbf{n}_0 + \theta_1 (s) \mathbf{n}_1 + \theta_2 (s) \mathbf{n}_2, \quad (35)$$

где  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n} (0)$  и  $\theta_1, \theta_2$  — углы вектора  $\mathbf{n}$  с плоскостями, в которых лежат  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_2$  и  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$ .

В этом приближении уравнения (34) приобретают вид:

$$\theta_1' \mathbf{n}_1 + \theta_2' \mathbf{n}_2 = \tilde{a}_1 \xi_1 \mathbf{n}_1 + \tilde{a}_2 \xi_2 \mathbf{n}_2; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{n}_0 + \theta_1 \mathbf{n}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2 \quad (36)$$

и распадаются на три независимых системы уравнений движения вдоль направлений  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ :

$$r_0' = 1; \quad \theta_1' = \tilde{a}_1 \xi_1; \quad r_1' = \theta_1; \quad (37)$$

$$\theta_2' = \tilde{a}_2 \xi_2; \quad r_2' = \theta_2; \quad (38)$$

где  $r_k = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{r}$ ,  $k = 0, 1, 2$  и  $r_1, r_2$  — отклонения траектории от прямолинейной. Отметим, что (37) или (38) описывает обычную модель плоского рассеяния.

Решение уравнений (37) есть

$$\theta = \tilde{a} \int_0^s ds' \xi (s'); \quad r = \int_0^s ds' \theta (s') = \tilde{a} \int_0^s ds' (s - s') \xi (s'), \quad (39)$$

где для краткости индекс 1 опущен.

Ясно, что распределение вероятности  $F(\theta, r, s) = P(\theta, r, s | 0)$  — двумерное нормальное распределение и что  $\bar{\theta} = \bar{r} = 0$ . Используя (23), для элементов ковариационной матрицы  $K$  получаем выражения

$$K(\theta, \theta) = \tilde{a}^2 s; \quad K(\theta, r) = \tilde{a}^2 s^2 / 2; \quad K(r, r) = \tilde{a}^2 s^3 / 3. \quad (40)$$

Следовательно, весовая матрица  $W = K^{-1}$  равна

$$W(s) = \frac{1}{\tilde{a}^2} \begin{pmatrix} 4/s & -6/s^2 \\ -6/s^2 & 12/s^3 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Распределение  $F$ , называемое распределением Ферми, имеет вид:

$$F = N(x, W(s)) \equiv \frac{1}{2\pi} |W|^{1/2} \exp(-x^T W x / 2), \quad (42)$$

где  $x^T = \{\theta, r\}$ , или, более явно,

$$F(\theta, r, s) = \frac{\sqrt{3}}{\tilde{a}^2 s^2 \pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\theta^2}{\tilde{a}^2 s} + \frac{12}{\tilde{a}^2 s^3} \left( r - \frac{\theta s}{2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (43)$$

Переходная вероятность величин  $\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2$  есть произведение  $P(\theta_1, \theta_2, \mathbf{r}, s | 0) = \delta(r_0 - s) F(\theta_1, r_1, s) F(\theta_2, r_2, s)$ . (44)

## 2. УЧЕТ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Описанию многократного рассеяния при движении частицы в среде посвящено много работ (см., например, [13—18]). Их можно разбить на два класса: 1) наличие внешнего стационарного электромагнитного поля [13—15, 18]; 2) отсутствие поля [16, 17]. Внутри каждого класса работы отличаются набором упрощающих предположений типа: малость углов, отсутствие потерь импульса, линейность потерь импульса, отсутствие страглинга и однородность электромагнитного поля. Кроме того, эти работы отличаются использованными методами вычисления нужной плотности вероятности.

Рассмотрим здесь две задачи: движение частицы в веществе с аксиально-симметричным магнитным полем и движение частицы в среде с произвольным медленно меняющимся магнитным полем. Рассмотрение первой задачи служит одновременно и введением в математический аппарат, используемый дальше. Для большей наглядности она решена в предположении отсутствия потерь импульса. Решение с учетом потерь импульса дано в [15]. Вторая задача более характерна для описания движения частиц в детекторах. Поэтому она рассмотрена нами подробно, и полученное решение фактически не содержит упрощающих предположений.

**Движение в аксиально-симметричном фокусирующем магнитном поле.** Рассмотрим движение частицы в веществе с аксиально-симметричным фокусирующим магнитным полем, создаваемым током равномерной плотности, текущим вдоль оси. Такое поле исполь-

зуется, например, в мюонных каналах. Оно направлено перпендикулярно оси, и его индукция  $\mathbf{B}$  растет пропорционально расстоянию до оси:  $\mathbf{B} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}G$ , где  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор вдоль оси;  $G$  — некоторый коэффициент, и начало координат считается лежащим на оси.

Пренебрежем торможением частицы и будем считать среду неполяризованной. Если не делать других приближений, то уравнения движения имеют вид:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} + a_{11} (\xi_1 \mathbf{n}_1 + \xi_2 \mathbf{n}_2); \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \equiv \mathbf{p}/E. \quad (45)$$

Предположим, что во время всего движения частицы угол между импульсом  $\mathbf{p}$  и направлением оси  $\mathbf{n}_0$  остается малым. Переходя к переменной  $s$  и делая приближение (35), получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \theta'_1 \mathbf{n}_1 + \theta'_2 \mathbf{n}_2 &= e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/pv + \tilde{a} (\xi_1 \mathbf{n}_1 + \xi_2 \mathbf{n}_2); \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{n}_0 + \theta_1 \mathbf{n}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2, \end{aligned} \quad (46)$$

содержащие, по сравнению с (36), дополнительный член

$$\begin{aligned} e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/pv &= (eG/p) \mathbf{n} \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}) \approx \omega^2 \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}) = \\ &= -\omega^2 (r_1 \mathbf{n}_1 + r_2 \mathbf{n}_2), \end{aligned} \quad (47)$$

где  $\omega^2 = eG/p$ . Подставляя (47) в (46), окончательно получаем  $\theta'_1 \mathbf{n}_1 + \theta'_2 \mathbf{n}_2 = -\omega^2 (r_1 \mathbf{n}_1 + r_2 \mathbf{n}_2) + \tilde{a} (\xi_1 \mathbf{n}_1 + \xi_2 \mathbf{n}_2)$ ;  $\mathbf{r}' = \mathbf{n}_0 + \theta_1 \mathbf{n}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2$ .

Как и в предыдущем примере, уравнение распадается на три независимых уравнения:

$$r'_0 = 1; \quad (48)$$

$$\theta'_1 = -\omega^2 r_1 + \tilde{a} \xi_1, \quad r'_1 = \tilde{\theta}_1; \quad (49)$$

$$\theta'_2 = -\omega^2 r_2 + \tilde{a} \xi_2, \quad r'_2 = \theta_2. \quad (50)$$

Запишем, опуская индекс 1, уравнение (49) в краткой матричной форме

$$x' = Ax + f, \quad (51)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} \tilde{a} \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно [19], что решение неоднородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами типа (51) можно записать в виде

$$x(s) = \exp(sA) x(0) + \int_0^s ds' \exp[(s-s')A] f(s'). \quad (52)$$

Из этого выражения видно, что вектор  $x$  линейно зависит от  $\xi(s)$ . Следовательно, вектор  $x$  имеет многомерное нормальное распределение и нам достаточно найти среднее значение вектора  $x$  и его ковариационную матрицу.

Найдем прежде всего явное выражение матрицы  $\exp(sA)$ . Сделать это можно несколькими способами. Для матриц небольшой размерности удобен метод, изложенный в [19]. Согласно этому методу функция  $\Phi(A)$  от матрицы  $A$  получается заменой аргумента  $\lambda$  на матрицу  $A$  в интерполяционном многочлене Лагранжа — Сильвестра  $h_\Phi(\lambda)$ :

$$\Phi(A) = h_\Phi(A), \quad (53)$$

при этом слагаемое, не содержащее  $\lambda$ , домножается на единичную матрицу подходящей размерности ( $\mathbf{1} = A^0$ ). Полином  $h_\Phi$  при простых корнях  $\lambda_i$  характеристического определителя  $d(\lambda) = |A - \lambda \mathbf{1}|$  равен

$$h_\Phi(\lambda) = \sum_i \prod_{j \neq i} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \Phi(\lambda_i). \quad (54)$$

В нашем случае характеристический определитель имеет два простых корня:  $\lambda_1 = i\omega$ ,  $\lambda_2 = -i\omega$ . Поэтому для функции  $\Phi(\lambda) = \exp(\lambda s)$  многочлен Лагранжа — Сильвестра  $h_\Phi(\lambda) = \cos(\omega s) + (\lambda/\omega) \sin(\omega s)$ , а сама функция —

$$\begin{aligned} \exp(sA) &= \mathbf{1} \cos(\omega s) + A(1/\omega) \sin(\omega s) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega s) & -\omega \sin(\omega s) \\ (1/\omega) \sin(\omega s) & \cos(\omega s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Итак, используя выражения (52), (55), можно записать решение уравнений (51) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix} &= \exp(sA) \begin{pmatrix} \theta(0) \\ r(0) \end{pmatrix} + \\ &+ \tilde{a} \begin{pmatrix} \int_0^s ds' \cos[\omega(s-s')] \xi(s') \\ \int_0^s ds' \sin[\omega(s-s')] \xi(s') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (56)$$

Среднее значение вектора  $x$  равно

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(0) \cos(\omega s) - r(0) \omega \sin(\omega s) \\ \theta(0) \frac{1}{\omega} \sin(\omega s) + r(0) \cos(\omega s) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

а элементы ковариационной матрицы

$$\left. \begin{aligned} K(\theta, \theta) &= \tilde{a}^2 \int_0^s ds' \cos^2 [\omega(s-s')] = \tilde{a}^2 \left[ \frac{s}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega s) \right]; \\ K(\theta, r) &= \tilde{a}^2 \sin^2(\omega s)/2; \\ K(r, r) &= \tilde{a}^2 \left[ \frac{s}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega s) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Из рассмотренного примера видно, что если система стохастических дифференциальных уравнений линейна, то решение включает слагаемое, являющееся результатом действия линейного оператора на белый шум. В этом случае, во-первых, переходная вероятность есть гауссово распределение и, во-вторых, проблема нахождения средних значений и ковариационных матриц сводится к решению системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений и выполнению квадратур при вычислении элементов ковариационной матрицы. Поэтому на практике задачу об учете многократного рассеяния всегда стараются свести, точно или приближенно, к системе линейных уравнений.

**Уравнение Лоренца с учетом торможения.** Построим решение обычного (без случайных сил) уравнения Лоренца движения частицы в магнитном поле с учетом средней силы торможения

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times e\mathbf{B} - \gamma \mathbf{v}. \quad (59)$$

Решение этого уравнения будем использовать в следующем разделе при рассмотрении более сложного стохастического уравнения, а также и в разделах, где излагаются методы оценки параметров частиц.

Магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ , в отличие от линейно растущей с  $r$  индукцией, рассмотренной выше, будем считать произвольной медленно меняющейся функцией координат.

Начнем со случая, когда поле  $\mathbf{B}$  однородно и решение уравнения (59) можно найти явно. Для нахождения этого решения в литературе используется несколько приемов.

Первый прием — это превращение уравнения (59) в уравнение, линейное по вектору  $\mathbf{p}$  с помощью перехода к переменной  $\tau$  (3). Такой переход превращает (59) в следующую формулу:

$$d\mathbf{p}/d\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{H} - \gamma \mathbf{p}, \quad (60)$$

где  $\mathbf{H} = e\mathbf{B}$ . В матричной записи это уравнение имеет вид:

$$d\mathbf{p}/d\tau = A\mathbf{p}, \quad (61)$$

где

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\gamma & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & -\gamma & H_1 \\ H_2 & -H_1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$



Символическое решение уравнения (61) имеет вид:

$$\mathbf{p}(\tau) = \exp(\tau A) \mathbf{p}(0). \quad (62)$$

Для фактического вычисления матрицы переноса  $T(\tau) = \exp(\tau A)$  нужно построить полином Лагранжа—Сильвестра  $h_T$ . Корни характеристического уравнения  $|A - \lambda \mathbf{1}| = 0$  равны  $\lambda_1 = -\gamma$ ,  $\lambda_2 = -\gamma + iH$ ,  $\lambda_3 = -\gamma - iH$ , где  $H = |\mathbf{H}|$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} T = h_T(A) &= \exp(\tau \lambda_1) \frac{A - \tilde{\lambda}_2}{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_2} \frac{A - \tilde{\lambda}_3}{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_3} + \\ &+ \exp(\tau \lambda_2) \frac{A - \tilde{\lambda}_1}{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1} \frac{A - \tilde{\lambda}_3}{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_3} + \exp(\tau \lambda_3) \frac{A - \tilde{\lambda}_1}{\lambda_3 - \tilde{\lambda}_1} \frac{A - \tilde{\lambda}_2}{\lambda_3 - \tilde{\lambda}_2} = \\ &= \exp(-\tau \gamma) \{ \mathbf{1} + \tilde{h} \sin(\tau H) + \tilde{h}^2 [\mathbf{1} - \cos(\tau H)] \}, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i \mathbf{1}$ ,  $\tilde{h} = (A + \gamma \mathbf{1})/H$  или, более явно,

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & h_3 & -h_2 \\ -h_3 & 0 & h_1 \\ h_2 & -h_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}^2 = \begin{pmatrix} h_1^2 & h_1 h_2 & h_1 h_3 \\ h_2 h_1 & h_2^2 & h_2 h_3 \\ h_3 h_1 & h_3 h_2 & h_3^2 \end{pmatrix} - \mathbf{1},$$

здесь  $(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{H}/H = \mathbf{V}/B$ . Множитель  $\exp(-\tau \gamma)$  описывает торможение частицы, а множитель в фигурных скобках — вращение вектора  $\mathbf{p}$  вокруг направления  $\mathbf{V}$ .

