

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ: ФОРМА ПОТЕНЦИАЛА И ОЦЕНКА ЕГО ПАРАМЕТРОВ

В. Н. Брагин, М. В. Жуков

Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, Москва

Проведен анализ существующих теоретических подходов к проблеме взаимодействия атомных ядер, а также экспериментальной информации о столкновениях тяжелых ионов при низких энергиях. Предложена новая, имеющая физическое обоснование, параметризация оптического потенциала, которая рассматривается в качестве одного из возможных путей к построению единой систематики тяжелоионных оптических потенциалов. Даны оценки для входящих в потенциал универсальных параметров. Наиболее характерная особенность предложенного потенциала — короткодействующее отталкивание, обусловленное влиянием принципа Паули при перекрывании волновых функций составных систем из фермионов.

The existing theoretical approaches to the interaction of atomic nuclei and the experimental data on low energy heavy ion collisions are reviewed. A new form of the optical potential parametrization which might be useful for the systematic of heavy ions potentials is suggested and substantiated. The universal parameters of the potential are estimated. The most important feature of the potential suggested — short range repulsion due to the Pauli principle.

ВВЕДЕНИЕ

Задача определения потенциала взаимодействия между тяжелыми ионами принадлежит к числу важных и не решенных до конца проблем ядерной физики низких энергий. С одной стороны, знание потенциала необходимо для понимания механизма ядерных превращений: реакций передачи, слияния, глубоконеупругих столкновений и анализа этих процессов в рамках существующих теоретических моделей. С другой — в потенциале заключена информация о свойствах ядерной материи, распределения нуклонов в ядрах, нуклон-нуклонном взаимодействии, т. е. при изучении ядерных столкновений мы накапливаем наши знания о фундаментальных характеристиках ядерного вещества.

Последовательный микроскопический подход к вычислению потенциала взаимодействия двух ядер, состоящих из A_p и A_T нуклонов соответственно, предполагает точное решение многочастичной ($A = A_p + A_T$ нуклонов) задачи с реалистическим нуклон-нуклонным взаимодействием и усреднение этого взаимодействия по многочастичной волновой функции, описывающей столкновение $A_p + A_T$ во входном

канале. В настоящее время осуществить это трудно: мы не умеем решать с необходимой точностью квантовомеханическую задачу о движении большого количества нуклонов с произвольным парным взаимодействием. Однако сама проблема NN -взаимодействия еще требует своего решения. Также заранее не очевидно, в какой степени в ядре можно пренебречь многочастичными корреляциями и силами.

Одним из наиболее распространенных методов получения информации о взаимодействии ядер является феноменологический анализ экспериментальных данных по упругому рассеянию тяжелых ионов в рамках оптической модели. Помимо известных трудностей, связанных с неоднозначностью определения параметров потенциала по неполному набору экспериментальных данных, результат анализа в большой степени предопределен конкретным выбором радиальной зависимости потенциала. В подавляющем большинстве работ применяется простая вудс-саксоновская форма потенциала, которая первоначально использовалась для описания упругого рассеяния нейтронов на ядрах.

Обнаруженное недавно изменение характера упругого рассеяния при переходе от «легкого» иона ${}^7\text{Li}$ к «тяжелому» ${}^9\text{Be}$ (в рамках вудс-саксоновской параметризации) приводит к резкому скачку глубины реальной части оптического потенциала, не имеющему подходящего объяснения на основе современных физических представлений. На наш взгляд, эта трудность оптической модели — одно из проявлений неадекватности вудс-саксоновского потенциала для описания столкновений тяжелых ионов. Та же причина, по-видимому, препятствует построению систематики тяжелоионных оптических потенциалов. Подгоняя параметры вудс-саксоновского потенциала по конкретным экспериментальным данным, мы добиваемся правильного описания хода потенциала в узком интервале расстояний r , т. е. в наиболее чувствительной к данному эксперименту области. Поведение потенциала вне области чувствительности при «физически оправданной» параметризации должно быть устойчивым по отношению к небольшим изменениям масс сталкивающихся ядер. Напротив, «неправильная» параметризация может приводить к потере физического смысла данного феноменологического потенциала вне области чувствительности, что, в частности, может проявляться во внезапном изменении глубины вудс-саксоновского потенциала при переходе от иона ${}^7\text{Li}$ к иону ${}^9\text{Be}$, т. е. при добавлении всего двух нуклонов.

Наряду с развивающимися в настоящее время «безмодельными» способами анализа упругого рассеяния тяжелых ионов поиск альтернативы вудс-саксоновскому потенциалу должен быть основан на результатах теоретических расчетов ион-ионного потенциала, которые несмотря на их приближенный характер могут правильно отражать качественную зависимость взаимодействия от ядерных масс, энергии столкновения и расстояния между ядрами.

Ввиду сложности многочастичной задачи о столкновении тяжелых ионов она, как правило, анализируется в рамках двух крайних при-

лижений: адиабатического и внезапного соударений. Адиабатические модели, например модель жидкой капли, приводят к правильной связи между свойствами нормальной ядерной материи и поведением потенциала на краю ядра. Однако они не применимы к описанию внутренней области потенциала, соответствующей перекрытию волновых функций сталкивающихся ионов. Модели, основанные на приближении внезапного столкновения с учетом принципа Паули, предсказывают существование в потенциале взаимодействия сильного отталкивания на малых расстояниях, которое препятствует проникновению ядер друг в друга. Указанное явление есть общее свойство составных систем из фермионов и не связано с отталкивательным кором в нуклон-нуклонном потенциале. Существование короткодействующего отталкивания вытекает из имеющихся микроскопических расчетов ион-ионного взаимодействия, основанных на приближенном решении многочастичного уравнения Шредингера с парным нуклон-нуклонным потенциалом.

В заключение настоящей работы мы предлагаем общее выражение для реальной части оптического потенциала, в котором выделены основные, на наш взгляд, зависимости от массовых чисел сталкивающихся ядер и энергии их относительного движения. После выделения этих факторов свойства потенциала становятся универсальными и тесно связанными с характеристиками бесконечной ядерной материи. Это позволяет дать вполне конкретные оценки для входящих в него параметров.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Нуклоны, дейтроны, ядра ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$. В 1954 г. Фешбах, Портер и Вайскопф [1] показали, что основные особенности усредненных по резонансам сечений упругого рассеяния нейтронов с энергией до 3 МэВ на ряде ядер могут быть описаны с помощью комплексного потенциала в виде прямоугольной ямы:

$$V = \begin{cases} -V_0(1 + i\xi), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1)$$

где $V_0 = 42$ МэВ, $\xi = 0,03$ и $R = 1,45$ фм $\cdot A^{1/3}$. С тех пор был накоплен экспериментальный материал о рассеянии нуклонов ядрами практически всех элементов. Оказалось, что данные о полных нейтронных сечениях, дифференциальных сечениях упругого рассеяния нуклонов и их поляризации могут быть объяснены в рамках оптической модели упругого рассеяния [1—8] с поглощающим потенциалом:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + iW(r) \right] \Psi. \quad (2)$$

В процессе столкновения с ядром нуклон обменивается энергией со многими ядерными степенями свободы, что приводит к возбужде-

нию многочисленных сложных конфигураций. В таких условиях связь налетающего нуклона с мишенью приобретает необратимый характер и может быть учтена как эффективное затухание одночастичного движения, описываемое мнимой частью оптического потенциала $W(r)$. Определяемому мнимой добавкой поглощению можно сопоставить среднюю длину свободного пробега λ нуклона в ядре, которая дается соотношением $\lambda^{-1} = -2W(r)/\hbar v$ и описывает характерное расстояние, на котором волновая функция Ψ движения выделенного нуклона в среднем поле мишени «перекачивается» в сложные многочастичные состояния.

Несмотря на то что в общем случае оптический потенциал должен быть нелокальным, при описании экспериментальных угловых распределений упругого рассеяния нуклонов оказывается достаточным использовать простейшую форму потенциала

$$V(r) = -\frac{V_0(1+i\xi)}{1+\exp[(r-R_V)/a_V]}, \quad (3)$$

предложенную Вудсом и Саксоном [8], исходя из соображения о том, что среднее поле мишени должно приближенно следовать за распределением плотности нуклонов. При этом диффузность потенциала a_V близка к диффузности распределения заряда ($a_V \simeq 0,6$ фм), а радиус R_V превышает характерные размеры ядра примерно на радиус действия нуклон-нуклонных сил.

Благодаря простоте вычислений и относительной прозрачности модели феноменологический анализ экспериментальных данных по упругому рассеянию стал одним из наиболее распространенных методов получения информации о взаимодействиях нуклонов с ядрами, необходимым атрибутом любой экспериментальной работы по рассеянию нуклонов на ядрах. Наиболее полная компиляция оптических потенциалов, полученных различными авторами до 1975 г. включительно, дана в обзоре [9]. Там же можно найти примеры систематики параметров потенциалов для различных мишеней и энергий столкновения.

Успех в описании нуклонного рассеяния стимулировал применение оптической модели к анализу рассеяния на ядрах более сложных частиц: дейтронов, ядер ^3He и ^3H . И в этом случае простая параметризация (3) позволяет получать хорошее согласие с экспериментом и систематику параметров [9]. В течение 30-летнего существования оптической модели вудс-саксоновская параметризация потенциала работала столь успешно, что, несмотря на то что эта параметризация была предложена в свое время для нуклонного рассеяния и может не иметь непосредственного отношения к взаимодействию между тяжелыми ионами, до сих пор она широко используется в анализе столкновений тяжелых ионов.

α -Частицы. Двукратно ионизованные атомы ^4He применяются для изучения ядерных взаимодействий уже более 70 лет. Знаменитому опыту Резерфорда [10] мы обязаны самим существованием ядерной

физики. Благодаря своим замечательным свойствам: большой энергии связи, компактной магической структуре и отсутствию спина, α -частица является единственной из легких частиц, которую можно пытаться сравнивать с тяжелыми ионами. Многие важные результаты и идеи, возникшие из опыта работы с α -частицами, были перенесены в область столкновений тяжелых ионов. Недавно был опубликован подробный обзор [11], посвященный анализу упругого рассеяния α -частиц на ядрах, поэтому в настоящей работе упомянуты лишь наиболее важные результаты, значение которых сохраняется и в физике тяжелых ионов.

В результате систематического анализа рассеяния α -частиц с энергией $E = 40$ МэВ на ядрах Ar, Cu и Pb Айго показал [12, 13], что поведение сечения рассеяния в переднюю полусферу определяется «хвостом» оптического потенциала, реальная часть которого на больших расстояниях ($r \gtrsim 7$ фм) может быть представлена следующим образом [см. (3)]:

$$V(r) = -1100 \exp \left[- \left(\frac{r - 1,17A^{1/3}}{0,574} \right) \right], \quad (4)$$

и существует непрерывная неоднозначность выбора параметров потенциала, выражающаяся в том, что одинаковое по качеству описание упругого рассеяния α -частиц в переднюю полусферу может быть получено с помощью потенциалов, для которых значение $V_0 \times \exp(R_V/a_V)$ примерно одинаково. В этих же работах была высказана идея о нечувствительности упругого рассеяния на малые углы к поведению потенциала внутри ядра.

