«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1983, том 14, вып. 3

УДК 539.182

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Г. П. Пронько, А. В. Разумов, Л. Д. Соловьев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В обзоре рассмотрено общее решение уравнений движения струны. Показано, что эволюционная поверхность струны в трехмерном пространстве — времени обязательно содержит сингулярности.

Исследована связь этих особенностей с сингулярными решениями уравнения Лиувилля.

A general solution to the equations of string motion is considered. It is shown that in three dimensional space-time an evolution surface of the string is sure to have singularities. The connection of these singularities with singular solutions to Liouville equation is demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на более чем десятилетнюю историю своего развития, теория релятивистской струны еще далека от завершения. Особенно много проблем возникает при попытках построения квантового варианта теории. Возможно, что это связано с недостаточно полным пониманием классической динамики струны. В последнее время в классической теории релятивистской струны получены новые результаты. В настоящей работе изложены наиболее интересные, с нашей точки зрения, из этих результатов. Авторы старались придать данному обзору, содержащему и оригинальные исследования, замкнутый вид, не повторяя, насколько это было возможно, известные обзоры [1—4].

Получим общее решение уравнений движения струны: сначала в ортонормальной параметризации эволюционной поверхности, затем рассмотрим случай произвольной параметризации. Обратим особое внимание на учет граничных условий для открытой струны. Покажем, что ортонормальную параметризацию мировой поверхности струны можно ввести глобально и согласованно с граничными условиями. Продемонстрируем эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений движения струны.

Проведем анализ формы мировой поверхности струны и рассмотрим некоторые конкретные примеры. Покажем, что мировая поверхность струны в трехмерном пространстве — времени с необходимостью является сингулярной. Это явление, насколько нам известно, ранее в литературе не обсуждалось.

В заключение установим связь сингулярностей мировой поверхности в трехмерном пространстве — времени с сингулярными решениями уравнений Лиувилля и обсудим возможную интерпретацию этих сингулярностей.

1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Релятивистская струна — это одномерный протяженный объект, заметающий в результате своей эволюции некоторую двумерную поверхность в d-мерном пространстве Минковского с метрикой $\|\eta_{\mu\nu}\|$:

$$\eta_{00} = -1; \ \eta_{0r} = 0; \ \eta_{rs} = \delta_{rs}.$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения от 0 до $d-1$. Латинские индексы из второй половины алфавита принимают значения от 1 до $d-1$. Двумерную поверхность в d-мерном пространстве можно задать с помощью d функций от двух параметров σ и τ:

$$x_\mu = x_\mu(\sigma, \tau).$$

Будем считать, что параметр σ соответствует различным точкам струны, а параметр τ описывает ее эволюцию. Следовательно, для имеющих физический смысл эволюционных поверхностей должны выполняться неравенства

$$\dot{x}^2 \leqslant 0; \ x'^2 > 0. \tag{1}$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по τ, а штрихом — производная по σ. Обозначим $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$ и будем считать, что латинские индексы из первой половины алфавита принимают значения 0, 1. На эволюционной поверхности возникает индуцированная метрика:

$$g_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu \ (\partial_a x^\mu \equiv \partial x^\mu / \partial \xi^a).$$

Если выполняются условия (1), то

$$g \equiv \det \| g_{ab} \| \leqslant 0. \tag{2}$$

Следуя Намбу и Гото [5], определим действия для струны пропорциональным площади эволюционной поверхности:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int d\sigma \, (-g)^{1/2}, \tag{3}$$

где α' — некоторая положительная постоянная, имеющая размерность квадрата длины. Можно рассматривать случаи бесконечной, замкнутой и открытой струны. Для бесконечной струны полагают $-\infty < \sigma < +\infty$, для замкнутой обычно выбирают интервал изменения σ от $-\pi$ до π и налагают на $x^\mu(\sigma, \tau)$ условие периодичности $x_\mu(-\pi, \tau) = x_\mu(\pi, \tau)$, и, наконец, для открытой струны удобно считать, что $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$.

Принцип стационарности действия приводит к уравнениям движения *

$$\partial_a \left((-g)^{1/2} g^{ab} \partial_b x^\mu \right) = 0, \tag{4}$$

* Уравнения (4) легко получить, используя известную формулу для вариации детерминанта: $\delta g = g \, (g^{ab} \delta g_{ab})$.

где $\| g^{ab} \|$ — матрица, обратная к $\| g_{ab} \|$, т. е.

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c.$$

Для случая открытой струны уравнения движения (4) необходимо дополнить граничными условиями. Как показано в [6], обычно используемые граничные условия

$$\pi_\mu (\sigma, \tau) |_{\sigma=0,\ \pi} = 0, \tag{5}$$

где

$$\pi_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial (-g)^{1/2}}{\partial x'^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{x'_\mu \dot{x}^2 - \dot{x}_\mu (\dot{x}x')}{[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}},$$

нельзя последовательно получить из условия стационарности действия (3), однако их применение приводит к поверхностям, стационарным относительно вариаций, не нарушающих условие (2). Поэтому будем использовать равенства (5) в качестве граничных условий для открытой струны. Из определения π_μ сразу получаем

$$\dot{x}\pi = 0; \quad (2\pi\alpha'\pi^2 + \dot{x}^2/2\pi\alpha')/2 = 0.$$

Отсюда следует, что в силу граничных условий (5) концы струны движутся со скоростью света. Далее

$$x'\pi = (1/2\pi\alpha') \ (-g)^{1/2},$$

из граничных условий также следует, что

$$\dot{x}x' (\sigma, \tau) |_{\sigma=0,\ \pi} = 0.$$

Таким образом, метрический тензор на концах струны имеет только одну отличную от нуля компоненту $g_{11} = x'^2$ и является вырожденным ($g = 0$).

Если действие для струны определено геометрическим образом, то оно инвариантно относительно перепараметризаций эволюционной поверхности, т. е. относительно преобразований

$$x_\mu (\sigma, \tau) \to \tilde{x}_\mu (\sigma, \tau) = x_\mu (\tilde{\sigma} (\sigma, \tau), \ \tilde{\tau} (\sigma, \tau)), \tag{6}$$

где $\tilde{\sigma} (\sigma, \tau)$ и $\tilde{\tau} (\sigma, \tau)$ — произвольные функции, выбираемые так, чтобы не нарушить условий (1) *. Для замкнутой струны, чтобы не нарушить условий периодичности, естественно потребовать также выполнения условия

$$\tilde{\sigma} (\pi, \tau) - \tilde{\sigma} (-\pi, \tau) = 2\pi, \tag{7}$$

а для открытой струны требование сохранения интервала изменения σ приводит к равенствам

$$\tilde{\sigma} (0, \tau) = 0; \quad \tilde{\sigma} (\pi, \tau) = \pi. \tag{8}$$

* Необходимо, чтобы якобиан преобразования $\partial (\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})/\partial (\sigma, \tau)$ был отличен от нуля.