Второй прием — выделение уравнения для модуля  $p$ :

$$\dot{p} = -\nu \gamma,$$

или в переменных  $s$ :

$$p'_s = -\gamma,$$

а затем подстановка решения

$$p(s) = p(0) - \gamma s$$

в уравнение для единичного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ , которое в терминах переменной  $s$  имеет вид:

$$p(s) \mathbf{n}'_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{n}'_s = (H/p(s)) \tilde{h} \mathbf{n}.$$

Решение его имеет вид:

$$\mathbf{n}(s) = \exp(\tilde{h} c) \mathbf{n}(0) = [\mathbf{1} + \tilde{h} \sin c + \tilde{h}^2 (1 - \cos c)] \mathbf{n}(0), \quad (64)$$

где

$$c = H \int_0^s \frac{ds'}{p(s')} = \frac{H}{\gamma} \ln \frac{p(0)}{p(0) - \gamma s} = H \tau.$$

Третий прием — выбор оси три в направлении магнитного поля и расщепление уравнения (60) на одномерное и двумерное:

$$dp_3/d\tau = -\gamma p_3; \quad d\mathbf{p}_\perp/d\tau = \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{H} - \gamma \mathbf{p}_\perp.$$

Первое уравнение имеет решение  $p_3 = \exp(-\gamma\tau) p_3(0)$ , а во втором после подстановки для  $|\mathbf{p}_\perp|$  выражения  $p_\perp(0) \exp(-\gamma\tau)$  для вектора  $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{p}_\perp/p_\perp$  получается уравнение плоского вращения:

$$d\mathbf{n}_\perp/d\tau = H\mathbf{m}_\perp; \quad \mathbf{m}_\perp = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{n}_\perp.$$

Решение последнего уравнения, очевидно, имеет вид:

$$\mathbf{n}_\perp(\tau) = \mathbf{n}_\perp(0) \cos(\tau H) + \mathbf{m}_\perp(0) \sin(\tau H).$$

Для вычисления траектории достаточно подставить (62) в уравнение  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ , которое в переменной  $\tau$  принимает вид

$$d\mathbf{r}/d\tau = \mathbf{p}.$$

Решение этого уравнения

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(0) + \int_0^\tau d\tau' \mathbf{p}(\tau') = \mathbf{r}(0) + Z(\tau) \mathbf{p}(0), \quad (65)$$

где матрица переноса

$$Z(\tau) = \int_0^\tau d\tau' T(\tau') = \int_0^\tau d\tau' \exp(\tau' A) = A^{-1} [\exp(\tau A) - \mathbf{1}].$$

Практически удобнее не перемножать стоящие тут матрицы, а интегрировать непосредственно выражение (63). Окончательно получаем

$$Z(\tau) = -\exp(-\tau\gamma) \left\{ \frac{1}{\gamma} (1 + \tilde{h}^2) + \frac{H \cos c + \gamma \sin c}{\gamma^2 + H^2} \tilde{h} + \right. \\ \left. + \frac{H \sin c - \gamma \cos c}{\gamma^2 + H^2} \tilde{h}^2 \right\} - A^{-1}, \quad (66)$$

где  $c = \tau H$ ;  $A^{-1} = (-1/\gamma) (1 + \tilde{h}^2) + (\gamma \tilde{h}^2 - H \tilde{h})/(\gamma^2 + H^2)$ .

Описываемая этими выражениями траектория есть скручивающаяся логарифмическая спираль с постоянным углом наклона (dip angle) и с радиусом, равным  $p_\perp/\sqrt{H^2 + \gamma^2}$ . Спираль навита на конус и пересекает его образующие под постоянным углом. Под углом наклона понимается угол вектора  $\mathbf{p}$  с плоскостью, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ .

Для неоднородного магнитного поля и неоднородной среды поступают следующим образом. Траектория разбивается на участки, на которых магнитную индукцию и коэффициент торможения можно считать постоянными. На участке  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$  используют выражения

$$\mathbf{p}(\tau) = T(\tau - \tau_i) \mathbf{p}(\tau_i); \quad \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(\tau_i) + Z(\tau - \tau_i) \mathbf{p}(\tau_i), \quad (67)$$

где матрицы переноса  $T_i$  и  $Z_i$  вычисляются с использованием некоторых средних значений  $\mathbf{B}$  и  $\gamma$  на данном участке. Через начальные значения  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  выражаются (для  $i > 0$ ,  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ ) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}(\tau) &= T(\tau - \tau_i) S_i \mathbf{p}(0); \quad S_i = \prod_{k=0}^{i-1} T(\tau_{k+1} - \tau_k); \quad S_0 = 1; \\ \mathbf{r}(\tau) &= \mathbf{r}(0) + \sum_{k=0}^{i-1} Z(\tau_{k+1} - \tau_k) S_{i-1} \mathbf{p}(0) + Z(\tau - \tau_i) S_i \mathbf{p}(0). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Уравнение Лоренца и его решение рассмотрены в естественных, векторных переменных. Использование векторных переменных не только упрощает вид формул, но и приводит к наиболее эффективным программам численного интегрирования уравнений [26, 27]. Однако по исторически сложившейся традиции во многих работах и программах обработки данных уравнение Лоренца записывается в угловых переменных  $\lambda$  (угол наклона) и  $\varphi$  (азимутальный угол). Приведем для справки связь  $\lambda$ ,  $\varphi$  с направляющими ортами и вид уравнения Лоренца в переменных  $\lambda$ ,  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= (\cos \lambda \cos \varphi, \cos \lambda \sin \varphi, \sin \lambda); \\ \mathbf{n}_1 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \\ \mathbf{n}_2 &= (-\sin \lambda \cos \varphi, -\sin \lambda \sin \varphi, \cos \lambda); \\ d\mathbf{n}_0 &= \mathbf{n}_1 \cos \lambda d\varphi + \mathbf{n}_2 d\lambda; \\ \left\{ \begin{aligned} dp/d\tau &= -p\gamma; \quad d\lambda/d\tau = H_\lambda; \quad d\varphi/d\tau = H_\varphi; \\ dx/d\tau &= p \cos \lambda \cos \varphi; \quad dy/d\tau = \\ &= p \cos \lambda \sin \varphi; \quad dz/d\tau = p \sin \lambda, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где обозначено  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n} = \mathbf{p}/p$  и  $H_\lambda = H_x \sin \varphi - H_y \cos \varphi$ ;  $H_\varphi = H_z - (H_x \cos \varphi + H_y \sin \varphi) \operatorname{tg} \lambda$ .

**Стохастическое обобщение уравнения Лоренца.** Обобщим уравнение Лоренца (59) до стохастического уравнения, учитывающего многократное расстояние и случайный характер сил торможения. Обозначив  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{p}/p$ , перепишем (59) в терминах переменной  $s$ :

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H} - \gamma \mathbf{n}_0.$$

Добавляя в правую часть этого уравнения случайные силы из уравнений (25) и (46) [или (34)], получаем стохастическое обобщение уравнения Лоренца

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H} - \gamma \mathbf{n}_0 + a_0 \mathbf{n}_0 \xi_0 + a_1 \mathbf{n}_1 \xi_1 + a_2 \mathbf{n}_2 \xi_2, \quad (70)$$

где константы  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  слабо зависят от  $p$  и белые шумы  $\xi_k$  не коррелированы между собой. Напомним, что  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  — единичные векторы, ортогональные  $\mathbf{n}_0$  и друг другу. Эти векторы, как и  $\mathbf{n}_0$ , зависят от  $s$ .

Если использовать в качестве независимой переменной \*  $\tau$ , то (70) приобретает вид

$$d\mathbf{p}/d\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{H} - \gamma\mathbf{p} + \mathbf{f}, \quad (71)$$

где

$$\mathbf{f} = \sqrt{\bar{p}} (a_0 \mathbf{n}_0 \xi_0 + a_1 \mathbf{n}_1 \xi_1 + a_2 \mathbf{n}_2 \xi_2).$$

Уравнение (71), как и (70), нелинейно по  $p$  и не решается точно. Найдем приближенное решение уравнения (71), считая случайные силы  $\mathbf{f}$  малым возмущением.

Посмотрим, как в общем случае связаны решения возмущенного и невозмущенного уравнений первого порядка. Пусть исходное и возмущенное уравнения имеют вид:

$$\dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{y}, t); \quad (72)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_\lambda = F(\mathbf{y}_\lambda, t) + \lambda\varphi(\mathbf{y}_\lambda, t), \quad (73)$$

где  $\lambda$  — малый параметр. Представим решение  $\mathbf{y}_\lambda$  возмущенного уравнения в виде  $\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{y} + \lambda\mathbf{z}$  и подставим это выражение в (73). Выписывая явно только величины первого порядка по  $\lambda$ , получаем

$$\dot{\mathbf{y}} + \lambda\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{y}, t) + \lambda z \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} F(\mathbf{y}, t) + \lambda\varphi(\mathbf{y}, t) + O(\lambda^2).$$

Отбрасывая член  $O(\lambda^2)$ , получаем следующее уравнение:

$$\dot{\mathbf{z}} = z \partial F / \partial \mathbf{y} + \varphi, \quad (74)$$

связывающее возмущение  $\varphi$  правой части уравнения с возмущением решения  $z$ . Предполагая, что в (72), (73) начальное условие задано при  $t = t_0$ , и решая (74) с начальным условием  $z(t_0) = 0$ , находим

$$z = \int_{t_0}^t dt' \exp \left[ \int_{t'}^t dt'' \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}(t''), t'') \right] \varphi(\mathbf{y}(t'), t'). \quad (75)$$

Формула (75) тривиально обобщается на векторный случай  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . В этом случае  $G = \partial F / \partial \mathbf{y}$  становится матрицей с элементами  $\partial F_i / \partial y_j$ , действующей на столбец  $\varphi$ . Если матрицы  $G$  при разных  $t$  не коммутируют между собой, то под экспонентой понимается упорядоченная  $t$ -экспонента, в которой матрицы с большими  $t$  считаются стоящими левее матриц с меньшими  $t$ . В математической литературе  $t$ -экспонента называется матрицантом [19].

Применим формулу (75) к уравнению (71). Полагая  $\varphi = \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{H} - \gamma\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ , где  $\mathbf{A}$  — матрица уравнения (61), получаем

\* Отметим, что связь  $s$  и  $\tau$  использует случайную величину  $p$ . Поэтому фиксирование  $s$  не фиксирует  $\tau$  и наоборот, и получаемая ниже ковариационная матрица  $K(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{r}(\tau))$  заметно отличается от  $K(\mathbf{p}(s), \mathbf{r}(s))$ . В частности,  $|K(\mathbf{r}(\tau))| \neq 0$ , в то время как  $|K(\mathbf{r}(s))| = 0$ . Поэтому переменная  $\tau$  удобнее. Оценки  $\mathbf{p}(0)$ ,  $\mathbf{r}(0)$  и их ковариации не зависят от того, какая переменная  $s$  или  $\tau$  используется в промежуточных выражениях.

при постоянных  $H$  и  $\gamma$ :

$$\| \partial F_i / \partial p_j \| = A.$$

Возмущение вектора  $\mathbf{p}$  случайными силами  $\mathbf{f}$ , следовательно, равно

$$\delta \mathbf{p}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' \exp [(\tau - \tau') A] \mathbf{f}(\tau'). \tag{76}$$

Это выражение можно упростить, если заметить, что

$$\mathbf{n}_0(\tau) = \exp(\tau H \tilde{h}) \mathbf{n}_0(0). \tag{77}$$

Предположим, что среда изотропна ( $a_1 = a_2$ ), однородна и выберем  $\mathbf{n}_1(\tau)$  так, что

$$\mathbf{n}_1(\tau) = \exp(\tau H \tilde{h}) \mathbf{n}_1(0); \quad \mathbf{n}_2(\tau) = \exp(\tau H \tilde{h}) \mathbf{n}_2(0). \tag{78}$$

В этом случае вектор  $\mathbf{f}_\tau(\tau') \equiv \exp[(\tau - \tau') A] \mathbf{f}(\tau')$  будет:

$$\mathbf{f}_\tau(\tau') = \sqrt{p(0)} \exp(-\gamma\tau) \sum_{k=0}^2 a_k \mathbf{n}_k(\tau) \exp(\gamma\tau'/2) \xi_k(\tau'),$$

и выражение (76) можно переписать в форме

$$\delta \mathbf{p}(\tau) = \sqrt{p(\tau)} \sum_{k=0}^2 a_k \mathbf{n}_k(\tau) \int_0^\tau d\tau' \exp[-\gamma(\tau - \tau')/2] \xi_k(\tau'). \tag{79}$$

Так как в (76), (79) белые шумы входят линейно [ибо нелинейными по  $\lambda$  членами при выводе выражения (75) мы пренебрегли], то  $\delta \mathbf{p}$  — нормально распределенная величина со средним, равным нулю. Ковариационная матрица проекций векторов  $\mathbf{p}(\tau) = \bar{\mathbf{p}}(\tau) + \delta \mathbf{p}(\tau)$  и  $\mathbf{p}(\tau_1)$  на произвольно выбранные орты  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  имеет вид:

$$K(p_i(\tau), p'_j(\tau_1)) = v_{ij}(\tau, \tau_1) C_1(\tau, \tau_1), \tag{80}$$

где  $p'_j = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{p}$ ;

$$\left. \begin{aligned} C_1(\tau, \tau_1) = \\ = \exp[-\gamma(\tau + \tau_1)] p(0) \int_0^{\tau_{\min}} d\tau' \exp(\gamma\tau') = s_{\min} p(\tau_{\max}) / p(0); \\ v_{ij}(\tau, \tau_1) = \sum_{k=0}^2 a_k^2 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_k(\tau) \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{n}_k(\tau_1); \end{aligned} \right\} \tag{81}$$

$\tau_{\min} = \min(\tau, \tau_1)$  и т. п. При вычислении  $C_1$  мы учли, что

$$\begin{aligned} p(\tau') = \exp(-\gamma\tau') p(0) = \exp[\gamma(\tau - \tau')] p(\tau); \\ \tau = (1/\gamma) \ln [p(0)/p(s)]. \end{aligned} \tag{82}$$

При выборе ортов  $\mathbf{e}_i$ , совпадающим с  $\mathbf{n}_k$ , т. е. если положить  $\mathbf{e}_i = \mathbf{n}_{i+1}(\tau)$ ,  $\mathbf{e}_i' = \mathbf{n}_{i+1}(\tau_1)$ , матрица  $\nu$  становится диагональной:

$$\nu = \begin{pmatrix} a_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что проекции  $p_k = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{p}(\tau)$ ,  $p_k' = \mathbf{n}_k' \cdot \mathbf{p}(\tau_1)$  с различными  $k$  не коррелированы между собой.