Изучая рассеяние α -частиц с энергией $E \simeq 25$ МэВ на ряде ядер от O до U в угловом диапазоне $\theta < 80^\circ$, МакФадден и Сэтчлер [14] установили, что помимо непрерывной существует дискретная неоднозначность выбора потенциала, т. е. имеется возможность построить дискретный набор потенциалов с сильно отличающимися глубинами реальной части, которые дают одинаково хорошее описание экспериментальных данных.

В работе [15] Дриско, Сэтчлер и Бассел обратили внимание на то, что внутренняя часть потенциала оказывает более сильное влияние на фазы парциальных волн с малыми значениями орбитального момента l , которые в силу уменьшения центробежного барьера проникают глубже. Относительная малость вклада этих волн в сечение рассеяния в переднюю полусферу приводит к тому, что любой потенциал, который правильно воспроизводит фазы нескольких доминирующих в рассеянии на малые углы поверхностных волн с $l \simeq kR$, оказывается пригодным для описания экспериментальных данных.

С учетом этого обстоятельства причина неоднозначности выбора потенциала становится очевидной. Поскольку при небольших энергиях в рассеянии на малые углы существенны лишь доминирующие поверхностные волны, любой потенциал, имеющий в области $r \gtrsim 7$ фм поведение, близкое к формуле (4), оказывается удовлетворительным

с точки зрения экспериментальных данных. Имея в (3) три независимых параметра V_0 , R_V и a_V , мы всегда можем зафиксировать один из них, например R_V , и подобрать значения двух оставшихся таким образом, чтобы при $r \geq 7$ фм реальная часть потенциала спадала примерно по закону (4). Варьируя R_V в разумных пределах, мы таким способом получим непрерывное семейство потенциалов, каждый из которых хорошо описывает эксперимент.

Однако если количество существенных волн невелико, то, сильно изменяя глубину реальной части потенциала, можно подобрать ее таким образом, чтобы логарифмические производные волновых функций, соответствующих доминирующим орбитальным моментам, приняли на краю ядра необходимые значения. Это можно сделать несколькими способами, изменяя количество узлов волновых функций внутри ядра. Потенциалы, порождающие различное количество узлов, но близкие логарифмические производные на краю ядра, дадут правильные с точки зрения эксперимента фазы рассеяния для доминирующих волн, что приведет к дискретной неоднозначности. Возможное при этом сильное изменение фаз рассеяния с малыми орбитальными моментами не проявляется в поведении сечения.

Таким образом, для получения более надежной информации о потенциале необходимо привлекать экспериментальные данные по рассеянию с большим количеством существенных волн. Усиление роли малых прицельных параметров эквивалентно продвижению нижней границы области чувствительности потенциала (к эксперименту) внутрь ядра. Если выбрать для этой границы r_s какое-то количественное определение, например считать, что при $r < r_s$ изменение потенциала в окрестности точки r не приводит к заметному увеличению χ^2 -критерия, характеризующего согласие расчета с экспериментом, то r_s будет зависеть от энергии столкновения E и максимального угла детектирования θ в данном эксперименте. Тогда если для конкретной пары сталкивающихся ядер выполнено два эксперимента, для которых $E_1 \geq E_2$ и $\theta_1 \geq \theta_2$, то можно ожидать, что r_s — монотонная функция, т. е. $r_s(\theta_1, E_1) \leq r_s(\theta_2, E_2)$.

Таким образом, повышая энергию и проводя измерения под большими углами, мы перемещаем границу чувствительности r_s в сторону меньших расстояний, увеличивая тем самым объем информации о потенциале. Поскольку, как правило, поиск потенциала ведется на заданном классе функций, эксперимент сужает область приемлемых значений свободных параметров. В обзоре [11] проанализирован ряд работ по упругому рассеянию α -частиц и показано, что последовательное увеличение энергии столкновения и максимального угла детектирования приводит, с одной стороны, к уменьшению количества фазово-эквивалентных потенциалов, связанных дискретной неоднозначностью, а с другой — к сужению семейств потенциалов, связанных непрерывной неоднозначностью. Такое непрерывное семейство, естественно, существует вблизи каждого потенциала из дискретного набора.

Этот результат позволяет надеяться на существование таких экспериментальных условий, при которых оптический потенциал может быть определен однозначно на заданном классе функций. Точный смысл это соображение приобрело в работах Гольдберга, Смита и Бурдзика [16, 17]. Используя квазиклассическую модель упругого рассеяния Форда и Уилера [18], в которой угол отклонения классической траектории с орбитальным моментом l выражается через фазу рассеяния δ_l , вычисленную в квазиклассическом приближении $\theta(l) = 2d\delta_l/dl$, они обнаружили, что при достаточно большой ($E \gtrsim 100$ МэВ) энергии столкновения возникает максимальный угол отклонения θ_R , значение которого уменьшается с ростом энергии.

В этом случае экспериментальное сечение упругого рассеяния, отнесенное к резерфордскому сечению, имеет монотонный, практически экспоненциальный спад при углах $\theta > \theta_R$. В области малых углов $\theta < \theta_R$ при этом наблюдаются привычные дифракционные осцилляции. Это явление по аналогии с оптикой получило название радужного рассеяния.

Существенно, что положение угла радужного рассеяния θ_R определяется реальной частью оптического потенциала, что упрощает задачу определения его параметров. В частности, использование экспериментальных данных по радужному рассеянию снимает дискретную неоднозначность выбора потенциала, поскольку сильное увеличение глубины реальной части на заданном классе потенциалов сопровождается ростом угла θ_R вплоть до $\theta_R > 180^\circ$, что приводит к исчезновению радуги. В связи с этим в работах [16, 17] был сформулирован «рецепт», согласно которому для устранения дискретной неоднозначности необходимо определять параметры потенциала путем анализа экспериментальных данных при достаточно больших энергиях, когда возникает радужное рассеяние, и использовать при этом экспериментальные сечения, измеренные под углами $\theta > \theta_R$. Этот рецепт был успешно применен для определения оптического потенциала упругого рассеяния α -частиц с энергией от 90 до 172 МэВ на ядрах от ^{12}C до ^{208}Pb включительно [19, 20].

Тяжелые ионы. По мере развития экспериментальных исследований происходило накопление информации о параметрах тяжелоионных оптических потенциалов. Наиболее подробная компиляция полученных таким путем данных приведена в обзоре [9]. Недавно были опубликованы аналогичные таблицы [21], в которых собраны данные по упругому рассеянию ионов ^6Li и ^7Li , полученные в последние годы. В настоящее время ведется интенсивное развитие экспериментальных работ по столкновениям тяжелых ионов в трех основных направлениях, а именно: расширение набора ускоряемых ионов, повышение их энергии и распространение измерений в область самых больших углов рассеяния. Несмотря на затрачиваемые усилия, пока не существует систематики тяжелоионных оптических потенциалов по массам и энергии столкновения.

Как было показано в [22—24], угловые распределения упругого рассеяния тяжелых ионов и поверхностных реакций в большой степени определяются углом радужного рассеяния. Поэтому форма сечений рассеяния в переднюю полусферу может быть воспроизведена [23—26] на основе знания классических траекторий, проходящих вблизи траектории радужного рассеяния. Так как на расстояниях, характерных для этих траекторий, мнимая часть оптического потенциала, как правило, мала, можно считать, что форма угловых распределений в основном зависит от реальной части.

Опираясь на эти соображения, Кристенсен и Винтер [27] приняли параметризацию для реальной части оптического потенциала на краю ядра

$$V_N(r) = V_0 \exp(-r/\alpha). \quad (5)$$

Считая ядерное притяжение малым по сравнению с кулоновским взаимодействием на достаточно больших расстояниях, они с помощью классической теории возмущений получили аналитическое выражение для угла радужного рассеяния θ_R как функции параметров α и V_0 . При этом оказалось, что одинаковые углы θ_R имеют все потенциалы, пересекающиеся в одной точке, которая расположена чуть ближе к началу координат по отношению к расстоянию наибольшего сближения для траектории радужного рассеяния. Проанализировав около 60 эмпирических вудс-саксоновских потенциалов, полученных различными авторами путем анализа рассеяния тяжелых ионов с $A_p = 10 \div 84$, Кристенсен и Винтер предложили следующее выражение для реальной части оптического потенциала:

$$V_N(r) = 50 \frac{R_p R_T}{R_p + R_T} \exp\left(-\frac{r - R_p - R_T}{\alpha}\right) \quad (6)$$

(индекс p относится к падающей частице, а T — к ядру мишени), которое обеспечивает с хорошей точностью правильные значения углов радужного рассеяния для всех рассмотренных случаев. Входящие в (6) геометрические параметры определены следующим образом: $R_p, T = 1,233 A_p^{1/3}, T - 0,978 A_p^{-1/3} \text{ фм}$ и $\alpha = 0,63 \text{ фм}$. Таким образом, формула (6), на наш взгляд, является важным шагом на пути к построению единой систематики потенциалов тяжелых ионов.

Однако при поиске такой систематики важно помнить, что понятие радиуса чувствительности, т. е. точки, где пересекаются все подходящие для данного набора экспериментальных данных потенциалы, имеет смысл лишь при заданной функциональной форме его реальной части, что и было очень наглядно продемонстрировано на примере упругого рассеяния $192 \text{ МэВ } ^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ в [28]. Поэтому, говоря о систематике тяжелоионных оптических потенциалов, фактически мы всегда подразумеваем некоторый класс функций, с помощью которых отображаются основные качественные характеристики взаимодействия между ядрами. Выбор подходящего класса функций должен опираться на результаты расчетов ион-ионного взаимодействия из первых принципов. Измерения упругого рассеяния ионов ^6Li с энер-

гией $E = 156$ МэВ на ядрах ^{12}C , ^{28}Si , ^{40}Ca , ^{90}Zr и ^{208}Pb [29—32] привели к наблюдению характерной картины радужного рассеяния, сходной с аналогичным явлением для α -частиц. Оказалось, что при работе с потенциалами вудс-саксоновского типа можно получить хорошее согласие расчета и эксперимента лишь при глубине реальной части ~ 150 МэВ [29—32]. Отношение глубин мнимой и реальной частей потенциала на краю ядра оказывается малым: $W/V \simeq 0,2$. Параметры потенциала для Li сильно зависят от энергии столкновения. Аналогичными свойствами обладает и упругое рассеяние ионов ^7Li [33].

Систематические измерения упругого рассеяния более тяжелых ионов ^9Be , ^{12}C и ^{16}O на ядре ^{28}Si при энергии столкновения $E \gtrsim \gtrsim 200$ МэВ [34—36] показали, что в этих случаях радужное рассеяние пока не наблюдается. Соответствующие экспериментальные данные могут быть описаны с помощью мелких оптических потенциалов с глубиной реальной части $\lesssim 40$ МэВ и отношением $W/V \simeq 1$. При этом параметры потенциалов практически не зависят от энергии столкновения. Заметим, что последнее справедливо лишь для рассеяния в переднюю полусферу.

Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные указывают на то, что при переходе от «легкого» иона ^7Li к «тяжелому» иону ^9Be происходит резкое изменение характера упругого рассеяния [32, 33]. При использовании стандартных вудс-саксоновских потенциалов в результате возникает нефизический «скачок» глубины реальной части (причем в сторону ослабления взаимодействия) при добавлении к налетающему ядру всего лишь двух нуклонов. Другими словами, предположение о вудс-саксоновской форме реальной части оптического потенциала приводит, в данном случае, к странному результату, что подтверждает необходимость более внимательной оценки формы реальной части тяжелоионных оптических потенциалов.

2. АДИАБАТИЧЕСКОЕ И ВНЕЗАПНОЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

По мере сближения сталкивающихся ионов одновременно и со сравнимыми скоростями развиваются два основных процесса: обратимое взаимное проникновение ионов друг в друга и разрушение их внутренней структуры. Первый из них приводит к образованию упруго рассеянных ионов, а второй — к их возбуждению или развалу. В рамках оптической модели все неупругие каналы, сопровождающиеся изменениями в структуре сталкивающихся ионов, эффективно учитываются введением мнимой части в потенциал ион-ионного взаимодействия.

Ввиду огромной сложности многочастичной задачи столкновения тяжелых ионов, как правило, используются два крайних приближения: адиабатического и внезапного соударений. Первое приближение подразумевает такое развитие событий, когда по мере уменьшения расстояния между центрами масс сталкивающихся ионов происходит

плавное адиабатическое изменение их внутренней структуры и энергетически выгодное (для данного расстояния) «выравнивание» плотности нуклонов. Для осуществления адиабатического столкновения необходимо (но не достаточно), чтобы скорость релаксации внутренних степеней свободы ядра была велика по сравнению со скоростью переносного движения налетающего ядра. Внезапное столкновение происходит настолько быстро, что внутренняя структура ионов не успевает сколь-либо существенно измениться за время взаимодействия. В этом случае нуклонные плотности ядер в области их перекрытия складываются аддитивно, что, как мы увидим ниже, с неизбежностью приводит к возникновению в потенциале сильного короткодействующего отталкивательного кора.

В качестве ориентировочной оценки для решения вопроса об адиабатичности или внезапности столкновения может служить отношение k/k_F , где $k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2 A}\right)^{1/2}$ — средний импульс переносного движения нуклона в налетающем ядре, а k_F — граничный импульс Ферми для внутреннего движения нуклонов в ядрах. В случае $k \gg k_F$ можно ожидать внезапного соударения, в противном случае $k \ll k_F$ — адиабатического.

Однако реальные процессы столкновения тяжелых ионов, по-видимому, обладают свойствами, которые занимают промежуточное положение между адиабатическим и внезапным ударом. Причем степень близости к тому или иному крайнему приближению зависит как от энергии столкновения, так и свойств самих ядер, в частности их энергий связи и структуры.

Точный ответ на вопрос о характере столкновений тяжелых ионов, с одной стороны, может быть получен в результате микроскопического расчета динамики столкновения исходя из эффективного нуклон-нуклонного потенциала. Заметим, что здесь под этим понимается истинно микроскопический расчет, основанный на приближенном решении уравнений движения всех нуклонов. Другой естественный способ заключается в предположении о существовании отталкивательного кора и поиске его проявлений в экспериментальных данных по столкновениям тяжелых ионов.

3. МОДЕЛЬ ЖИДКОЙ КАПЛИ

В качестве простейшего примера адиабатического приближения в задаче о вычислении потенциала взаимодействия между тяжелыми ионами необходимо назвать методы, основанные на представлении о ядре как жидкой капле несжимаемой ядерной материи. Предположение о несжимаемости означает, что при столкновении тяжелых ионов допустимы любые деформации их формы, оставляющие объем постоянным, а распределение плотности однородным. Очевидно, при этом объемная часть энергии взаимодействия в ходе столкновения не меняется, а единственно возможные изменения потенциальной энергии

происходят в результате изменения площади поверхности системы из двух сливающихся ядерных капель, а также кулоновского взаимодействия.

Разность поверхностной энергии сферической капли из $A_1 + A_2$ нуклонов и двух капель из A_1 и A_2 нуклонов, находящихся на большом расстоянии друг от друга, равна

$$V_0 = b_{\text{surf}} [(A_1 + A_2)^{2/3} - A_1^{2/3} - A_2^{2/3}], \quad (7)$$

где $b_{\text{surf}} \simeq 17$ МэВ [37] — известная постоянная. Существование поверхностной энергии есть общее свойство конечных систем, связанное с выделенностью частиц, находящихся у поверхности. Обычно величину (7) связывают со значением ион-ионного потенциала в точке $r = 0$.

Если предположить, что ион-ионный потенциал имеет форму Вудса — Саксона (3), то параметр V_0 оказывается определенным соотношением (7). Определение радиуса R_V и диффузности a_V требует дополнительных предположений.

Вильчинские предположили [38], что максимальная сила притяжения между ядрами действует на расстоянии суммы радиусов их половинной плотности $R_V = R_0 = R_1 + R_2$, а ее величина может быть оценена с помощью следующего выражения [39]:

$$(dV/dr)_{r=R_0} = 4\pi\gamma R_1 R_2 / (R_1 + R_2), \quad (8)$$

где $\gamma = 0,95$ МэВ·фм⁻² — коэффициент поверхностного натяжения ядерной материи. При этом радиусы $R_{1,2}$ вычислялись по формуле Майерса [40]

$$R_i = 1,128 A_i^{1/3} (1 - 0,786 A_i^{-2/3}). \quad (9)$$

С учетом (4) и (8) легко определить параметр диффузности

$$a = \frac{V_0 R_0}{16\pi\gamma R_1 R_2} = 0,356 \frac{R_0}{R_1 R_2} [(A_1 + A_2)^{2/3} - A_1^{2/3} - A_2^{2/3}]. \quad (10)$$

Таким образом, формулы (7)—(10) дают оценку для потенциала взаимодействия между тяжелыми ионами, полученную из общих соображений без каких-либо подгоночных параметров.

В обзоре [41] приведен пример принадлежащей Бондорфу близкой по духу оценки: $R_i = 1,3$ фм $A_i^{1/3}$, $a = 0,9$ фм, которая получена простой интерполяцией между энергией двух бесконечно удаленных сферических капель и энергией составного ядра с помощью вудс-саксоновского потенциала (3).

Построенные на основе модели жидкой капли ион-ионные потенциалы хорошо описывают форму взаимодействия на краю ядра. В частности, они дают очень хорошее описание барьеров взаимодействия между тяжелыми ионами, полученных в результате анализа экспериментальных функций возбуждения для реакций слияния [38].

Недавно Краппэ, Никс и Сьерк [42, 43] предложили обобщенную модель жидкой капли, в которой поверхностная энергия ядра, со-

стоящего из A нуклонов, имеет следующий вид:

$$E_s = -\frac{C_s}{8\pi^2 r_0^3 a^3} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left(\frac{\sigma}{a} - 2 \right) \sigma^{-1} \exp(-\sigma/a), \quad (11)$$

где $\sigma = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В этом выражении двойное интегрирование распространено по объему ядра, который считается неизменным при деформациях и равным $(4/3)\pi r_0^3 A$. Зависимость энергии от нуклонного состава ядра включена в фактор $C_s = a_s(1 - k_s I^2)$, где $I = (N - Z)/A$ — избыток нейтронов. Такое определение поверхностной энергии несколько отличается от привычного и построено с учетом требования минимальности поверхностной энергии двух полупространств ядерной материи в момент их соприкосновения. При значениях свободных параметров: $r_0 = 1,18$ фм, $a = 0,65$ фм, $a_s = 21,7$ МэВ и $k_s = 3,0$, авторам [42, 43] удалось в рамках обобщенной модели жидкой капли получить хорошее описание широкого набора экспериментальных данных: ядерных масс и деформаций, барьеров слияния и деления, дифференциальных сечений упругого рассеяния тяжелых ионов на малые углы.

В заключение данного раздела отметим, что модели, основанные на представлении о ядре как несжимаемой жидкой капле, по-видимому, приводят к правильной связи между свойствами нормальной ядерной материи и поведением потенциала взаимодействия на краю ядра. В этом смысле они могут служить в качестве ориентира при решении вопроса о разумности получаемых феноменологически или в других моделях ион-ионных потенциалов. На малых расстояниях потенциалы, построенные с помощью модели жидкой капли, дают слабое притяжение и не имеют отталкивательного кора.

Однако, как это было недавно показано Гриневым и др. [44], учет (в рамках модели жидкой капли с диффузным краем) возможности аддитивного сложения нуклонных плотностей двух ядер в момент их соприкосновения приводит к нелинейному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Psi - (V - E) \Psi + K/9 (\rho/\rho_0 - 1) \Psi = 0, \quad (12)$$

где $\rho_0 = \sum_i \Psi_i^{(0)} \Psi_i^{(0)*}$ — нормальная плотность, соответствующая решениям уравнения (12) при $\rho = \rho_0$, а $\rho = \sum_i \Psi_i \Psi_i^*$ — плотность, вычисляемая с помощью решений (12) при $\rho \neq \rho_0$, K — модуль сжатия ядерной материи. Сила, возникающая в результате сжатия ядерной материи в рамках такого обобщения модели жидкой капли, является аналогом отталкивательного кора.

4. ПОТЕНЦИАЛЫ СВЕРТКИ

Неоднозначность определения параметров потенциалов по экспериментальным данным требует физических оценок, которые позволили бы устанавливать разумность получаемых результатов. В качестве

простейшей оценки зависимости потенциала от массы налетающего ядра некоторые авторы [45, 46] использовали процедуру одинарной свертки:

$$V(r) = \int dx_p \rho_p(r_p) V_{NT}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|), \quad (13)$$

согласно которой потенциал $V_{NT}(r)$ взаимодействия нуклона с ядром-мишенью, проинтегрированный по объему налетающего ядра вместе с распределением плотности нуклонов в нем $\rho_p(r)$, отождествляется с потенциалом взаимодействия двух тяжелых ионов.

Если мы достаточно хорошо знаем (из опытов по рассеянию электронов или хартри-фоковских расчетов) распределения плотности нуклонов $\rho_p(r)$ для многих ядер, то оптический потенциал $V_{NT}(r)$ сам является продуктом феноменологического анализа экспериментальных данных по рассеянию нуклонов на соответствующей мишени, причем, как правило, при очень низких энергиях, где наиболее существенны неоднозначности оптической модели. Кроме того, грубость приближения (13) приводит к тому, что потенциалы одинарной свертки не согласуются с поведением феноменологических оптических потенциалов вблизи радиуса сильного поглощения [47].

