

Посвящается памяти
Юрия Михайловича Широкова

УДК 538.3:530.1

ТОРОИДНЫЕ МОМЕНТЫ В ФИЗИКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В. М. Дубовик

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Л. А. Госунян

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

В рамках классической электродинамики разъяснена аналитическая структура и геометрический смысл формул мультипольных разложений для систем, содержащих конвекционные и индукционные токи. Основное внимание уделяется разложению электрической поперечной части тока, в которой ранее нами было выделено третье семейство мультипольных параметров — тороидные моменты и их радиусы. Разобраны электромагнитные свойства простейших тороидальных систем. Подчеркнута связь мультипольных разложений с методиками инвариантных параметризаций релятивистских матричных элементов оператора тока. Указаны некоторые следствия и эффекты, к которым приводит существование этих моментов в теориях атомных и ядерных переходов. Дан обзор результатов по извлечению тороидных моментов ядерных переходов через конверсионные ядерные параметры проникновения, возможностей извлечения информации о тороидных гигантских резонансах и т. п. Приводятся результаты по изучению анаполя (тороидного диполя) в рамках проблемы несохранения четности электрослабыми взаимодействиями в атомных, ядерных, квазиядерных и кварковых системах.

In the framework of classical electrodynamics we clarify the analytic structure and geometrical meaning of multipole expansions for systems consisting of the convective and inductive currents. A particular consideration is given to the expansion of the electrical transverse part of the currents, in which earlier we have separated the third family of multipole parameters: toroid moments and their radii. The electromagnetic properties of simplest toroidal systems are studied. We emphasize the connection of multipole expansions with the methods of invariant parametrization of the relativistic matrix elements of the current operators.

Some consequences and effects caused by these moments in theories of atomic and nuclear transitions are pointed out. We give also a review of the results on the extraction of toroid moments of nuclear transitions by means of conversion nuclear penetration parameters, the possibilities of obtaining the information about toroid giant resonances and so on. Within the parity nonconservation problem in electroweak interaction results are given on the study of the anapole (toroid dipole) in atomic, nuclear, quasinuclear and quark systems.

ВВЕДЕНИЕ

История вопроса. В конце 60-х годов Ю. М. Широков выполнил серию общеизвестных работ по нахождению конечномерных унитарных представлений общей группы Лоренца. На их основе им была поставлена задача создания общих методов инвариантной параметризации релятивистских матричных элементов локальных операторов произвольной тензорной или спинорной размерности, заданных в гейзенберговом представлении и действующих на состояния свободных частиц. Эта задача была решена им и его безвременно ушедшим из жизни учеником А. А. Чешковым в работах [1].

Одинаковость законов природы во всех инерциальных системах отсчета означает, что состояния физических систем и процессов их взаимодействия определяются параметрами, не зависящими от выбора системы отсчета, — инвариантными параметрами. С теоретико-групповой точки зрения любая релятивистская параметризация есть выделение представления группы Пуанкаре класса $P_{\pm\kappa}^{s=0}$ (где s — спин, κ — масса) из прямого произведения представлений, по которым преобразуются векторы состояний и сам оператор (или произведение операторов). Иными словами, матричный элемент любого оператора может быть редуцирован так, что его значение задается конечным числом инвариантных функций, называемых факторами.

Для инвариантной параметризации релятивистского матричного элемента можно, разложив его одним из нерелятивистских способов, в кинематически выделенной лоренцевой системе отсчета (в с. ц. и., в брейтовской системе и т. п.) совершить затем переход к произвольной системе (л. с.) с помощью соответствующего лоренцева преобразования (буста) $D_{mm'}^s$:

$$|\kappa, \mathbf{p}, s, m\rangle = D_{mm'}^s(\mathbf{p}, \mathbf{u}) |\kappa, \mathbf{p}', s, m'\rangle.$$

Здесь \mathbf{u} — скорость преобразования Лоренца; $D_{mm'}^s(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ — матрица релятивистского поворота спина s , имеющего проекцию на ось квантования m или m' и зависящего не только от \mathbf{u} , но и от импульса частицы.

Этот кинематический эффект известен в классической теории относительности под названием релятивистской прецессии волчка. Впервые на его существование указал Меллер в 1945 г. В 1954 г. этот эффект был описан в релятивистской квантовой теории поля Ю. М. Широковым [2], получившим в явном виде матрицу поворота для частиц со спином 1/2.

В отдельных случаях инвариантную параметризацию удается провести в явно ковариантном виде, пользуясь релятивистским обобщением понятия спина [3], в ковариантном виде введенного Ю. М. Широковым в 1951 г. [4]. Именно этим способом в 1963 г. Ю. М. Широков и А. А. Чешков параметризовали матричный элемент электромагнитного тока, диагонального по массе и спину,

и нашли третье семейство формфакторов, отличных от зарядовых и магнитных, для частицы с произвольным спином*.

Далее, в работах [6, 7] А. А. Чешковым и одним из нас были открыты и изучены классические аналоги этих формфакторов — мультиполярные тороидные распределения (моменты) конвекционных токов — и установлена их дуальность с наведенными электрическими моментами [8, 9—12] и анаполем Зельдовича [5а]. Анаполь был введен впервые в 1957 г. в связи с открытием несохранения четности в слабых взаимодействиях как третий диполь точечной элементарной частицы со спином $1/2$, взаимодействующий с током: $\mathcal{L} \sim a\sigma\mathbf{J}^{\text{внеш}}$. На существование третьего диполя указывалось и в других работах по релятивистским параметризациям электромагнитной вершины для частиц с высшими спинами (см., например, [5б]). Однако только в [5а] были произведены его оценки, указаны классические аналоги и дано привнесшее в литературе название анаполь. Как следствие существования нового электрослабого параметра был также предсказан ряд эффектов нарушения четности в атомных спектрах, при рассеянии лептонов на адронах и т. п. Таким образом, проблема нарушения четности возбудила интерес к изучению фактически собственного (непереходного) момента из ряда наведенных электрических моментов [8].

Далее в связи с обнаружением несохранения CP -инвариантности были исследованы возможности измерения тороидного квадрупольного при рассеянии электронов на дейтроне [13, 14].

В последнее время механизмы нарушения дискретных симметрий строятся на основе единых калибровочных теорий в кварк-лептонном секторе. Поскольку существование промежуточных бозонов, по-видимому, подтверждается экспериментально, тороидный дипольный момент, скажем, электрона, является величиной не более экзотической, чем аномальный магнитный момент $\alpha/2\mu$, как видно из диаграмм (см., например, [15]). Таким образом, термин «ананоль» электрона или кварка становится уже вполне привычным для физика, работающего в области элементарных частиц, и анапольные вклады в различные эффекты обсуждаются в связи с текущими экспериментами [9, 16, 17].

В последнее время в связи с повышением экспериментальных точностей возникает необходимость учитывать вклады тороидного момента в дипольные электрические переходы. В работе [18] было показано, что тороидные вклады могут быть существенными при расчете подавленных электрических переходов в ядрах, которые удобны для изучения проблемы несохранения четности в слабых NN -взаимодействиях. Переходные тороидные диполи ядер оказались также связанными с так называемыми коэффициентами проникновения в теории внутренней конверсии γ -излучения ядер [19а].

* Для спинов $1/2$ и $3/2$ подобные формфакторы были введены ранее соответственно в [5а] и [5б] с использованием биспинорных представлений.

Сейчас известны экспериментальные значения тороидных диполей для $E1$ -переходов в некоторых ядрах [196].

Значительные вклады в вероятности переходов дают тороидные диполи в сильносвязанных системах, таких как квазиядерная или кваркониевая. На примере квазиядерной системы нами недавно было показано [20], как по правилам отбора из полного электрического момента выделяется его тороидная часть.

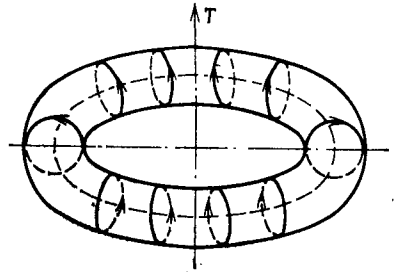
Таким образом, развитие методики параметризации релятивистских амплитуд квантовой теории и открытия нарушений дискретных симметрий оказали обратное воздействие на классическую электродинамику, стимулировав полное исследование структуры мультипольного разложения электромагнитного тока. Итоговая работа, включающая как классические, так и квантовые аспекты проблематики тороидных моментов, была опубликована в 1974 г. [7]. В области классической электродинамики в 1975—1976 гг. нами был получен ряд новых формул, связанных с тороидными моментами; нами и рядом исследователей обнаружены также новые проявления тороидных моментов в физике ядра, частиц и субчастиц. В данном обзоре делается попытка подытожить эти результаты. Мы надеемся, что наше изложение будет также способствовать лучшему пониманию громоздких формул мультипольных разложений благодаря последовательной их трактовке на языке геометрических образов, в частности формул для тороидных распределений, и это облегчит их использование. В обзоре демонстрируется, в основном качественно, как применять общезначимый формализм мультипольных параметризаций в различных областях физики, начиная с классической электродинамики и кончая теорией субчастиц. Техника мультипольных разложений и в классической и в квантовой теории с учетом тороидных распределений подробно разобрана в [7].

О неизбежности существования тороидных моментов. Напомним (см. [7]), что необходимость введения тороидных моментов возникает уже в рамках обычной классической электродинамики. Покажем, как из общих соображений можно прийти к выводу о существовании тороидных моментов.

Пусть имеется произвольная система, описываемая зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотностью токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Зададимся задачей описать электромагнитные свойства этой системы с помощью набора параметров. Выберем некоторую полную систему функций, например сферические гармоники, и разложим по ним $\rho(\mathbf{r}, t)$. Получим общеизвестный ряд мультипольных моментов: полный заряд системы, зарядовый диполь, квадруполь и т. д.

Аналогичным образом можно разложить и каждую из компонент тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Однако условие сохранения тока $\partial_\mu j_\mu(\mathbf{r}, t) = 0$ оставляет независимыми только три компоненты $j_\mu(\mathbf{r}, t)$. Действительно, известно (см., например, [8, 10—12]), что при мультипольном разложении возникают три семейства мультипольных моментов: зарядовые Q_{lm} , магнитные M_{lm} и электрические поперечные E_{lm} моменты.

Заметим теперь, что мультипольное разложение плотности тока — не формально-математическая операция; она имеет наглядный геометрический смысл. Каждому мультипольному моменту соответствует система зарядов или токов, обладающая только этим моментом (по крайней мере, в первом приближении). Например, плоская рамка с током и зарядовый диполь описываются соответственно магнитным и зарядовым дипольными моментами. Электрические поперечные моменты также соответствуют определенным распределениям токов.



Полоидальные токи на торе определяют тороидный дипольный момент. Простейшая модель его — согнутый в тор обычный соленоид (с четным числом обмоток!)

Попробуем связать их с геометрическими образами. Рассмотрим простейший пример — тороидальный постоянный ток (см. рисунок). Такой ток имеет осевую симметрию и поэтому должен характеризоваться вектором, направленным по оси тора, т. е. дипольным моментом. Поскольку для данной конфигурации $\rho \equiv 0$, а магнитные моменты витков тора замыкаются в плоскости симметрии тора, то как зарядовый, так и магнитный дипольные моменты тора равны нулю. Таким образом, тороидальный ток может характеризоваться только электрическим поперечным дипольным моментом. Однако электрические поперечные моменты E_{lm} обычно приравнивают в длинноволновом приближении \dot{Q}_{lm} [10, 12]: $E_{lm} = \dot{Q}_{lm}$, где точка означает дифференцирование по времени. При этом считается, что в общем случае равенство зарядовых и электрических поперечных моментов справедливо с точностью до релятивистских поправок. В действительности все обстоит сложнее.

Рассмотрим, например, статический случай ($\omega = 0$). Тогда при нахождении характеристики постоянного тока на торе, используя выражение $E_{lm} = \dot{Q}_{lm}$, автоматически получаем нуль. Более того, в общем случае можно сразу сказать, что это соотношение в принципе несправедливо даже в длинноволновом приближении, так как оставляет из трех независимых мультипольных семейств Q_{lm} , M_{lm} и E_{lm} только два: Q_{lm} и M_{lm} .

Итак, структура и свойства электрических поперечных моментов требуют детального изучения в рамках классической электродинамики.