Обобщенные импульсы, необходимые для построения гамильтоновой формулировки теории релятивистской струны, имеют вид:

$$p_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\dot{x}_\mu x'^2 - x'_\mu(\dot{x}x')}{((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2)^{1/2}} \tag{9}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$x'p = 0; \tag{10}$$

$$(2\pi\alpha' p^2 + x'^2/2\pi\alpha')/2 = 0. \tag{11}$$

Равенства (10) и (11) возникают вследствие инвариантности действия относительно перепараметризаций. Их наличие приводит к некоторым особенностям при построении гамильтонова формализма. Мы обсудим этот вопрос ниже, а сейчас вернемся к лагранжевой формулировке.

Помимо инвариантности относительно перепараметризаций действие струны инвариантно также относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$x_\mu(\sigma, \tau) \to \Lambda_\mu^\nu x^\nu(\sigma, \tau) + a_\mu,$$

где $\| \Lambda_\mu^\nu \|$ — матрица преобразования Лоренца; a — произвольный вектор. С помощью теоремы Нетер получаем, что

$$P_\mu = \int d\sigma p_\mu(\sigma, \tau); \quad M_{\mu\nu} = \int d\sigma (x_\mu(\sigma, \tau)\, p_\nu(\sigma, \tau) - x_\nu(\sigma, \tau)\, p_\mu(\sigma, \tau))$$

не зависят от τ. (P_μ — вектор энергии-импульса струны; $M_{\mu\nu}$ — тензор углового момента.)

Как следует из теории поверхностей [7], всегда можно ввести параметры σ и τ так, что будут выполняться соотношения

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0; \quad x'\dot{x} = 0. \tag{12}$$

Такую параметризацию в физической литературе принято называть *ортонормированной*, хотя векторы $\dot{x}_\mu$ и x'_μ не нормированы на константу. Будем придерживаться такого названия *. В ортонормированной параметризации уравнения движения струны принимают простой вид

$$\ddot{x}_\mu(\sigma, \tau) - x''_\mu(\sigma, \tau) = 0. \tag{13}$$

Для величин p_μ и π_μ получаем выражения

$$p_\mu = \dot{x}_\mu/2\pi\alpha'; \quad \pi_\mu = x'_\mu/2\pi\alpha'.$$

Следовательно, граничные условия для открытой струны принимают вид

$$x'_\alpha(\sigma, \tau)\,|_{\sigma=0,\,\pi} = 0. \tag{14}$$

* Координаты σ и τ, для которых выполняется соотношение (12), в математической литературе принято называть *конформными*.

Ортонормированная параметризация или, другими словами, ортонормированная система координат на эволюционной поверхности фиксируется неоднозначно. Действительно, легко убедиться, что выполняя преобразование (6) с

$$\tilde{\sigma}(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma+\tau) - \beta(\sigma-\tau); \tag{15}$$

$$\tilde{\tau}(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma+\tau) + \beta(\sigma-\tau), \tag{16}$$

где α и β — произвольные функции, мы не нарушаем условий (12). Якобиан преобразования (15), (16) отличен от нуля при условии, что $\alpha' \neq 0$; $\beta' \neq 0$, где штрихом обозначены производные функций α и β по их аргументам.

Для замкнутой струны необходимо также удовлетворить условию (7). Будем считать, что для замкнутой струны параметр σ меняется от $-\infty$ до ∞, при этом функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ продолжены на интервал $(-\infty, \infty)$ периодическим образом, а условие (7) записывается в виде

$$\tilde{\sigma}(\sigma+2\pi, \tau) - \tilde{\sigma}(\sigma, \tau) = 2\pi.$$

Принимая это условие во внимание, увидим, что для замкнутой струны преобразования (15) и (16) имеют специальный вид:

$$\tilde{\sigma}(\sigma, \tau) = \sigma + C\tau + \tilde{\alpha}(\sigma+\tau) - \tilde{\beta}(\sigma-\tau);$$

$$\tilde{\tau}(\sigma, \tau) = \tau + C\sigma + \tilde{\alpha}(\sigma+\tau) + \tilde{\beta}(\sigma-\tau),$$

где C — произвольная постоянная; $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — произвольные периодические функции с периодом 2π.

Для открытой струны необходимо удовлетворить условиям (8). В этом случае также удобно считать, что параметр σ меняется от $-\infty$ до ∞, и продолжить функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ сначала на интервал $[-\pi, \pi]$ четным, а затем на интервал $(-\infty, \infty)$ периодическим образом. Условие четности функций $x_\mu(\sigma, \tau)$ следует из граничных условий (14). Теперь условия (8) приводят к следующему специальному виду преобразований (15), (16):

$$\tilde{\sigma}(\sigma, \tau) = \sigma + \tilde{\alpha}(\tau+\sigma) - \tilde{\alpha}(\tau-\sigma); \tag{17}$$

$$\tilde{\tau}(\sigma, \tau) = \tau + \tilde{\alpha}(\tau+\sigma) + \tilde{\alpha}(\tau-\sigma), \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha}$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π.

Общее решение уравнений (13) следующее:

$$\bar{x}_\mu(\sigma, \tau) = A_\mu(\sigma+\tau) + B_\mu(\sigma-\tau),$$

где A_μ, B_μ — произвольные функции. Для того чтобы функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ удовлетворяли соотношениям (12), необходимо потребовать выполнения условий

$$A'^2 = 0; \quad B'^2 = 0. \tag{19}$$

Условия (1) эквивалентны неравенству

$$A'(\sigma+\tau)\,B'(\sigma-\tau)>0. \tag{20}$$

Для замкнутой струны условие периодичности функций $x_\mu(\sigma, \tau)$ приводит к следующему виду решений уравнений движения:

$$x_\mu(\sigma, \tau)=\alpha' P_\mu \tau+\widetilde{A}_\mu(\sigma+\tau)+\widetilde{B}_\mu(\sigma-\tau),$$

где $\widetilde{A}_\mu$, $\widetilde{B}_\mu$ — произвольные периодические функции с периодом 2π; P_μ — вектор энергии-импульса струны. Равенства (19) теперь принимают вид

$$(\alpha' P+2\widetilde{A}')^2=0, \quad (\alpha' P-2\widetilde{B}')^2=0,$$

а вместо (20) получаем неравенство

$$(\alpha' P+2\widetilde{A}'(\sigma+\tau))\,(\alpha' P-2\widetilde{B}'(\sigma-\tau))<0.$$

Для открытой струны, принимая во внимание граничные условия (14), получаем

$$x_\mu(\sigma, \tau)=2\alpha' P_\mu \tau+\widetilde{A}_\mu(\tau+\sigma)+\widetilde{A}_\mu(\tau-\sigma), \tag{21}$$

где $\widetilde{A}_\mu$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π; P_μ — вектор энергии-импульса струны. Условие (19) будет

$$(\alpha' P+\widetilde{A}')^2=0. \tag{22}$$

Отметим, что граничные условия вынуждают принять на концах струны сингулярную параметризацию ($g=0$), при этом $x'^2=0$. Будем считать, что сингулярная параметризация допустима только в граничных точках открытой струны, тогда неравенство (20) можно записать в виде

$$[\alpha' P+\widetilde{A}'(\tau+\sigma)]\,[\alpha' P+\widetilde{A}'(\tau-\sigma)]<0, \tag{23}$$

если $\sigma \neq k\pi$. При $\sigma=k\pi$ приходим к равенству (22).