Более последовательной с физической точки зрения для оценки поведения потенциала на краю ядра представляется процедура двойной свертки:

$$V(r) = \int \int dx_p dx_T \rho_p(r_p) v_{NN}(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_T|) \rho_T(r_T), \quad (14)$$

где $\rho_p(r)$ и $\rho_T(r)$ — распределения плотности нуклонов в сталкивающихся ядрах, а v_{NN} — эффективное нуклон-нуклонное взаимодействие.

При попытке использовать в качестве $v_{NN}(r)$ реалистические нуклон-нуклонные взаимодействия, успешно применяемые в расчетах структуры легких ядер и рассеяния нуклонов, процедура (14) приводит к ион-ионным потенциалам, которые вблизи радиуса сильного поглощения переоценивают глубину реальной части соответствующих феноменологических потенциалов на 20—30% [48]. В большой степени это расхождение вызвано большим радиусом потенциала однопионного обмена в реалистических NN -взаимодействиях.

Сэтчлер и Лав [49] предложили использовать в качестве $v_{NN}(r)$ эффективное взаимодействие, построенное Бертшем и др. [50] на основе элементов G -матрицы реакции [см. (40)], порождаемой реалистическим NN -взаимодействием Рейда [51].

Потенциал двойной свертки (14), полученный таким образом и обозначаемый в литературе символом МЗУ, оказался эффективным при описании экспериментальных угловых распределений упругого рассеяния тяжелых ионов [52—58], в том числе радужного рассеяния. Однако, как показали расчеты [59—61], в случае рассеяния слабо связанных ядер ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, для удовлетворительного описания

эксперимента систематически (независимо от мишени и энергии столкновения) потенциал (14) должен быть умножен на фактор $N \simeq 0,5 \div 0,7$.

В заключение этого раздела заметим, что рассмотренные здесь потенциалы свертки строятся в приближении внезапного столкновения без учета по крайней мере двух важных факторов: зависимости NN -взаимодействия от плотности и принципа Паули, которые существенны на расстояниях, соответствующих перекрытию ядерных объемов. Поэтому они имеют смысл лишь на краю ядра. Внутри ядра для них характерно сильное притяжение с глубиной реальной части порядка сотен мегаэлектрон-вольт.

5. БРАКНЕРОВСКИЙ ПОДХОД

В теории Бракнера и др. [62, 63] полная энергия системы взаимодействующих фермионов представляется в виде функционала от локальной одночастичной плотности энергии

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int d\mathbf{r} \varepsilon(\rho). \quad (15)$$

Этот формализм оказался эффективным при описании энергий связи атомных ядер. Его привлекательность, в частности, заключается в использовании для различных ядер универсального выражения для плотности энергии $\varepsilon(\rho)$ как функции от нуклонной плотности ρ . Причем форма функции $\varepsilon(\rho)$ для конечных ядер тесно связана с основными свойствами бесконечной ядерной материи.

Успех в описании связанных состояний стимулировали использование этого подхода к вычислению взаимодействия между двумя ядрами. В приближении внезапного столкновения энергия взаимодействия ядер имеет вид [64]:

$$V(R) = \int d\mathbf{r} \{ \varepsilon(\rho_1 + \rho_2) - \varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_2) \}, \quad (16)$$

т. е. при изменении расстояния R между центрами масс ядер и возникающем при этом аддитивном сложении их нуклонных плотностей $\rho_{1,2}$ происходит изменение энергии, которое заманчиво отождествить с потенциалом взаимодействия тяжелых ионов.

Бракнеровский подход к вычислению потенциала развивался различными авторами, использовавшими с этой целью разнообразные способы конструирования выражения $\varepsilon(\rho)$ и выбора нуклонных плотностей $\rho_{1,2}$.

В работах Нгоу и др. [65, 66] плотность энергии была взята в виде

$$\varepsilon(\rho) = \tau_{TF} + \rho V(\rho, \alpha) + \frac{\hbar^2}{2m} \eta (\nabla \rho)^2 + \frac{1}{2} e V_c \rho_c - 0,7386 e^2 \rho_c^{4/3}, \quad (17)$$

где τ_{TF} — плотность кинетической энергии в приближении Томаса — Ферми:

$$\tau_{TF} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \rho^{5/3} \frac{1}{2} [(1-\alpha)^{5/3} + (1+\alpha)^{5/3}]. \quad (18)$$

Здесь и ниже $\alpha = (\rho_n - \rho_p) / (\rho_n + \rho_p)$, т. е. избыток нейтронов в системе. Член $V(\rho, \alpha)$ представляет собой приходящуюся на один нуклон потенциальную энергию ядерной материи

$$V(\rho, \alpha) = b_1 (1 + a_1 \alpha^2) \rho + b_2 (1 + a_2 \alpha^2) \rho^{4/3} + b_3 (1 + a_3 \alpha^2) \rho^{5/3}, \quad (19)$$

а градиентный член в (17) ответствен за конечность радиуса действия ядерных сил. Два последних члена соответствуют прямому и обменному кулоновскому взаимодействию. Параметры: $b_1 = -818,25 \text{ МэВ} \times \text{фм}^3$, $b_2 = 1371,06 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^4$, $b_3 = -556,55 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^5$, $a_1 = -0,316$, $a_2 = 0,2$, $a_3 = -1,646$ и $\eta = 15,2$ взяты из работы [67], где они были получены из условия наилучшего описания энергий связи ядер ^{16}O , ^{40}Ca , ^{208}Pb и ^{238}U в рамках теории Бракнера. Нуклонные плотности $\rho_{1,2}$ брались из хартри-фоковских расчетов, сделанных в работе [68]. Они согласуются с данными о рассеянии электронов на соответствующих ядрах.

С помощью определенного выше потенциала Нгоу и др. вычислили барьеры взаимодействия для широкого набора пар сталкивающихся ядер, которые оказались в хорошем согласии с экспериментальными данными. Теми же авторами была предложена удобная параметризация для получающихся в рамках такого подхода ион-ионных потенциалов

$$V_N(r) = \frac{A_p^{1/3} A_T^{1/3}}{A_p^{1/3} + A_T^{1/3}} U_N(s), \quad (20)$$

где $V_N(r)$ соответствует потенциалу (16) без учета кулоновского взаимодействия; $A_{p,T}$ — массовые числа ядер, а $U_N(s)$ — универсальная функция, зависящая только от расстояния s между сферическими поверхностями ядер:

$$U_N(s) = \begin{cases} -V_0 \exp(-0,27s^2), & s \geq 0, \\ -V_0 + 6,3s^2, & s \leq 0, \end{cases} \quad (21)$$

где $s = r - r_0 (A_p^{1/3} + A_T^{1/3})$. При этом оказалось, что для всех изучавшихся ядер (тяжелых и средних) с хорошей степенью точности можно положить $V_0 \simeq 30 \text{ МэВ}$ и $r_0 \simeq 1 \text{ фм}$.

Рассмотренный выше способ вычисления потенциала взаимодействия достаточно сложен для практического применения, поскольку в нем используются хартри-фоковские нуклонные плотности, определение которых само по себе является трудоемкой задачей. Недавно было показано [69], что близкие результаты получаются, если принять для нуклонных плотностей простые аналитические выраже-

ния. предложенные Майерсом [40], а именно:

$$\rho_{n,p}(r) = \rho_{n,p}(0) \{1 + \exp[(r - C_{n,p})/0,55]\}^{-1}, \quad (22)$$

где $C_{n,p} = R_{n,p}(1 - 1/R_{n,p}^2)$, а радиусы $R_{n,p} = r_n^{(0)}, p A^{1/3}$. Параметры $r_n^{(0)}, p$ имеют следующие значения:

$$r_p^{(0)} = 1,128 \text{ фм}, r_n^{(0)} = 1,1375 + 1,875 \cdot 10^{-4} A \text{ фм} \quad (23)$$

для распределения протонов и нейтронов соответственно. Нормировочные постоянные равны

$$\rho_n(0) = \frac{3}{4\pi} \frac{N}{A} r_n^{(0)-3}, \quad \rho_p(0) = \frac{3}{4\pi} \frac{Z}{A} r_p^{(0)-3}. \quad (24)$$

В работе [69] для плотности энергии $\varepsilon(\rho)$ были взяты те же выражения (17)–(19), однако значения числовых параметров определялись по-другому. При $\alpha = 0$ плотность энергии

$$\tilde{\varepsilon}(\rho) = \tau_{TF} + V(\rho, \alpha = 0) \quad (25)$$

фактически воспроизводит уравнение состояния ядерной материи. Поэтому, потребовав выполнения следующих ограничений:

$$\tilde{\varepsilon}(\rho_0) = -15,6 \text{ МэВ}, \rho_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}, K = 250 \text{ МэВ} \quad (26)$$

[где использованы известные значения равновесной энергии связи $\tilde{\varepsilon}(\rho_0)$ и плотности ρ_0 ядерной материи, а также специальное предположение о модуле сжатия K], авторы [69] получили значения трех параметров: $b_1 = -588,75 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^3$, $b_2 = 563,56 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^4$ и $b_3 = 160,92 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^5$. Другая группа параметров: $a_1 = -0,424$, $a_2 = -0,0973$ и $a_3 = -2,25$, была получена из условия согласия с расчетом энергии связи нейтронного газа [70], т. е. при $\alpha = 1$. Последний параметр $\eta = 7,23$, существенный для конечных ядер, был получен подгонкой энергии связи ядра ^{40}Ca в рамках теории Бракера с определенными выше плотностями $\rho_{n,p}(r)$.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКИРМА

Близкий по духу подход к вычислению взаимодействия тяжелых ионов был разработан Станку и Бринком [71], которые определили плотность энергии $\varepsilon(\rho)$ с помощью эффективного зависящего от плотности нуклон-нуклонного взаимодействия Скирма S III [72]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho) = & \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \frac{1}{2} t_0 \left[\left(1 + \frac{1}{2} x_0\right) \rho^2 - \left(x_0 + \frac{1}{2}\right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \right] + \\ & + \frac{1}{4} (t_1 + t_2) \rho \tau + \frac{1}{8} (t_2 - t_1) (\rho_n \tau_n + \rho_p \tau_p) + \frac{1}{16} (t_2 - 3t_1) \rho \nabla^2 \rho + \\ & + \frac{1}{32} (3t_1 + t_2) (\rho_n \nabla^2 \rho_n + \rho_p \nabla^2 \rho_p) + \frac{1}{4} t_3 \rho_n \rho_p, \end{aligned} \quad (27)$$

где значения числовых параметров: $t_0 = -1128,75 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^3$, $t_1 = 395,0 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^5$, $t_2 = -95,0 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^5$, $t_3 = 14000,0 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^6$ и $x_0 = 0,45$ подобраны таким образом, чтобы с помощью $\epsilon(\rho)$ получались близкие к экспериментальным энергии связи магических ядер. Одновременно таким путем достигается хорошее согласие для распределений заряда в ядрах и спектров одночастичных уровней.