Вернемся к обсуждению токов на торе (см. рисунок). Предложенную конфигурацию можно рассматривать как конвекционные токи свободных зарядов, создающих круговое магнитное поле, или считать, что это — соленоид, согнутый в тор (с четным числом обмоток, чтобы не было составляющей тока «вдоль» по тору, что приводило бы

к наличию у тора магнитного момента!). Можно, однако, рассматривать токи на торе как индукционные, т. е. создаваемые намагниченностью среды «внутри» тора. Любопытно, что именно эта «магнитная» часть тороидных моментов была введена еще Блаттом и Вайскоффом при рассмотрении электромагнитных переходов в ядрах и названа наведенными электрическими моментами [8, 11]. Заметим, что, исходя из формул для наведенных электрических моментов, восстановить вид конвекционной части довольно трудно. Подобную задачу приходится решать при установлении связи между релятивистской (аналогичной) параметризацией и классической тороидной (см. [7, 9] и комментарий в разд. 8). В этом обзоре, следуя плану нашей предыдущей работы [7], решим общую задачу мультипольного разложения в рамках классической электродинамики (см. разд. 1—4), обсудим свойства классического тороидного диполя (разд. 5) и укажем проявления тороидных формфакторов в квантовой физике (разд. 6—9).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧИ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

В рамках классической электродинамики рассмотрим произвольную ограниченную систему, описываемую зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$. Поставим задачу — перейти к описанию электромагнитных свойств системы с помощью набора параметров. Практическая выгода от такого перехода возникает при возможности выделения одного или нескольких наиболее важных параметров, определяющих интегральные свойства системы (например, в длинноволновом приближении или ввиду ее особых геометрических свойств).

Воспользуемся следующим формальным приемом (см., например, [21, 22]). В соответствии с определением δ -функции переищем $\rho(\mathbf{r}, t)$ тавтологически в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \rho(\xi, t) \delta(\xi - \mathbf{r}) d^3\xi, \quad (1)$$

а вместо функции $\delta(\xi - \mathbf{r})$ подставим ее формальное разложение в ряд Тейлора:

$$\delta(\xi - \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \underbrace{\xi_i \dots \xi_k}_{l} \partial_i \dots \partial_k \delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Получим выражение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} A_{i\dots k}^{(l)} \partial_i \dots \partial_k \delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

которое представляет $\rho(\mathbf{r}, t)$ в виде суммы δ -образных зарядовых источников, характеризующихся параметрами

$$A_{i\dots k}^{(l)}(t) = \int \rho(\xi, t) \xi_i \dots \xi_k d^3\xi, \quad (4)$$

где интегрирование распространено на все пространство. Величины $A_{i \dots k}^{(l)}$ называются моментами, и в нашем случае ограниченной в пространстве функции $\rho(\xi, t)$ они определены для любых l . В рамках электродинамики видим, что $A^{(0)}$ — это полный заряд системы, $A_i^{(1)}$ — ее зарядовый (кулоновский) диполь и т. д. Однако для выделения более высоких неприводимых (мультипольных) моментов — пользоваться ими удобнее — нам надо разбить тензоры $\xi_i \dots \xi_k$ по неприводимым представлениям группы вращений. Тогда при превращении $A_{i \dots k}^{(l)}$ в неприводимые тензоры в сумме (3) выделятся еще ряды параметров с весом $l = 0$:

$$A_{ik} \delta_{ik}, A_{iabk} \delta_{ia} \delta_{bk}, \dots; \quad (5)$$

с весом $l = 1$:

$$A_{iak} \delta_{ak}, A_{iabck} \delta_{ab} \delta_{ck}, \dots \quad (6)$$

И т. д.

Если выделение из $A^{(l)}(t)$ мультипольных моментов низших рангов ($l = 0, 1, 2$) не представляет труда, то для $l > 2$ это становится чрезвычайно утомительной процедурой, и в общем виде выполнить ее не удается. Поэтому для мультипольного разложения необходимо сразу использовать полный набор подходящих базисных функций, так чтобы коэффициенты разложения были неприводимыми тензорами (мультипольными формфакторами, например в фурье-сопряженном пространстве волновых векторов \mathbf{k}). Далее, если это необходимо, можно переходить к δ -образным функциям (разложение на точечные источники). Образующиеся при них числовые коэффициенты являются моментами и средними радиусами мультипольных распределений. Так решается задача параметризации электромагнитных свойств системы, описывающейся данным 4-током.

Подчеркнем, что мультипольные формфакторы, зависящие от волнового числа \mathbf{k} (фурье-образы мультипольных распределений), необходимо вводить уже в классической электродинамике, если мы хотим полностью описать свойства системы. Использование только моментов при наличии высоких мультипольностей может оказаться недостаточным даже в длинноволновом пределе. Рассмотрим, например, задачу об излучении. Интенсивность излучения определяется значением формфакторов при $k = \sqrt{\mathbf{k}^2} = \omega$. В длинноволновом приближении мы заменяем их значениями при $k = 0$, т.е. моментами. Допустим, что у данной системы $\mu_i = 0$, $\mu_{ij} = 0$ и лишь $\mu_{ijk} \neq 0$ (здесь μ_i — магнитный дипольный, μ_{ij} — магнитный квадрупольный моменты и т. д.). Тогда следует рассмотреть также среднеквадратичный радиус магнитного дипольного распределения

$$\bar{\rho}_i^2 = \frac{1}{2} \int \xi^2 [\xi \times \mathbf{j}]_i d^3 \xi, \quad (7)$$

имеющий, вообще говоря, тот же порядок, что и октупольный момент μ_{ijk} ($\sim e \frac{v}{c} a^3$). Аналогичным образом в задаче о рассеянии наряду

с зарядовым квадрупольным моментом надо учитывать и среднеквадратичный радиус заряда.

Обобщая, можно сказать, что полная параметризация электромагнитных свойств системы подразумевает два разложения по степеням k : одно, связанное с представлением плотностей заряда и тока в виде набора неприводимых тензорных функций от k^2 , и другое, связанное с разложением каждой из этих функций в ряд по степеням k^2 . Мультипольная параметризация, например, фурье-образа зарядовой плотности представлена в таблице.

Мультипольная параметризация фурье-образа зарядовой плотности $\rho(k, t)$

n	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
0	q_0	kq_1	k^2q_2	...
1	$k^2\overline{r_0^2}$	$k^3\overline{r_1^2}$	$k^4\overline{r_2^2}$...
2	$k^4\overline{r_0^4}$	$k^5\overline{r_1^4}$	$k^6\overline{r_2^4}$...
3

В ней строка с $n = 0$ воспроизводит (без коэффициентов) ряд разложения зарядовой плотности по моментам. Столбец к каждому члену этой строки дает ряд средних $2n$ -степенных радиусов данного 2^l -польного распределения (для краткости далее будем говорить просто: радиус данного момента веса l). Радиус характеризует степень пространственной размазанности этого момента. Легко видеть, что для заряда они определяются как

$$\overline{r^{2n}} = \int \rho(\xi, t) \xi^{2n} d^3\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Размазанность дипольного момента системы характеризуется радиусами

$$\overline{r_i^{2n}} = \int \rho(\xi, t) \xi_i \xi_i^{2n} d^3\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Подобные формулы можно написать и для всех других мультипольных моментов.

Из формул (8), (9) и им подобных устанавливается, что q_l имеют порядок ea^l , а средние радиусы $\overline{r_l^{2n}} \sim ea^{2n+l}$ (a — размер системы). Таблица, вообще говоря, не ограничена ни по вертикали, ни по горизонтали. Заметим, что в квантовой теории приведенная выше таблица обрывается по горизонтали из-за кинематических свойств спина так, что введение формфакторов в этом случае имеет смысл вне зависимости от величины безразмерного параметра ka . Во избежание путаницы

отметим здесь, что в электромагнетизме используется еще понятие индуцированных моментов. Такие моменты появляются в результате влияния внешнего поля на свойства системы. Продемонстрируем это на примере широкоупотребительной характеристики — поляризуемости. Если конфигурация внешних электрических полей достаточно сложна и эти поля интенсивны, они способны растягивать (раскачивать) заряды системы, и возникают новые динамические квадрупольные характеристики электромагнитных свойств системы. Простейшая — тензор поляризуемости p_{ik} — определяет величину индуцированного диполя $d_i = p_{ik}E_k$. В лагранжиан она входит квадратично по полю, поскольку $\mathcal{H} = -d_i E_i = -p_{ik}E_i E_k$, в то время как тензорная характеристика второго ранга — обычный квадруполь — взаимодействует с производной от поля $\mathcal{H} = -Q_{ik}\nabla_i E_k$. Таким образом, с учетом нелинейных взаимодействий возникают дополнительные ряды мультипольных динамических характеристик системы.

Итак, мы показали, как характеризовать свойства пространственно-распределенной системы зарядов мультипольными моментами и их средними $2n$ -степенными радиусами. Заметим еще, что мультипольный момент веса l называют иногда 2^l -польным моментом, так как диполь — система из двух зарядов (полюсов), квадруполь — из четырех и т. д. Однако апелляция к зарядам при построении высших мультиполей не обязательна. В том случае, когда зарядов нет, как, например, в магнитостатике, а существуют лишь диполи, все высшие моменты можно построить из диполей. Последнее замечание следует иметь в виду при дальнейших рассуждениях.

2. О РАЗЛОЖЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТОКОВ

Пусть кроме плотности зарядов система описывается еще и плотностью токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Точно так же, как мы разложили плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$, можно произвести мультипольное разложение пространственных компонент тока, например трех скалярных функций $j_x(\mathbf{r}, t)$, $j_y(\mathbf{r}, t)$, $j_z(\mathbf{r}, t)$. Тогда возникнут еще три семейства моментов и их радиусов (еще три таблицы параметров, аналогичных приведенной таблице). В действительности же мы находимся в рамках электродинамики и должны учитывать закон сохранения тока *

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\dot{\rho}. \quad (10)$$

Реализовать эту связь в терминах мультипольного разложения удобно с помощью теоремы Гельмгольца (см., например, [23, г. 1] или [24]). Она утверждает, что любое векторное поле (однозначное, непрерывное и обращающееся в нуль на бесконечности) можно разбить на сумму потенциального и соленоидального полей. Пользуясь этой

* Точка над символом здесь и далее будет означать производную по времени.

теоремой, можно представить \mathbf{j} в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad (11)$$

где $\mathbf{j}_{\parallel} = \nabla\varphi$, т. е. $\text{rot } \mathbf{j}_{\parallel} = 0$, а $\mathbf{j}_{\perp} = \text{rot } \mathbf{f}$, причем \mathbf{f} удовлетворяет условию

$$\text{div } \mathbf{f} = 0. \quad (12)$$

Учитывая разбиение (11), условие (10) перепишем в виде

$$-\dot{\rho} = \text{div } \mathbf{j}_{\parallel}. \quad (13)$$

Отсюда следует, во-первых, что разложение продольной части тока \mathbf{j}_{\parallel} (т. е. параметры разложения введенной выше скалярной функции φ) определяется через производные по времени от мультипольных моментов и их радиусов, характеризующих зарядовую плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$; во-вторых, что с учетом соотношения (12) остались две независимые компоненты вектора \mathbf{f} , разложение которых определяет \mathbf{j}_{\perp} . Поскольку связей типа (10) и (12) больше не имеется*, приходим к выводу, что \mathbf{j}_{\perp} характеризуется двумя семействами моментов, не зависящих от зарядовых. Действительно, возможны случаи, когда зарядовые моменты вообще отсутствуют, например при $\rho = 0$ или $\dot{\rho} = 0$, что не затрагивает компонент вектора \mathbf{j}_{\perp} .

Очевидно, теперь нам удобно еще раз разбить по каким-то признакам вихревое поле \mathbf{f} на сумму двух полей, каждое из которых задается действием дифференциальных операторов на скалярные поля. В этом нам помогает теорема, приведенная в книге Чандрасекара [25] (см. также [26]). В теореме утверждается, что любое вихревое поле можно представить в виде суммы двух векторов

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = i\mathbf{L}\psi(r, \theta, \varphi) + i \text{rot}(\mathbf{L}\chi(r, \theta, \varphi)), \quad (14)$$

где $\mathbf{L} = -i[\mathbf{r}\nabla]$. При этом первый вектор в (14) описывает тороидальные токи (токи, текущие на торе по «параллелям»), а второй — полоидальные (текущие на торе по «меридианам»). ** Заметим, что функции ψ и χ при фиксированном свойстве \mathbf{f} при отражениях являются одна — скаляром, другая — псевдоскаляром.