Свободу выбора ортонормированной системы координат на эволюционной поверхности обычно используют для дальнейшей фиксации параметризации. Существует утверждение, что эту свободу можно использовать для выбора координат, в которых $\lambda x(\sigma, \tau)$, где λ — некоторый постоянный вектор, пропорционально τ. В частности, для открытой струны требуют выполнения условия

$$\lambda\,(x(\sigma, \tau)-2\alpha' P\tau)=0. \tag{24}$$

В [8] показано, что если выбрать λ в виде

$$\lambda=(-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-2}, 1),$$

то условию (24) удается удовлетворить не всегда. Исследуем этот вопрос для

$$\lambda = (-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-1}).$$

В этом случае равенство (24) принимает вид

$$x^0(\sigma, \tau) - 2\alpha' P^0 \tau = 0. \tag{25}$$

Пусть $Q_\mu(\tau)$ — координаты конца струны, соответствующего $\sigma = 0$, т. е. $Q_\mu(\tau) = x_\mu(0, \tau)$. Эти функции полностью определяют форму эволюционной поверхности, действительно, из (21) получаем

$$x_\mu(\sigma, \tau) = [Q_\mu(\tau + \sigma) + Q_\mu(\tau - \sigma)]/2.$$

Условия (22) и (23) эквивалентны соотношениям

$$\dot{Q}^2 = 0; \tag{26}$$

$$\dot{Q}(\tau)\dot{Q}(\tau') < 0; \quad \tau - \tau' \neq 2k\pi. \tag{27}$$

Полагая в (25) $\sigma = 0$, получаем

$$Q^0(\tau) - 2\alpha' P^0 \tau = 0. \tag{28}$$

При преобразованиях (17), (18) функции $Q_\mu(\tau)$ просто перепараметризуются:

$$Q_\mu(\tau) \to \widetilde{Q}_\mu(\tau) = Q_\mu(\tau + 2\widetilde{\alpha}(\tau)). \tag{29}$$

Если $\dot{Q}^0(\tau) \neq 0$, то можно найти функцию $\widetilde{\alpha}(\tau)$, такую, что преобразование (29) будет давать функцию $\widetilde{Q}^0(\tau)$, удовлетворяющую условию (28). Из соотношений (26) и (27) следует, что $\dot{Q}^0(\tau) \neq 0$ всегда, за исключением вырожденного случая, когда $Q_\mu(\tau)$ вообще не зависят от τ. Таким образом, для имеющих физический смысл эволюционных поверхностей всегда можно выбрать ортонормированную систему координат, в которой выполняется равенство (25). Аналогичное доказательство можно привести для замкнутой и бесконечной струн.

Построим теперь общее решение уравнений движения струны, не используя ортонормальной параметризации. Можно было бы получить это решение перепараметризацией полученных выше решений. Однако подчеркнем здесь, что ортонормальную параметризацию поверхности в общем случае можно ввести только локальным образом. Мы фактически предположили, что ее можно ввести глобально, а это проблематично, особенно для замкнутой и открытой струн. Поэтому получим общее решение уравнений движения, не делая никаких предположений о параметризации. Это удобно сделать, переходя к гамильтоновой формулировке теории [9].

Как уже было показано, обобщенные импульсы для струны не независимы и удовлетворяют соотношениям (10) и (11). Канонический гамильтониан струны тождественно обращается в нуль. Таким образом, как следует из общей теории систем со связями, в качестве гамильтониана необходимо использовать произвольную комбинацию величин

$$\chi_1(\sigma, \tau) = [2\pi\alpha' p^2(\sigma, \tau) + x'^2(\sigma, \tau)/2\pi\alpha']/2,$$
$$\chi_2(\sigma, \tau) = x'(\sigma, \tau)\, p(\sigma, \tau),$$

называемых *связями* [10]. Следовательно, гамильтониан струны имеет вид:

$$H(\tau) = \int d\sigma\, [v_1(\sigma, \tau)\, \chi_1(\sigma, \tau) + v_2(\sigma, \tau)\, \chi_2(\sigma, \tau)], \tag{30}$$

где $v_1(\sigma, \tau)$, $v_2(\sigma, \tau)$ — произвольные функции. Гамильтониан (30) приводит к уравнениям движения:

$$\dot{x}_\mu = 2\pi\alpha' v_1 p_\mu + v_2 x'_\mu; \tag{31}$$

$$\dot{p}_\mu = (v_1 x'_\mu/2\pi\alpha' + v_2 p_\mu)', \tag{32}$$

при этом будем использовать только те их решения, которые удовлетворяют соотношениям (10) и (11). Структура гамильтониана (30) позволяет заключить, что достаточно потребовать выполнения условий (10) и (11) при $\tau = 0$, а для остальных τ они будут выполняться автоматически.

Докажем теперь эквивалентность лагранжевых и гамильтоновых уравнений движения. Сначала отметим, что если функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$ удовлетворяют гамильтоновым уравнениям движения для некоторого выбора функций $v_1(\sigma, \tau)$, $v_2(\sigma, \tau)$, то функции $\hat{x}_\mu(\sigma, \tau) = x_\mu(\sigma, \tau)$ и $\hat{p}_\mu(\sigma, \tau) = -p_\mu(\sigma, \tau)$ тоже удовлетворяют гамильтоновым уравнениям движения, в которых у функции $v_1(\sigma, \tau)$ изменен знак. Таким образом, если будем интересоваться только функциями $x_\mu(\sigma, \tau)$, то в решениях гамильтоновых уравнений обнаружим «вырождение», связанное с одновременным изменением знака у функций $p_\mu(\sigma, \tau)$ и $v_1(\sigma, \tau)$. Пусть теперь функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$ являются решениями гамильтоновых уравнений движения и удовлетворяют условиям (10), (11), тогда легко найти, что

$$v_1 = \pm [(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}/x'^2; \tag{33}$$

$$v_2 = \dot{x}x'/x'^2. \tag{34}$$

Подставляя эти выражения в (31), (32) и исключая $p_\mu(\sigma, \tau)$, получаем, что функция $x_\mu(\sigma, \tau)$ удовлетворяет лагранжевым уравнениям движения независимо от того, какой знак будет в формуле (33) для v_1. Если для рассматриваемого нами решения в (33) будет знак минус, то, не изменяя $x_\mu(\sigma, \tau)$, можно перейти к решению $\hat{x}_\mu(\sigma, \tau) = x_\mu(\sigma, \tau)$, $\hat{p}_\mu(\sigma, \tau) = -p_\mu(\sigma, \tau)$, начальные данные для которого также удовлетворяют соотношениям (10), (11), при этом в формуле

(33) для v_1 возникает знак плюс. Так как нам интересны лишь функции x_μ $(\sigma,\ \tau)$, то будем рассматривать только те решения, для которых

$$v_1 = +[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}/x'^2. \tag{35}$$

При этом функции p_μ $(\sigma,\ \tau)$, построенные по формуле (9), совпадают с функциями p_μ $(\sigma,\ \tau)$, возникающими как решение гамильтоновых уравнений движения. Пусть теперь функции x_μ $(\sigma,\ \tau)$ удовлетворяют лагранжевым уравнениям движения. Построив с помощью формулы (9) функции p_μ $(\sigma,\ \tau)$, автоматически удовлетворим соотношениям (10), (11). Если теперь выбрать функции v_1 $(\sigma,\ \tau)$ и v_2 $(\sigma,\ \tau)$ в виде (35) и (34), то увидим, что функции x_μ $(\sigma,\ \tau)$ и p_μ $(\sigma,\ \tau)$ удовлетворяют гамильтоновым уравнениям движения. Приведенные выше рассуждения доказывают эквивалентность лагранжевых и гамильтоновых уравнений движения.