В том случае, когда  $\tau = \tau_1$ ,  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i'$ ,  $a_1 = a_2 = a$  и орты  $\mathbf{n}_k$  обычным образом выражаются через углы  $\lambda$  и  $\varphi$  по формулам (69), матрица  $\nu$  будет:

$$\nu = a_0^2 \mu + a^2 (1 - \mu), \tag{83}$$

где

$$\mu = \begin{pmatrix} \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi & \cos^2 \lambda \cos \varphi \sin \varphi & \cos \lambda \sin \lambda \cos \varphi \\ \cos^2 \lambda \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \lambda \sin^2 \varphi & \cos \lambda \sin \lambda \sin \varphi \\ \cos \lambda \sin \lambda \cos \varphi & \cos \lambda \sin \lambda \sin \varphi & \sin^2 \lambda \end{pmatrix}.$$

Возмущение вектора  $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(0) + \int_0^\tau d\tau' \mathbf{p}(\tau')$ , очевидно, есть

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}(\tau) &= \int_0^\tau d\tau' \delta \mathbf{p}(\tau') = \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \mathbf{f}_{\tau'}(\tau'') = \\ &= V \overline{p(0)} \sum_{h=0}^2 a_h \int_0^\tau d\tau'' \exp(\gamma \tau''/2) \xi_h(\tau'') \int_{\tau''}^\tau d\tau' \exp(-\gamma \tau') \mathbf{n}_h(\tau'). \end{aligned} \tag{84}$$

Комбинируя (79), (84), можно найти явные выражения для ковариаций проекций векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{r}$ , но в общем случае они слишком громоздки, чтобы их здесь выписывать. Если в (84) положить  $\mathbf{n}_h(\tau') = \mathbf{n}_h(\tau)$  и использовать (82), то

$$\delta \mathbf{r}(\tau) = V \overline{p(\tau)} \sum_{h=0}^2 a_h \mathbf{n}_h(\tau) \frac{2}{\gamma} \int_0^\tau d\tau' \operatorname{sh}[\gamma(\tau - \tau')/2] \xi_h(\tau').$$

В этом приближении получаем

$$\left. \begin{aligned} K(p_i(\tau), r_j'(\tau_1)) &= \nu_{ij}(\tau, \tau_1) C_2(\tau, \tau_1); \\ K(r_i(\tau), r_j'(\tau_1)) &= \nu_{ij}(\tau, \tau_1) C_3(\tau, \tau_1), \end{aligned} \right\} \tag{85}$$

где

$$C_2(\tau, \tau_1) = V \overline{p(\tau) p(\tau_1)} \frac{2}{\gamma} \int_0^{\tau_{\text{мин}}} d\tau' \exp[-\gamma(\tau - \tau')/2] \operatorname{sh}[\gamma(\tau_1 - \tau')/2];$$

$$C_3(\tau, \tau_1) = V \overline{p(\tau) p(\tau_1)} \frac{4}{\gamma^2} \int_0^{\tau_{\text{мин}}} d\tau' \operatorname{sh}[\gamma(\tau - \tau')/2] \operatorname{sh}[\gamma(\tau_1 - \tau')/2].$$

Итак, в этом приближении матрица ковариаций для вектора  $(p_1, p_2, p_3, r_1, r_2, r_3)$  имеет структуру

$$K = \begin{pmatrix} \nu C_1 & \nu C_2 \\ \nu C_2 & \nu C_3 \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Эти выражения верны с относительной погрешностью порядка  $\varphi^2/8 = (\tau H)^2/8$ . Положим  $\tau = \tau_1$  и выпишем в приближении (85) явно совместное распределение проекций  $p_k, r_k$  векторов  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  на орты  $\mathbf{p}_k$ . Так как  $p_n$  коррелирует с  $r_k$  только при  $n = k$ , то эти величины удобно объединить в 6-компонентный вектор вида

$$g^T = (p_0, r_0, p_1, r_1, p_2, r_2). \quad (87)$$

Матрица ковариаций и весовая матрица для  $g$  ( $\tau$ ) имеют форму:

$$K_g = \begin{pmatrix} a_0^2 C & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 C & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 C \end{pmatrix}; \quad W_g = \begin{pmatrix} a_0^{-2} F & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{-2} F & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{-2} F \end{pmatrix}, \quad (88)$$

где 0 — нулевая двурядная матрица;

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}; \quad F \equiv \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix} = C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} C_3 & -C_2 \\ -C_2 & C_1 \end{pmatrix}; \\ |C| = C_1 C_3 - C_2^2.$$

Распределение вероятности величины  $g$ , т. е. переходная вероятность, равно

$$P(g(\tau) | g(0)) = [(2\pi)^3 a_0^2 a_1^2 a_2^2 |C|^{3/2}]^{-1} \exp(-\delta g^T W_g \delta g / 2). \quad (89)$$

Очевидно, что квадратичная форма в экспоненте распадается на сумму

$$\left. \begin{aligned} \chi^2 &\equiv \delta g^T W_g \delta g = \sum_{k=0}^2 \chi_k^2; \\ \chi_k^2 &= a_k^{-2} (\delta p_k \delta r_k) F \begin{pmatrix} \delta p_k \\ \delta r_k \end{pmatrix} = a_k^{-2} (\delta p_k^2 F_1 + 2\delta p_k \delta r_k F_2 + \delta r_k^2 F_3), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

а распределение вероятности — на произведение

$$P = \prod_{k=0}^2 P_k; \quad P_k = P(p_k, r_k, \tau | g(0)) = \exp(-\chi_k^2 / 2) / 2\pi a_k^2 |C|^{1/2}. \quad (91)$$

Часто при вычислении величин  $C_1, C_2, C_3$  торможением можно пренебречь. Тогда

$$C = p(\tau) \begin{pmatrix} \tau & \tau^2/2 \\ \tau^2/2 & \tau^3/3 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{1}{p(\tau)} \begin{pmatrix} 4/\tau & -6/\tau^2 \\ -6/\tau^2 & 12/\tau^3 \end{pmatrix}, \quad (92)$$

и распределения  $P_k$  переходят в распределение Ферми:

$$P_k = F_k(\delta p_k, \delta r_k, \tau), \quad (93)$$

где  $F_k$  дается выражением (43) с заменой  $\tilde{a}^2$  на  $a_k^2 p(\tau)$ .

Приведем теперь для справок стохастическое уравнение (71) в переменных  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi$  и ковариации этих переменных. Уравнение имеет вид:

$$dp/d\tau = -\gamma p + \alpha_p \xi_p; \quad d\lambda/d\tau = H_\lambda + \alpha_\lambda \xi_\lambda; \quad d\varphi/d\tau = H_\varphi + \alpha_\varphi \xi_\varphi, \quad (94)$$

где

$$\alpha_p = a_0 \sqrt{p}; \quad \alpha_\lambda = a_1 / \sqrt{p}; \quad \alpha_\varphi = a_2 / \sqrt{p} \cos \lambda. \quad (95)$$

Белые шумы  $\xi_p$ ,  $\xi_\lambda$ ,  $\xi_\varphi$  не коррелированы между собой. В силу соотношений

$$\delta p = \delta p_0; \quad \delta p_1 = p \cos \lambda \delta \varphi; \quad \delta p_2 = p \delta \lambda \quad (96)$$

величины  $\delta p$ ,  $\delta \varphi$ ,  $\delta \lambda$ , так же как и  $\delta p_h$ , некоррелированы и имеют дисперсии

$$\overline{(\delta p)^2} = a_0^2 C_1; \quad \overline{(\delta \varphi)^2} = a_1^2 C_1 / [\cos^2 \lambda p^2(\tau)]; \quad \overline{(\delta \lambda)^2} = a_2^2 C_1 / p^2(\tau). \quad (97)$$

Их ковариации с  $\delta r_h$  суть

$$K(\delta p, \delta r_0) = a_0^2 C_2; \quad K(\delta \varphi, \delta r_1) = a_1^2 C_2 / (p \cos \lambda);$$

$$K(\delta \lambda, \delta r_2) = a_2^2 C_2 / p. \quad (98)$$

При  $\gamma = 0$

$$p\tau = s, \quad C_1 = s, \quad C_2 = s^2/2p, \quad C_3 = s^3/3p^2. \quad (99)$$

Напомним, что константа  $\tilde{a}$  в (40) связана с  $a_1 = a_2$  равенством  $\tilde{a} = a_1/p$ . Поэтому при  $\gamma = 0$  распределение величин  $\delta \lambda$ ,  $\delta r_2$  совпадает с распределением величин  $\theta$ ,  $r$  — распределением Ферми (43).

### 3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Оценим здесь импульс частицы, движущейся в однородной среде, по измерениям ее траектории, а точнее по измерениям образа этой траектории на комплекте фотографий, сделанных под разными углами. Наиболее характерным примером такой задачи является проблема восстановления импульса частицы в пузырьковой камере.

Изложим три метода оценки параметров: фит к средней траектории, фит к случайной траектории и метод брейк-поинтс [8]. Хотя фит к средней траектории является традиционным, однако обычно он формулируется только для того частного случая, когда погрешности измерения и эффект многократного рассеяния можно просто сложить. Формализм предыдущего раздела позволит нам сформулировать этот метод для общего случая.

Метод фита к случайной траектории позволяет наиболее полно учитывать эффекты рассеяния средой. Кроме того, в нем оцениваются параметры  $p_i$ ,  $r_i$  во многих точках траектории. Знание множества параметров  $p_i$ ,  $r_i$  позволяет, в отличие от предыдущего метода, «ловить» изломы на треке, отвечающие сильным взаимодействиям и однократным кулоновским рассеяниям на большие углы.



Развитый нами формализм позволит легко получить из стохастического аналога уравнения Лоренца оценку по популярному сейчас методу брейк-поинтс и указать приближения, приводящие к этой оценке.

**Метод фита к средней траектории.** С точки зрения построения программы вычислений сложно использовать измерения в плоскости

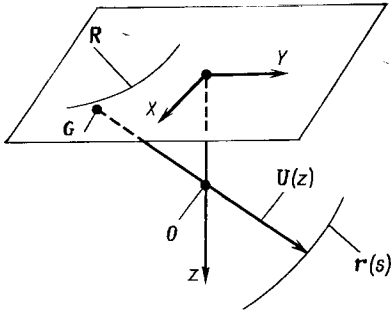


Рис. 1. Связь между точками на траектории  $r(s)$  и их измерениями  $G$

снимка (хотя это было бы наиболее корректно). Поэтому обычно заменяют собственно измерения некоторыми условными псевдоизмерениями в пространстве пузырьковой камеры. Это делается следующим образом [20].

Пусть на снимке, расположенном в плоскости  $z = 0$ , в результате измерения точки трека  $R = (X, Y, 0)$  получена точка  $G = (G_x, G_y, 0)$ . Поставим в соответствие точке  $G$  световой луч  $U(z)$ , проходящий через эту точку и оптический центр фотоаппарата  $O = (0, 0, z_0)$  (рис. 1):

$$U(z) = G + Fz; \quad F = (O - G)/z_0. \tag{100}$$

Обычно делаются предположения, что измерения точек на снимке независимы и распределены по двумерному нормальному закону

$$P(G | R) = (w/2\pi) \exp \{-w(G - R)^2/2\}. \tag{101}$$

Если  $r(\tau_i) = [x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]$  — точка на траектории частицы, проектирующаяся в  $R$  и связанная с  $r$  равенством:

$$R + (O - R) z(\tau_i)/z_0 = r(\tau_i), \tag{102}$$

то в плоскости  $z = z(\tau_i)$  распределение для точки на световом луче имеет вид:

$$P(U(z) | r) = (w(z)/2\pi) \exp \{-w(z)(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2)/2\}, \tag{103}$$

где  $w(z) = w_0^2(z - z_0)^{-2}$ ; а величины

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (r - U)_x = x(\tau_i) - G_x - F_x z(\tau_i); \\ \epsilon_y &= (r - U)_y = y(\tau_i) - G_y - F_y z(\tau_i) \end{aligned} \right\} \tag{104}$$

есть отклонения псевдоизменений  $U(z)$  от точки траектории  $r(\tau_i)$ . Иначе говоря, отклонения  $\epsilon_x, \epsilon_y$  — нормально распределенные случайные величины с дисперсией  $1/\overline{W(z)}$ .