Входящая в (27) плотность кинетической энергии $(\hbar^2/2m)\tau$ бралась в приближении Томаса — Ферми $\tau = \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3}$; величины $\tau_{n,p}$ аналогичным образом выражаются через $\rho_n = (N/A)\rho$ и $\rho_p = (Z/A)\rho$ соответственно. Далее предполагалось, что нуклонная плотность $\rho(r)$ для каждого ядра имеет простое фермиевское распределение по r , а параметры распределений подгонялись таким образом, чтобы воспроизвести плотности, полученные в результате вычислений по методу Скирма — Хартри — Фока [72].

Используя этот подход, авторы [71] вычислили потенциалы взаимодействия для всех возможных пар, которые можно составить из магических ядер ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{56}Ni , ^{90}Zr , ^{208}Pb . Как и в случае модели Нгоу и др., основанной на использовании бракнеровского функционала от плотности энергии, потенциалы Станку и Бринка на расстояниях, меньших сумм среднеквадратичных радиусов ядер, имеют сильное короткодействующее отталкивание. На больших расстояниях при этом получается обычное ядерное притяжение, которое может быть приближенно описано вудс-саксоновским потенциалом (3) с параметрами:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= D(11,92 - 0,41D), \\ R_V &= 1,153(A_p^{1/3} + A_T^{1/3}), \\ a_V &= 0,015(A_p^{1/3} + A_T^{1/3}) + 0,5, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $D = A_p^{2/3} + A_T^{2/3} - (A_p + A_T)^{2/3}$.

В заключение этого раздела заметим, что, независимо от конкретного способа построения бракнеровского функционала плотности энергии или скирмовского энергетического функционала, все расчеты ион-ионных потенциалов, опирающиеся на приближение внезапного столкновения, приводят к качественно близким результатам (в качестве дополнительных примеров см. [73—75]).

Наиболее характерной особенностью получаемых таким образом потенциалов является сильное короткодействующее отталкивание на расстояниях, где происходит заметное перекрытие ядерных плотностей. С одной стороны, существование этого отталкивательного кора обусловлено учетом эффекта антисимметризации, связанного с принципом Паули, непосредственно на стадии вычисления необходимых бракнеровских или скирмовских функционалов, когда подгонкой свободных параметров по свойствам конечных ядер мы стараемся удовлетворить условию насыщения ядерных сил. С другой, для по-

явления отталкивательного кора существенна гипотеза об аддитивном сложении ядерных плотностей, иначе внезапность соударения.

Другим важным результатом работ, рассмотренных в данном и предыдущем разделах, является, на наш взгляд, показанная в них возможность качественной оценки хода ион-ионного потенциала на больших расстояниях в зависимости от масс сталкивающихся ядер, а также близкое поведение во внешней области потенциалов, полученных различными авторами.

7. ТЕОРЕМА О КОНТАКТНЫХ СИЛАХ

Так называемый макроскопический подход к проблеме взаимодействия между тяжелыми ионами направлен на выяснение общих закономерностей изменения параметров потенциала в зависимости от ядерных масс и энергии столкновения. Получаемые таким путем оценки могут быть использованы в качестве фундамента для более тонких исследований, учитывающих индивидуальные особенности конкретных ядер. К категории макроскопических могут быть отнесены рассмотренные выше подходы, основанные на модели жидкой капли и использовании функционала плотности энергии. Развитие макроскопического подхода предполагает справедливость двух основных допущений. Во-первых, в рассматриваемой системе должно быть много нуклонов $A \gg 1$, что позволяет применять статистические методы и пренебрегать дискретностью ядерной структуры. Во-вторых, ядра должны иметь тонкий поверхностный слой $b \ll R$, так что плотность нуклонов по всему объему ядра практически постоянна. Оба эти предположения в конечном итоге позволяют надеяться на установление связи между взаимодействием конкретных ядер и свойствами ядерной материи.

В наиболее законченном виде макроскопическая идеология сформулирована в работах Рэндрэпа и др. [76, 77], основанных на «теореме о контактных силах», применимой к взаимодействию двух недеформируемых тел, поверхности которых имеют малую кривизну и диффузность. Согласно теореме, сила взаимодействия между такими телами как функция от кратчайшего расстояния между их поверхностями s может быть представлена в виде произведения двух факторов. Первый фактор есть приходящийся на единицу поверхности потенциал взаимодействия между плоскими и параллельными друг другу слоями из того же вещества, что и рассматриваемые тела. Второй фактор имеет чисто геометрическое происхождение и связан с кривизной поверхностей взаимодействующих тел.

Действительно, с учетом введенных выше допущений потенциал взаимодействия двух сферических тел может быть записан следующим образом:

$$V(s) \simeq \int d\sigma \epsilon(D), \quad (29)$$

где $e(D)$ — поверхностная плотность энергии взаимодействия двух плоских слоев, разделенных расстоянием D , а поверхностное интегрирование выполняется вдоль щели, разделяющей рассматриваемые тела.

Очевидно, $e(D)$ есть функция, зависящая только от свойств материала, из которого состоят рассматриваемые тела. В случае больших $D > b$, т. е. на расстояниях, превышающих диффузность края, $e(D) = 0$, а при $D = 0$ $e(0) = -2\gamma$, где γ — коэффициент поверхностного натяжения данного вещества. Причем $D = 0$ соответствует касанию тел, при котором сумма их краевых плотностей равна плотности вещества в центральных областях каждого из них.

Используя формулу (29) и тейлоровское разложение величины D вблизи $s = r - R_1 - R_2$, можно свести поверхностный интеграл к одномерному:

$$V(s) = 2\pi \bar{R}_{12} \int_{D=s}^{\infty} dDe(D), \tag{30}$$

где $R_{1,2}$ — радиусы сферических тел; r — расстояние между их центрами масс и $\bar{R}_{12} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ — приведенный радиус кривизны поверхностей.

Формула (30) по сути дела есть краткая запись рассмотренной выше теоремы. Дифференцирование этого выражения по s дает формулу для силы взаимодействия

$$F(s) = -dV/ds = -2\pi \bar{R}_{12} e(s). \tag{31}$$

Поскольку $e(0) = -2\gamma$, то максимальная сила притяжения между находящимися в контакте телами равна

$$F(0) = -4\pi \bar{R}_{12} \gamma. \tag{32}$$

Последнее соотношение имеет общий характер и применимо к телам, состоящим из различных веществ. Примеры его экспериментальной проверки для частиц из каучука, слюды и желатина даны в работах [78, 79].

В случае ядерного взаимодействия $b \simeq 1$ фм и $\gamma \simeq 1$ МэВ·фм⁻². Поэтому удобно перейти к измерению длин в единицах b , а энергии — 2γ , т. е. функция $e(D)$ может быть представлена в безразмерном виде

$$e(\xi b) = 2\gamma \Phi(\xi), \tag{33}$$

где $\xi = s/b$ — расстояние между поверхностями в единицах b . Тогда потенциал взаимодействия между сферическими ядрами принимает следующую форму:

$$V(r) = 4\pi \gamma b \bar{R}_{12} \Phi(\xi), \tag{34}$$

где $\Phi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \varphi(\xi')$.

Несмотря на то что формула (34) имеет общий характер, конкретный вид универсальной функции $\varphi(\xi)$ зависит от модели, выбираемой для описания свойств ядерной материи. Однако возможно понять качественное поведение $\varphi(\xi)$ из простых соображений. На больших расстояниях $\xi \gg 1$ она должна быстро спадать к нулю ввиду конечности радиуса действия ядерных сил. По мере сближения двух слоев ядерной материи между ними развивается притяжение, и функция $\varphi(\xi)$ возрастает по абсолютной величине, оставаясь при этом отрицательной. В точке касания $\xi = 0$ она достигает своего минимума $\varphi(0) = -1$. Дальнейшее внедрение слоев друг в друга ($\xi < 0$) приводит к сильному отталкиванию и росту $\varphi(\xi)$ в сторону положительных значений.

В работе [76] для вычисления $\varphi(\xi)$ использовано приближение Томаса — Ферми. Предполагалось, что плотности слоев ядерной материи складываются аддитивно (внезапное столкновение). Энергия взаимодействия вычислялась с помощью нуклон-нуклонного потенциала [80, 81]:

$$V_{NN}(r) = -C \frac{\exp(-r/b)}{r/b} (1 - p^2/p_0^2), \quad (35)$$

зависящего от относительного импульса нуклонов p , что имитирует влияние короткодействующего нуклон-нуклонного кора. Параметры: $b = 0,62567$ фм, $p_0 = 392,48$ МэВ/с и $C = 300$ МэВ взяты из работы [82], где они получены из условия наилучшего описания свойств ядерной материи и ряда ядер с потенциалом (35) в рамках метода Томаса — Ферми.

Вычисленная таким путем функция $\Phi(\xi)$ табулирована в работе [76]. Для практических целей удобно использовать ее аналитическое приближение [77]:

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\xi - 2,54)^2 - 0,0852(\xi - 2,54)^3, & \xi \leq 1,2511, \\ -3,437 \exp(-\xi/0,75), & \xi \geq 1,2511. \end{cases} \quad (36)$$

Используя значения $\gamma = 0,9517$ МэВ·фм⁻² и $R_i = \tilde{R}_i (1 - \tilde{R}_i^2)$, где $\tilde{R}_i = (1,13 + 0,0002 A_i) A_i^{1/3}$ фм, Рэндрапп и др. [76, 77] с помощью формул (34) и (36) построили потенциал взаимодействия между тяжелыми ионами, который находится в качественном согласии с результатами рассмотренных выше бракнеровских расчетов [см. формулу (20)]. Отметим также, что «контактная» параметризация (34) прекрасно работает для феноменологических потенциалов (6), потенциалов, полученных с использованием скирмовского взаимодействия (27). Все это, на наш взгляд, подтверждает разумность сделанных при выводе формулы (34) предположений для случая ядерной материи, т. е. справедливость теоремы о контактных силах для ионного потенциала. Обобщение теоремы на случай, когда кривизна поверхностей не считается малой, рассмотрено в работе [83].

8. ЗАВИСИМОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА ОТ ЭНЕРГИИ

Всюду выше, обсуждая вопрос о связи ион-ионного потенциала с общими свойствами бесконечной ядерной материи или эффективным нуклон-нуклонным взаимодействием, мы не учитывали скорость относительного движения сталкивающихся ядер. Вместе с тем из самых общих физических соображений следует ожидать, что параметры оптического потенциала и даже его качественное поведение могут заметно меняться по мере роста энергии налетающего ядра.

В частности, при малых энергиях, когда средний импульс переносного движения нуклона в налетающем ядре $k = \left(\frac{2m E}{\hbar^2 A}\right)^{1/2}$ мал по сравнению с граничным импульсом Ферми k_F для внутреннего движения нуклонов в ядрах, в импульсном пространстве имеет место сильное перекрытие ферми-сфер сталкивающихся ядер. В этом случае велика доля нуклонов, которые в момент столкновения должны подвергнуться влиянию принципа Паули. В противном случае $k > 2k_F$ ферми-сферы не перекрываются, и принцип Паули не препятствует нуклонам обоих ядер локализоваться в объеме порядка размеров составной ядерной системы. Другими словами, из простых оценок можно сделать вывод об уменьшении вклада принципа Паули в модуль сжатия ядерной материи с ростом энергии столкновения.