Из книги [23, т. 2] можно узнать, что аналогичным разбиением пользовался еще Нейман в задачах математической физики, детализируя теорему Гельмгольца следующим образом:

$$\mathbf{j} = \nabla\varphi + \text{rot}(\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})) + \text{rot rot}(\mathbf{r}\chi(\mathbf{r})). \quad (15)$$

* Заметим, что связи эти — дифференциальные; в алгебраические они превращаются, если перейти в пространство волновых векторов \mathbf{k} , где $\mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{k})$ действительно коллинеарен \mathbf{k} , а $\mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{k})$ ортогонален к ним. В координатном простран-

стве соответственно $\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j} - \nabla \int \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$.

** Это легко установить, если перейти к тороидальным координатам вместо сферических.

Введем теперь определение токовых моментов, аналогичное определению зарядовых:

$$B_{ij\dots k}^{(l)} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \int \underbrace{j_i \xi_j \dots \xi_k}_{l-1} d^3 \xi. \quad (16)$$

Учитывая сформулированные свойства продольности (13) и поперечности (14), можно далее разбивать тензоры $B_{ij\dots k}^{(l)}$ на неприводимые, выделяя из них различные мультипольные моменты и радиусы. Очевидно, тензор $B_{ij}^{(2)}$ разобьется на симметричную часть, связанную уравнением (13) с производными по времени от зарядового квадрупольного момента Q_{ij} и среднеквадратичного радиуса заряда $\overline{r_q^2}$, и антисимметричную часть, которую можно характеризовать аксиальным вектором, называемым магнитным моментом μ_i . Определение этих параметров общеизвестны. Следующий тензор, третьего ранга $B_{ijk}^{(3)}$, редуцируется, очевидно, по схеме

$$1 \times (2 + 0) = (3 + 1) + 2 + 1. \quad (17)$$

Как видно, представление веса $l = 1$ выделяется из $B_{ijk}^{(3)}$ дважды.

В самом деле, разложение тензора $j_i \xi_j \xi_k$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} j_i \xi_j \xi_k = & \frac{1}{3} \left[j_i \xi_j \xi_k + j_k \xi_i \xi_j + j_j \xi_k \xi_i - \frac{3}{5} (\delta_{ij} \theta_k + \delta_{ik} \theta_j + \delta_{jk} \theta_i) \right] - \\ & - \frac{1}{3} (\varepsilon_{ijl} \mu_{kl} + \varepsilon_{ikh} \mu_{jl}) - \\ & - \frac{1}{6} (\delta_{ij} \lambda_k + \delta_{ik} \lambda_j - 2\delta_{jk} \lambda_i) + \frac{1}{5} (\delta_{ij} \theta_k + \delta_{ik} \theta_j + \delta_{jk} \theta_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь выражение в квадратных скобках — полностью симметричный тензор третьего ранга с вычтенным шпуром, как нетрудно убедиться, определяет производную по времени от зарядового октупольного момента \dot{Q}_{ijk} (см. разд. 3); μ_{ik} — магнитный квадрупольный момент, равный $\mu_{ik} = \mu_i \xi_k + \mu_k \xi_i$, где $\mu_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijh} \xi_j j_h$; $\theta_i = 2\xi_i (\xi_j) + \xi_j^2 i$ определяет производную по времени от среднеквадратичного радиуса диполя; $\lambda_i = \xi_i (\xi_j) - \xi_j^2 i$. Таким образом, формула редукции $j_i \xi_j \xi_k$ реализована, и мы действительно нашли в разложении этого тензора две векторные компоненты θ_i и λ_i *. Легко проверить, что $\int \theta_i d^3 \xi \equiv \equiv \dot{r}_i^2$ обращается в нуль при подстановке в ее определение поперечного тока, и таким образом, она входит лишь в продольную (кулоновскую) часть тока, связанную условием его сохранения $\text{div } \mathbf{j}_{\perp} = -\dot{\rho}$

* В недавней работе Фрайра и Фаллиероса [27] поперечная электрическая часть тока разбита по такому рецепту. Утверждается, что подобное разбиение удобно при рассмотрении проблемы обменных токов. Нам кажется сомнительной целесообразность такого разбиения, так как θ_i и λ_i содержат взаимно компенсирующиеся! продольные части, о чем мы сообщали в частной переписке Фрайру.

с разложением плотности распределения заряда. Величина же $\int \lambda_i d^3 \xi$ не продольна и не поперечна и, следовательно, должна быть разложена на поперечную и продольную части. Вспомним теперь, что с учетом формул (4), (6), (9) среднеквадратичный радиус по его определению обязан входить в член разложения (16), содержащий оператор $\delta_{jk} \nabla_j \nabla_k \equiv \Delta$. Поэтому в разложении (18) можно сохранить член, содержащий θ_i только при δ_{jk} , и, следовательно, соответствующие суммы двух первых комбинаций должны автоматически давать определение третьего поперечного вектора

$$\tau_i = \frac{1}{5} \theta_i - \frac{1}{6} \lambda_i = \frac{1}{10} [(\mathbf{j}\xi) \xi_i - 2\xi^2 j_i]. \quad (19)$$

Векторная часть редукции (18) теперь примет мультипольный характер:

$$\delta_{ij} \tau_k + \delta_{ik} \tau_j - 2\delta_{jk} \tau_i + 3\delta_{jk} \theta_i. \quad (20)$$

Из вида ее непосредственно следует, что найденный третий вектор определяет еще один (третий) дипольный момент и не может быть назван среднеквадратичным радиусом, т. е. поправкой на запаздывание. Определение связанного с τ_i момента удобно (см. разд. 3) ввести так:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{10} \int [\xi (\mathbf{j}\xi) - 2\xi^2 \mathbf{j}] d^3 \xi. \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что токи, соответствующие точечным диполям, $\mathbf{j} = d\delta(\xi)$ — элементарному линейному току и $\mathbf{j} = \text{rot } M\delta(\xi)$ — элементарному индукционному току (сжатое в точку колечко с круговым током) при подстановке в определение (21) приводят к $\mathbf{T} = 0$. Определение (18) естественно обращается в тождество при подстановке в (18) тока

$$\mathbf{j} = \text{rot rot } T\delta(\xi). \quad (22)$$

Если рассматривать ток $\mathbf{j} = \text{rot } M\delta(\xi)$ на торе, то этот ток течет по его параллелям. Ток (22) течет на торе по меридианам (см. рисунок).

Таким образом, геометрической моделью \mathbf{T} является тор с текущими на нем полоидальными токами. Направлен диполь \mathbf{T} по оси аксиальной симметрии тора так, как это указано на рисунке.

3. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ С ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Произведем мультипольное разложение непосредственно в лагранжиане взаимодействия с внешним полем

$$\mathcal{L} = \int (\mathbf{j}\mathbf{A} - \rho\phi) d^3r \quad (23)$$

системы точечных заряженных частиц, описывающихся плотностями тока и заряда:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e^{(\alpha)} \dot{\xi}^{(\alpha)} \delta(\mathbf{r} - \xi^{(\alpha)}) = \\ &= \sum_{\alpha} e^{(\alpha)} \dot{\xi}^{(\alpha)} \exp(\xi^{(\alpha)} \nabla) \delta(\mathbf{r}); \\ \rho &= \sum_{\alpha} e^{(\alpha)} \exp(\xi^{(\alpha)} \nabla) \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Здесь $\xi^{(\alpha)}$ — вектор заряженной частицы α , и для простоты будем считать $\sum_{\alpha} e^{(\alpha)} = 0$.

Если разложить экспоненту в ряд Тейлора, проинтегрировать по частям, перебросить дифференцирование на потенциалы A и Φ , то после простых преобразований можно получить формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(\alpha)}}{(n+1)!} (\xi^{(\alpha)} \nabla)^n \times \\ &\times \left[\xi^{(\alpha)} \mathbf{E}(0) + 2 \frac{n+1}{n+2} \mu \mathbf{B}(0) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где поля (и их производные) из-за $\delta(\mathbf{r})$ под интегралом (23) заданы в точке $\mathbf{r} = 0$, а магнитный дипольный момент $\mu = \frac{1}{2} (\xi \times \dot{\xi})$. В выражении (25) члены, начиная с квадрупольного, имеют шпур, не равные нулю. Если мы хотим, чтобы в переход $0 \rightarrow l$ давал вклад только 2^l -поль, надо обратить в нуль его шпур. Кроме того, член с магнитным полем, начиная с $n = 1$, содержит при каждом n члены с противоположными четностями. Разбивая произведение $(\xi \nabla) (\mu \mathbf{H})$ на симметричную и антисимметричную части, выделяя дипольные члены и сдвигая сумму, приведем (25) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{\alpha} e^{(\alpha)} [\xi^{(\alpha)} \mathbf{E} + \mu^{(\alpha)} \mathbf{B}] + \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(\alpha)}}{(n+2)!} (\xi^{(\alpha)} \nabla)^n \left\{ (\xi^{(\alpha)} \nabla) (\xi^{(\alpha)} \mathbf{E}) + \right. \\ &+ \frac{n+2}{n+3} [(\xi^{(\alpha)} \nabla) (\mu^{(\alpha)} \mathbf{B}) + (\mu^{(\alpha)} \nabla) (\xi^{(\alpha)} \mathbf{B})] + \\ &\left. + \frac{n+2}{n+3} (\xi^{(\alpha)} \times \mu^{(\alpha)}) \text{rot } \mathbf{B} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Первый член в фигурной скобке отвечает зарядовым мультиполям, второй, взаимодействующий с \mathbf{B} , — магнитным мультиполям, и оба начинаются с квадруполь. Третий член, объединяясь с производными по времени от шпуров зарядовых моментов, будет приводить к то-

роидным моментам. Продемонстрируем это на примере $n = 0$. Для простоты будем считать, что \mathbf{E} — чисто соленоидальное поле. При $n = 0$ последний член в (26) равен (индекс α опустим)

$$\frac{1}{2} \frac{2}{3} (\xi \times \mu) \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{6} [\xi \times (\xi \times \dot{\xi})] \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (27)$$

Октушольный электрический член равен ($n = 2$)

$$\frac{1}{6} \xi_i \xi_j \xi_k \nabla_i \nabla_j E_k. \quad (28)$$

Из него мы должны извлечь шпур, равный

$$\frac{\xi^2}{5} (\xi_i \delta_{jk} + \xi_j \delta_{ik} + \xi_k \delta_{ij}) \nabla_i \nabla_j E_k. \quad (29)$$

Вычтем его из октуполя и, ссылаясь на разд. 2, вспомним, что вклад в поперечную часть тока будет давать только последнее его слагаемое

$$\frac{1}{5} \xi^2 \xi \Delta \mathbf{E}. \quad (30)$$

Преобразуем этот член, воспользовавшись волновым уравнением $\Delta \mathbf{E} = \ddot{\mathbf{E}}$, а затем перебросим одну производную по времени и с учетом связи $\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ приведем его к виду

$$-\frac{1}{5} \frac{d}{dt} (\xi^2 \dot{\xi}) \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (31)$$

Складывая (27) и (31), получаем дипольный тороидный член в лагранжиане равным

$$-\frac{1}{10} [\xi (\dot{\xi} \dot{\xi}) - 2 \xi^2 \dot{\xi}] \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (32)$$

Из вида его следует, что тороидный диполь может взаимодействовать либо с $\operatorname{rot} \mathbf{B}$, либо с $\dot{\mathbf{E}}$, либо с внешним током $\mathbf{j}^{\text{внеш}}$.