Учтем теперь многократное рассеяние. Кроме истинной траектории  $r(\tau)$ , на которой отразилось многократное рассеяние и которая

в этом смысле является случайной, введем в рассмотрение также воображаемую среднюю траекторию  $\bar{\mathbf{r}}(\tau)$ , которую имела бы частица с теми же начальным импульсом и положением  $\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1$ , но в отсутствие многократного рассеяния.

Рассмотрим отклонение  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\tau_i) - \mathbf{U}(\bar{\mathbf{z}})$ :

$$\left. \begin{aligned} q_x(\tau_i) &\equiv \bar{x}(\tau_i) - G_x - F_x \bar{z}(\tau_i) = \varepsilon_x - \delta x + F_x \delta z; \\ q_y(\tau_i) &\equiv \bar{y}(\tau_i) - G_y - F_y \bar{z}(\tau_i) = \varepsilon_y - \delta y + F_y \delta z, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}$ . Итак, отклонение светового луча от средней траектории вызвано двумя эффектами; измерительными погрешностями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и многократным рассеянием  $\delta \mathbf{r}$ . В методе фита к средней траектории отклонения  $\delta \mathbf{r}$  интерпретируются как погрешности детектора и объединяются с отклонениями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  в единые суммарные погрешности  $q_x, q_y$ . В соответствии с такой интерпретацией в качестве квадратичной формы  $\chi^2$ , из условия минимума которой определяются оценки начальных параметров  $\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1$ , берется выражение

$$\chi^2 = q^T K_q^{-1} q, \quad (106)$$

где  $q^T = (q(\tau_1), \dots, q(\tau_N))$  — вектор размерности  $2N$ ;  $N$  — число измерений;  $K_q$  — матрица ковариаций компонент вектора  $q$ .

Выражение  $\bar{\mathbf{r}}(\tau, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1)$  было получено выше — для общего случая неоднородного магнитного поля и переменных потерь энергии. Построим ковариационную матрицу  $K_q$  [5]. Обозначим для краткости

$$D_{xy} = D_{xy}(\tau_i, \tau_j) = K(x(\tau_i), y(\tau_j)) \text{ и т. д.}, \quad (107)$$

где правая часть дается выражением (85). Предположим, что погрешности измерений  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  независимы и равны, так что их матрица ковариаций есть

$$K_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w^{-1}(\bar{\mathbf{z}}).$$

Тогда ковариационная матрица вектора  $q$  имеет элементы

$$\left. \begin{aligned} K(q_x(\tau_i), q_x(\tau_j)) &= D_{xx} - 2F_x D_{xz} + F_x^2 D_{zz} + \delta_{ij} w(\bar{\mathbf{z}}); \\ K(q_y(\tau_i), q_y(\tau_j)) &= D_{yy} - 2F_y D_{yz} + F_y^2 D_{zz} + \delta_{ij} w(\bar{\mathbf{z}}); \\ K(q_x(\tau_i), q_y(\tau_j)) &= D_{xy} - F_x D_{yz} - F_y D_{xz} + F_x F_y D_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Отметим, что при  $p_{1y} = p_{1z} = 0$  и отсутствии магнитного поля и потерь энергии  $D_{yz} = D_{xx} = D_{xy} = D_{xz} = 0$ , а величины  $D_{yy}, D_{zz}$  переходят в известное выражение для кулоновской матрицы ковариаций [3]:

$$D_{yy}(s, s_1) = D_{zz}(s, s_1) = \tilde{a}^2 s^2 (s_1/2 - s/6).$$

Чтобы получить эту формулу, достаточно выбрать оси  $x, y, z$  вдоль ортов  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  и вычислить  $C_3(\tau, \tau_1)$  в (85) при  $\gamma = 0, \tau < \tau_1$ , подставив затем  $\tau = s/p$  и  $a_1 = \tilde{a}p$ .

Итак, все величины, входящие в функционал (106), определены. Нахождение параметров  $p_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  из условия минимума этого функционала и называется методом фита к средней траектории. В этом методе общее число неизвестных параметров равно  $N + 5$ . Так как ранг формы (106) есть  $2N$ , число степеней свободы формы  $\chi^2$  равно  $N - 5$ .

Метод фита к средней траектории имеет ряд недостатков. Прежде всего, он крайне негибок. Например, если совместно с параметрами  $p_1, \mathbf{r}_1$  начала траектории требуется оценить также и параметры  $p_N, \mathbf{r}_N$  ее конца, что нужно довольно часто, этот метод уже непригоден. При плохом  $\chi^2_{\text{мин}}$  в этом методе трудно найти причины — плохие измерения или изломы траектории. Измерения с большой погрешностью трудно выбросить, так как для этого нужно заново оборачивать всю матрицу  $K_q$ .

Кроме того, метод фита к средней траектории имеет технические недостатки. Выражения (106), (108) предполагают наличие измерений только на одной проекции, а в реальных экспериментах измерения проводятся не менее чем на двух проекциях, что довольно сильно усложняет вид  $\chi^2$ . Поэтому на практике вместо правильного выражения для  $\chi^2$  используют его упрощенные варианты, что приводит к неточному учету многократного рассеяния.

Метод фита к средней траектории также неудобен тем, что требует больших затрат времени на ЭВМ при вычислении ковариационной матрицы  $K_q$  и обращении этой громоздкой и плохо обусловленной (при большом числе измерений) матрицы. Этот метод особенно нерационален, когда расстояние между измеренными точками на треке невелики, так что многие элементы матрицы  $K_q$  кулоновского происхождения малы по сравнению с погрешностями псевдоизмерений  $U$ .

**Фит к случайной траектории.** Идея метода, изложенного выше, — сведение новой задачи, т. е. оценки параметров трека при наличии шума от измерительных погрешностей и многократного рассеяния, к старой задаче — оценке при наличии только измерительных погрешностей. При таком подходе погрешности измерения трека заменялись на некоторые условные погрешности, которые увеличивались и становились коррелированными друг с другом за счет добавления к ним случайных отклонений истинной траектории от воображаемой средней. Такой прием, хотя и приводит к правильным результатам, имеет сложную интерпретацию и его трудно провести последовательно, кроме как в простейших случаях. Так, общее выражение, приведенное выше, было получено после разработки нового подхода [7], который изложим здесь. В последнем подходе измерительные погрешности сохраняют величины и смысл отклонений измерений от реальной (случайной) траектории, которая и входит во все основные выражения вместо воображаемой средней траектории. Такой подход, как будет показано ниже, помимо теоретической общности дает и практические преимущества.

Построим сначала вероятность данной реализации случайной траектории, если она имела начальные параметры  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$ . Фиксируем ее пока только в  $N$  точках  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tau_i, \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0)$ , образы которых были измерены на проекциях. Поскольку процесс движения частицы является марковским в фазовом пространстве  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ , удобно задать траекторию парами векторов  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$ .

Согласно определению процесса Маркова

$$P(p, r | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) = \prod_{i=1}^{N-1} P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}), \quad (109)$$

где  $p, r$  — наборы  $p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1})$ ,  $r = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1})$ .

Вероятность (109) определяет множество траекторий с параметрами  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  или, более подробно, вероятность частицы пройти через точки  $\mathbf{r}_i$ , имея в этих точках импульс  $\mathbf{p}_i$ , если она имела в начальной точке  $\mathbf{r}_0$  импульс  $\mathbf{p}_0$ .

Перейдем теперь к вероятности получить реализовавшиеся результаты измерения (функции правдоподобия). Принцип максимума правдоподобия для псевдоизмерений, зависящих от искомым параметров, не исследован. Поэтому при построении функции правдоподобия не будем пользоваться вероятностью  $P(\mathbf{U} | \mathbf{r})$ , а будем использовать измерения  $\mathbf{G}$  в плоскости снимка и вероятности

$$P(\mathbf{G} | \mathbf{R}) = (w/2\pi) \exp[-w(\mathbf{G} - \mathbf{R})^2/2],$$

где точка  $\mathbf{R}$  на снимке — функция точки на траектории  $\mathbf{r}$ . В частном случае, когда оптическая ось направлена по оси  $z$ , функция  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$  находится из (102) и имеет вид

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{O}z/z_0) z_0/(z_0 - z).$$

В общем случае, когда плоскость снимка ортогональна вектору  $\mathbf{m}$ , соединяющему начало координат на снимке с оптическим центром  $\mathbf{O}$ ,

$$\mathbf{R} = \mathbf{O} + (\mathbf{O} - \mathbf{r})/\mu, \quad \mu = (\mathbf{r} - \mathbf{O}) \cdot \mathbf{m}/m^2. \quad (110)$$

[В местной системе координат на снимке с осями вдоль ортов  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  векторы  $\mathbf{R}, \mathbf{G}$  имеют компоненты  $R_h = \mathbf{m}_h \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{O})$ ,  $G_h = \mathbf{m}_h \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{O})$ .] Отметим, что имеет место равенство

$$(\mathbf{G} - \mathbf{R})^2 w = (\mathbf{U} - \mathbf{r})^2 w(\mathbf{r}), \quad (111)$$

где в частном случае, когда  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_z$ ,  $w(\mathbf{r}) = w(z)$ , а в общем случае

$$w(\mathbf{r}) = w/\mu^2, \quad \mathbf{U} = \mathbf{O} + (\mathbf{O} - \mathbf{G})\mu.$$

В силу равенства (111) вероятности  $P(\mathbf{U} | \mathbf{r})$ ,  $P(\mathbf{G} | \mathbf{R})$  отличаются только предэкспоненциальным множителем.

В силу независимости измерений  $\mathbf{G}_j$  вероятность реализации набора  $G = (\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_M)$  при заданном наборе точек траектории  $p, r$  равна произведению

$$P(G | p, r) = \prod_{j=0}^{M-1} P(\mathbf{G}_j, \mathbf{R}_j); \quad \mathbf{R}_j = \mathbf{R}(\tau_j). \quad (112)$$

В этой формуле различные точки  $G_j$  могут лежать на разных проекциях. Если на нескольких проекциях измерен образ одной и той же точки траектории  $\mathbf{r}$  ( $\tau_i$ ) (например, точки вершины), то несколько значений индекса  $j$  соответствуют одному и тому же значению  $i$  и  $M > N$ .

Вероятность получить набор измерений  $G$  при заданных начальных параметрах  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$  в силу независимости процесса измерения и рассеяния равна произведению вероятности реализации данной траектории, проходящей через точки  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$ , при заданных начальных параметрах  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$  на вероятность при заданной траектории получить набор измерений  $G$ :

$$P(G | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) = P(G | p, r) P(p, r | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0). \quad (113)$$

То обстоятельство, что вероятность  $P(G | p, r)$  от  $p$  не зависит (или зависит столь ничтожно, что это не стоит учитывать), никак не влияет на возможность использовать написанную вероятность в качестве функции правдоподобия

$$L = P(G | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0). \quad (114)$$

Важно только, чтобы функция  $L$  в целом зависела от этих параметров и матрица  $I^L$  с элементами

$$I_{nm}^L = -\frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \ln L, \quad (115)$$

где  $X = (\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_{N-1}, \tau_{N-1})$  — вектор всех искомым параметров (размерности  $7N - 1$ ), была бы невырожденной:

$$|I^L| \neq 0. \quad (116)$$

В отличие от формы  $\chi^2$  (106), которая содержит  $N + 5$  неизвестных параметров, полученная функция правдоподобия содержит дополнительно  $2N - 2$  неизвестных векторных параметров  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$ . Если эти параметры исключить, проинтегрировав по ним функцию  $L$ , то в частном случае всего одной проекции мы найдем функцию правдоподобия, которая содержит в показателе экспоненты квадратичную форму (106), используемую в методе фита к средней траектории.

В методе фита к случайной траектории параметры  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  ( $i > 0$ ) не исключаются, а, напротив, оцениваются наряду с параметрами  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$ . Отметим, что для простоты изложения мы ввели число параметров  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$ , равное числу измерений. В принципе, в методе фита к случайной траектории их можно ввести и больше, проследив подробнее случайную траекторию, и меньше. Обсудим эти возможности позже.