Построим теперь общее решение гамильтоновых уравнений движения. Для этого введем:

$$a_\mu = x'_\mu + 2\pi\alpha' p_\mu; \quad b_\mu = x'_\mu - 2\pi\alpha' p_\mu.$$

Уравнения движения для a_μ и b_μ записываются в виде:

$$\dot{a}_\mu = -(fa_\mu)'; \quad \dot{b}_\mu = -(gb_\mu)',$$

где $f = -(v_1 + v_2)$; $g = (v_1 - v_2)$. Общее решение этих уравнений с начальными условиями

$$a_\mu(\sigma,\ 0) = \tilde{a}_\mu(\sigma); \quad b_\mu(\sigma,\ 0) = \tilde{b}_\mu(\sigma)$$

будет следующее:

$$a_\mu(\sigma,\ \tau) = F'(\sigma,\ \tau)\,\tilde{a}_\mu(F(\sigma,\ \tau)); \tag{36}$$

$$b_\mu(\sigma,\ \tau) = G'(\sigma,\ \tau)\,\tilde{b}_\mu(G(\sigma,\ \tau)), \tag{37}$$

где

$$F(\sigma,\ \tau) = T\exp\left(-\int_0^\tau d\tau' f(\sigma,\ \tau')\frac{d}{d\sigma}\right)\sigma;$$

$$G(\sigma,\ \tau) = T\exp\left(-\int_0^\tau d\tau' g(\sigma,\ \tau')\frac{d}{d\sigma}\right)\sigma.$$

Функции $F(\sigma,\ \tau)$ и $G(\sigma,\ \tau)$ являются решениями уравнений

$$\dot{F} = -fF'; \tag{38}$$

$$\dot{G} = -gG' \tag{39}$$

с начальными условиями $F(\sigma,\ 0) = \sigma$, $G(\sigma,\ 0) = \sigma$. Из уравнения (31), используя уравнения (38), (39) и соотношения (36), (37), получаем

$$\dot{x}_\mu(0, \tau) = \{\dot{F}(0, \tau)\, \tilde{a}_\mu(F(0, \tau)) + \dot{G}(0, \tau)\, \tilde{b}_\mu(G(0, \tau))\}/2.$$

Таким образом,

$$x_\mu(0, \tau) = x_\mu(0, 0) + \frac{1}{2}\left\{\int_0^{F(0, \tau)} d\sigma'\, \tilde{a}_\mu(\sigma') + \int_0^{G(0, \tau)} d\sigma' \tilde{b}_\mu(\sigma')\right\}.$$

Теперь с помощью соотношения

$$x_\mu(\sigma, \tau) = x_\mu(0, \tau) + \int_0^\sigma d\sigma' x'_\mu(\sigma', \tau)$$

легко найти, что

$$x_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{x}_\mu(F(\sigma, \tau)) + \tilde{x}_\mu(G(\sigma, \tau)) + 2\pi\alpha' \int_{G(\sigma, \tau)}^{F(\sigma, \tau)} d\sigma' \tilde{p}_\mu(\sigma')\right\}, \quad (40)$$

где тильдой отмечены начальные данные для $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$.

Для $p_\mu(\sigma, \tau)$ имеем формулу:

$$p_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{p}_\mu(F(\sigma, \tau))\, F'(\sigma, \tau) + \tilde{p}_\mu(G(\sigma, \tau))\, G'(\sigma, \tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\tilde{x}'_\mu(F(\sigma, \tau))\, F'(\sigma, \tilde{\tau}) - \tilde{x}'_\mu(G(\sigma, \tau))\, G'(\sigma, \tau)\right)\right\}. \quad (41)$$

Напомним, что необходимо использовать только те решения, начальные данные для которых удовлетворяют соотношениям (10), (11).

Формула (40) дает общее решение лагранжевых уравнений движения. Различные функции $F(\sigma, \tau)$, $G(\sigma, \tau)$ соответствуют разным параметризациям одной и той же эволюционной поверхности. Без ограничения общности можно выбрать функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$ монотонно возрастающими по σ при фиксированном τ. Фактически это есть ограничение на функции v_1, v_2 или f, g, входящие в гамильтоновы уравнения движения. Если функции $F(\sigma, \tau)$, $G(\sigma, \tau)$ немонотонны, то получаем сингулярную параметризацию эволюционной поверхности струны. Итак, потребуем выполнения неравенств $F'(\sigma, \tau) > 0$, $G'(\sigma, \tau) > 0$. Соотношения (10), (11) в терминах переменных a_μ и b_μ имеют вид: $a^2 = 0$, $b^2 = 0$. Используя вид общего решения уравнений движения, получаем:

$$x'^2 = \tilde{a}(F)\, \tilde{b}(G)\, F'G'/2; \quad \dot{x}^2 = \tilde{a}(F)\, \tilde{b}(G)\, \dot{F}\dot{G}/2;$$
$$\dot{x}x' = \tilde{a}(F)\, \tilde{b}(G)\, (F'\dot{G} + \dot{F}G')/4.$$

Так как мы потребовали монотонности для функций F и G, то условие $x'^2 > 0$ эквивалентно условию $\tilde{a}(F)\, \tilde{b}(G) > 0$ или $\tilde{a}(\sigma)\, \tilde{b}(\sigma') > 0$

для любых σ и σ'. Используя это неравенство, получаем

$$(-g)^{1/2} = \tilde{a}(F)\,\tilde{b}(G)\,|F'\dot{G} - \dot{F}G'|/4.$$

Таким образом, $(-g)^{1/2}/x'^2 = |g - f|/2 = |v_1|$. Сравнивая это равенство с соотношением (35), заключаем, что если $v_1 > 0$, то можно получить решение лагранжевых уравнений движения и отождествить функции $p_\mu(\sigma, \tau)$, найденные по формуле (9), с функциями $p_\mu(\sigma, \tau)$, даваемыми соотношением (41).

Предположим теперь, что у нас имеются начальные данные не для функций $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$, а для функций $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $\dot{x}_\mu(\sigma, \tau)$. Как построить решение лагранжевых уравнений в этом случае? Легко показать, что для этого необходимо, во-первых, по заданным начальным данным для $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $\dot{x}_\mu(\sigma, \tau)$ построить начальные данные для $p_\mu(\sigma, \tau)$ с помощью формулы (9) и, во-вторых, наложить на функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$ следующие условия:

$$\dot{F}\,|_{\tau=0} = -\frac{1}{x'^2}\{[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2]^{1/2} + \dot{x}x'\}\,|_{\tau=0};$$

$$\dot{G}\,|_{\tau=0} = \frac{1}{x'^2}\{[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2]^{1/2} - \dot{x}x'\}\,|_{\tau=0}.$$

Подставляя теперь начальные данные для $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$ в соотношение (40) и используя функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$, удовлетворяющие приведенным выше требованиям, получаем необходимое нам решение.