Применяя данный метод разложения по точечным источникам и разбивая тензоры $\xi_i \xi_j \dots \xi_k$ на неприводимые, можно получить следующие формулы для зарядовой и токовой частей энергии взаимодействия W произвольной электромагнитной системы с внешним электромагнитным полем. Для W^{zap} имеем

$$W^{\text{zap}} = \int \rho \varphi d^3x = q\varphi + (\mathbf{d} \nabla) \varphi + Q_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi + \\ + \overline{r_q^{(2)}} \Delta \varphi / 6 + Q_{ijk} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \varphi + (\overline{r_d^{(2)}} \nabla) \Delta \varphi / 10 + \dots, \quad (33)$$

где $q = \int \rho d^3\xi$ — полный заряд системы; $\mathbf{d} = \int \rho \xi d^3\xi$ — зарядовый дипольный момент; $Q_{ij} = 1/2 \int (\xi_i \xi_j - \frac{\xi^2}{3} \delta_{ij}) \rho d^3\xi$ — зарядовый квадрупольный момент;

$$Q_{ijk} = \frac{1}{6} \int \left[\xi_i \xi_j \xi_k - \frac{1}{5} \xi^2 (\xi_i \delta_{jk} + \xi_j \delta_{ik} + \xi_k \delta_{ij}) \right] \rho d^3\xi$$

— зарядовый октупольный момент; $\overline{r_q^{(2)}}$ и $\overline{r_d^{(2)}}$ — среднеквадратичные радиусы заряда и диполя: $r_q^{(2)} = \int \xi^2 \rho d^3\xi$ и

$$\overline{r_d^{(2)}} = \int \xi^2 \xi \rho d^3\xi, \quad \text{а} \quad \Delta\varphi = -\rho_{\text{вн.ш.}}$$

Действуя тем же методом, можно получить разложение $W^{\text{ТОК}}$ в виде [7]

$$\begin{aligned} W^{\text{ТОК}} = & - \int \mathbf{j} A d^3x = \dot{\mathbf{d}} A - \mu [\nabla A] + \\ & + \frac{1}{2} \dot{Q}_{ij} (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i) + \overline{r_q^{(2)}} (\nabla A)/6 + \\ & + \dot{Q}_{ijk} \nabla_i \nabla_j A_k - \mu_{ij} \nabla_i [\nabla A]_j + \\ & + \overline{r_d^{(2)}} (\nabla) (\nabla A)/10 - T [\nabla [\nabla A]] - \dots, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\mu = \frac{1}{2} [\dot{\xi} \dot{\xi}]$ — магнитный дипольный момент системы; $\mu_{ij} = \frac{1}{3} \{ [\dot{\xi} \dot{\xi}]_i \xi_j + [\dot{\xi} \dot{\xi}]_j \xi_i \}$ — магнитный квадрупольный момент; $T = \frac{1}{10} \{ \xi (\dot{\xi} \dot{\xi}) - 2 \xi^2 \dot{\xi} \}$ — тороидный дипольный момент; $\mathbf{d} = \dot{\xi}$; $\overline{r_d^{(2)}} = 2 \xi (\dot{\xi} \dot{\xi}) + \xi^2 \dot{\xi}$ и т. д.

Из формул данного раздела и выражения (34) следует, что тороидный дипольный момент является единственной характеристикой, по энергии взаимодействия с которым можно измерить непосредственно ток смещения. Практически его можно было бы измерить по крутящему моменту малой тороидальной катушки, помещенной между обкладками конденсатора. Кстати говоря, эта система представляет собой электромотор третьего типа (под первыми двумя подразумеваем магнитный диполь, вращающийся в магнитном поле, и электрический диполь, вращающийся в электрическом поле).

4. О ВЫВОДЕ ФОРМУЛ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В КАНОНИЧЕСКОМ БАЗИСЕ

Итак, задача разложения $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ по мультипольным моментам и их радиусам сведена к разложению трех скалярных функций $\rho(\varphi)$, ψ и χ . Подходящей для этого системой базисных функций являются решения скалярного волнового уравнения Гельмгольца

$$F_{lmk}(\mathbf{r}) = f_l(kr) Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{35}$$

где $Y_{lm}(\mathbf{n})$ — обычные сферические гармоники, а $f_l(kr)$ — сферические функции Бесселя:

$$f_l(kr) = (2\pi)^{3/2} i^l I_{l+1/2}(kr) / \sqrt{kr}. \quad (36)$$

Разложение, например, зарядовой плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ при этом выглядит так:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty \sum_{l, m} (-ik)^l \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} \times \\ \times F_{lmk}(\mathbf{r}) Q_{lm}(k^2, t) k^2 dk. \quad (37)$$

Ввиду ортонормированности функций $F_{lmk}(\mathbf{r})$ определение $Q_{lm}(k^2, t)$ следует отсюда непосредственно.

Разложение зарядового мультипольного распределения (формфактора) $Q_{lm}(k^2, t)$ в ряд Тейлора по k^2 дает 2^l -польный зарядовый момент $Q_{lm}(0, t)$ и его средние $2n$ -степенные радиусы $\overline{r_{lm}^{(2n)}}(0, t)$. Определения их, так же как определения магнитных формфакторов $M_{lm}(k^2, t)$ [разложение функции ψ в (15)] и электрических поперечных формфакторов $E_{lm}(k^2, t)$ (разложение функции χ) приводить здесь не будем. Их вывод и определения даны в [7].

Посмотрим, что получается, если подставить в формулу (37) разложение $Q_{lm}(k^2, t)$ в ряд по степеням k^2 . Учитывая, что $f_l(kr)$ содержат $\sin kr$ и $\cos kr$, интегрирование по k в (37) действительно даст разложение плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в ряд по δ -образным функциям (точечным источникам), но уже на неприводимом базисе. Таким образом, задача мультипольной параметризации будет выполнена (ср. с разд. 1).

Напомним, что поперечные электрические моменты являются суммой двух независимых слагаемых (объяснение этого факта см. в [7]):

$$E_{lm}(\mathbf{k}^2, t) = \dot{Q}_{lm}(0, t) + \mathbf{k}^2 T_{lm}(\mathbf{k}^2, t), \quad (38)$$

где $\dot{Q}_{lm}(0, t)$ связаны с разложением $\dot{\rho}(\mathbf{j}_{||})$, т. е. продольно-скалярной части тока, и определяются в виде

$$\dot{Q}_{lm}(0, t) = \sqrt{4\pi l} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) r^{l-1} Y_{l-1m}^*(\mathbf{n}) d^3r. \quad (39)$$

Определение введенной здесь векторной сферической функции $Y_{l-1m}(\mathbf{n})$, так же как и векторов $Y_{l+1m}(\mathbf{n})$ и $Y_{lm}(\mathbf{n})$, приводить не будем. Их можно найти, например, в книгах [28], а также в [7]. Пользуясь формулами Ольсена, приведенными в [28а], легко установить, что вектор $r^{l-1} Y_{l-1m}(\mathbf{n})$ обладает замечательными свойствами. Он одновременно и продольен

$$\text{rot } r^{l-1} Y_{l-1m}(\mathbf{n}) = 0, \quad (40a)$$

и поперечен

$$\text{div } r^{l-1} Y_{l-1m}(\mathbf{n}) = 0, \quad (40b)$$

т. е. вырожден по этим свойствам, а также полюoidalен, т. е. представим в виде*

$$r^{l-1} Y_{ll-1m}(\mathbf{n}) = i \operatorname{rot} \hat{L} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \hat{L} = -i [\mathbf{r}\nabla]. \quad (41)$$

Именно поэтому в $\dot{Q}_{lm}(\mathbf{k}^2, t)$ и в $E_{lm}(\mathbf{k}^2, t)$, содержащих в своих определениях Y_{ll-1m} в качестве младшей гармоники, в длинноволновом пределе $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ выделяются моменты $\dot{Q}_{lm}(0, t)$!

Приведем определения тороидных распределений** и моментов (вывод см. в [7]):

$$T_{lm}(\mathbf{k}^2, t) = \frac{i(2l+1)!!}{(-ikr)^{l+2} \sqrt{4\pi} (2l+1)(l+1/l)} \times \\ \times \int \mathbf{j} \operatorname{rot} \left[f_l^*(kr) - \frac{(2\pi)^{3/2}}{(2l+1)!!} (-ikr) \right] \mathbf{Y}_{lm}^*(\mathbf{n}) d^3r; \quad (42a)$$

$$T_{lm}(0, t) = -\frac{\sqrt{4\pi l}}{2(2l+1)} \int \mathbf{j} r^{l+1} \left\{ \mathbf{Y}_{ll-1m}^*(\mathbf{n}) + \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{2l+3} \mathbf{Y}_{l+1m}^*(\mathbf{n}) \right\} d^3r = \\ = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{i}{2(l+1)(2l+3)} \int \mathbf{j} \operatorname{rot} \{ r^{l+2} L Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \} d^3r. \quad (42b)$$

Из определения (42б) видно, что $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ действительно свертывается с полюoidalным вектором, выражение же $T_{lm}(0, t)$, преобразованное к ортогональному базису, совпадает с определением \mathbf{T} в виде (21).

Тороидные моменты T_{lm} дают вклад в излучение El -типа, так же как и \dot{Q}_{lm} , но выше на два порядка по kr . Соответствующие общие формулы для вектор-потенциала излучения приведены в [7]. Отметим здесь очень важное обстоятельство: сравнивая определения $\dot{Q}_{lm}(0, t)$ (39) и $T_{lm}(0, t)$ (42б), видим, что второе («лишнее») слагаемое в первом определении (42б) тороидных моментов не позволяет считать их средними радиусами зарядовых моментов $\dot{Q}_{lm}(0, t)$!

Как следует из (38), тороидные мультипольные моменты $T_{lm}(t)$ по форме выглядят как малые поправки при $k \rightarrow 0$ к зарядовым мультипольным моментам того же ранга $\dot{Q}_{lm}(0, t)$. Однако в отличие от истинных поправок, таких как $\dot{Q}_{lm}^{(2n)}(t)$, равных нулю, если $Q_{lm}(-k^2, t) \equiv 0$, тороидные моменты, будучи независимыми параметрами, в этом случае не обращаются в нуль. Более того, тороидные моменты, вообще говоря, отличны от нуля, если $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ или $\dot{\rho}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$. Иными словами, существуют такие системы, для которых представитель семейства $T_{lm}(t)$ — главный или единственный член мультипольного разложения (см. введение и [7]). Поэтому мультипольные

* Единственность этого несингулярного вектора можно показать непосредственно, решая совместно дифференциальные уравнения (40а) и (40б).

** Второй вариант формулы (35а) в [7] неверен.

разложения [10, 11, 22], в которых приравниваются $E_{lm}(k^2) = \dot{Q}_{lm}(k^2)$, неверны даже в длинноволновом приближении. Рассмотрение с их помощью излучения указанных систем в длинноволновом приближении не учитывает сам эффект излучения. Пренебрежение $T_{lm}(t)$ по сравнению с $\dot{Q}_{lm}(t)$ аналогично пренебрежению высшими мультипольными моментами по сравнению с низшими, что, конечно, законно только в том случае, когда у системы низшие моменты существуют.

Из (38) видно, что структура поперечных электрических факторов $E_{lm}(k^2, t)$ не позволяет нормировать их обычным способом, как магнитные и зарядовые, так чтобы длинноволновое приближение при стремлении k к нулю давало статические мультипольные моменты.

Приведем также известное определение магнитных моментов

$$\begin{aligned} M_{lm}(0, t) &= -i \sqrt{\frac{4\pi l}{(2l+1)(l+1)}} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) r^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) d^3r = \\ &= \frac{1}{l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int [\mathbf{r}\mathbf{j}] \nabla r^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) d^3r. \end{aligned} \quad (43)$$

Оно нам понадобится в дальнейшем.

В заключение этого раздела следует отметить, что если бы мы, следуя, например [29], ограничились разложением лишь $\text{div } \mathbf{j}$ и $\text{rot } \mathbf{j}$ по регулярным решениям уравнения Лапласа $r^l Y_{lm}(\mathbf{n})$, то сразу потеряли бы и тороидные моменты и средние радиусы всех распределений. Дело в том, что система этих функций не замкнута,

$$\sum_{l, m} r^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) r'^l Y_{lm}(\mathbf{n}') \neq \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (44)$$

и, таким образом, мы не можем «разложить» $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ по этому базису в выражении (1). Поэтому сделанное в [29] утверждение о том, что задание моментов эквивалентно заданию функций ρ и \mathbf{j} , явно ошибочно. Например, для сферического конденсатора равны нулю все моменты, однако отличны от нуля средние радиусы распределения заряда. Только выполненное, по-видимому, впервые в [7] разложение плотностей ρ и \mathbf{j} по всем моментам и радиусам дает полную параметризацию электромагнитного 4-тока.

Предположим теперь, что среда не содержит ни магнитных, ни электрических зарядов, а описывается распределением макроскопической намагниченности $\mathfrak{M}(\mathbf{r}, t)$. Со времен Ампера известно, что вместо \mathfrak{M} можно ввести эффективные токи, называемые индукционными, с плотностью

$$\mathbf{j}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathfrak{M}(\mathbf{r}, t), \quad (c=1). \quad (45)$$

Заметим, что $\text{div } \mathbf{j}_{\mathfrak{M}} = 0$. Это указывает на отсутствие в среде свободных магнитных зарядов и предполагает, что намагниченность

среды возникает, скажем, за счет распределения элементарных (микроскопических) магнитных диполей.