Перейдем к получению явного выражения для функции правдоподобия  $P(G | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0)$ . Вероятность  $P(G | p, r)$  согласно (101), (112)

равна

$$P(G | p, r) = (w/2\pi)^M \exp \left[ -\frac{w}{2} \sum_{j=0}^{M-1} (G_j - R_j)^2 \right]. \quad (117)$$

Перейдем к явному построению вероятности

$$P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) = P(\bar{\mathbf{p}}_i + \delta\mathbf{p}_i, \bar{\mathbf{r}}_i + \delta\mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}). \quad (118)$$

Предположим, что измерения расположены вдоль траектории столь часто, что на участках между измерениями индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  и скорость потерь энергии  $\gamma(\mathbf{r})$  можно считать постоянными. Тогда, используя (67), для условных средних  $\bar{\mathbf{p}}_i, \bar{\mathbf{r}}_i$  (средних при условии, что векторы  $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}$  фиксированы) имеем выражения:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = T(\tau_i - \tau_{i-1}) \mathbf{p}_{i-1}; \quad \bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + Z(\tau_i - \tau_{i-1}) \mathbf{p}_{i-1}. \quad (119)$$

Для переходной вероятности  $P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})$  справедливо выражение (91), в котором под величинами  $C_l$  понимаются  $C_l(\tau, \tau)$  при  $\tau = \tau_i - \tau_{i-1}$  и  $p(\tau) = \bar{p}_i$ , а в качестве  $\delta p_h, \delta r_h$  следует подставить их определения  $\delta p_h = \mathbf{n}_h(\tau_i) \cdot \delta\mathbf{p}_i, \delta r_h = \mathbf{n}_h(\tau_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \delta p_0 &= \delta p_x \cos \lambda \cos \varphi + \delta p_y \cos \lambda \sin \varphi + \delta p_z \sin \lambda; \\ \delta p_1 &= -\delta p_x \sin \varphi + \delta p_y \cos \varphi; \\ \delta p_2 &= -\delta p_x \sin \lambda \cos \varphi - \delta p_y \sin \lambda \sin \varphi + \delta p_z \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Квадратичную форму  $\chi^2$  (90), перегруппировав члены, можно записать также в виде

$$\chi_i^2(V) = \delta V_i^T W_V^i \delta V_i, \quad (121)$$

где 192

$$\left. \begin{aligned} \delta V_i &= V_i - \bar{V}_i; \\ V_i^T &= V^T(\tau_i) = (p_x, p_y, p_z, r_x, r_y, r_z); \quad W_V = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{v} & F_2 \tilde{v} \\ F_2 \tilde{v} & F_3 \tilde{v} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

а матрица  $\tilde{v}$  отличается от матрицы  $v$ , выписанной в (83), заменой  $\lambda, \varphi$  на  $\bar{\lambda}_i, \bar{\varphi}_i$  и  $a_h^2$  на  $a_h^{-2}$ :

$$\tilde{v}_{lj} = \sum_{h=0}^2 a_h^{-2} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{n}_h(\tau_i) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_h(\tau_i).$$

Окончательно для искомой вероятности получаем

$$P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) = A_i \exp \{-\chi_i^2/2\}, \quad (123)$$

где (124)

$$A_i = [(2\pi)^3 a_0^2 a_1^2 a_2^2 | C(\tau_i - \tau_{i-1}, \tau_i - \tau_{i-1}) |^{3/2}]^{-1}.$$

Следовательно, функция правдоподобия равна

$$L = A \exp \{-\chi_V^2/2\}, \quad (125)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= (w/2\pi)^M \prod_{i=0}^{N-1} A_i; \\ \chi_V^2 &= w \sum_{j=0}^{M-1} (\mathbf{G}_j - \mathbf{R}_j)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \chi_i^2(V). \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Оценки параметров  $X$  могут быть найдены как из условия максимума функции  $L$ , так и методом наименьших квадратов из условия минимума квадратичной формы  $\chi_V^2$ . В данном случае, так как множитель  $A$  зависит от искомых параметров  $\tau_i$ , метод максимума правдоподобия дает несколько более точные оценки. Однако при наличии магнитного поля и погрешностей измерения, превышающих отклонения траектории от средней, это уточнение несущественно. По этой причине, а также из соображений вычислительной простоты на практике всегда пользуются методом наименьших квадратов.

В силу (111)

$$\chi_V^2 = \sum_{j=0}^{M-1} w(\mathbf{r}_j) (\mathbf{U}_j - \mathbf{r}_j)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \chi_i^2(V) \quad (127)$$

и в методе наименьших квадратов можно с равным успехом пользоваться как измерениями  $\mathbf{G}$ , так и псевдоизмерениями  $\mathbf{U}$ .

Посмотрим, как на структуру квадратичной формы  $\chi_V^2$  повлияло введение в качестве искомых параметров векторов  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{g}_i$ . Ранг формы  $\chi_V^2$  равен  $2M + 6(N - 1)$ . Число искомых параметров  $X$  равно  $7N - 1$ . Следовательно, число степеней свободы есть  $2M - N - 5$ , а в частном случае, когда  $M = N$ , есть  $N - 5$ . Мы видим, что число степеней свободы осталось тем же, что и в методе фита к средней траектории, так как каждый дополнительный параметр увеличивает ранг формы  $\chi_V^2$ . Именно тот факт, что на каждый дополнительный параметр появляется дополнительная связь, и позволяет вводить любое число точек траектории в качестве дополнительных параметров.

Отметим, что для точек траектории, не соответствующих никаким измеренным точкам на снимках, значения дуг являются заданными и не входят в число искомых параметров.

В методе наименьших квадратов ковариации оценок параметров даются матрицей  $I^{-1}$ , обратной к информационной матрице:

$$I = \| I_{nm} \| = \| \partial^2 \chi_V^2 / \partial X_n \partial X_m \|^2 \quad (128)$$

Структура матрицы  $I$  важна с вычислительной точки зрения, так как именно эту матрицу приходится оборачивать (и притом многократно — при различных значениях входящих в нее параметров) в наиболее распространенных методах минимизации квадратичных форм. Поскольку параметры каждой точки  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{g}_i$ ,  $\tau_i$  связаны только с параметрами соседних точек  $i - 1$  и  $i + 1$ , то информационная матрица имеет специфический околodiagonalный вид (рис. 2),

где блоки  $I^{(i, j)}$ , относящиеся к точкам  $i$  и  $j$ , имеют размерность  $7 \times 7$  (кроме первого, размерность которого  $6 \times 6$ ).

Околодиагональная структура матрицы  $I$  облегчает ее обращение \*, так что введение дополнительных параметров не приводит к чрезмерным затратам вычислительного времени. Заметим также, что обусловленность матрицы (128) значительно лучше, чем ковариационной (кулоновской) матрицы (108) метода фита к средней траектории. Этот метод оценивания параметров из фита к случайной траектории был программно реализован [7] и испытан на событиях, полученных по методу Монте-Карло.

До сих пор мы задавали данную реализацию трека числом пар  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$ , равным числу измерений. Однако это может оказаться нецелесообразным по следующей причине. Рассмотрим  $i$ -е измерение  $\mathbf{G}_i$ . С ним в функции  $L$  связано произведение  $P(\mathbf{G}_i | \mathbf{R}_i) P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})$ . Если расстояние между точками  $\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i$  мало, то согласно (123) функция  $P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})$  близка к  $\delta$ -функции от  $\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i, \mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}_i$ . Поэтому по переменным  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  можно провести интегрирование и приближенно получить

$$P(\mathbf{G}_i | \mathbf{R}_i) P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i | \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) \approx P(\mathbf{G}_i | \bar{\mathbf{R}}_i(\mathbf{p}'_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})). \quad (129)$$

Таким образом рационально реализовать следующий подход.

Разобьем трек на  $S$  сегментов  $(\tau_{0, l+1}, \tau_{0, l}]$ , таких, что на их длине для всех внутренних измерений при  $\tau_{\lambda, l}$  справедливо (129). Вероятность для таких измерений теперь записывается в виде  $P(\mathbf{G}_j | \bar{\mathbf{R}}_j)$ , где  $\bar{\mathbf{R}}_j = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{r}}_j(\mathbf{p}_0, l, \mathbf{r}_0, l))$ ;  $\tau_j \equiv \tau_{\lambda, l} \in (\tau_{0, l+1}, \tau_{0, l}]$ .  
 Полная вероятность

$$P(\mathbf{G} | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) = \prod_{l=0}^{S-1} P(\mathbf{p}_{0, l+1}, \mathbf{r}_{0, l+1} | \mathbf{p}_{0, l}, \mathbf{r}_{0, l}) \prod_{j=0}^{M-1} P(\mathbf{G}_j | \bar{\mathbf{R}}_j). \quad (130)$$

Соответствующую квадратичную форму можно взять в качестве функционала, минимизация которого дает оценки на параметры  $\mathbf{p}_{0, l}, \mathbf{r}_{0, l}$  и  $M - 1$  величин  $\tau_j$ .

В этом случае информационная матрицы приобретает вид, изображенный на рис. 3.

Такая структура информационной матрицы неудобна для обращения с учетом только ненулевых элементов матрицы. Поэтому рационально поочередно делать итерации: итерация по  $\mathbf{p}_{0, l}, \mathbf{r}_{0, l}$

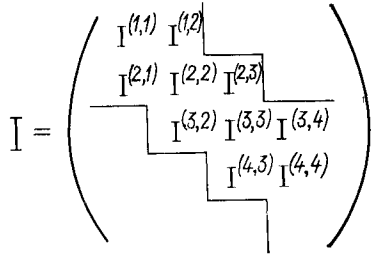


Рис. 2. Структура информационной матрицы в методе фита к случайной траектории, когда число искомых пар векторов  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  равно числу измерений

\* Для обращения таких матриц эффективен метод матричной прогонки (см., например, [7]).



при фиксированных  $\tau_j$ , и наоборот [20]. Поскольку все измерения независимы, то при фиксированных  $\mathbf{p}_{0, l}, \mathbf{r}_{0, l}$  получается  $M - 1$  независимое уравнение на поправки к  $\tau_j$ . С другой стороны, при фиксированных  $\tau_j$  информационная матрица для параметров  $\mathbf{p}_{0, l}, \mathbf{r}_{0, l}$  приобретает прежний околodiagonalный вид.

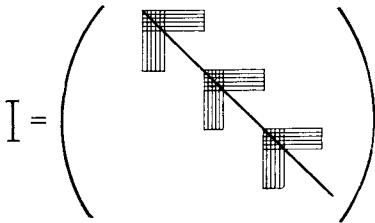


Рис. 3. Структура информационной матрицы в методе фита к случайной траектории, когда число искомым пар векторов  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  меньше числа измерений

Фит к случайной траектории в упрощенной плоской модели был предложен также в работе [6].

**Метод брейк-поинтс.** Этот метод (метод точек излома) был предложен в работе [8]. Он является приближенным вариантом фита к случайной траектории и основан на следующей модели многократного рассеяния\*.

Траектория разбивается на  $M$  сегментов  $[\tau_{b-1}, \tau_b]$ , внутри которых частица считается движущейся без

рассеяния, а в точках  $\tau_b$  испытывает рассеяние на случайные углы  $\delta\varphi_b, \delta\lambda_b$ :

$$\delta\varphi_b = \int_{\tau_{b-1}}^{\tau_b} d\tau \alpha_\varphi \xi_\varphi; \quad \delta\lambda_b = \int_{\tau_{b-1}}^{\tau_b} d\tau \alpha_\lambda \xi_\lambda$$

[см. (94) — (99)], которые при наличии многократного рассеяния приобрел бы импульс  $\mathbf{p}$  при прохождении частицей сегмента  $[\tau_{b-1}, \tau_b]$ . В [8] случайный характер потерь энергии не учитывался, однако в рамках метода брейк-поинтс его можно учесть, положив

$$\delta p_b = \int_{\tau_{b-1}}^{\tau_b} d\tau \alpha_p \xi_p.$$

Иначе говоря, в методе брейк-поинтс все рассеяние на сегментах переносят на их концы, заменяя в (94) случайные силы  $\alpha\xi$ , распределенные по всей траектории, на сумму  $\delta$ -функций:

$$\alpha_\lambda \xi_\lambda(\tau) \rightarrow \sum_{b=1}^M \delta(\tau - \tau_b) \delta\lambda_b, \dots \tag{131}$$

В (71) это соответствует при малых  $\delta\lambda, \delta\varphi$  приближенной замене

$$\mathbf{f} \rightarrow \sum_{b=1}^M \delta(\tau - \tau_b) \mathbf{f}_b; \quad \mathbf{f}_b = \int_{\tau_{b-1}}^{\tau_b} d\tau' \mathbf{f}_b(\tau').$$

\* При изложении метода будем опираться на формализм, описанный выше, в частности вместо дуги  $s$ , использованной в оригинальной работе [8], будем применять переменную  $\tau$ .

В методе брейк-поинтс векторы  $\mathbf{r}$  ( $\tau$ ) не являются независимыми случайными величинами, а являются лишь функциями случайных величин  $\delta = (\delta\lambda_1, \delta\varphi_1, \delta p_1, \dots, \delta\lambda_M, \delta\varphi_M, \delta p_M)$ . Следовательно, в этом приближении случайная траектория фиксируется параметрами  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0, \delta$  (или  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{f}_b$ ). Случайные величины  $\delta$  независимы, поэтому

$$P(\delta | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) = \prod_{b=1}^M P(\delta\lambda_b) P(\delta\varphi_b) P(\delta p_b).$$

Поскольку величины  $\delta$  являются функционалами от белых шумов, их распределения имеют гауссов характер и их средние равны нулю. Дисперсии их даются формулами (97), где

$$C_1 = p(\tau_b) [1 - \exp(-\gamma(\tau_b - \tau_{b-1}))]/\gamma.$$

Функция правдоподобия, т. е. вероятность получить набор измерений  $G$  и величин  $\delta$  при заданных  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$ , равна

$$L_{\text{в. п.}} = P(\delta | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) P(G | R) = P(\delta | \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0) \prod_{i=0}^{N-1} P(\mathbf{G}_i | \mathbf{R}_i),$$

где  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(\mathbf{r}_i)$ ;  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tau_i, \delta, \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0)$ .