Соотношения (40) и (41) дают общее решение уравнений движения и для замкнутой струны. При этом необходимо продолжить функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$ на все значения параметра σ периодическим образом. Функции v_1 и v_2 в уравнениях движения (31), (32) должны быть периодическими, следовательно, функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$ удовлетворяют соотношениям:

$$F(\sigma + 2\pi, \tau) = F(\sigma, \tau) + 2\pi;\quad G(\sigma + 2\pi, \tau) = G(\sigma, \tau) + 2\pi. \tag{42}$$

Для открытой струны решения уравнений движения должны удовлетворять граничным условиям (5). С точки зрения гамильтоновых уравнений движения (31), (32) граничные условия принимают вид

$$(v_1 x'_\mu/2\pi\alpha' + v_2 p_\mu)\,|_{\sigma=0,\,\pi} = 0. \tag{43}$$

Граничные условия такого вида не очень удобны для применения. Дело в том, что, не решив уравнений движения, нельзя узнать, используя только начальные данные и функции v_1, v_2, будет ли соответствующее решение удовлетворять этим граничным условиям. Поэтому ограничим свободу выбора параметризации эволюционной поверхности вблизи концов струны, что приведет к упрощению граничных условий. Потребуем, чтобы функции v_1 и v_2 удовлетворяли соотношениям:

$$v_1'(\sigma, \tau)|_{\sigma=0,\pi}=0; \quad v_2(\sigma, \tau)|_{\sigma=0,\pi}=0.$$

Тогда граничные условия (43) примут вид

$$x_\mu''|_{\sigma=0,\pi}=0, \tag{44}$$

а из уравнения (31) имеем

$$p_\mu'|_{\sigma=0,\pi}=0. \tag{45}$$

Легко убедиться в том, что достаточно потребовать выполнения граничных условий (44), (45) лишь при $\tau = 0$, а при остальных τ они будут выполняться автоматически. Теперь можно продолжить функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $p_\mu(\sigma, \tau)$ на интервал $[-\pi, \pi]$ четным образом, а затем на интервал $(-\infty, \infty)$ периодическим образом. Функция $v_1(\sigma, \tau)$ продолжается сначала четным, а затем периодическим образом, а функция $v_2(\sigma, \tau)$ — сначала нечетным, а затем периодическим образом. Это приводит к следующему ограничению на функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$:

$$F(-\sigma, \tau) = -G(\sigma, \tau).$$

Кроме того, функции $F(\sigma, \tau)$ и $G(\sigma, \tau)$ удовлетворяют соотношениям (42). При этом формула (40) дает общее решение уравнений движения для открытой струны.

Полагая в (40) и (41) $F(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$, $G(\sigma, \tau) = \sigma - \tau$, получаем решение уравнений движения в ортонормальной параметризации. В этом случае соотношение (42) и равенство $F(-\sigma, \tau) = -G(\sigma, \tau)$ выполняются автоматически. Следовательно, чтобы провести решения, соответствующие замкнутой или открытой струне, необходимо наложить ограничение только на начальные данные.

Решение уравнений движения в виде (40) для ортонормальной параметризации было получено Б. М. Барбашовым и Н. А. Черниковым (см., например, [4]).

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МИРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРУНЫ

Выше было найдено общее решение уравнений движения струны в произвольных координатах на ее мировой поверхности. Для исследования геометрических свойств поверхности удобно перейти от координат σ, τ к координатам σ_1, σ_2, которые связаны с исходными следующим образом:

$$\sigma_1 = F(\sigma, \tau); \quad \sigma_2 = G(\sigma, \tau), \tag{46}$$

где функции F и G даются формулами (40) и (41). В этих координатах эволюционная поверхность струны записывается следующим образом:

$$x_\mu(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}_\mu(\sigma_1) + \tilde{x}_\mu(\sigma_2) + 2\pi\alpha' \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} d\sigma \tilde{p}_\mu(\sigma)\right] =$$

$$= \tilde{x}_\mu(0) + \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\sigma_1} d\sigma \tilde{a}_\mu(\sigma) + \int\limits_0^{\sigma_2} d\sigma \tilde{b}_\mu(\sigma)\right].$$

Поскольку начальные данные $\tilde{x}_\mu(\sigma)$ и $\tilde{p}_\mu(\sigma)$ удовлетворяют связям (10), (11), метрический тензор поверхности $g_{ab}(\sigma_1, \sigma_2)$ имеет вид:

$$g_{ab}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\tilde{a}_\mu(\sigma_1)\,\tilde{b}^\mu(\sigma_2)}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Очевидно, что переменные $\sigma_1 + \sigma_2$ и $\sigma_1 - \sigma_2$ являются конформными координатами на мировой поверхности струны. Далее для определенности будем говорить о замкнутой струне. Начальные данные $\tilde{x}_\mu(\sigma)$ и $\tilde{p}_\mu(\sigma)$ тогда являются периодическими функциями с периодом 2π, и поэтому поверхность $x_\mu(\sigma_1, \sigma_2)$ обладает следующими свойствами:

$$x_\mu(\sigma_1 + 2\pi, \sigma_2) = x_\mu(\sigma_1, \sigma_2) + \pi\alpha' P_\mu;\ x_\mu(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) = x_\mu(\sigma_1, \sigma_2) - \pi\alpha' P_\mu,$$

где P_μ — вектор энергии-импульса струны. Иными словами, мировая поверхность струны представляет собой некоторую элементарную поверхность $\{x_\mu(\sigma_1, \sigma_2),\ 0 \leqslant \sigma_i \leqslant 2\pi\}$, повторяемую периодически с шагом $\pi\alpha' P_\mu$. Зная метрический тензор поверхности g_{ab} [см. формулу (47)], можно вычислить площадь элементарной поверхности:

$$\Sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\sigma_1 \int\limits_0^{2\pi} d\sigma_2 \sqrt{-g} = -\frac{1}{4} P^2 (2\pi\alpha')^2.$$

Эта площадь отличается от классического действия за период лишь множителем $1/2\pi\alpha'$, следовательно, квантование по Бору — Зоммерфельду приводит к следующему спектру массы струны:

$$-\alpha'^2 P^2/4 = n. \tag{48}$$

Этот результат согласуется со спектром модели Вирасоро — Шапиро * при $\hbar \to 0$, так как в этом пределе можно пренебречь пересечением.

Важными элементами поверхности являются ее особые точки, в которых метрика вырождается, поскольку в координатах (46) ее вырождение обязательно приводит к сингулярности скалярной кривизны [7]. Для открытой струны мы уже встречались с такими

* Следует напомнить, что обычно действие для замкнутой струны записывается с коэффициентом $1/4\,\pi\alpha'$, т. е. наш наклон α' вдвое больше принятого, например, в [2].