Что мы получим, если заменим \mathbf{j} на $\mathbf{j}_{\mathcal{M}} = \text{rot } \mathcal{M}$ в определениях токовых мультипольных моментов \dot{Q}_{lm} , T_{lm} и M_{lm} [в формулах (39), (42б) и (43)]? Прежде всего очевидно, что все \dot{Q}_{lm} тождественно обратятся в нуль в силу условия (45), поскольку вихревой ток обращает в нуль интеграл (39). Введем теперь эффективную плотность распределения намагничённости

$$-\rho_{\mathcal{M}} = \text{div } \mathcal{M}. \tag{46}$$

Если теперь подставить $\mathbf{j}_{\mathcal{M}}$ в (43), нетрудно убедиться, что после соответствующего интегрирования по частям и использования (46), определение магнитных моментов M_{lm} превращается по форме в определение моментов Q_{lm} , в котором произведена замена $\rho \rightarrow \rho_{\mathcal{M}}$. Однако дуально-симметричная схема мультипольных разложений при этом не возникает, поскольку $\text{div } \mathbf{j}_{\mathcal{M}} \neq -\rho_{\mathcal{M}}$, а потому, как в обычной электродинамике, $M_{00} = 0$.

Любопытней ситуация с T_{lm} . Подставляя (45) в определение (42б), легко преобразовать последнее к виду

$$T_{lm}^{\text{инд}}(t) = -i \sqrt{\frac{4\pi l}{(2l+1)(l+1)}} \int r^l \mathbf{Y}_{lm}^*(\mathbf{n}) \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) d^3r. \tag{47}$$

Вид формулы совпадает с определением M_{lm} от конвекционных токов, в котором сделана замена $\mathbf{j} \rightarrow \mathcal{M}$. Отсюда следует, например, что

$$\mathbf{T}^{\text{инд}} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \mathcal{M}] d^3r. \tag{48}$$

Легко видеть, что при таком происхождении геометрический образ тороидного диполя — это просто замкнутая круговая цепочка, состоящая из последовательно примыкающих друг к другу элементарных магнитов. При этом их внутреннее магнитное поле имеет ту же кольцевую конфигурацию, что и поле в согнутом в тор соленоиде. В отличие от $T_{lm}^{\text{зар}}$ моменты $T_{lm}^{\text{инд}}$ были введены еще Блаттом и Вайскопфом [8]. Обозначаются они обычно символом Q'_{lm} и носят название наведенных электрических моментов [11].

Все эти замечания довольно тривиальны, но способствуют геометрическому пониманию тех громоздких, неудобно сформулированных определений мультипольных формфакторов и моментов, которые приводятся в книгах и обзорах.

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКОГО И ПЕРЕМЕННОГО ТОРОИДНОГО ДИПОЛЯ

Часть свойств дипольного момента, создаваемого полоидальными токами на торе, обсуждена в [7]. Кратко сформулируем их здесь. Прежде всего тороидный диполь не имеет внешних статических полей.

Действительно, магнитные поля диаметрально противоположных элементарных кольцевых токов, текущих на торе, компенсируют друг друга вдали от тора (т. е. в точечном приближении). Таким образом, создаваемое тороидом магнитное поле сосредоточено целиком внутри «обмотки» и взаимодействовать тороид может только с внешним током. Если линия тока проходит через точку, в которой находится элементарный тороидный диполь, последний будет ориентироваться по току (или в электромагнитном поле излучения — по токам смещения $\dot{\mathbf{D}}$).

Поскольку простейшая модель тороидного диполя — обычная соленоидальная катушка, согнутая в тор, легко найти, чему равен тороидный дипольный момент тора с малым радиусом r и большим R , по поверхности которого текут полоидальные токи с плотностью j . Вместо прямого интегрирования в формуле (21) воспользуемся аналогией с вычислением магнитного момента тонкого колечка, в котором текут объемные токи плотности j . С помощью соответствующих формул, взятых, например, из [30], нетрудно установить, что магнитный момент замкнутого тока

$$\mathbf{M} = j\mathbf{sS} = I\mathbf{S}, \quad (49)$$

где \mathbf{S} — векторная величина поверхности, опирающейся на контур проводника с сечением s , а I — текущий по нему линейный ток. Очевидно, ввиду геометрической аналогии можно написать подобную формулу для тороидного дипольного момента T тороидального соленоида, заменив лишь в (49) I магнитным потоком Φ внутри соленоида, т. е.

$$\mathbf{T} = \Phi\mathbf{S} = B_s\mathbf{S}. \quad (50)$$

Магнитное поле B в тороидальном соленоиде нетрудно вычислить (см., например, [12]):

$$B = \frac{2NI_0}{r}, \quad (51)$$

где R — большой радиус соленоида, а I_0 — ток в его обмотке. Учитывая, что $NI_0 = I$ — полный полоидальный ток на поверхности соленоида, $s = \pi r^2$, $S = \pi R^2$, а объем тора $V = 2\pi^2 Rr^2$, легко найти, что статический тороидный дипольный момент тороидальной катушки

$$T = JV. \quad (52)$$

Возможно, эта формула окажется полезной как оценочная в макроскопической электродинамике, например для оценки глобального взаимодействия магнитосферы планеты с токами, подобными солнечному ветру, или в электродинамике нейтронных звезд.

Рассмотрим теперь, как задача об излучении связана с разложением тока по мультипольным моментам. Напомним, что мультипольное разложение возникло как процедура нахождения параметров системы зарядов и токов, определяющих поле излучения системы

в волновой («дальней») зоне. Ввиду поперечности электромагнитных волн вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ вдали от источников подчиняется дополнителъному условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Отсюда следует согласно формуле (15), что мультипольные поля излучения * могут быть только двух типов: электрического A_{lm}^{el} и магнитного A_{lm}^m . Различаются они свойствами четности при пространственных отражениях. Возникает, однако, затруднение: казалось бы, поперечное поле \mathbf{A}_\perp должно возникать только за счет поперечной части тока \mathbf{j}_\perp , связанной с магнитными и, как мы обнаружили, тороидными моментами. Мы же знаем, точнее, привыкли к тому, что поле излучения возникает и в результате изменений $\rho(\mathbf{r}, t)$, например, за счет $\dot{\mathbf{d}}(t)$. Этот вопрос был решен в свое время в классической электродинамике Герцем обходным путем. В калибровке Лоренца $-\dot{\phi} = \text{div } \mathbf{A}$ предполагается, что поле ϕ связано с вспомогательным диполем \mathbf{Z} (см., например, [22, 23])

$$\phi = \text{div } \mathbf{Z} \text{ (Ansatz von Hertz)}. \tag{53}$$

Тогда скалярное волновое уравнение для $\dot{\phi}$ можно переписать в виде

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \dot{\phi} = -\dot{\rho} = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \text{div } \mathbf{Z} = \text{div } \mathbf{j}, \tag{54}$$

а условие Лоренца приводит к связи

$$\text{div } \mathbf{A} = -\dot{\phi} = -\text{div } \dot{\mathbf{Z}}. \tag{55}$$

Находя с помощью (54) $\text{div } \mathbf{Z}$ в виде известного волнового решения скалярного уравнения, а затем «отменяя» операцию div и в левой и в правой частях, получаем

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{R}) &= \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c}\right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3r \simeq \\ &\simeq \frac{1}{R_0} \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c}\right) d^3r \rightarrow \frac{\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0}. \end{aligned} \tag{56}$$

Поскольку $\dot{\mathbf{d}}$ в этом приближении — характеристика точечного диполя, находящегося, скажем, в начале координат, $\text{div } \mathbf{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = 0$, и мы действительно нашли вектор-потенциал поля излучения. На это указывает также его спадание как $1/R$ с расстоянием.

Отсюда следует, что в точечном (длинноволновом) пределе, соответствующем переходу к приближенному равенству в формуле (56), момент $\dot{\mathbf{d}}$ естественно удовлетворяет свойствам и продольности, и поперечности, так как теряет зависимость от вектора \mathbf{R} . Поэтому он

* Не путать с мультипольными моментами в разложении тока (см. подробности разложения \mathbf{A} в [7] (разд. 7, 8) и в монографиях [10, 11]).

может возникать в результате перехода к длинноволновому приближению в мультипольных разложениях как \mathbf{j}_{\parallel} , так и \mathbf{j}_{\perp} . Это выглядит тривиально, если перейти в пространство волновых векторов \mathbf{k} . Тогда условия продольности и поперечности $\mathbf{k}\mathbf{j}(\mathbf{k}, t) = 0$ и $\mathbf{k} \times \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) = 0$ выполняются одновременно, когда $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$. Это, однако, весьма грубые рассуждения, и годятся они только для диполя \mathbf{d} . К тому же это объяснение формальное, так как в конкретных задачах $|\mathbf{k}|$ фиксирован и параметром малости может служить лишь безразмерная величина, например kr_0 , где r_0 — характерный размер электромагнитной системы. Поэтому нам нужно реальное соотношение, связывающее \mathbf{j}_{\perp} и \mathbf{j}_{\parallel} в координатном пространстве. Это соотношение было предложено еще в 1959 г. в работе [31], а обоснование и обсуждение его идет до сих пор (см., например, [32, 33], а также [7]).

То, что такое соотношение должно существовать, следует из самого смысла разложения по моментам. Вспомним, что моменты — численные (тензорные) характеристики электромагнитной системы, возникающие при стягивании ее геометрических размеров к нулю и устремлении величин ее зарядов и токов к бесконечности. При этом плотность распределения зарядов и токов стремится к бесконечности [ср. с (3)], и условию на границе системы Σ , скажем, $\mathbf{j}_{\Sigma} = 0$, можно удовлетворить, только приравняв составляющие

$$\mathbf{j}_{\perp} = -\mathbf{j}_{\parallel} \quad (57)$$

так, чтобы по-прежнему $\mathbf{j}_{\Sigma} = 0$.

Условие (57) приводит к равенству низших моментов от \mathbf{j}_{\perp} и \mathbf{j}_{\parallel} (см., например, соответствующие выводы в [31] или [32]), и, таким образом, в разложении \mathbf{j}_{\perp} появляются производные по времени от зарядовых моментов. Однако тороидные моменты и средние $2n$ -степенные радиусы скалярно-продольных распределений, чувствительные к деталям структуры системы внутри поверхности Σ , различны для \mathbf{j}_{\parallel} и \mathbf{j}_{\perp} , так как внутри системы условие (57) не выполняется. Желая ознакомиться с более строгими обсуждениями соотношения (57) отсылаем к работам [32, 33].

Нетрудно сообразить, каковы будут свойства тороидной дипольной антенны. Поскольку она является замкнутой системой, электрическое поле (точнее, ток смещения $\dot{\mathbf{D}}$) может отрываться от нее только при весьма резких изменениях в ней тока. В противном случае установится квазистационарный процесс и поле будет втягиваться (возвращаться) в обмотку тора за счет ее самоиндукции.

Интенсивность излучения тороидной дипольной антенны получим с помощью формулы, определяющей $E1$ -излучение с учетом существования \mathbf{T} :

$$\mathbf{E} = \dot{\mathbf{d}} + \omega^2 \mathbf{T} \quad (c = 1). \quad (58)$$

Известно, что мощность (интенсивность) излучения зарядового диполя \mathbf{d} (точнее, линейной антенны длиной $|\mathbf{d}|$ с током $I =$

$= I_0 \sin \omega t$, линейно спадающим к ее концам; см., например, [11, с. 301]) в длинноволновом приближении, $\omega d \ll 1$, пропорциональна:

$$P_d \sim |\dot{\mathbf{d}}|^2 \sim \omega^4 q^4 l^2 = \frac{q^2 \omega^2}{\lambda^2} l^2 = I_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2, \quad (59)$$

где ток I_0 связан с изменением эффективных зарядов в антенне $I_0 = dq/dt$, а $\lambda \sim 1/\omega$ — длина излучаемой антенной волны.

Из вида выражений (58) и (59) формально следует, что мощность излучения тороидного диполя T можно оценить следующим образом:

$$P_T \sim \omega^2 \omega^4 T^2 \sim \frac{1}{\lambda^6} I_0 (Rr^2)^2 = I_0 \left(\frac{Rr^2}{\lambda^3} \right)^2, \quad (60)$$

где использована формула (52) для статического момента \mathbf{T} . Таким образом, в принципе тороидный диполь является двухпараметрической антенной, т. е. антенной, зависящей от двух ее геометрических параметров. Заметим, что тороидный диполь мог бы быть реально эффективной антенной лишь в коротковолновом режиме (при $\omega R \gg 1$) в соответствии с замечанием, с которого мы начали обсуждение вопроса об излучении \mathbf{T} .