Соответствующая ей квадратичная форма имеет вид:

$$\chi_{\text{в. п.}}^2 = \chi_{\delta}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} w(\mathbf{G}_i - \mathbf{R}_i)^2 = \chi_{\delta}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} w(\mathbf{r}_i)(\mathbf{U}_i - \mathbf{r}_i)^2;$$

$$\chi_{\delta}^2 = \sum_{b=1}^M \{(\delta\lambda_b)^2/(\overline{\delta\lambda_b})^2 + (\delta\varphi_b)^2/(\overline{\delta\varphi_b})^2 + (\delta p_b)^2/(\overline{\delta p_b})^2\}.$$

Неизвестными параметрами, подлежащими оценке, являются  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0, \delta, \tau_i$  — всего  $6 + 3M + N$  величин (параметры  $\tau_b$  в отличие от  $\tau_i$  фиксированы и оценке не подлежат).

Число сегментов  $M$  не совпадает с числом измерений и выбирается из соображений равенства кулоновской погрешности на сегменте погрешности измерения. Информационная матрица при итерациях по  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0, \delta$  при фиксированных  $\tau_i$  имеет вид, изображенный на рис. 4.

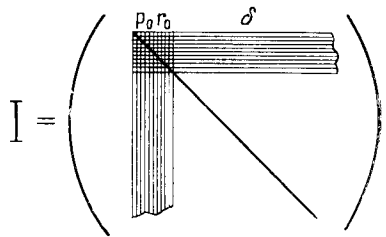


Рис. 4. Структура информационной матрицы в методе брейк-поинтс

Вопроса вычисления выражения  $\mathbf{r}(\tau_i, \delta, \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0)$  мы касаться не будем, так как при наличии формул для отдельных сегментов, данных выше, здесь нет проблемы.

Достоинством метода брейк-поинтс является удобная структура и при малом числе сегментов хорошая обусловленность информационной матрицы при относительно небольшом числе неизвестных параметров. Однако вопрос в том, насколько ухудшает оценку пара-

метров  $\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0$  использование столь упрощенной модели многократного рассеяния, не исследовался, а при большом числе сегментов, когда аппроксимация (131) становится заведомо удовлетворительной, метод теряет свои достоинства.

#### 4. МНОГОПЛАСТИНЧАТЫЕ ДЕТЕКТОРЫ

В последнее время в физике высоких энергий стали широко использоваться трековые детекторы, состоящие из чередующихся пластин и регистрирующих промежутков — многопластинчатые детекторы. Пластины могут играть роль замедлителей, мишеней-фильтров, магнитных элементов.

Наличие пластин настолько увеличивает эффект многократного рассеяния, что именно этот эффект, а не погрешность в измерении точек на треке, реально ограничивает точность прибора. Поэтому в таких детекторах аккуратный учет многократного рассеяния становится необходимостью.

Слоистая структура осложняет построение переходных вероятностей  $P_i = P(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} | \mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i)$ , входящих в функцию правдоподобия:

$$L = P(G | p, r) \prod_{i=0}^{N-1} P_i, \quad (132)$$

так как величины  $a_k$  и поле  $\mathbf{B}$  изменяются скачком на границе слоя. Дополнительное своеобразие вносит практическое отсутствие рассеяния в регистрирующих промежутках.

В слоистой среде естественно задавать случайную траекторию набором точек ее пересечения с определенными плоскостями (и импульсов в этих точках). Такой способ был реализован в [21, 22] для многопластинчатого магнитного спектрометра. Изложим сначала приближенный вариант фита, когда точки  $\mathbf{p}, \mathbf{g}$  привязываются к определенным временам  $\tau_i$ , затем преобразуем найденную функцию правдоподобия к случаю, когда точки  $\mathbf{p}, \mathbf{g}$  привязываются к определенным плоскостям.

**Фит при фиксированных временах.** Пусть спектрометр состоит из плоских стальных пластин толщиной  $b$ , разделенных регистрирующими промежутками ширины  $b_1$ . Внутри пластин имеется однородное магнитное поле, параллельное их поверхностям. В промежутках магнитное поле и многократное рассеяние пренебрежимо малы. Выберем систему координат так, что ось  $x$  направлена перпендикулярно пластинам. Плоскости  $i$ -й пластины имеют координаты  $x_i^a, x_i^b = x_i^a + b$ .

Отметим сразу, что для отрезков траектории  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1})$ , целиком лежащих в измерительных промежутках, распределения  $P_i$  превра-

щаются в  $\delta$ -функции, обеспечивающие равенства  $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + (\tau_{i+1} - \tau_i) \mathbf{p}_i$ . Чтобы не вносить в  $L$  эти  $\delta$ -функции, необходимо в качестве независимых параметров, фиксирующих случайную траекторию в промежутках, брать не более одной точки  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  в промежутке.

Построим теперь переходную вероятность  $P_i$  для точек  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$ , лежащих в соседних промежутках. На пути из  $\mathbf{r}_i$  в  $\mathbf{r}_{i+1}$  частица проходит часть промежутка  $i$ , затем пластину  $i$ , затем часть промежутка  $i+1$ . Значения  $\tau$  на входе и выходе из пластины обозначим  $\tau_i^a, \tau_i^b$ . Обозначим также  $\tau_i^* = \tau_i^b - \tau_i^a$ .

Для средних (ожидаемых) значений  $\bar{\mathbf{p}}_{i+1}, \bar{\mathbf{r}}_{i+1}$  получаем:

$$\bar{\mathbf{p}}_{i+1} = T(\tau_i^*) \mathbf{p}_i; \quad (133)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{r}_i + (\tau_i^a - \tau_i) \mathbf{p}_i + Z(\tau_i^*) \mathbf{p}_i + (\tau_{i+1} - \tau_i^b) \bar{\mathbf{p}}_{i+1}, \quad (134)$$

где матрицы  $T(\tau), Z(\tau)$  даются формулами (63), (66). В (133), (134) параметры  $\tau_i^a, \tau_i^b$  есть функции параметров  $\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i$  и находятся из соотношений

$$r_{ix} + (\tau_i^a - \tau_i) p_{ix} = x_i^a; \quad \tau_i^b = \tau_i^a + \tau_i^*; \quad (135)$$

$$(Z(\tau_i^*) \mathbf{p}_i)_x = b. \quad (136)$$

В общем случае уравнение (136) можно решить одним из численных методов (например, методом деления отрезка пополам). Но это можно сделать и аналитически, если перейти в систему координат, где ось  $z$  параллельна вектору  $\mathbf{V}$ .

Обозначим для краткости  $\mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{p}}_{i+1}, \mathbf{n}^* = \mathbf{p}^*/p^*$ . Пренебрежем торможением. Заметим, что при движении по окружности в плоскости  $z = \text{const}$  частица, вошедшая в пластину в направлении  $\mathbf{m} = (n_x, n_y, 0)$  и вышедшая из нее в направлении  $\mathbf{m}^* = (n_x^*, n_y^*, 0)$ , проходит в пластине путь  $s = b\varphi/2\mu_x \sin(\varphi/2)$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{m}, \mathbf{m}^*$ , а  $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}^*)/|\mathbf{m} + \mathbf{m}^*|$  — единичный вектор в направлении хорды. Кусок спирали, направленной вначале вдоль  $\mathbf{n}$  и проецирующийся на рассматриваемый кусок окружности, длиннее его в  $1/m$  раз. Поэтому путь по спирали равен

$$s = \frac{b}{m\mu_x} \frac{\varphi/2}{\sin(\varphi/2)}. \quad (137)$$

Учитывая, что  $s = p\tau, \varphi = H\tau, \mu_x = (n_x \cos(\varphi/2) + n_y \sin(\varphi/2))/m$  и решая уравнение (137) относительно  $\tau$ , находим

$$\tau_i^* = \frac{2}{H} \arcsin [(2\kappa n_y + n_x^2 - n_x \sqrt{n_x^2 + 4\kappa n_y - 4\kappa^2})/2m^2]^{1/2}, \quad (138)$$

где  $\kappa = bH/2p$ . Если в выражении (138) в качестве  $\kappa$  взять  $\kappa = bH/(p + p^*)$ , то оно становится приближенно (с погрешностью порядка  $H^2\gamma^2\tau^{*5}$ ) справедливо и при наличии торможения.

Отклонения  $\mathbf{p}_{i+1}$ ,  $\mathbf{r}_{i+1}$  от их средних значений даются формулами (79), (84), где интегралы следует брать от  $\tau_i$  до  $\tau_{i+1}$ . Учитывая, что вне интервала  $(\tau_i^a, \tau_i^b)$  величины  $a_h$  и  $f(\tau)$  равны нулю, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{i+1} &= \int_{\tau_i^a}^{\tau_i^b} d\tau \exp [(\tau^b - \tau) A] \mathbf{f}(\tau) = \delta \mathbf{p}(\tau^b); \\ \delta \mathbf{r}_{i+1} &= \int_{\tau_i^a}^{\tau_{i+1}} d\tau \delta \mathbf{p}(\tau) = \int_{\tau_i^a}^{\tau_i^b} d\tau \delta \mathbf{p}(\tau) + (\tau_{i+1} - \tau^b) \delta \mathbf{p}_{i+1}. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Ковариации компонент вектора  $\mathbf{p}_{i+1}$  даются формулами (80), (81) [с очевидной заменой  $p(\tau_{\max})$  на  $p^*$  и  $\tau_{\min}$  на  $\tau_i^*$ ], а ковариации компонент вектора  $\mathbf{r}_{i+1}$  между собой и с  $\mathbf{p}_{i+1}$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1}) &= K_{pr}^b + \varepsilon K_{pp}^b; \\ K(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1}) &= K_{rr}^b + 2\varepsilon K_{pr}^b + \varepsilon^2 K_{pp}^b; \\ \varepsilon &= \tau_{i+1} - \tau_i^b; \quad K_{pr}^b = K(\mathbf{p}(\tau_i^b), \mathbf{r}(\tau_i^b)) \text{ и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

В (86) добавки  $\varepsilon K_{pp}^b$ ,  $2\varepsilon K_{pr}^b + \varepsilon^2 K_{pp}^b$  сводятся к замене матриц  $C$  и  $F$  матрицами  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{F}$  вида

$$\tilde{C} = C + \begin{pmatrix} 0 & \Delta_2 \\ \Delta_2 & \Delta_3 \end{pmatrix}; \quad \tilde{F} = \tilde{C}^{-1} = F + \begin{pmatrix} \Delta_3 & -\Delta_2 \\ -\Delta_2 & 0 \end{pmatrix} / |C|, \quad (141)$$

где  $\Delta_2 = \varepsilon C_1$ ;  $\Delta_3 = 2\varepsilon C_2 + \varepsilon^2 C_1$ .

Искомое распределение  $P_i$  дается формулой (89) с указанной заменой  $C \rightarrow \tilde{C}$ .

Параметры  $\tau_i$  были до этого выбраны произвольно. Удобно выбрать  $\tau_{i+1} = \tau_i^b$ . Тогда точка  $\bar{\mathbf{r}}_i$  лежит на первой (по движению частицы) стенке промежутка, а точка  $\mathbf{r}_i$  — вблизи нее. В этом случае  $\Delta_h = 0$ , и выражение для вероятности реализации траектории

$$P(p, r | \mathbf{P}_0, \mathbf{r}_0) = \prod_{i=0}^{N-1} P_i$$

имеет такой же вид, как если бы промежутков не было вовсе, а пластины были бы сдвинуты вплотную, за исключением того, что равенство  $\bar{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{r}_i + Z\mathbf{p}_i$  заменяется на

$$\bar{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{r}_i + Z\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i b_1 / p_{ix}, \quad (142)$$

а все интегралы вычисляются не от  $\tau_i$  до  $\tau_{i+1}$ , а от  $\tau_i^a$  до  $\tau_i^b$ .

Выпишем теперь  $P(G | p, r) = \prod_j P(\mathbf{G}_j | p, r)$ . По определению,  $P_j = P(\mathbf{G}_j | p, r)$  — плотность вероятности получить в результате измерения  $\mathbf{G}_j$  при условии, что траектория проходит через точки  $p, r$ . Пусть измерение проводится в плоскости  $x = x_j$ , расположенной

в  $i$ -м промежутке, и вероятность при измерении точки  $\mathbf{R}_j = (x_j, R_y, R_z)$  получить точку  $\mathbf{G}_j = (x_j, G_y, G_z)$  равна

$$P_j = P(\mathbf{G}_j | \mathbf{R}_j) = \frac{w}{2\pi} \exp[-(\mathbf{G}_j - \mathbf{R}_j)^2 w/2] = \\ = \frac{w}{2\pi} \exp[-(\mathbf{g}_j - \mathbf{r}_j)^2 w/2], \quad (143)$$

где  $\mathbf{g} = (G_y, G_z)$ ;  $\mathbf{r} = (R_y, R_z)$  — двумерные векторы. Чтобы воспользоваться этим выражением, необходимо только выразить  $\mathbf{R}_j$  через  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$ ,  $\tau_i$ . Очевидно,

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{r}_j + \varepsilon_j \mathbf{p}_i, \quad (144)$$

где  $\varepsilon_j$  находится из условия  $r_{ix} + \varepsilon_j p_{ix} = x_j$  и равно

$$\varepsilon_j = (x_j - r_{ix})/p_{ix}. \quad (145)$$

Как и в случае непрерывной среды, для оценки параметров  $p$ ,  $r$  можно воспользоваться методом максимума правдоподобия и его приближенным вариантом — методом наименьших квадратов. Однако наличие плотных пластин настолько увеличивает эффект многократного рассеяния, что  $|\Delta \mathbf{p}| \sim \tau H p$  становится сравнимым с  $\delta \mathbf{p} \sim \sqrt{\tau p a_1}$ , информационные матрицы  $I^L$  и  $I$  начинают заметно отличаться и использование более точных оценок по методу максимума правдоподобия становится уже оправданным.