особенностями: ими являются края ее мировой поверхности. Для замкнутой струны оказывается, что даже с гладкими начальными данными такие сингулярности обязательно существуют в $(2+1)$-мерном пространстве. Они находятся на линиях $\sigma_i(\rho)$ и проявляются как изломы с нулевым углом или стягивание струны в точку. В пространствах большой размерности можно задать такие начальные данные, что вся мировая поверхность будет гладкой. Для доказательства существования сингулярностей удобно перейти к калибровке *:

$$a(\sigma_1)P = (P^2/2\pi)\,2\pi\alpha'; \quad -b(\sigma_2)P = (P^2/2\pi)\,2\pi\alpha'. \tag{49}$$

Условия (49) не фиксируют калибровки полностью, оставляя возможность сдвига начала координат σ_i, но для наших целей это обстоятельство не существенно. В калибровке (49) переменные $a_\mu(\sigma)$ и $b_\mu(\sigma)$ можно представить в следующем виде: $a_\mu(\sigma) = \alpha' P_\mu + n_\mu(\sigma)\,\alpha'\sqrt{-P^2}$; $b_\mu(\sigma) = -\alpha' P_\mu + m_\mu(\sigma)\,\alpha'\sqrt{-P^2}$,
где

$$Pn(\sigma) = Pm(\sigma) = 0. \tag{50}$$

Связи (10), (11) в переменных n_μ и m_μ имеют вид: $n^2(\sigma) = 1$; $m^2(\sigma) = 1$. Наконец, поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\sigma a_\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\sigma b_\mu(\sigma) = 2\pi\alpha' P_\mu,$$

новые переменные n_μ и m_μ удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} d\sigma n_\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\sigma m_\mu(\sigma) = 0. \tag{51}$$

Перейдем теперь в систему покоя струны ($\mathbf{P} = 0$), тогда из (50) следует, что у пространственно-подобных векторов $n_\mu(\sigma)$ и $m_\mu(\sigma)$ отсутствует нулевая компонента, следовательно:

$$a_\mu(\sigma) = \alpha'\sqrt{-P^2}(1, \mathbf{n}(\sigma)); \quad b_\mu(\sigma) = \alpha'\sqrt{-P^2}(-1, \mathbf{m}(\sigma)).$$

Единичные векторы $\mathbf{n}(\sigma)$ и $\mathbf{m}(\sigma)$ в силу условия (51) можно считать касательными векторами к некоторым замкнутым кривым (не имеющим непосредственного отношения к самой струне). В силу единичности $\mathbf{n}(\sigma)$ и $\mathbf{m}(\sigma)$ величина σ является для этих кривых натуральным параметром, следовательно, их длина равна 2π. Таким образом, чтобы задать начальные данные для струны, а следовательно, определить ее мировую поверхность, достаточно задать две замкнутые гладкие ориентированные кривые. Рассмотрим теперь метрический тензор поверхности. Выражая $\sqrt{-g}$ через единичные векторы $\mathbf{n}(\sigma_1)$ и $\mathbf{m}(\sigma_2)$, получаем

$$\sqrt{-g} = -(\alpha'^2 P^2/4)\,[1 + \mathbf{n}(\sigma_1)\,\mathbf{m}(\sigma_2)]. \tag{52}$$

* Возможность выбора такой калибровки доказывается аналогично тому, как это сделано для калибровки (25).

Из этой формулы видно, что $\sqrt{-g\,(\sigma_1,\ \sigma_2)}$ исчезает в тех точках, где вектор $\mathbf{n}\,(\sigma_1)$ антипараллелен вектору $\mathbf{m}\,(\sigma_2)$. Проанализировать возможные ситуации проще всего в пространстве $(2 + 1)$-измерений. Действительно, $\mathbf{n}\,(\sigma_1)$ и $\mathbf{m}\,(\sigma_2)$, как говорилось выше, являются касательными векторами к двум гладким замкнутым кривым, которые в этом случае лежат в одной плоскости. Тогда очевидно, что для любой точки на одной кривой найдется точка на другой кривой, такая, что касательные в этих точках антипараллельны. Отсюда следует, что нули функции (52) находятся на некоторой кривой $\sigma_i\,(\rho)$.

В пространствах большего числа измерений в зависимости от начальных данных сингулярными могут быть: линии на мировой поверхности, точки, а также существуют такие начальные данные, при которых вся мировая поверхность является гладкой.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сделанные выше утверждения. Для наглядности будем пользоваться калибровкой (49).

Пример 1.

$$x_\mu\,(\sigma_1,\ \sigma_2) = \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)(\sigma_1 - \sigma_2,\ \mathbf{n}\,(\sigma_1) + \mathbf{n}\,(\sigma_2)), \tag{53}$$

где

$$\mathbf{n}\ (\sigma) = \mathbf{k} \cos \sigma + \mathbf{l} \sin \sigma;\ \mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = 1;\ \mathbf{kl} = 0.$$

В координатах $t = x_0$, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ это решение имеет следующий вид:

$$x_\mu\,(t,\ \sigma) = \left(t,\ \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)\left[\mathbf{n}\,(\sigma + t/\alpha' \sqrt{-P^2}) + \mathbf{n}\,(\sigma - t/\alpha' \sqrt{-P^2})\right]\right).$$

Струна в данном случае является окружностью, радиус которой меняется с периодом $2\pi\alpha' \sqrt{-P^2}$ от нуля до $\alpha' \sqrt{-P^2}$. Особенности мировой поверхности возникают как раз в момент стягивания струны в точку.

Пример 2.

$$x_\mu = \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)(\sigma_1 - \sigma_2,\ \mathbf{n}\,(\sigma_1) + \mathbf{n}\,(-\sigma_2)) =$$
$$= \left(t,\ \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)\left[\mathbf{n}\,(\sigma + t/\alpha' \sqrt{-P^2}) + \mathbf{n}\,(-\sigma + t/\alpha' \sqrt{-P^2})\right]\right).$$

Обозначения здесь и ниже те же, что и в (53). Струна сложена вдвое и представляет собой прямую линию длиной $\alpha' \sqrt{-P^2}$, которая вращается с периодом $2\pi\alpha' \sqrt{-P^2}$. Особенности мировой поверхности находятся на мировых линиях концов прямой.

Пример 3.

$$x_\mu = \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)(\sigma_1 - \sigma_2,\ \mathbf{n}\,(\sigma_1) + \mathbf{n}\,(2\sigma_2)/2) =$$
$$= \left(t,\ \left(\alpha' \sqrt{-P^2}/2\right)\left[\mathbf{n}\,(\sigma + t/\alpha' \sqrt{-P^2}) + \mathbf{n}\,(2\sigma - 2t/\alpha' \sqrt{-P^2})/2\right]\right).$$

Струна имеет форму нормальной эпициклоиды отношения 1 (кардиоида) *. На струне имеется излом с нулевым углом. Особенность мировой поверхности находится на мировой линии излома.

---

* Напомним, что *нормальными эпи-* и *гипоциклоидами* называются траектории движения некоторой точки первой окружности при качении ее по внешней (внутренней) стороне второй окружности. Отношением называется отношение радиуса первой окружности к радиусу второй.

Пример 4.

$$x_\mu = (\alpha' \sqrt{-P^2}/2)\,(\sigma_1 - \sigma_2,\ \mathbf{n}(\sigma_1) + \mathbf{n}(-2\sigma_2)/2) =$$
$$= (t,\ (\alpha' \sqrt{-P^2}/2)\,[\mathbf{n}(\sigma + t/\alpha' \sqrt{P^2}) + \mathbf{n}(-2\sigma + 2t/\alpha' \sqrt{-P^2})/2]).$$

Струна имеет форму нормальной гипоциклоиды отношения 1/3. На струне имеется три излома с нулевым углом. Особенности мировой поверхности лежат на мировых линиях изломов.