Бек, Мюллер и Кюхлер [84], используя формализм матрицы реакции Бракнера — Голдстоуна [85, 86], придали этим оценкам более точный количественный смысл. При вычислении потенциала взаимодействия между тяжелыми ионами в [84] предполагалось, что в ходе столкновения распределения плотности нуклонов в обоих ядрах не меняются, т. е. справедливо приближение внезапного столкновения. Однако в соответствии с принципом Паули считалось, что в ходе столкновения нуклоны, попадающие в область перекрытия ферми-сфер обоих ядер, должны перестроиться в импульсном пространстве таким образом, чтобы ни одно из состояний не было занято дважды. При этом считалось, что перестройка происходит наипростейшим способом, т. е. путем увеличения радиусов ферми-сфер каждого из ядер.

В качестве другого упрощающего допущения было принято приближение локальной плотности, т. е. потенциал взаимодействия между двумя ядрами, разделенными расстоянием D , определялся следующим образом:

$$V(D) = \int \varepsilon(k_{F_1}, k_{F_2}, k) \rho(\mathbf{r}, D) d\mathbf{r}, \quad (37)$$

где граничные импульсы Ферми k_{F_1} , k_{F_2} отвечают локальным плотностям соответствующих ядер, а ρ — суммарная плотность нуклонов, зависящая от расстояния D . $\varepsilon(k_{F_1}, k_{F_2}, k)$ обозначена приходящаяся на один нуклон энергия взаимодействия двух слоев ядерной материи, скорость относительного движения которых характеризуется средним импульсом k . Она определялась как разность энергий составной системы и двух систем, удаленных на большое расстояние друг

от друга:

$$\varepsilon = \Delta\tau + \Delta\pi = \tau_{1+2} + \pi_{1+2} - (\tau_1 + \tau_2) - (\pi_1 + \pi_2). \quad (38)$$

Разность кинетических энергий $\Delta\tau$ обусловлена перестройкой нуклонов в импульсном пространстве согласно принципу Паули. Потенциальные энергии π вычислялись в рамках формализма матрицы реакции G :

$$\pi = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{F}} dk_1 dk_2 \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | G | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle / \int_{\mathcal{F}} dk_1 dk_2, \quad (39)$$

где интегрирование в импульсном пространстве проводится по области всех занятых состояний \mathcal{F} . Матрица реакции G следующим образом связана с затравочным нуклон-нуклонным взаимодействием v :

$$G = v + v \frac{Q}{e + i\eta} G, \quad (40)$$

где Q — оператор Паули и e — самосогласованный энергетический знаменатель. В качестве затравочного взаимодействия v был взят нуклон-нуклонный потенциал Рейда с мягким кором [51].

Изложенная выше схема была применена к вычислению потенциала взаимодействия двух ядер ^{16}O , а также ядер ^{40}Ar и ^{121}Sb [84]. Вычисления дали следующую качественную картину изменения реальной части оптического потенциала с энергией. При малых энергиях ($k \rightarrow 0$) на расстояниях порядка суммы радиусов сталкивающихся ядер возникает отталкивательный кор, обусловленный действием принципа Паули. На больших расстояниях (на краю ядра) возникает поверхностная потенциальная яма с глубиной несколько десятков мегаэлектрон-вольт. По мере увеличения энергии (например, при $k \simeq 1 \text{ фм}^{-1}$) на малых расстояниях по-прежнему сохраняется отталкивательный кор. Однако сила отталкивания, определяемая наклоном кривой ион-ионного потенциала, уменьшается, что отвечает ослаблению влияния принципа Паули. Одновременно с этим происходит увеличение глубины притягивающей ямы на краю ядра. При дальнейшем увеличении энергии столкновения ($k \simeq 2 \text{ фм}^{-1}$) потенциал становится всюду притягивающим, вплоть до самых малых расстояний, где его глубина превышает 100 МэВ. Изменение ион-ионного потенциала в указанной области энергий ($k \lesssim 2 \text{ фм}^{-1}$) в основном определяется энергетической зависимостью кинетического члена $\Delta\tau$ в (38), вытекающей из требования перестройки нуклонов в импульсном пространстве. При очень больших энергиях ($k \simeq 3 \text{ фм}^{-1}$), согласно расчетам [84], принцип Паули сильнее сказывается на потенциальном члене $\Delta\pi$ выражения (38), что в принципе может привести к отталкивательному потенциалу. Однако такие большие энергии лежат вне области интересов настоящей работы.

Близкие по духу к работе [84] расчеты Изумото, Креволда и Фасслера [87, 88], в которых с тем же потенциалом Рейда получено само-

согласованное решение уравнения Бете — Голдстоуна (40) в импульсном пространстве, привели к той же качественной картине зависимости ион-ионного потенциала от энергии столкновения.

9. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Вводные замечания. Остановимся подробнее на вопросе о том, какая информация о взаимодействии тяжелых ионов может быть получена из существующих микроскопических подходов в теории ядерных реакций. Напомним, что мы применяем термин «микроскопические» лишь к тем подходам, которые основаны на приближенном решении многочастичного уравнения Шредингера с парным нуклон-нуклонным потенциалом. Другой характерной особенностью этих подходов является стремление к последовательному учету принципа Паули в волновых функциях и уравнениях.

В общем случае решение многоканальной задачи о столкновении тяжелых ионов приводит к эффективному взаимодействию, которое нелокально, зависит от энергии и орбитального момента относительного движения. По мере увеличения масс сталкивающихся ядер эти зависимости ослабевают. Поэтому в случае тяжелых ионов, как правило, оказывается возможным для упрощения задачи пользоваться локальным потенциалом, который слабо зависит от энергии.

В последние годы развитие микроскопических подходов позволило перейти от изучения столкновений легчайших ядер к расчетам для более сложных систем, как $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$, ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$, ${}^{12}\text{C} + {}^{16}\text{O}$, ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ и др. В связи с этим, несмотря на приближенный характер расчетов и неопределенности наших знаний о нуклон-нуклонном потенциале, появилась возможность исследовать поведение ион-ионного потенциала непосредственно из многочастичного уравнения Шредингера.

Интерполяционный подход. Очень удобно исследовать взаимодействие тяжелых ионов в рамках интерполяционного подхода [89—94] к теории ядра, поскольку в этом методе с самого начала используется трансляционно-инвариантная коллективная переменная ρ , определяемая соотношением

$$\rho^2 = \frac{1}{A} \sum_{i>j}^A (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \equiv A\bar{r}^2, \quad (41)$$

которая не меняется при любых перестановках нуклонов. В этой формуле \mathbf{r}_i — координата i -го нуклона, а \bar{r}^2 — среднеквадратичный радиус системы из A нуклонов.

В простейшем случае, когда не учитываются состояния типа компаунд-ядро и рассматривается лишь один бинарный канал реакции, полностью антисимметричная волновая функция, отвечающая столкновению двух ионов из A_1 и A_2 нуклонов соответственно, может

быть записана в следующем виде:

$$\Psi(\rho) = \Phi(\rho) w(\rho), \quad (42)$$

где символом $\rho = \{\rho, \Omega\rho\}$ обозначен радиус-вектор в $(3A-3)$ -мерном пространстве относительных координат $A_1 + A_2$ нуклонов. Длина вектора ρ определена выражением (41), а совокупность $(3A-4)$ углов, обозначенная $\Omega\rho$, задает его направление. Конкретный выбор этих углов здесь не существен.

Входящая в (42) функция $w(\rho)$ выглядит следующим образом:

$$w(\rho) = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A} \{Z^L Y_{LM}(Z) \varphi_1(\rho_1) \varphi_2(\rho_2)\}, \quad (43)$$

где $Z = (A_1, A_2/A)^{1/2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ — «приведенное» расстояние между центрами масс ионов, координаты которых обозначены \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно; L — орбитальный момент относительного движения ионов. Волновая функция $\varphi_1(\rho_1)$ описывает движение A_1 нуклонов в одном из ионов, а вектор $\rho_1 = \{\rho_1, \Omega\rho_1\}$ определяется совершенно аналогично вектору ρ , но для $(3A_1-3)$ -мерного пространства относительных координат нуклонов. Функция $\varphi_2(\rho_2)$ и вектор ρ_2 относятся к A_2 нуклонам второго иона. Оператор \hat{A} обеспечивает антисимметризацию выражения в фигурных скобках по всем $N = A_1!A_2!$ перестановкам, переводящим нуклоны из одного иона в другой.

Если функция $w(\rho)$ считается известной, то $\Phi(\rho)$, описывающая относительное движение ионов, находится из многочастичного уравнения Шредингера

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \sum_{i>j}^A V(i, j) - E \right\} \Phi(\rho) w(\rho) = 0 \quad (44)$$

с парным нуклон-нуклонным потенциалом $V(i, j)$. Умножая это уравнение слева на $w^*(\rho)$ и интегрируя по углам $\Omega\rho$, получаем уравнение для неизвестной функции $\Phi(\rho)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\Phi'' + \frac{\mu'}{\mu} \Phi' \right] + [V(\rho) - \varepsilon] \Phi = 0, \quad (45)$$

где штрих означает дифференцирование по ρ ; $V(\rho)$ — усредненное взаимодействие нуклонов, входящих в разные ионы, которое является прямым аналогом потенциалов двойной свертки, рассмотренных выше; ε — энергия относительного движения. Символом μ обозначена следующая, зависящая от ρ функция:

$$\mu = \rho^{3A-4} \int d\Omega\rho |w(\rho)|^2. \quad (46)$$

Введя новую функцию $\chi(\rho) = \mu^{-1/2} \Phi(\rho)$, получим вместо (45) простое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + [V(\rho) + U(\rho) - \varepsilon] \chi = 0. \quad (47)$$

имеющее вид радиального уравнения Шредингера для движения частицы в потенциале $V(\rho) + U(\rho)$.

Появившийся в (47) потенциал

$$U(\rho) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left(\frac{\mu'}{\sqrt{\mu}} \right)' \quad (48)$$

описывает отталкивание ионов, обусловленное действием принципа Паули. В самом деле, при всей сложности интегрирования в (46), пользуясь техникой K -гармоник, можно показать [92], что при $\rho \leq \rho_0$, где ρ_0 — значение переменной ρ , при котором происходит «соприкосновение» ионов, величина (48) может быть оценена в общем случае. При переходе к переменной $r = r_2 - r_1$, т. е. расстоянию между центрами масс ионов, потенциал $U(\rho)$ имеет вид отталкивательного кора с радиусом примерно равным сумме радиусов $R = R_1 + R_2$ сталкивающихся ионов. Высота кора при этом близка к значению кинетической энергии A нуклонов, локализованных внутри сферического объема с радиусом ρ_0/\sqrt{A} .