**Фит при фиксированных точках пересечения.** В этом варианте фита случайная траектория описывается набором точек  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(x_i)$ ,  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}(x_i)$ , лежащих на пересечениях траектории с заданными плоскостями  $x = x_i$ , в качестве которых удобно выбирать начальные (по ходу движения частицы) плоскости  $x_i = x_i^b$ , ограничивающие измерительные промежутки. Вектор  $\mathbf{R}_i = (x_i, R_{iy}, R_{iz})$  содержит всего два искомых параметра  $R_{iy}$ ,  $R_{iz}$ . Переходная вероятность

$$P_i^x = P(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} | \mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i), \quad (146)$$

где  $\mathbf{r} = (R_y, R_z)$ , входящая в функцию правдоподобия

$$L^x = P(G | R) \prod_{i=0}^{N-1} P_i^x, \quad (147)$$

является функцией пяти параметров  $(p_x, p_y, p_z, R_y, R_z)$ , в отличие от вероятности  $P_i$ , которая есть функция шести параметров. Выразим  $P_i^x$  через  $P_i$  и посмотрим, куда исчез один параметр.

Напомним закон преобразования плотности вероятности при переходе от переменной  $x$  к переменной  $f = f(x)$ . Так как

$$P^x(x) dx = P^f(f) df,$$

то

$$P^f(f) = P^x(x(f)) dx/df. \quad (148)$$

В векторном случае  $dx/df$  переходит в якобиан  $|\partial(x)/\partial(f)|$ . Рассмотрим связь параметров  $\mathbf{p}_i, \boldsymbol{\rho}_i$  с  $\mathbf{p}_i^\tau, \mathbf{r}_i$ , где  $\mathbf{p}_i^\tau = \mathbf{p}(\tau_i)$ ,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$  при  $x = x_i^b$ . Точка  $r_i$  близка к поверхности  $i - 1$ -ой пластины. Поэтому если выбрать  $\tau_{i+1} = \tau_i^b$ , то с хорошей степенью точности

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^\tau (1 - \gamma \varepsilon_i);$$

$$\boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{p}_i^\tau, \mathbf{r}_i) = (r_{iy} + \varepsilon_i p_{iy}^\tau, r_{iz} + \varepsilon_i p_{iz}^\tau). \quad (149)$$

где

$$\varepsilon_i = \varepsilon(\mathbf{p}_i^\tau, \mathbf{r}_i) = (x_i - r_{ix})/p_{ix}^\tau. \quad (150)$$

Из этих равенств нельзя выразить  $\mathbf{r}_i$  через  $\mathbf{p}_i, \boldsymbol{\rho}_i$ . Чтобы соотношения стали обратимыми, необходимо дополнить набор  $\mathbf{p}_i, \boldsymbol{\rho}_i$  еще одним независимым параметром, например параметром  $\varepsilon_i$ . Тогда якобиан

$$|\partial(\mathbf{r}_i)/\partial(\varepsilon_i, \boldsymbol{\rho}_i)| = p_{ix} \neq 0, \quad (151)$$

соотношения (149), (150) можно обернуть:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{R}_i - \varepsilon_i \mathbf{p}_i \quad (152)$$

и согласно (148) получить

$$P_i^{x\varepsilon} \equiv P(\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, \boldsymbol{\rho}_i | \dots) = p_{ix} P(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}(\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, \boldsymbol{\rho}) | \dots). \quad (153)$$

[Отметим в скобках, что распределение  $P^{x\varepsilon} = p_x \exp(-\chi^2/2) \text{const}$  не гауссово и  $\chi^2$  — не квадратичная форма, ибо  $\chi^2$  как функция отклонений  $\delta\mathbf{p}, \delta\varepsilon, \delta\boldsymbol{\rho}$  содержит члены четвертой степени.]

Вероятность  $P^{x\varepsilon}$  по сравнению с интересующей нас вероятностью  $P^x$  содержит дополнительный случайный параметр  $\varepsilon$ , определяющий время  $\tau'_i = \tau_i - \tau_{i-1} + \varepsilon$ , затрачиваемое частицей, чтобы попасть из точки  $\mathbf{r}_{i-1}$  в точку  $\mathbf{R}_i$ . Используя функцию правдоподобия

$$L^{x\varepsilon} = P(G | R) \prod_{i=0}^{N-1} P_i^{x\varepsilon},$$

мы нашли бы оценки времен  $\tau'_i$ , а также дисперсии этих времен и их ковариации с остальными параметрами  $\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, \boldsymbol{\rho}_i$ . В варианте (146), (147) мы не получим этих сведений.

Распределение  $P^x$  получается интегрированием распределения  $P^{x\varepsilon}$  по  $\varepsilon$ . Записывая  $P_i^{x\varepsilon}$  как  $N(p) \exp(-\chi^2/2)$  и выделяя в  $\chi^2$  члены, которые содержат  $\varepsilon_i$ :

$$\chi^2 = \hat{\chi}^2 + E_1 \varepsilon_i + E_2 \varepsilon_i^2,$$

получаем

$$P_i^x = \int d\varepsilon_i P_i^{x\varepsilon} = N(p) \sqrt{2\pi/E_2} \exp(-\tilde{\chi}^2/2); \quad \tilde{\chi}^2 = \hat{\chi}^2 - E_1^2/4E_2. \quad (154)$$

Выберем  $\tau_i$  так, что  $\bar{r}_x(\tau_i) = x_i$  и предположим, что  $x_i = x_{i-1}^b$ . Тогда, используя (121) — (126) при  $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} - \varepsilon\mathbf{p}$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\chi}^2 &= (\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{R})^T W_V \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{R} \end{pmatrix}; & E_2 &= \mathbf{p}^T F_3 \mathbf{v}\mathbf{p}; \\ E_1 &= -2(\delta\mathbf{p}^T F_2 \mathbf{v}\mathbf{p} + \delta\mathbf{R}^T F_3 \mathbf{v}\mathbf{p}), \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

где  $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R} - \bar{\mathbf{r}} = (0, \delta R_y, \delta R_z)$  и индекс  $i$  опущен для краткости.

Распределение  $P_i^x$ , так же как и  $P_i^{x\varepsilon}$ , негауссово. Это проявляется тем сильнее, чем меньше угол траектории с плоскостью  $x = x_i$ . В частности, при  $\bar{\varphi} = 0$  член в  $\hat{\chi}^2$ , квадратичный по  $\delta R_z$ , приближенно равен  $(\delta R_z)^2 a_1^{-2} \cos^2 \lambda (1 - 2 \operatorname{tg} \lambda \delta p_{\perp}/p) F_3$ , где  $\delta p_{\perp}^2 = \delta p_1^2 + \delta p_2^2$ . При  $2 \operatorname{tg} \lambda \sim a_1$  величина  $2 \operatorname{tg} \lambda \delta p_{\perp}/p \approx 1$  и «вес» при  $\delta R_z^2$  сильно зависит от случайной величины  $\delta p$ .

Аппроксимируем  $P_i^x$  распределением Гаусса, в частности \* заметим в (155) случайный вектор  $\mathbf{p}$  на средний  $\bar{\mathbf{p}}$ . Вычисляя  $\tilde{\chi}^2$  в системе координат, заданной ортами  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ , получаем [ср. с (90)]:

$$\tilde{\chi}^2 \approx \delta p_0^2 / (a_0^2 s) + (\delta p_{\perp}^2 F_1 + 2\delta p_{\perp} \cdot \delta\mathbf{R}_{\perp} F_2 + \delta R_{\perp}^2 F_3) / a^2, \quad (156)$$

где  $\delta\mathbf{R}_{\perp} = \delta\mathbf{R} - \mathbf{n}_0 (\delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_0)$ ;  $\delta p_{\perp} = \delta\mathbf{p} - \mathbf{n}_0 (\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_0)$ .

Согласно (156) ковариационная матрица вектора  $(\delta p_0, \delta p_1, \delta R_1, \delta p_2, \delta R_2)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_0^2 s & 00 & 00 \\ 0 & a_1^2 C & 00 \\ 0 & 00 & 00 \\ 0 & 00 & a_1^2 C \\ 0 & 00 & 00 \end{pmatrix}. \quad (157)$$

Пары  $\delta p_1, \delta R_1$  и  $\delta p_2, \delta R_2$  имеют ковариации, обычные для распределения Ферми. Простой вид матрицы (157) связан с простым видом матрицы  $K_g$  (88) и тем, что в этом приближении  $\delta R_1 = \delta r_1, \delta R_2 = \delta r_2$ . Ковариации величин  $p_x, p_y, p_z, R_y, R_z$  можно вычислить непосредственно из выражений (149), полагая в гауссовом приближении  $\delta\mathbf{R} = \delta\mathbf{r} - \mathbf{n}\delta r_x/n_x$  и пользуясь матрицей ковариаций (85). Отличие  $\delta\mathbf{R}$  от  $\delta\mathbf{r}$  на член  $\mathbf{n}\delta r_x/n_x$  приводит к отличию ковариационных матриц величин  $\delta\mathbf{R}$  и  $\delta\mathbf{r}$ . Это отражает тот факт, что  $\delta\mathbf{r}$  вычисляются при фиксированных временах, а  $\delta\mathbf{R}$  — при фиксированных точках пересечения\*\*.

\* Для упрощения выражения используется также тот факт, что обычно  $a_0^2/p_0^2 \ll a_1^2/p_1^2$ .

\*\* Поэтому в этом методе при оценке  $\tau_i^*$  вместо (138) следует брать  $\tau^* = (2/H) \operatorname{arcsin}(\kappa/\bar{m}\mu_x)$ , где  $\bar{m} = (m + m^*)/2$  и в качестве  $\mathbf{p}^*$  используется оценка для  $\mathbf{p}_{i-1}$ , полученная в предыдущем приближении.



### 5. ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТИЦ

При разработке трековых детекторов и планировании их использования важно знать заранее точность оценки параметров частиц, которую они обеспечивают, а также зависимость этой точности от различных параметров самого детектора, что позволяет оптимизировать детектор по этим параметрам.

Разрешающая способность детектора различать массы частиц и резонансов обычно, в первую очередь, определяется относительной погрешностью в определении импульса  $\sigma_p/p$ , во-вторую — погрешностями в определении углов  $\varphi$  и  $\lambda$  в вершине события. Погрешность  $\sigma_p/p$  совпадает с относительной погрешностью в определении кривизны трека. Оценка угла  $\lambda$  не коррелирована с оценками угла  $\varphi$  и кривизны и функционально от них не зависит. Поэтому при вычислении дисперсии оценки угла  $\lambda$  и матрицы ковариаций угла  $\varphi$  и кривизны можно использовать различные независимые модели.

**Погрешность угла наклона.** При вычислении дисперсии оценки угла  $\lambda$  среднюю траекторию можно считать прямой и пренебречь торможением. Примем (как это сделано в [23]), что измерения равноточны, некоррелированы и равномерно расставлены. Пусть средняя траектория

$$y = a + bx \quad (158)$$

и имеется  $n$  измерений с дисперсиями  $\epsilon^2$ , сделанных на участке  $0 \leq x \leq T$  с интервалами  $T/(n-1)$ .

При отсутствии многократного рассеяния дисперсия параметра  $b$  находится аналитически и [23]

$$D(b) = \frac{1}{T^2 W} \frac{12(n-1)}{n+1}, \quad (159)$$

где  $W = n/\epsilon^2$  — суммарный вес измерений. Если под  $\epsilon$  понимать измерительную погрешность в направлении, перпендикулярном траектории, то

$$D(\lambda) = \frac{1}{s^2 W} \frac{12(n-1)}{n+1} \equiv D_W, \quad (160)$$

где  $s$  — длина измеренного участка траектории.

При наличии многократного рассеяния, но отсутствии измерительных погрешностей (в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ ) дисперсия также находится аналитически и равна [24]:

$$D(\lambda) = a^2 l / \mu_n \equiv D_\xi; \quad \mu_2 = 3; \quad \mu_{n+1} = 4(3 + \mu_n) / (4 + \mu_n), \quad (161)$$

---

\* Под  $\sigma_p^2$  понимается дисперсия оценки импульса  $p$  по кривизне трека без использования информации о полном пробеге частицы.

где  $l = s/(n - 1)$  — интервал между точками измерения. Последовательность чисел  $\mu_n$  быстро сходится к предельному значению  $\mu_\infty = 2\sqrt{3}$ :

$$\mu_3 = 24/7 = 3,429; \mu_4 = 45/13 = 3,462; \mu_\infty = 3,464. \quad (162)$$

Равенство  $\mu_3/\mu_\infty = 0,99$  означает, что в рассматриваемом случае оценка угла  $\lambda$  почти полностью (на 99%) определяется первыми тремя точками измерений, а более далекие точки не играют заметной роли.

В общем случае, когда существенно многократное рассеяние и измерительные погрешности, дисперсия  $D(\lambda)$  сложно зависит от  $s$ ,  $W$ ,  $n$ . Сумма предельных выражений (160), (161):

$$D_+ = D_W + D_\xi \quad (163)$$

является оценкой дисперсии снизу:

$$D(\lambda) \geq D_+. \quad (164)$$

Равенство  $D(\lambda) = D_+$  имеет место только при  $n = 2$ .