В примерах 2—4 струна во время своего движения вращается вокруг начала координат, сохраняя форму. Количество особенностей, которым, как видно из примеров, соответствуют изломы с нулевым углом, может быть произвольным. В более сложных примерах оно может меняться со временем. Рассмотрим пример, характерный для (3 + 1)-мерного пространства.

Пример 5.

$$x_\mu = (\alpha' \sqrt{-P^2}/2)\,(\sigma_1 - \sigma_2,\ \mathbf{n}(\sigma_1) + \mathbf{m}(\sigma_2)), \tag{54}$$

где $\mathbf{n}(\sigma) = \mathbf{k}\cos\sigma + \mathbf{l}\sin\sigma$; $\mathbf{m}(\sigma) = \mathbf{q}\cos\sigma + \mathbf{r}\sin\sigma$; $\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = \mathbf{q}^2 = \mathbf{r}^2 = 1$; $\mathbf{kl} = \mathbf{qr} = 0$. Струна, описываемая (54), является эллипсом, плоскость которого, как и большая и малая полуоси, периодически зависит от времени. Особенности возникают в данном примере в тот момент, когда эллипс стягивается в прямую, и лежат на концах этой прямой.

3. ОСОБЕННОСТИ МИРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРУНЫ И СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотренные особенности мировой поверхности струны в (2 + 1)-мерном пространстве тесно связаны с сингулярными решениями двумерного уравнения Лиувилля, исследуемыми в [11]. Само уравнение Лиувилля возникает в теории релятивистской струны в работе [12], если в качестве переменных, описывающих динамику, выбрать некоторую комбинацию коэффициентов первой и второй квадратичных форм мировой поверхности струны. Воспроизведем вывод этого уравнения. Для определенности будем рассматривать поверхность в пространстве с $d = 3 + 1$, при этом уравнение для поверхности в пространстве с $d = 2 + 1$ получается как частный случай.

С каждой точкой поверхности $x_\mu(\xi)$, $\xi^a = (\xi^1, \xi^2)$ можно связать тетраду векторов, два из которых $f_{a\mu} = \partial_a x_\mu(\xi)$ являются касательными, а два других e^i_μ — взаимно ортогональными нормалями к поверхности в данной точке. При этом

$$f^\mu_a f_{b\mu} = g_{ab};\quad e^i_\mu f^\mu_a = 0;\quad e^i_\mu e^{j\mu} = \delta^{ij},$$

где $g_{ab}(\xi)$ — индуцированная метрика на поверхности. Перенос тетрады описывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \partial_a f^\mu_b &= \Gamma^c_{ab} f^\mu_c - v^i_{ab} e^{i\mu}; \\ \partial_a e^i_\mu &= A^{ij}_a e^j_\mu + v^i_{ab} g^{bc} f_{c\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

где Γ^c_{ab} — коэффициенты связности; v^i_{ab} — коэффициенты второй квадратичной формы; $A^{ij}_a = \varepsilon^{ij} A_a$; A_a — вектор кручения. Выражения этих коэффициентов через векторы тетрады $f_{a\mu}$, e^i_μ даются следующими формулами:

$$\Gamma^c_{ab} = g^{cd}\Gamma_{d,\,ab} = g^{cd} f_{d\mu}\partial_a f^\mu_b; \; V^i_{ab} =$$
$$= \partial_a e^i_\mu f^\mu_b = -e^i_\mu \partial_a f^\mu_b; \; A^{ij}_a = e^j_\mu \partial_a e^{i\mu},$$

где $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$.

Условия интегрируемости системы (55) называются *уравнениями Петерсона — Кодацци* и *уравнения Гаусса* [7]. Вводя вместо тензоров v^i_{ab} комплексный тензор $v_{ab} = v^1_{ab} + i v^2_{ab}$, перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$D_a v_{bc} - D_b v_{ac} = \Gamma^k_{ac} v_{bk} - \Gamma^k_{bc} v_{ak}; \tag{56}$$

$$\partial_a A_b - \partial_b A_a = -\frac{1}{2i}\left(v_{ad} v^*_{cb} - v^*_{ad} v_{cb}\right) g^{dc}; \tag{57}$$

$$R^k_{cab} = \frac{1}{2} g^{dk}\left(v_{db} v^*_{ac} - v_{ad} v^*_{bc} + v^*_{bd} v_{ac} - v^*_{ad} v_{bc}\right)/2, \tag{58}$$

где $D_a = \partial_a - iA_a$; R^k_{cab} — тензор Римана поверхности. Из первого уравнения (55) умножением на g^{ab} получаем условие минимальности поверхности

$$g^{ab} v_{ab} = 0. \tag{59}$$

Таким образом, набор уравнений (56) — (59) определяет с точностью до движений мировую поверхность струны.

Чтобы упростить дальнейшие преобразования, выберем на поверхности изотропные координаты σ_1, σ_2, использованные выше, тогда

$$g_{ab} = \sqrt{-g}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а условие (59) означает, что $v_{12} = v_{21} = 0$. В изотропных координатах отличны от нуля лишь коэффициенты связности Γ^1_{11} и Γ^2_{22}, причем

$$\Gamma^1_{11} = \partial_1 \ln\sqrt{-g}\,; \; \Gamma^2_{22} = \partial_2 \ln\sqrt{-g}\,.$$

Используя эти равенства и уравнение (56), можно выразить вектор A_a коэффициентами v_{11} и v_{22}:

$$A_1 = \partial_1 \ln v_{22}/i; \; A_2 = \partial_2 \ln v_{11}/i,$$

причем в силу вещественности A_a: $\partial_1 \mid v_{22} \mid = \partial_2 \mid v_{11} \mid = 0$.

Таким образом, из всех функций, определяющих минимальную поверхность в изотропных координатах, независимыми являются две комплексные функции v_{11} и v_{22} и одна вещественная $\sqrt{-g}$.

После этих замечаний легко убедиться в том, что комплексная функция $u(\sigma_1, \sigma_2) = \ln\left[v_{11} v^*_{22}/\sqrt{-g}\right]$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\partial_1\partial_2 u + e^u = 0. \tag{60}$$

Заметим, что для вывода этого уравнения, в отличие от [12], нам не потребовалось накладывать никаких дополнительных условий на координаты σ_1, σ_2, кроме требования их изотропности.

Для мировой поверхности в пространстве размерности $d = 2 + 1$ функция $u(\sigma_1, \sigma_2)$ оказывается вещественной.