Угловое распределение (параллельно ориентированных) излучателей d и T , естественно, одинаково. Точные формулы для вектор-потенциалов излучения точечными источниками d и T приведены выше. Они оправдывают использованные в (59) и (60) зависимости P_d и P_T от частоты излучения ω .

Приведем здесь также формулы для напряженностей полей излучения произвольной системы с точностью до членов по kr , включающих вклад тороидного диполя:

$$\begin{aligned} H_i = \frac{1}{R_0} \left[\dot{\mathbf{d}}_i + \ddot{Q}_{ik} n_k + [\dot{\mathbf{M}}\mathbf{n}]_i + \ddot{Q}_{ijk} n_j n_k + \right. \\ \left. + \ddot{T}_i + \varepsilon_{ijk} \ddot{M}_{jl} n_k n_l \right], \quad \mathbf{E} = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|} \end{aligned} \quad (61)$$

и для интенсивности излучения с точностью до членов $\sim (kr)^5$ включительно:

$$I = \frac{2}{3} (\dot{\mathbf{d}})^2 + \frac{1}{20} \ddot{Q}_{ik}^2 - 2\dot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathbf{T}} + \frac{2}{3} \dot{\mathbf{M}}^2. \quad (62)$$

В таком виде эти формулы были получены недавно из соображений инвариантности моментов относительно галилеевых сдвигов начала координат (без ссылки на геометрический образ \mathbf{T}_1) [34].

Если источник излучения устроен так, что он не имеет зарядовых и магнитных дипольного и квадрупольного моментов, то доминирующим излучением такого источника будет излучение $E1$ -типа, создаваемое его тороидным дипольным моментом. Таким свойством обладает тор с переменным током.

6. ТОРОИДНЫЕ МОМЕНТЫ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В АТОМАХ

В классической электродинамике определенную геометрически простую конфигурацию зарядов или токов можно описать приближенно моментом мультипольности l . Токи электромагнитных переходов квантовых систем имеют довольно сложную структуру, и при их мультипольном разложении обычно появляются все моменты. Поэтому в практических расчетах вероятностей переходов обычно переходят к длинноволновому приближению и ограничиваются вкладами только низших моментов.

Поскольку вклады T_{lm} в переходы электрического типа содержат дополнительный фактор $(kr)^2$ по сравнению с вкладами \dot{Q}_{lm} , вкладами T_{lm} в большинстве случаев можно пренебречь. Существенными они становятся тогда, когда, например, становится грубым длинноволновое приближение ($kr \lesssim 1$). Такая ситуация возникает при рассмотрении рентгеновских переходов в тяжелых атомах. Если рассмотреть для простоты переход $1S \rightarrow 2P$ в водородоподобном ионе, то с учетом вклада тороидного диполя вероятность перехода пропорциональна

$$W_{2P1S} \sim |\dot{\mathbf{d}}| \left(1 + \frac{\hbar\omega_{1S2P}}{mc^2} \right) = |\dot{\mathbf{d}}|^2 \left(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{3} \right). \quad (63)$$

Отсюда видно, что поправка на тороидный дипольный момент (и его радиусы) для тяжелых элементов может достигать десятков процентов. Эти поправки станут еще существенней для переходов на более высокие уровни или для процессов ионизации [когда $\hbar\omega$ заменяют в (63) потенциалом ионизации I], а также для процессов многофотонной ионизации (когда $n\hbar\omega \simeq I$, где n — число квазистационарных уровней, создаваемых в атоме внешним переменным электрическим полем). Аналогичные поправки надо учитывать в задаче о расщеплении уровней в интенсивном электрическом поле (штарк-эффект в переменном поле). Этот эффект был впервые рассмотрен Д. И. Блохинцевым в 1933 г. [35], а возможность его экспериментального изучения появилась лишь с созданием достаточно мощных одномодовых лазеров.

Как известно, дополнительная энергия атомов в однородном электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях, равная соответственно

$$\Delta W_{\text{эл}} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}; \quad (64)$$

$$\Delta W_{\text{маг}} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}, \quad (65)$$

приводит к расщеплению спектральных линий (эффекты Штарка и Зеемана). Аналогично существование дополнительной энергии атомов в однородном внешнем токе, равной

$$\Delta W_{\text{ток}} = -\mu_0 \mathbf{T} (\mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}), \quad (66)$$

также приводит к расщеплению спектральных линий. В (66) наряду с внешним током проводимости j стоит также внешний ток смещения \dot{D} , который взаимодействует с тороидным дипольным моментом T так же, как и j .

Например, атомы и ионы плазмы в газоразрядной трубке взаимодействуют таким образом с протекающим в плазме током.

Как мы отмечали ранее, контактное взаимодействие атома (иона) с током в плазме может быть в принципе детализировано и затем выражено в терминах потенциалов Льенара — Вихерта, описывающих поля носителей тока. Аналогичное взаимодействие (с током смещения) возникает и в том случае, когда атомы или ионы попадают в быстропеременное электрическое поле (быстрый пролет сквозь конденсатор, мощное высокочастотное электромагнитное поле).

Тороидный эффект, обусловленный неоднородностью и нестационарностью поля, возникает практически всегда наряду с эффектами Штарка и Зеемана, хотя его наличие и величина не зависят от последних.

Расщепление спектральных линий в результате «тороидного» взаимодействия, как и эффект Штарка, вообще говоря, — эффект второго порядка теории возмущений, и лишь для водорода (и водородоподобных ионов) имеется эффект первого порядка из-за вырожденности спектра по орбитальному квантовому числу. Тороидный эффект интересно сравнить с эффектами Штарка и Зеемана, например, для перехода из первого возбужденного в основное состояние атома водорода. Расщепление спектральных линий в этих случаях оцениваются соответственно по формулам

$$\Delta W_{эл} = Zea_0E; \Delta W_{маг} = \mu_0B; \Delta W_{ток} = \mu_0a_0j, \quad (67)$$

где a_0 — боровский радиус; μ_0 — магнетон Бора. Нетрудно предложить идею эксперимента для измерения тороидного эффекта, однако реальные измерения могут быть затруднены, поскольку этот эффект возникает на фоне эффектов Штарка или Зеемана.

Описанные расщепления за счет тороидных моментов возникают лишь в переходах с изменением четности. Если учесть нарушение P -инвариантности, вызываемое наличием слабых взаимодействий, то в первом порядке по константе G возникает расщепление термов всех атомов [36]. Однако из-за малости константы слабых взаимодействий этот эффект значительно меньше указанных выше эффектов второго порядка (в α/G раз).

Следует отметить, что поправки от переходного тороидного момента могут оказаться большими, например при расчете экситонных переходов в полупроводниках, где масса электрона становится эффективной и может понижаться на порядки и более. Учет высших мультиполей важен также при нахождении влияния внутреннего поля на спектры молекулярных кристаллов [37].

В заключение этого раздела отметим, что именно тороидный дипольный момент дает известную «поправку на запаздывание» (см.,

например, [38]) к правилу сумм Томаса — Райхе — Куна. На это обстоятельство было указано в [39]. Первая поправка к матричному элементу дипольного оператора возникает, если кроме единицы в разложении $\exp(ikr)$ учитывается член $(kr)^2$. Например, если фотон распространяется вдоль оси z и поляризован вдоль оси y , поправки на запаздывание к силе осциллятора f_{0n} равны:

$$f_{0n}^R = -\frac{2m\omega}{\hbar c^2} (yz^2)_{0n} (y)_{0n}. \quad (68)$$

Для основного S -состояния поправки к сумме сил осцилляторов можно найти с помощью выражения

$$\sum_n f_{0n}^R = -\frac{1}{mc^2} \left(z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{00} = -\frac{1}{15mc^2} \left(r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + 4r \frac{dV}{dr} \right)_{00}, \quad (69)$$

где $V(r)$ — любой потенциал, коммутирующий с радиусом-вектором \mathbf{r} . Известно [38, 40], что именно этот член деструктивно интерферирует с вкладом зарядового квадруполья. В [39] показано, что поправка (69) возникает за счет интерференции зарядового и тороидного моментов [ср. с интерференционным членом в формуле (62)]. Однако кроме конвекционной части тороидного момента поправки к правилу сумм могут возникать и от его индукционной части. В [39] приведена полная формула для оператора тороидного дипольного момента

$$\mathbf{T} = \frac{i}{5} r^2 \nabla + \frac{k^2}{5} \left[\mathbf{r} \times \left(g_1 \mathbf{L} + \frac{5}{2} g_\sigma \boldsymbol{\sigma} \right) \right]. \quad (70)$$

Следует сказать, что в ряде работ орбитальную часть этого оператора ввели по аналогии с его «наведенной» спиновой частью, как, например, в [40], поскольку не было известно общее определение тороидного дипольного момента (21). В заключение данного раздела отметим также, что вклад тороидного дипольного момента может оказаться существенным и в более сложных правилах сумм, таких как в работе [41].

7. О ВКЛАДЕ ТОРОИДНЫХ МОМЕНТОВ В ВЕРОЯТНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ В ЯДРАХ

Замена $E_i(k^2)$ на $kQ_i(k^2)$, часто практикующаяся при расчете ядерных переходов (теорема Зигерта), в ряде случаев может не давать нужной точности. Тогда надо учитывать высшие члены в разложении $E_i(k^2)$, т. е. в первую очередь $T_i(k^2)$. Такая ситуация может возникать при рассмотрении γ -переходов в тяжелых ядрах.

Известно, что в тяжелых ядрах в силу структурных особенностей участвующих в переходах состояний интенсивности некоторых переходов оказываются сильно подавленными. Так, например, в переходе $^{175}\text{Lu} \left(\frac{9}{2}^- \frac{9}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^+ \frac{7}{2}^+ \right)$ интенсивность $E1$ -мультиполя подавлена настолько, что вклад следующего по старшинству мультиполя $M2$

оказывается аномально большим (см., например [42]): составляет примерно 20% (расчеты в модели Нильссона, см. [18] дают удовлетворительное согласие с экспериментом для вероятности момента M_2 , в то время как вероятность момента Q_1 в этой модели на два порядка превышает его экспериментальное значение). Из вида формул (61) и (62) и сделанного после них замечания следует, что при расчете заторможенных $E1$ -переходов необходимо учитывать вклад момента T_1^* . Тогда вероятность мультипольного перехода $E1$ оценивается по формуле

$$E1 \sim \dot{Q}_1^2 + 2k^2 \dot{Q}_1 T_1 + k^4 T_1^2, \quad (71)$$

и вклад последних двух членов для указанного перехода в ^{175}Lu достигает почти 40% [18]. Даже если бы вклад $M2$ в данном переходе составлял всего 1%, вклад тороидной части составил бы примерно 10%. Отсюда можно вывести правило: если в таблицах электромагнитных переходов в ядрах встречаются переходы, в которых вклад $M2$ больше или порядка 1%, при расчете таковых следует учитывать вклад, связанный с моментом T_1 . Заметим, однако, что вклад T_1 может существовать и в переходах, где $M2$ запрещено правилами отбора, например в переходе $^{19}\text{F} \left(\frac{1^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} \right)$.

Отметим, что тороидные токи ядерных переходов фактически давно изучались в явлении внутренней конверсии γ -квантов. Действительно, в основе конверсии лежит взаимодействие двух токов — электронного, с известными свойствами, и изучаемого переходного тока ядра. Как мы уже знаем, именно тороидная часть параметризованного тока взаимодействует с внешним током, в данном случае с электронным. Введенные в [19a] ядерные параметры проникновения по сути дела совпадают с нашим определением тороидных моментов. Недавно в работе [19б] были извлечены из экспериментальных данных по внутренней конверсии тороидные моменты переходов нескольких атомных ядер. В единицах (ЯМ)·фм они (по абсолютной величине) равны [19б]: $4,0 \pm 1,0$; $3,0 \pm 0,4$; $4,5 \pm 0,5$; $2,1 \pm 0,3$; $1,6 \pm 0,4$ для переходов ^{177}Lu (150 кэВ), ^{176}Lu (396 кэВ), ^{181}Ta (6,21 кэВ), ^{177}Hf (321 кэВ), ^{233}Pa (84,3 кэВ) соответственно и меньше для других ядер. Экспериментальные значения вклада тороидных распределений в вероятность γ -излучения равны соответственно $(10 \pm 2)\%$; $(-17 \pm 2)\%$; $(0,20 \pm 0,02)\%$; $(-18 \pm 2)\%$; $(1,9 \pm 0,3)\%$.