Качественную оценку важности вклада многократного рассеяния в  $D(\lambda)$  дает сравнение длины измеренной части трека  $s$  и интервала  $l$  с характерной длиной

$$L = (a^2W)^{-1/3}. \quad (165)$$

При  $s < 3L/2$  вклад многократного рассеяния в  $D(\lambda)$  мал, а при  $l > 3L$  мал вклад измерительных погрешностей. В этих случаях  $D(\lambda) \approx D_+$  (с точностью до 5%).

При

$$\gamma = s/L = s(a^2W)^{1/3} \approx 3 \quad (166)$$

многократное рассеяние и измерительные погрешности равно существенны, и при  $n \geq 3$  величина  $D(\lambda)$  заметно превышает  $D_+$ . При  $n = 3$  [24]:

$$D(\lambda) = D_3 = \frac{6}{s^2W} + a^2s \frac{7}{48} + \frac{81}{2} \frac{a^2s}{216 + s^3a^2W}.$$

При  $\gamma \approx 3$   $D_3 \approx 1,5D_+$ .

При больших  $s$  оценка угла  $\lambda$  почти полностью определяется измерениями, лежащими на начальном участке  $0 \leq x \leq 6L$ , и (если число  $n_1$  таких измерений больше двух) остальные измерения можно не учитывать. Если на начальном участке лежит четыре и более измерений, то  $D(\lambda)$  слабо зависит от  $n$  и можно использовать асимптотические формулы, получаемые предельным переходом  $n \rightarrow \infty$  (при постоянном суммарном весе  $W$ ). В пределе  $n \rightarrow \infty$  [24]:

$$\chi^2 = \int_0^s dx \left\{ \frac{1}{a^2} (y''(x))^2 + \frac{W}{s} [y(x) - g(x)]^2 \right\}, \quad (167)$$

а неизвестными параметрами являются точки случайной траектории  $y(x)$ . Решение вариационной задачи  $\delta\chi^2 = 0$ , детали которой мы

опускаем, дает для дисперсии производной  $y'(0)$  выражение

$$D_\tau = \frac{a^2 s}{\tau} \frac{\text{ch } \tau \text{ sh } \tau + \cos \tau \sin \tau}{\text{sh}^2 \tau - \sin^2 \tau}, \tag{168}$$

где

$$\tau = (a^2 s^3 W/4)^{1/4} = \gamma^{3/4} / \sqrt{2}. \tag{169}$$

При  $\gamma > 2$  (и  $n_1 \geq 4$ )  $D_\tau$  отличается от  $D(\lambda)$  не более чем на 5%.

**Погрешности кривизны и угла  $\varphi$ .** Задача оценки кривизны  $\kappa$  и начального угла  $\varphi$  спиральной траектории эквивалентна задаче оценки этих параметров у плоской траектории (проекции спирали на плоскость, ортогональную магнитному полю), если в обычной квадратичной форме  $\chi^2$  для плоской траектории заменить константу многократного рассеяния  $a^2$  на

$$a_\varphi^2 = a^2 / \cos^3 \lambda. \tag{170}$$

При оценке ковариационной матрицы величин  $\varphi, \kappa$  среднюю (плоскую) траекторию можно аппроксимировать параболой

$$y = a + bx + \kappa x^2/2 \tag{171}$$

и в первом приближении пренебречь торможением (поправку на торможение обсудим позже).

Пусть имеется  $n$  равноточных некоррелированных измерений с дисперсиями  $\epsilon^2$ , расставленных на участке  $0 \leq x \leq T$  с интервалами  $l = T/(n-1)$ . При отсутствии многократного рассеяния ковариационная матрица параметров  $b, \kappa$  [23] имеет элементы:

$$\left. \begin{aligned} K_W(\kappa, \kappa) &= \frac{1}{T^4 W} \frac{720(n-1)^4}{(n^2-1)(n^2-4)}; \\ K_W(\kappa, b) &= -\frac{T}{2} K_W(\kappa, \kappa); \\ K_W(b, b) &= D_W(b) + \frac{T^2}{4} K_W(\kappa, \kappa) = \\ &= \frac{12(2n-1)(8n-11)(n-1)^2}{T^2 W (n^2-1)(n^2-4)}, \end{aligned} \right\} \tag{172}$$

где  $D(b)$  дается формулой (159);  $W$  — суммарный вес измерений. Если под  $\epsilon$  понимать измерительную погрешность в направлении, перпендикулярном траектории, то в формулах (172) можно заменить  $b, T$  на  $\varphi, s$  и использовать полученные выражения для значительно искривленных (до  $60^\circ$ ) кусков траектории.

Из (172) для относительной погрешности модуля импульса получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p}{p} &= \sqrt{K_W(\kappa, \kappa)} / \kappa = \frac{p(n-1)^2}{Hs^2 \sqrt{W}} \sqrt{\frac{720}{(n^2-1)(n^2-4)}} \approx \\ &\approx \frac{p}{Hs_*^2} \sqrt{\frac{720}{W}}, \end{aligned} \tag{173}$$

где  $s_* = [1 + 1/(n + 1/2)] s$  (см. выше,  $H = eB$ ).

При наличии многократного рассеяния, но отсутствии измерительных погрешностей, элементы ковариационной матрицы при  $n = 3, 4, 5, 6, 7, \infty$  равны [24]:

$$\left. \begin{aligned} K_{\xi}(\kappa, \kappa) &= a_{\varphi}^2 \mu_{\kappa}(n)/s, \quad \mu_{\kappa} = \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{95}{84}, \frac{52}{47}, 1; \\ K_{\xi}(\kappa, \varphi) &= a_{\varphi}^2 \nu(n), \quad \nu = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \\ &-\frac{11}{168}, -\frac{5}{94}, 0; \\ K_{\xi}(\varphi, \varphi) &= a_{\varphi}^2 l \mu_{\varphi}(n), \quad \mu_{\varphi} = \frac{1}{3}, \frac{47}{144}, \\ &\frac{5}{16}, \frac{379}{1232}, \frac{643}{2115}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

где  $l = s/(n - 1)$ .

Эти выражения (и расчеты более сложных случаев) показывают, что при отсутствии измерительных погрешностей оценка угла  $\varphi$  почти полностью определяется первыми четырьмя точками, а оценка кривизны — первыми и последними четырьмя точками. Кроме того, дисперсия кривизны  $K_{\xi}(\kappa, \kappa)$  слабо зависит от числа измерений и расстояний между ними и ее можно уменьшить практически только за счет увеличения длины  $s$  измеренного участка траектории.

В общем случае, когда существенно как многократное рассеяние, так и измерительные погрешности, ковариационная матрица оценок  $\kappa, \varphi$  сложно зависит от  $s, W, n$ . Суммы

$$\left. \begin{aligned} K_+(\kappa, \kappa) &= K_W(\kappa, \kappa) + K_{\xi}(\kappa, \kappa); \\ K_+(\varphi, \varphi) &= K_W(\varphi, \varphi) + K_{\xi}(\varphi, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

являются оценками дисперсий величин  $\kappa, \varphi$  снизу. Однако при  $n = 3, 4$  имеет место равенство  $K = K_+$ , а при  $n = 5, 6$  величина  $K_+$  только немного (на 5%) отличается от  $K$ . Приближенное равенство  $K \approx K_+$  выполняется также при  $s \leq 3L/2$ , когда мал вклад многократного рассеяния, и при  $l > 3L$ , когда мал вклад измерительных погрешностей.

При больших  $s$  оценка угла  $\varphi$  почти полностью определяется измерениями, лежащими на начальном участке  $0 \leq x \leq 6L$  (если число  $n_1$  таких измерений больше двух), а оценка кривизны — еще и измерениями, лежащими на аналогичном конечном участке.

Если  $n_1 \geq 2, n \geq 5$ , то можно использовать формулы, получаемые предельным переходом  $n \rightarrow \infty$ . В этом пределе [24]:

$$\chi^2 = \int_0^s dx \left\{ \frac{1}{a^2} [y''(x) - \kappa]^2 + \frac{W}{s} [y(x) - g(x)]^2 \right\}, \quad (176)$$

а неизвестными параметрами являются  $\kappa$  и случайная траектория  $y(x)$ . Для ковариационной матрицы величин  $\kappa, y'(0) = \varphi$  вариация

формы (176) дает

$$\left. \begin{aligned} K_{\tau}(\kappa, \kappa) &= a^2 \frac{\tau}{s} \left( \tau - 2 \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\operatorname{sh} \tau + \sin \tau} \right)^{-1}; \\ K_{\tau}(\kappa, \varphi) &= -a^2 \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\operatorname{sh} \tau + \sin \tau} \left( \tau - 2 \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\operatorname{sh} \tau + \sin \tau} \right)^{-1}, \\ K_{\tau}(\varphi, \varphi) &= \\ &= a^2 \frac{s}{\tau} \frac{(\operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau + \cos \tau \sin \tau) \tau - \operatorname{ch}^2 \tau + \cos^2 \tau}{\operatorname{sh}^2 \tau - \sin^2 \tau} \times \\ &\times \left( \tau - 2 \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\operatorname{sh} \tau + \sin \tau} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

При использовании этих формул полезно ввести поправку на дискретность измерений, употребляя  $s_* = s [1 + 1/(n + 1/2)]$  вместо  $s$ . При  $n \geq 7$  корреляция  $\kappa$  и  $\varphi$  становится несущественной и  $D(\varphi)$  можно оценивать по тем же формулам, что и  $D(\lambda)$ .

**Влияние торможения и слоистости.** На оценки углов  $\varphi$ ,  $\lambda$  торможение практически не влияет. На дисперсию оценки кривизны торможение влияет следующим образом: с уменьшением импульса кривизна траектории растет и становится легче измеримой. Это несколько уменьшает дисперсию  $D(\kappa)$ , которую для учета торможения следует умножить на коэффициент

$$q = \left( \frac{p - p_n}{p \ln(p/p_n)} \right)^2 \approx \frac{p_n}{p} \left[ \frac{p + p_n}{2p} + \frac{1}{12} \frac{(p - p_n)^2}{pp_n} \right], \quad (178)$$

где  $p_n$  — импульс в конце измеренного сегмента трека.

Слоистость детектора практически не влияет на дисперсии оценок, если во всех формулах под плотностью среды, которая входит в  $a^2$ , и под магнитной индукцией понимать среднюю (с учетом промежутков) плотность и среднюю магнитную индукцию, а последнюю измеренную точку на треке считать выбранной так, что середина измеренного участка трека приходится на середину пластины или промежутка.

Эмпирическая формула, основанная на оценке типа  $K_+$  (не вполне последовательной) и учитывающая торможение коэффициентом  $q' = p_n^2/p^2$ , была предложена в [22]. Она давала в диапазоне  $2 \leq p \leq 100$  ГэВ/с оценки  $D(\kappa)$ , отличающиеся от точных не более чем на 10%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Overas H. Preprint CERN 60-18, 1960.
2. Граменицкий И. М., Тихонова М. А., Шляпников П. В. Препринт ОИЯИ Р-2146, Дубна, 1965.
3. Суп К. Пузырьковая камера. Измерения и обработка данных. Пер. с англ. М., Наука, 1970.
4. Маноков Б. А., Шляпников П. В. — ПТЭ, 1970, т. 1, с. 61.
5. Гердюков Л. Н. и др. Препринт ИФВЭ 70-53, Серпухов, 1970.

6. Емельяненко Г. А. Препринт ОИЯИ Р10-5279, Дубна, 1970. Препринт ОИЯИ Р10-5278, Дубна, 1970. Сообщение ОИЯИ Р10-5301, Дубна, 1970.
7. Жигунов В. П. и др. Препринт ИФВЭ 74-35, Серпухов, 1971.
8. Laurikainen P., Moorhead W. G., Matt W.— Nucl. Instrum. Methods., 1972, v. 98, N 2, p. 349.
9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., Наука, 1968.
10. Росси Б. Частицы больших энергий. Пер. с англ. М., Гостехтеориздат, 1955.
11. Фейман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. М., Мир, 1968.
12. Росси Б., Грейзен К. Взаимодействие космических лучей с веществом. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
13. Кимель Л. Р., Салимов О. Н.— ЖТФ, 1971, т. ХLI, с. 2628.
14. Falrey F. G. M. e.a.— Nucl. Instrum. Methods., 1978, v. 152, p. 353.
15. Kartashev V. P. e.a.— Nucl. Instrum. Methods., 1973, v. 113, p. 1287.
16. Pearce R. M.— Nucl. Instrum. Methods., 1979, v. 164, p. 11.
17. Daniel H.— Nucl. Instrum. Methods., 1973, v. 124, p. 253.
18. Артамонов С. А., Горбунов В. А. Препринт ИЯФ 80-117, Новосибирск, 1980; Препринт ИЯФ 80-218, Новосибирск, 1980.
19. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Наука, 1967.
20. Moorhead G. Preprint GERN/DD/DP/67/6, 1967.
21. Жигунов В. П. и др. Препринт ИФВЭ 73-92, 1973.
22. Zhigunov V. P. e.a. Preprint IHEP 79-108, Serpukhov, 1979; Nucl. Instrum. Methods., 1981, v. 179, p. 427.
23. Glückstern R. L.— Nucl. Instrum. Methods., 1963, v. 24, p. 381.
24. Жигунов В. П., Соколов С. Н. Препринт ИФВЭ 82-123, Серпухов, 1982.
25. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. М., Наука, 1964; Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. Пер. с англ. М., Наука, 1968.
26. Соколов С. Н. Препринт ИФВЭ 69-41, Серпухов, 1969.
27. Калинин П. А., Соколов С. Н. Препринт ИФВЭ 77-96, Серпухов, 1977.