Метод резонирующих групп. Наиболее разработанным микроскопическим подходом к решению многонуклонных задач является метод резонирующих групп. Подробное описание этого метода и примеры применения к конкретным системам даны в монографии Вильдермута и Тана [95].

В рамках этого подхода волновая функция находящейся в непрерывном спектре многонуклонной системы записывается в полностью антисимметризованном виде:

$$\Psi = \hat{A} \left\{ \sum_i \varphi(A_i) \varphi(B_i) F(\mathbf{R}_i) + \sum_m a_m \varphi_m(A) \right\}, \quad (49)$$

где $\varphi(A_i)$ и $\varphi(B_i)$ — волновые функции кластеров A_i и B_i в i -м канале; $F(\mathbf{R}_i)$ — неизвестная функция, описывающая относительное движение кластеров; \mathbf{R}_i — расстояние между их центрами масс. Таким образом, первая сумма в (49) представляет собой часть полной волновой функции, в которой заключена информация о движении в открытых бинарных каналах реакции. Вторая сумма есть разложение по состояниям типа компаунд-ядро $\varphi_m(A)$ с неизвестными коэффициентами a_m . Функции $\varphi_m(A)$ быстро спадают вне области перекрывания кластеров. Эта часть полной волновой функции эффективно учитывает возможность поляризации кластеров при столкновении.

В отличие от интерполяционного подхода, рассмотренного выше, функция $F(\mathbf{R}_i)$ не инвариантна по отношению к перестановкам и не может быть вынесена из-под оператора антисимметризации \hat{A} . Поэтому после подстановки волновой функции (49) в уравнение Шредингера и стандартной операции проектирования для неизвестных $F(\mathbf{R}_i)$ и a_m получается сложная система интегродифференциальных уравнений.

Последовательным исключением (с помощью формализма функций Грина) из этой системы уравнений всех неупругих каналов и

компаунд-состояний можно получить одно интегродифференциальное уравнение для волновой функции $F(\mathbf{R})$, описывающей относительное движение кластеров в упругом канале. Возникающее при этом эффективное взаимодействие нелокально, зависит от энергии и имеет мнимую поглощающую часть. По существу это сложное взаимодействие и нужно сопоставлять с оптическим потенциалом.

Однако такой путь вычисления оптического потенциала сложен и практически невыполним. Вместо этого решением уравнений методом резонирующих групп можно вычислить фазы упругого рассеяния, а затем подобрать локальный оптический потенциал, который приводит к близким значениям фаз при условии хорошего описания экспериментальных данных по угловым распределениям упругого рассеяния и поляризации.

Такая программа была реализована [96—98] для рассеяния в системах ${}^3\text{H} + \alpha$, $\alpha + \alpha$ и $\alpha + {}^{16}\text{O}$. Как показали расчеты, для удовлетворительного воспроизведения результатов метода резонирующих групп реальная часть «эквивалентного» оптического потенциала должна быть расщеплена по четности (для легких ионов) в своей дальнедействующей части. Кроме того, на малых расстояниях она должна иметь отталкивательный кор, который предотвращает появление ложных связанных состояний и обеспечивает правильное поведение функции относительного движения, которое отличается быстрым затуханием в сторону малых расстояний при перекрывании объемов кластеров.

Последнее замечание может быть проиллюстрировано волновой функцией относительного движения двух α -частиц в состоянии с $L = 0$ при малых энергиях [95]. Исследовались распределения плотности протонов в ядре ${}^8\text{Be}$, полученные с антисимметризованными и неантисимметризованными волновыми функциями. Результаты показывают, что если для вычислений использовать неантисимметризованную функцию, то функцию относительного движения в ней лучше брать в виде $R^4 \exp(-bR^2)$, т. е. достаточно сильно препятствующую проникновению двух кластеров друг в друга.

Таким образом, мы видим, что при попытке воспроизвести результаты расчетов по методу резонирующих групп с помощью «эквивалентного» локального потенциала (для точечных бесструктурных частиц, что реально и предполагается в оптической модели) возникает необходимость введения отталкивательного кора, препятствующего взаимному проникновению сталкивающихся ядер. Происхождение кора связано с антисимметризацией многочастичной волновой функции согласно принципу Паули.

Метод ортогональных условий. Применение метода резонирующих групп или близкого к нему метода генераторных координат для расчета столкновений тяжелых ионов сопряжено с огромными вычислительными трудностями, возникающими при антисимметризации волновой функции многонуклонной системы. В связи с этим разрабатываются подходы, которые значительно проще в практическом при-

менении и вместе с тем приводят к многочастичным волновым функциям, имеющим поведение, близкое к результатам метода резонирующих групп.

Было замечено, что для двух взаимодействующих составных систем из фермионов имеются так называемые запрещенные состояния, в которые система не может попадать из-за принципа Паули. Один из способов построения таких состояний был предложен еще в 1962 г. Фешбахом [99]. Наиболее полный обзор, посвященный близкому кругу вопросов, опубликован недавно В. И. Кукулиным, В. Г. Неудачиным и Ю. Ф. Смирновым [100].

Для реальных расчетов широко используется предложенный Саито [101] метод ортогональных условий. Суть этого подхода заключается в замене сложной обменной правой части уравнения метода резонирующих групп для функции относительного движения кластеров условием ортогональности этой функции ко всем так называемым «лишним» решениям. При действии оператора антисимметризации на волновую функцию метода резонирующих групп (с условиями ортогональности) эти решения исчезают. Таким образом, метод ортогональных условий сводит задачу к решению прямой (без учета обменных эффектов) части уравнения Шредингера для волновой функции относительного движения кластеров в подпространстве, ортогональном ко всем запрещенным состояниям.

В работе [102] в рамках метода ортогональных условий изучались системы $\alpha + \alpha$, $\alpha + {}^{16}\text{O}$ и ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$. В частности, были исследованы поправки к прямому взаимодействию кластеров, обусловленные требованием ортогональности к запрещенным состояниям. Оказалось, что в случае $\alpha + \alpha$ -рассеяния расчет по методу резонирующих групп приводит к функциям относительного движения в s - и d -состояниях, имеющих в области перекрытия кластеров почти не зависящие от энергии осцилляции, которые обычно воспринимаются как проявление отталкивательного края с радиусом порядка расстояния от начала координат до внешней узловой точки функции относительного движения. Такое поведение волновых функций для $\alpha + \alpha$ -рассеяния может быть получено за счет их ортогональности к запрещенным состояниям, а поправка к прямому взаимодействию двух α -частиц в методе ортогональных условий мала. При переходе к более тяжелым ядрам ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ осцилляции волновой функции относительного движения в области перекрывания кластеров сильно подавлены даже для нерезонансных состояний непрерывного спектра при низких (≤ 20 МэВ) энергиях. Это можно интерпретировать как проявление эффекта отталкивания в подпространстве разрешенных состояний. Причем сила этого эффекта уменьшается по мере роста энергии столкновения. Таким образом, оказывается, что вытекающее из метода ортогональных условий эффективное взаимодействие двух ядер ${}^{16}\text{O}$, определенное в подпространстве разрешенных состояний, имеет на расстояниях $r \leq 4$ фм сильное (около 250 МэВ) отталкивание, которое полностью покрывает область координатного пространства,

где локализованы волновые функции запрещенных состояний. Поэтому для тяжелых ионов оказывается возможным пренебречь условиями ортогональности, эффективно заменив их отталкивательным кором в локальном ион-ионном потенциале.

Другая интересная возможность получения эффективного потенциала взаимодействия ядер в подпространстве разрешенных состояний продемонстрирована в работах [103, 104]. Для пар легких ядер $d + {}^3\text{H}$, $d + \alpha$, $\alpha + {}^3\text{H}$, $\alpha + \alpha$ количество запрещенных состояний невелико. Поэтому можно построить для них эффективные потенциалы с большой глубиной таким образом, чтобы запрещенные состояния отвечали истинно связанным состояниям в этих потенциалах. Тогда в силу ортогональности волновых функций непрерывного и дискретного спектров эрмитового гамильтониана запрещенные состояния ортогональны волновой функции, описывающей рассеяние, автоматически. Вычисления в рамках этого подхода привели к хорошему согласию теоретических фаз рассеяния и сечений с экспериментальными. Подчеркнем еще раз, что получаемые таким методом эффективные потенциалы определены в подпространстве разрешенных состояний, поскольку иначе они имеют истинно связанные состояния пар кластеров с квантовыми числами, которые запрещены принципом Паули.

Как отмечалось [100], этот подход не может быть применен в случае тяжелых систем ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$, ${}^{12}\text{C} + {}^{16}\text{O}$, ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$, в значительной степени ввиду сильного подавления волновых функций относительно движения кластеров в области их перекрытия. В этих задачах физически оправдано использовать для имитации действия принципа Паули отталкивательный кор. В промежуточном случае $\alpha + \alpha$ -рассеяния возможно работать как с отталкивательным кором, так и с глубокими потенциалами, обеспечивающими ортогональность волновой функции относительного движения запрещенным состояниям. Выбор того или иного подхода зависит от того, как в дальнейшем планируется использование эффективного потенциала [102, 103].

В заключение этого раздела отметим, что ортогонализация волновой функции относительного движения кластеров большому количеству запрещенных состояний, как правило, низколежащих по энергии и локализованных в области перекрытия кластеров, означает быстрое затухание волновой функции относительного движения в сторону малых расстояний между сталкивающимися ионами, т. е. потенциал взаимодействия этих кластеров имеет отталкивание. Поэтому в случае тяжелых ионов удобнее работать с неантисимметризованными функциями, вводя в потенциал короткодействующий отталкивательный кор, который можно рассматривать с точки зрения метода ортогональных условий как квазиклассическую имитацию действия принципа Паули.

Другие микроскопические подходы. Не имея возможности останавливаться подробно на всех существующих микроскопических подходах к вычислению взаимодействия между тяжелыми ионами,

отметим еще ряд работ, представляющих, на наш взгляд, большой интерес.

Грайнер и Прусс [105] изучали взаимодействие ядер $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ и $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ в рамках двухцентровой оболочечной модели и продемонстрировали, что в случае быстрого соударения между этими ядрами возникает сильное отталкивание. Аналогичный результат получен Г. А. Вершининым и П. А. Черданцевым [106] при учете отклонений формы ядер от сферической, а также возможной деформации компанд-ядра.

В работе Юкавы [107] вычислена реальная часть потенциала взаимодействия двух ионов ^{16}O в рамках метода, близкого методу генераторных координат с парным NN -взаимодействием типа Волкова. Полученный потенциал на малых расстояниях имеет отталкивательный кор радиуса порядка 4 фм, а на краю ядра при этом возникает сравнительно мелкая (~ 24 МэВ) притягивающая потенциальная яма. Автор [107] считает появление кора общим явлением и отмечает, что поверхностный характер прямых ядерных реакций может быть одним из проявлений короткодействующего отталкивания между ядрами.