Для пространств размерности $d > 4$ можно показать, что уравнение, аналогичное (60), также существует, однако здесь оно является матричным, причем число компонент функции $u(\sigma_1, \sigma_2)$ равно $d - 2$ и совпадает с числом поперечных степеней свободы струны. Уравнение (60) справедливо независимо от того, конечная или бесконечная струна. Конечная струна — открытая или замкнутая — описывается периодической функцией $u(\sigma_1, \sigma_2)$, бесконечной струне соответствует функция $u(\sigma_1, \sigma_2)$ с определенными асимптотиками на бесконечности. Зная решение уравнений струны, можно построить соответствующее решение уравнения Лиувилля. Поскольку решение уравнений струны задается начальными данными $\tilde{a}_\mu(\sigma)$ и $\tilde{b}_\mu(\sigma)$, решение уравнения (60) также можно выразить через эти же функции. Ограничимся ниже рассмотрением пространства с $d = 2 + 1$ и, соответственно, вещественными решениями уравнения Лиувилля. Минуя подобные вычисления, приведем выражение решения уравнения Лиувилля через начальные данные для струны, удовлетворяющие условиям (10), (11):

$$u(\sigma_1, \sigma_2) = \ln\left[\sqrt{\tilde{a}'^2(\sigma_1)\,\tilde{b}'^2(\sigma_2)}\Big/\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2)\right]. \tag{61}$$

Поскольку в $(2 + 1)$-мерном пространстве у поверхности только одна нормаль, имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{a}'^2(\sigma_1)}}\left(\tilde{a}'_\mu(\sigma_1) - \frac{\tilde{a}'(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2)}{\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2)}\,\tilde{a}_\mu(\sigma_1)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\tilde{b}'^2(\sigma_2)}}\left(\tilde{b}'_\mu(\sigma_2) - \frac{\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}'(\sigma_2)}{\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2)}\,\tilde{b}_\mu(\sigma_2)\right). \tag{62}$$

Из (62) следует, что

$$\tilde{a}'(\sigma_1)\,\tilde{b}'(\sigma_2) - \frac{(\tilde{a}'(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2))\,(\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}'(\sigma_2))}{\tilde{a}(\sigma_1)\,\tilde{b}(\sigma_2)} = \sqrt{\tilde{a}'^2(\sigma_1)\,\tilde{b}'^2(\sigma_2)}.$$

Это равенство позволяет непосредственным дифференцированием убедиться в том, что (61) действительно является решением (60).

С другой стороны, общее решение уравнения Лиувилля, полученное в 1853 г. [13], имеет в наших обозначениях следующий вид:

$$u(\sigma_1, \sigma_2) = \ln\left(-\frac{2A'(\sigma_1)\,B'(\sigma_2)}{[A(\sigma_1) + B(\sigma_2)]^2}\right). \tag{63}$$

Чтобы перейти от (61) к (63), запишем $a_\mu(\sigma)$ и $b_\mu(\sigma)$ в виде:

$$a_\mu(\sigma) = \alpha(\sigma)\,(1,\ \cos\varphi(\sigma),\ \sin\varphi(\sigma));$$
$$b_\mu(\sigma) = \beta(\sigma)\,(-1,\ \cos\psi(\sigma),\ \sin\psi(\sigma)).$$

Тогда с точностью до преобразований Бианки [11] можно положить:

$$A(\sigma_1) = \operatorname{tg}\varphi(\sigma_1)/2;\ B(\sigma_2) = \operatorname{ctg}\psi(\sigma_2)/2.$$

В [11] были рассмотрены решения уравнения Лиувилля с сингулярностями. Как видно из (63), эти сингулярности появляются при выполнении условия

$$A(\sigma_1) + B(\sigma_2) = 0. \tag{64}$$

На языке струнных переменных условие (64) эквивалентно исчезновению метрического тензора мировой поверхности, что и приводит к возникновению на ней сингулярности.

В [11] изучались вещественные непериодические решения (60), которые соответствуют бесконечной струне в $(2+1)$-мерном пространстве. При дополнительном ограничении $A'(\sigma_1) > 0$ и $B'(\sigma_2) > 0$ траектории сингулярностей, т. е. множество решений (64) в пространстве $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ и $\tau = \sigma_1 - \sigma_2$, оказываются времениподобными и допустима интерпретация сингулярностей как частиц. Далее в [11] было показано, что класс чисто сингулярных решений уравнения (60) определяется набором асимптотических параметров траекторий сингулярностей, число которых сохраняется в процессе эволюции, если функции $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ монотонны. Как было установлено выше, замкнутая струна в пространстве с $d = 2+1$ обязательно имеет сингулярности на мировой поверхности, а это означает, что любое периодическое вещественное решение уравнения Лиувилля также должно иметь особенности.

Привлекательной является интерпретация особенностей мировой поверхности струны как мировых линий «частиц» в реальном пространстве. Эти «частицы» могут двигаться свободно или рассеиваться друг на друге для бесконечной струны, могут образовывать связанное состояние для замкнутой струны. Примеры 2—4 иллюстрируют как раз такие связанные состояния. В более сложных случаях возможно также рождение и уничтожение «частиц».

Следует отметить, что не все особенности мировой поверхности струны могут интерпретироваться как «частицы». Существует класс таких движений струны, при которых струна стягивается в точку. Сингулярность мировой поверхности возникает в момент исчезновения струны. Этот тип сингулярностей иллюстрируется примером 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе было показано, что мировые поверхности струны могут иметь (а в пространстве с $d = 2+1$ обязательно имеют) сингулярности. Существует однозначная связь этих сингулярностей струнной поверхности с сингулярными решениями уравнения Лиувилля. В цитированных работах [11] было показано, что эти сингулярности можно интерпретировать как точечные «частицы» в двумерном пространстве параметров, причем их движение допускает гамильтоново описание. Более того, полученная динамическая система является вполне интегрируемой. Поскольку сингулярности решений двумерного уравнения Лиувилля оказываются тесно связанными с сингулярностями струны, возникает вопрос, не является ли система сингулярностей струны также гамильтоновой и вполне интегрируемой? При положительном ответе на этот вопрос мы имели бы нетривиальную, вполне интегрируемую систему в трехмерном пространстве — времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rebbi C.**— Phys. Rep. C, 1974, v. 12, p. 1.
2. **Scherk J.**— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 123.
3. **Mandelstam S.**— Phys. Rep. C, 1974, v. 13, p. 259.
4. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.**— ЭЧАЯ, 1978, т. 9, с. 709; **Барбашов Б. М., Черников Н. А.** Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна, 1974.
5. **Nambu Y.** Lectures for Copenhagen Symp. 1970; **Goto T.**— Progr. Theor. Phys., 1971, v. 46, p. 1560.
6. **Salisbury D. C., Sundermeyer K.**— Preprint FUB-HEP-4/81, Berlin, 1981.
7. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия и приложения. М., Наука, 1979.
8. **Patrascioiu A.**— Nucl. Phys. B, 1974, v. 81, p. 525.
9. **Пронько Г. П., Разумов А. В., Таранов Ю. А.** Препринт ИФВЭ 81-101, Серпухов, 1981.
10. **Dirac A. A. M.**— Proc. Roy. Soc. A, 1958, v. 246, p. 326; **Дирак П. А. М.** Лекции по квантовой механике. Пер. с англ. М., Мир, 1968.
11. **Джорджадзе Г. П., Погребков А. К., Поливанов М. К.**— ТМФ, 1979, т. 40, с. 221; **Погребков А. К.**— ТМФ, 1980, т. 45, с. 161.
12. **Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л.**— ТМФ, 1979, т. 39, с. 27; **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.**— Fortschr. Phys., 1980, Bd 28, S. 427.
13. **Liouville J.**— J. Math. Appl., 1853, v. 18, p. 71.