Напомним теперь, что изучение заторможенных переходов способствовало доказательству существования слабых нуклон-нуклонных взаимодействий (см., например, обзор [43]). Дело в том, что в подавленном переходе с регулярным (разрешенным) мультиполем $E1$

* Этот вывод можно сделать также при сравнении более наглядных формул (6) и (7) работы [18] (ввиду подобия структуры и одинакового порядка по kr операторов \hat{T}_1 и \hat{M}_2).

эффективно смешивается малый нерегулярный мультиполь $\tilde{M}_1 (\sim G_F)$ за счет P -нечетных нуклон-нуклонных взаимодействий. При этом, как известно, излучаемый в переходе γ -квант оказывается циркулярно поляризованным. Коэффициент поляризации P_γ с учетом вклада тороидного момента выглядит в рассматриваемом случае так:

$$P_\gamma = \frac{2}{1 + \left| \frac{M_2}{\dot{Q}_1 + k^2 T_1} \right|^2} \frac{\tilde{M}_1}{\dot{Q}_1 + k^2 T_1}. \quad (72)$$

Видим, что в принципе если знаки у \dot{Q}_1 и T_1 противоположные, то от их относительной величины зависит знак P_γ , определяющий какой будет циркулярная поляризация γ -кванта — левой или правой. При сравнении экспериментальных значений P_γ с теоретическими в формуле (72) рассчитывают только \tilde{M}_1 , а значения $\left| \frac{M_2}{E_1} \right|^2$

и $\sqrt{|\dot{Q}_1 + k^2 T_1|^2}$ обычно берут из (независимых) экспериментов. Это, однако, таит в себе определенную опасность. Следовало бы делать теоретический расчет всех моментов в правой части (72). Во-первых, это позволяло бы определить теоретический знак P_γ . Во-вторых, ядерные модели при расчете электромагнитных переходов могут давать, например, неплохое согласие с экспериментом для моментов, определения которых включают спиновые операторы, и плохое — для моментов, не зависящих от спина ($\dot{Q}_1 \sim \dot{\mathbf{r}}$). Поэтому для того чтобы быть уверенными в том, что, рассчитывая \tilde{M}_1 , мы не ошибаемся в ядерной части, нам надо подобрать модель ядра, дающую удовлетворительные значения величин $\left| \frac{M_2}{\dot{Q}_1 + k^2 T_1} \right|^2$ и $|\dot{Q}_1 + k^2 T_1|^2$.

Из вида формулы $E(k^2) = -i \omega Q_1 + k^2 T_1$ следует, что в рассеянии электронов на ядрах при малых возбуждениях ω , но больших передачах k^2 может возникнуть ситуация, когда необходим учет тороидных моментов рассматриваемого перехода [44].

Введем одночастичные операторы $E1$ -перехода в виде

$$E_1 = -i \omega Q_1 + k^2 T_1 = -i \omega g + \mu_0 k^2 \left\{ i \frac{r^2}{5} \nabla + \mathbf{r} \times \left[\frac{g_I \mathbf{L}}{5} + \frac{g_\sigma \boldsymbol{\sigma}}{2} \right] \right\} \quad (73)$$

и одночастичный оператор магнитного квадрупольного перехода

$$M_{2m} = \mu_0 k^2 \left(g_\sigma \boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3} g_I \mathbf{L} \right) \nabla (r^2 Y_{2m}^*) \quad (74)$$

в общепринятых обозначениях (см., например, [8] или [38]).

Ввиду того что T_1 и M_2 — одного порядка по kr , числовые значения их вкладов могут быть близки.

Теперь заметим, что ввиду существования тороидных моментов структура сечения рассеяния электронов на ядрах изменится. Так,

в случае перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$ сечение приобретает вид

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Mott}} \frac{k^2}{2} \left\{ Q_1^2 + \frac{2}{5} k^2 \left(\frac{1}{2} + \text{tg}^2 \theta/2 \right) \left(T_1^2 + \frac{3}{5} M_2^2 \right) \right\}. \quad (75)$$

Из формулы (75) видно, что в данном случае традиционное мнение о возможности разделения вкладов зарядовых и магнитных моментов по угловым распределениям неверно. Если игнорировать факт существования T_1 , то попытки оценить M_2 по величине сечения (75) при больших значениях $\text{tg}^2 \theta/2$ приводили бы к завышению M_2 примерно вдвое. В работе [44] разобраны все возможности (полный опыт) проведения действительно раздельного измерения моментов перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$. Рассчитаны также все формфакторы перехода $3/2^- \rightarrow 1/2^+$ ядра ${}^9\text{Be}$ в рамках оболочечной модели. Заметим, что ситуация, аналогичная рассмотренной, возникает в случае электромагнитных распадов частиц с конверсией γ -квантов (например, $N_{1520}^{*+} \rightarrow pe^-e^+$). Она даже усугубляется здесь из-за большого значения параметра $kr_0 \sim (M_{N^{**}} - m_p)/(M_{N^{**}} + m_p)$.

Естественно, что тороидные моменты будут вносить вклад в величину гигантских электрических мультипольных резонансов. Оценки этих вкладов были сделаны в пионерской работе [45] с помощью гидродинамической модели ядра, в которой ядро обладает модулем кручения, описывающим сопротивление смещениям сдвига. В такой системе возникают вихревые тороидные колебания, дающие тороидный дипольный резонанс в области энергий 50—70 $A^{1/3}$ МэВ. Изучение вихревых, а также спиновых волн в атомных ядрах было бы чрезвычайно полезным, например, для установления изотоп-спиновой структуры ядерных сил.

8. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СОСТАВНОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ И ВОЗМОЖНОСТЬ РАЗДЕЛЕНИЯ ВКЛАДОВ ЗАРЯДОВОГО И ТОРОИДНОГО ДИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

Для системы двух частиц с одинаковыми массами, например $N\bar{N}$ или $N\bar{N}$, операторы \dot{Q} , \mathbf{T} и \mathbf{M} в с. ц. и. записываются следующим образом [20]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -\frac{1}{M_N} (e_1 - e_2) \mathbf{p}; \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{10M_N} (e_1 - e_2) \frac{\mathbf{r}^2}{4} \mathbf{p} - \mu_0 \frac{1}{4} \mathbf{r} \times \\ &\times \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{2}{5} \frac{g_1 - g_2}{2} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \right]; \\ \mathbf{M} &= \mu_0 \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{g_1 + g_2}{2} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}$ — относительные координата и импульс; μ_i — спиновый, g_i — орбитальный магнитные моменты i -й частицы в ядерных магнетонах μ_0 .

Чтобы проиллюстрировать возможность разделения вкладов зарядового и тороидного дипольных моментов, рассмотрим конкретную адронную систему $\bar{p}n$ ($T = 1$, $T_3 = -1$), в которой происходит переход электрического типа ${}^{33}P_1 \rightarrow {}^{31}S_0$ [20]. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= -e; & \mu_1 + \mu_2 &= -\mu_p + \mu_n; \\ \mu_1 - \mu_2 &= -\mu_p - \mu_n; & g_1 + g_2 &= -1. \end{aligned} \quad (77)$$

Поскольку оператор зарядового диполя не зависит от спина [см формулу (76)] в рассматриваемом нами переходе (переход с изменением спина $S_i = 1 \rightarrow S_f = 0$) зарядовый диполь автоматически выпадает. Таким образом, мы имеем $E1$ -переход, который идет исключительно за счет оператора тороидного дипольного момента. Анализируя далее правила отбора по спину, видим, что (по той же причине) в матричном элементе рассматриваемого перехода выпадают также радиальная и орбитальная (оператор $[\mathbf{r} \times (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)]$) части тороидного момента. Кроме того, в данном случае $S_i = 1 \rightarrow S_f = 0$ выпадает также оператор полного спина $\sigma_1 + \sigma_2$. И, таким образом, в $E1$ -переходе ${}^{33}P_1 \rightarrow {}^{31}S_0$ ($\Delta S = 1$) выживает только оператор $\sigma_1 - \sigma_2$, т. е. переход идет исключительно за счет спиновой части оператора тороидного момента.

Итак, из приведенного примера следует, что правила отбора (в данном случае по спину) могут разделить вклады зарядового и тороидного моментов (в рассмотренном простейшем примере вклад зарядового диполя просто отсутствует и работает лишь какая-то часть тороидного момента).

Вклады тороидных дипольных моментов в электрические переходы могут быть значительными также в системах типа кваркония, например в переходах $E1$ -типа в чармонии $\Psi'(3684 \text{ МэВ}) \rightarrow \chi_J + \gamma$ (${}^3S_1 \rightarrow {}^3P_J$). Нами были получены оценки с использованием простых осцилляторных функций, дающие вклады в вероятности переходов до 10%. Это, по-видимому, оценка снизу, так как потенциал, удерживающий c -кварки в чармонии, стягивает их сильнее, нежели гармонический.

Потенциальный механизм несохранения четности в адронных системах позволяет оценить соответствующие эффекты в излучении квазиядерной системы. Например, из-за смешивания слабыми взаимодействиями $M1$ -перехода с $E1$ -переходом ${}^{33}P_1 \rightarrow {}^{31}S_0$, идущего за счет тороидного диполя, циркулярная поляризация γ -кванта может достигать $P_\gamma \sim 10^{-6}$.

С помощью формулы (76) и нарушающих четность потенциалов можно оценить ядерный тороидный дипольный момент дейтрона. Результат совпадает с оценкой, приведенной в [9]. Заметим, что формулой (76) для тороидного диполя пользоваться удобнее, чем определением «анополя», $\mathbf{a} \sim \int [\mathbf{r}^2 \mathbf{j} d^3r$, так как в (76), как и в (21), автоматически исключается вклад продольной части тока.

9. ТОРОИДНЫЕ МОМЕНТЫ И НАРУШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЙ

В квантовой релятивистской теории электромагнитные свойства частицы задаются матричными элементами оператора 4-тока. Эти матричные элементы можно представить через ограниченное число формфакторов — феноменологических инвариантных функций скалярных переменных, не зависящих от произвола в выборе системы координат. В специальных системах отсчета эту задачу можно решить в неявно ковариантном виде с помощью формализма мультипольных разложений (см. [7, ч. II]). Таким образом, для частицы со спином s в локальной теории поля возникает три набора формфакторов, включающих тороидные.

Закон преобразования оператора тока при пространственных и временных отражениях (P и T) накладывает дополнительные правила отбора и ограничения на формфакторы (в общем виде они сформулированы в [7]). Действительно, если в классической электродинамике ток может обладать, вообще говоря, любым мультипольным моментом, то в квантовом случае (поскольку операторы мультипольных моментов — спиновые операторы) это не так. Например, вектор дипольного момента точечной частицы может быть направлен только по спину. Спин и магнитный дипольный момент — псевдовекторы, а зарядовый и тороидный дипольные моменты — истинные векторы. Поэтому при условии сохранения пространственной четности частица может обладать только одним дипольным формфактором — магнитным, а ее зарядовый и тороидный дипольные формфакторы тождественно равны нулю.

Тороидные формфакторы имеют любопытные правила отбора при преобразованиях дискретных симметрий, отличающие их от зарядовых и магнитных. У точечной частицы запрещены все зарядовые формфакторы нечетных рангов и все магнитные формфакторы четных рангов сразу и по P , и по T . Тороидные же моменты нечетных рангов отсутствуют при наличии P -инвариантности, а четных рангов — при наличии T -инвариантности. Если же учесть то обстоятельство, что в формфакторы частиц дают вклад слабые взаимодействия, нарушающие P -инвариантность, то малыми по величине тороидными моментами нечетных рангов должны обладать, вообще говоря, все частицы со спином, отличным от нуля. Четные тороидные моменты могут существовать как проявление пока точно не установленного механизма нарушения T -инвариантности. Таким образом, измерение тороидных формфакторов было бы интересным для изучения природы нарушения дискретных симметрий. Именно поэтому в 1965 г. были предложены опыты по измерению тороидного квадрупольного момента дейтрона [13, 14]. Однако выполненные вслед за этим эксперименты в Станфорде [46] не достигли нужной степени точности для обнаружения ожидаемого эффекта [13]. Этот эксперимент, видимо, следовало бы повторить на современном уровне точности в связи с появившимися указаниями на нарушение T -инвариантности в ядерных реакциях.

Как мы уже отмечали, в 1957 г. в связи с открытием нарушения P -четности в слабых взаимодействиях Я. Б. Зельдович указал [5], что частицы со спином $1/2$ должны обладать кроме магнитного момента еще одной дипольной характеристикой. Она была названа анаполем и введена в электромагнитный ток следующим образом:

$$j_{\mu} \sim e\bar{u}(\mathbf{p}_1) a_{\mu} \gamma_5 G^{(a)}(q^2) u(\mathbf{p}_1), \quad (78)$$

где $a_{\mu} = \frac{1}{\kappa^2} (q^2 \gamma_{\mu} - \hat{q} q_{\mu})$, $q = p_2 - p_1$, $P = p_1 + p_2$, $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$.

В дополнение к нему в переходном по четности токе вводится форм-фактор, называемый дипольным электрическим (зарядовым):

$$j_{\mu} \sim e\bar{u}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{\kappa} \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} \gamma_5 G^{(b)}(q^2) u(\mathbf{p}_1). \quad (79)$$

Легко показать [7], что, вообще говоря, ни один из этих форм-факторов не соответствует определенному мультипольному распределению. Действительно, в собственной системе отсчета (которая определяется отсутствием доплеровского смещения и излучаемого фотона [7]) зарядовый дипольный момент, найденный от этого тока, равен

$$d \sim \frac{e}{\kappa} \left[G^{(b)}(\Delta\kappa^2) + \frac{\Delta\kappa}{\kappa} G^{(a)}(\Delta\kappa^2) \right]. \quad (80)$$

Из формулы (80) видно, что только в статическом случае ($\kappa_1 = \kappa_2 \equiv \Delta\kappa = 0$) величину $G^{(b)}(0)$ можно назвать зарядовым дипольным моментом. Однако релятивистские форм-факторы не являются реально измеряемыми величинами на массовой оболочке.

Напомним, что для дираковских частиц справедливо тождество

$$\bar{u}_2 (\Delta\kappa \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} + a_{\mu\kappa} - R_{\mu} \gamma_5) \gamma_5 u_1 = 0, \quad R_{\mu} = i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P_{\nu} q_{\lambda} \gamma_{\rho}. \quad (81)$$

Из него следует, что альтернативная параметризация может включать вместо a_{μ} вектор R_{μ} , причем, как мы видим, только для $\Delta\kappa = 0$ эти векторы совпадают. В [7] было показано, что параметризация, соответствующая мультипольной, производится с помощью вектора R_{μ} , так же как и мультипольная саксовская для случая векторного тока с помощью $R_{\mu} \gamma_5$. В собственной системе отсчета эта параметризация имеет довольно сложный вид [7].

Ограничимся здесь обсуждением основного вывода работы [7], касающегося свойств анаполя. Анаполь действительно не является в общем случае мультипольной величиной. Он относится к классу так называемых неизлучающих источников [47], фурье-образ плотности распределения которых в пространстве волновых векторов обращается в нуль на световом конусе (в данном случае из-за множителя q_{μ}^2). Поля, создаваемые неизлучающими источниками, равны нулю, по крайней мере, в порядке $1/r$, где r — расстояние от источника до точки наблюдения. Источник, соответствующий параметризации тока с помощью вектора R_{μ} , не содержит подобных подавле-

ний. Более того, комбинация $d_1 \sigma_{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 + T_1 R_{\mu\nu}$, в которой для задачи излучения оставим с помощью (81) только излучающую часть ($d_1 + \Delta \kappa T_1$) σ , имеет структуру поперечных электрических моментов (см. [7]).

В современных калибровочных теориях, объединяющих электромагнитные и слабые взаимодействия, тороидный диполь (ананоль) возникает как радиационная поправка за счет виртуальных слабых взаимодействий. Вычисление тороидного дипольного фактора лептона в модели Вайнберга — Салама в низшем (третьем) порядке теории возмущений было начато в работах [15a] и нашим дипломником А. А. Чепкасовым. Однако довести до конца вычисления не удалось ввиду наличия в унитарной калибровке расходящихся интегралов. Дело в том, что несмотря на перенормируемость теории, расходимости от треугольных диаграмм, определяющих ананоль, сокращаются в унитарной калибровке только вместе с расходимостями от диаграмм типа «ящик». Таким образом, были произведены лишь оценки масштаба величины ананоля [15].

В калибровке т'Хофта — Фейнмана вклады треугольных диаграмм конечны. В работе [16] оценивается ананольный момент кварка в однопетлевом приближении с логарифмической точностью (поправки $\sim \alpha \ln \frac{M_W^2}{q^2}$). Конечные и степенные вклады опущены, и не обсуждается вопрос о калибровочной инвариантности суммы амплитуд, определяющих величину ананоля. С помощью ренормгруппового аппарата к этой величине найдены в однопетлевом приближении глюонные поправки, изменяющие значения $G^{(a)}(q^2)$ в несколько раз. На основании этих вычислений в [16] оцениваются ананольные поправки в эффектах нарушения четности в атомных экспериментах [9].

В этой ситуации интересны попытки извлечь ананольные моменты лептонов и кварков непосредственно из поляризационных экспериментов по рассеянию электронов на нуклонах и дейтронах. При подгонке экспериментальных значений для асимметрии неупругого рассеяния продольно поляризованных электронов на неполяризованных мишенях [17a] формулами, полученными в однофотонном приближении с учетом ананоля у электрона, получена оценка $a_e = 6 \cdot 10^{-12}$. «Естественная» оценка $a_e \sim G_F m_e^2 = 2 \cdot 10^{-12}$. Ананольные моменты кварков оценены [17b] при анализе асимметрии глубоко-неупругого рассеяния поляризованных электронов неполяризованными нуклонами в рамках кварк-партоновой модели; результат следующий: $a_u = -1,4 \cdot 10^{-4}$, $a_d = 0,5 \cdot 10^{-4}$ (u и d — ароматы кварков). Наличие ананольных моментов у электронов и кварков должны быть учтены при анализе высокоэнергетических поляризационных экспериментов и эффектов несохранения четности в атомах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы привели перечень физических задач, где явно или неявно используется понятие тороидных моментов. Отметим, что в задачах классического электромагнетизма, где конфигурации полей и токов могут быть близки к тороидным, тороидные характеристики объектов могут оказаться полезными для оценки величины глобальных эффектов. Например, конфигурация полей, удерживающая плазмосферу пульсара, по-видимому, близка к той, что создается в термоядерных установках типа токамак. Исходя из этой аналогии была развита теория структуры и динамики плазмосферы пульсара [48]. Поскольку и токамак, и плазмосфера пульсара с точки зрения удаленного наблюдателя являются тороидами, их глобальные мультипольные характеристики включают тороидные. Аналогичные параметры можно, видимо, ввести при рассмотрении электродинамики тороидальных черных дыр и других космологических объектов.

Найдут свое применение тороидные моменты как оценочные параметры в задачах биофизики при изучении влияния электромагнитных полей на биообъекты, так как тороидные конфигурации — консервативные системы, максимально защищенные от электрических и магнитных наводок.

В микрофизике наиболее принципиальным направлением является изучение тороидных характеристик частиц и субчастиц в рамках калибровочных теорий. При этом переходные моменты могут способствовать выяснению «изотоп-спиновой» структуры гамильтонианов. Изучение переходных тороидных характеристик точечных частиц полезно для выяснения механизмов нарушения дискретных симметрий. Так, кроме диполя интересен вопрос о величине тороидного квадрупольного кваркония, определяемого масштабом нарушения CP -инвариантности.

Авторы признательны за собеседования по различным вопросам, связанным с данной тематикой, А. М. Балдину, Д. Ю. Бардину, Я. А. Смородинскому, А. Т. Филишпову, М. П. Чавлейшвили, М. И. Широкову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1а. Широков Ю. М., Чешков А. А. — ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 144.
- 1б. Широков Ю. М., Чешков А. А. — ЖЭТФ, 1963, т. 44, с. 1982.
- 1в. Чешков А. А. — ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 144. См. также Durand L., III, DeSelles P. C., Marr R. B. — Phys. Rev., 1982, v. 126, p. 1883.
2. Широков Ю. М. — ДАН СССР, 1954, т. 99, с. 737.
3. Pryce M. H. L. — Proc. Roy. Soc., 1935, v. A150, p. 166.
4. Широков Ю. М. — ЖЭТФ, 1951, т. 21, с. 748.
- 5а. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1531.
- 5б. Glaser V., Jakišić V. — Nuovo cimento, 1957, v. 3, p. 1197.
6. Дубовик В. М., Чешков А. А. — ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1369; Препринты ОИЯИ P2-5283, P2-5284, Дубна, 1970.
7. Дубовик В. М., Чешков А. А. — ЭЧАЯ, 1974, т. 5, с. 791.

8. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика: Пер. с англ. М.: 1960.
9. Фламбаум В. В., Хрипович И. Б.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1656; Хрипович И. Б. Несохранение четности в атомных явлениях. М.: Наука, 1981.
10. Роуз М. Поля мультиполей: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
11. Джексон Дж. Классическая электродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
12. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
13. Дубовик В. М., Чешков А. А.—ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 169; Дубовик В. М., Лихтман Е. П., Чешков А. А.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, с. 706.
14. Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., Терентьев М. В.— Письма ЖЭТФ, 1965, т. 2, с. 10.
- 15а. Aydin Z. Z., Baran S. A., Barut A. O.— Nucl. Phys., 1973, v. B55, p. 101; v. B62, p. 333.
- 15б. Dombey N., Kennedy A. D.— Phys. Lett., 1980, v. 34, p. 428.
16. Сквознев Ю. И., Сушков О. П.— Ядерная физика, 1981, т. 34, с. 551.
- 17а. Рекало М. П.— Ядерная физика, 1978, т. 28, с. 1654.
- 17б. Рекало М. П.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 299.
18. Dubovik V. M., Egramzhan R. A., Tosunyan L. A.— Preprint JINR E4-9979, Dubna, 1976.
- 19а. Банд И. М., Листенгартен М. А., Фересин А. П. Аномалии в коэффициентах конверсии гамма-лучей. М.— Л.: Наука, 1976;
- 19б. Листенгартен М. А., Фересин А. П., Григорьев В. Н. Тезисы докл. XXXI Совещание по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1981, т. 45, с. 2038.
20. Dubovik V. M., Tosunyan L. A., Zenkin S. Preprint JINR, E 2-80-671, 1980; Дубовик В. М., Тосунян Л. А.— Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 68.
21. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1951, с. 44.
22. Любошиц В. Л., Смородинский Я. А.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 846.
23. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
24. Ли Цзун-Дао. Математические методы в физике: Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
25. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Oxford, University Press, 1961.
26. Elasser W. M.— Phys. Rev., 1946, v. 69, p. 106; Moses H. E.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1824.
27. Friar J. L., Fallieros S.— Phys. Lett., 1982, v. 114B, p. 403.
- 28а. Edmonds A. R. Angular momentum in quantum mechanics. New Jersey, 1957.
- 28б. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975, с. 189.
29. Bosko V.— Phys. Lett., 1972, v. B40, p. 171.
30. Тамм И. Е. Основы электричества. М.: Наука, 1974.
31. French I. V., Shimamoto Y.— Phys. Rev., 1959, v. 21, p. 898.
32. Snowdon S. C.— J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 719.
33. Bosko V., Saceri M. T.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 225.
34. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я.— УФН, 1979, т. 127, с. 446.
35. Blochinzew D. I.— Sow. Phys., 1933, v. 4, p. 501.
36. Зельдович Я. Б., Переломов А. М.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1114.
37. Агранович В. М.— УФН, 1974, т. 112, с. 165.
- 38а. Левинджер Дж. Фотоядерные реакции: Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962;
- 38б. Levinger S., Rustgi M. L., Okamoto K.— Phys. Rev., 1957, v. 106, p. 1191.
39. Dubovik V. M. Communication JINR E2-9262, Dubna, 1975.
40. Давыдов А. С. Квантовая механика, М.: Наука, 1973, с. 455.

41. Noble J. V.— Ann. Phys., 1971, v. 67, p. 78.
42. Michel F. C.— Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 1603; Wahlborn S.— Phys. Rev., 1965, v. 138, p. 530.
43. Абов Ю. Г., Крупчицкий П. А.— УФН, 1976, т. 118, с. 141; Tadić D.— Rep. Progr. Phys., 1980, v. 43, p. 67.
44. Блувштейн Р. Э., Дубовик В. М., Чешков А. А.— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 100.
45. Семенко С. Ф.— Ядерная физика, 1981, т. 34, с. 639.
46. Prepost R., Simonds R. M., Wilk H.— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 1274.
47. Bleistein N., Cohen J. K.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 194.
48. Senacchi G., Corpi V., Taroni A.— Bull. Amer. Phys. Soc., 1975, ser.11, v. 20, p. 1324.