Расчет взаимодействия двух деформированных ядер ^{12}C методом Хартри — Фока со скирмовским NN -взаимодействием [108] показал, что независимо от ориентации осей симметрии ядер ^{12}C потенциал имеет короткодействующий отталкивательный кор и мелкую притягивающую яму на краю ядра.

В последнее время Г. Ф. Филиппов [109] предложил в рамках метода резонирующих групп новый многообещающий подход с использованием разложения волновых функций относительного движения по осцилляторному базису, а также асимптотических выражений для коэффициентов разложения. На наш взгляд, этот метод позволит существенно продвинуться в сторону тяжелых ионов при вычислении эффективного потенциала взаимодействия, включая область перекрытия объемов сталкивающихся ядер.

В заключение данного раздела отметим, что большинство микроскопических подходов к оценке потенциала ион-ионного взаимодействия, в которых проводится последовательный учет принципа Паули и многонуклонный характер задачи, приводят к следующей качественной картине взаимодействия: во-первых, эти потенциалы имеют поверхностный характер, т. е. мелкую притягивающую яму на краю ядра, во-вторых, в области перекрытия волновых функций ядер возникает отталкивательный кор с радиусом порядка суммы радиусов ядер. Таким образом, несмотря на то что существующие микроскопические подходы пока не в состоянии претендовать на высокую точность вычислений для столкновений тяжелых ионов, тем не менее они вполне однозначно указывают на справедливость качественных оценок свойств реальной части тяжелоионного оптического потенциала, сделанных на основе макроскопических подходов, рассмотренных в предыдущих разделах. Поэтому при построении феноменологиче-

ских оптических потенциалов, на наш взгляд, сформулированные здесь особенности взаимодействия тяжелых ионов должны быть учтены с самого начала.

Подчеркнем, что для получения рассматриваемой здесь формы потенциала существен учет многочастичности и антисимметрии полной волновой функции на нуклонном уровне. Так, например, полумикроскопический подход, предложенный Н. С. Зеленской и И. С. Гурбанович [110, 111] для расчета потенциала взаимодействия ядер $1p$ -оболочки, учитывает эффект кластеризации сталкивающихся ионов на языке задачи трех или четырех бесструктурных тел. Глубокие «затравочные» потенциалы взаимодействия кластеров и неполный учет многочастичности приводят в рамках этого подхода к глубоким тяжелоионным потенциалам без отталкивательного кора.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ различных теоретических подходов к проблеме взаимодействия атомных ядер, а также доступной информации о столкновениях тяжелых ионов, полученной феноменологическим анализом экспериментальных данных, приводит нас к выводу о том, что наиболее физически оправданной является следующая структура реальной части тяжелоионного оптического потенциала:

$$V(k, r) = V_{\text{кор}}(k, r) + V_N(k, r) + V_{\text{coul}}(r), \quad (50)$$

где $V_{\text{кор}}(k, r)$ — короткодействующий отталкивательный кор; $V_N(k, r)$ — потенциал ядерного притяжения и $V_{\text{coul}}(r)$ — кулоновское взаимодействие, т. е. мы предполагаем, что для тяжелых ионов с разумной степенью точности допустимо представление о локальном оптическом потенциале, параметры которого зависят от скорости относительного движения сталкивающихся ядер. В связи с этим в формулу (50) включена зависимость потенциала от среднего импульса переносного движения нуклонов налетающего ядра $k = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \frac{E}{Ap}\right)^{1/2}$.

Подчеркнем, что существование в потенциале взаимодействия отталкивательного кора обусловлено физическими причинами общего характера. Короткодействующее отталкивание есть результат проявления принципа запрета Паули, который препятствует перекрыванию волновых функций двух составных систем из фермионов. На это обратил внимание Я. Б. Зельдович еще в 1959 г. [112]. В физике взаимодействия атомов это явление известно давно [113].

Как было показано выше, учет принципа Паули в теоретических моделях ион-ионного взаимодействия, основанных на приближении внезапного столкновения, с необходимостью приводит к появлению отталкивательного кора и в потенциале взаимодействия атомных ядер. Причем в случае бракнеровского подхода или использования зависящего от плотности взаимодействия Скирма частичный учет принципа Паули происходит уже на стадии построения функционала плот-

ности энергии или эффективных нуклон-нуклонных сил, когда подгонкой свободных параметров по свойствам конечных ядер мы стараемся удовлетворить условию насыщения ядерных сил. Существование кора вытекает и из имеющихся микроскопических расчетов эффективных локальных ион-ионных потенциалов методом резонирующих групп, гиперсферических функций, генераторных координат, двухцентровой оболочечной модели и т. п.

Рассмотренные в настоящей работе модели ион-ионного взаимодействия приводят к качественно близким, но все же отличающимся количественно оценкам высоты, радиуса и диффузности кора, что обусловлено помимо различий в самих теоретических подходах и степенью неопределенности наших знаний о взаимодействии нуклонов в ядерной среде или свойствах ядерной материи. Конкретная форма отталкивательного кора и его интенсивность существенно зависят от степени адиабатичности или внезапности реальных столкновений тяжелых ионов. Дополнительная неопределенность параметров кора связана с влиянием индивидуальных характеристик рассматриваемых ядер, в том числе: энергий связи, формы и распределения нуклонов.

В условиях сильной неоднозначности конкретных теоретических предсказаний, на наш взгляд, целесообразна следующая схема определения свойств короткодействующего отталкивательного кора. Исходя из простых физических предположений, мы выбираем удобную параметризацию кора, а затем, анализируя экспериментальные данные по столкновениям тяжелых ионов, определяем неизвестные параметры модели.

С этой целью мы предлагаем следующую параметризацию отталкивательного кора:

$$V_{\text{cor}}(k, r) = V_{\text{cor}}\alpha(k) f_{\text{cor}}(r), \quad (51)$$

построенную на основе простых физических соображений. Возьмем два тяжелых иона с массовыми числами A_p и A_T соответственно, причем $A_p \leq A_T$. Предположим, что в процессе столкновения они сохраняют свою структуру неизменной, а для упрощения расчетов будем считать, что ядра имеют сферическую форму с радиусами $R_{p,T} = r_0 A_{p,T}^{1/3}$ и однородным распределением нуклонов, т. е. плотность нуклонов в каждом из ядер описывается следующим образом:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ \rho_0, & r \leq R, \end{cases} \quad (52)$$

где ρ_0 — равновесная нуклонная плотность, одинаковая для обоих ядер, а $R = r_0 A^{1/3}$ — радиус ядра с массовым числом A .

Естественно ожидать, что проявление принципа Паули в процессе столкновения должно усиливаться по мере перекрытия волновых функций ядер. Поэтому мы предполагаем, что отталкивательный кор $V_{\text{cor}}(k, r)$ как функция от расстояния между центрами масс сталки-

вающихся ядер пропорционален объему их области перекрытия, т. е.

$$f_{\text{кор}}(r) = \begin{cases} 1, & x \leq x_0, \\ \frac{3}{4} a (a+1) \frac{(1-x)^2}{x} \left[1 - \frac{1}{3} d (1-x) (3+x) \right], & x_0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases} \quad (53)$$

куда входят следующие величины: $x = r/R_V$ — отношение расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер к радиусу кора (порядка суммы радиусов сталкивающихся ядер) $R_V = R_p + R_T = r_0 (A_p^{1/3} + A_T^{1/3})$; $a = R_T/R_p = A_T^{1/3}/A_p^{1/3} \geq 1$ — отношение радиуса ядра-мишени к радиусу налетающего ядра; $d = (a + 2 + 1/a)/4$; $x_0 = (a - 1)/(a + 1)$.

Очевидно, что $x \geq 1$ соответствует таким расстояниям r , на которых ядра не перекрываются своими объемами. В этом случае $f_{\text{кор}}(r) = 0$. При $x \leq x_0$ имеет место полное перекрытие (налетающее ядро «находится внутри» ядра-мишени). При этом действие принципа Паули максимально, и $f_{\text{кор}}(r) = 1$.

В рамках сделанных выше предположений по мере сближения ионов в процессе столкновения, начиная с расстояния $r = R_V$, образуется область перекрытия с удвоенной нуклонной плотностью $2\rho_0$. Аддитивное сложение плотностей приводит к увеличению энергии находящихся в этой области нуклонов, а следовательно, к увеличению энергии всей системы. В случае полного перекрытия (при $r \leq R_T - R_p$) это увеличение, очевидно, равно

$$\Delta V = 2A_p [\varepsilon(2\rho_0) - \varepsilon(\rho_0)], \quad (54)$$

где $\varepsilon(\rho)$ — полная энергия ядерной материи в пересчете на один нуклон при заданной нуклонной плотности ρ .

Свяжем теперь высоту отталкивательного кора $V_{\text{кор}}$ с величиной ΔV . Уравнение состояния ядерной материи, т. е. зависимость $\varepsilon(\rho)$, определяется поведением кинетической энергии $t(\rho)$ ферми-газа и его потенциальной энергии $v(\rho)$ при изменении нуклонной плотности ρ :

$$\varepsilon(\rho) = t(\rho) + v(\rho). \quad (55)$$

Поэтому в рамках наших предположений мы должны отождествить величину ΔV со значением потенциала взаимодействия тяжелых ионов в начале координат:

$$\Delta V = V_{\text{кор}}(k, 0) + V_N(k, 0). \quad (56)$$

Кулоновские силы в формулах (55), (56) не учитываются.

С учетом малости глубины притягивающего потенциала по сравнению с высотой отталкивательного кора для достаточно тяжелых налетающих ионов ($A_p \geq 6$) в пределе малых энергий ($k \rightarrow 0$) можно положить

$$2A_p [\varepsilon(2\rho_0) - \varepsilon(\rho_0)] = V_{\text{кор}}. \quad (57)$$

Современное состояние теории ядерной материи не позволяет получить однозначную зависимость $\varepsilon(\rho)$ даже для небольших уплотнений $\rho \ll 2\rho_0$. Поэтому, выражая соотношение (57) через модуль сжатия ядерной материи $K = 9\rho_0^2 (d^2\varepsilon/d\rho^2)_0$, для величины которого имеются довольно слабые ограничения: $K = 100 \div 300$ МэВ [114], мы получаем следующую грубую оценку высоты отталкивательного кора:

$$V_{\text{кор}} \simeq A_p \frac{1}{9} K. \quad (58)$$

Выделяя регулярный фактор A_p

$$V_{\text{кор}} = A_p v_{\text{кор}} \quad (59)$$

для величины $v_{\text{кор}}$, мы получаем довольно широкую область приемлемых значений: $v_{\text{кор}} = 10 \div 30$ МэВ.

Как уже говорилось выше, повышение энергии столкновения приводит к ослаблению действия принципа Паули. Чем меньше импульс переносного движения k , тем большая доля нуклонов при перекрывании ядерных объемов подвержена влиянию принципа Паули. Не пытаясь моделировать перестройку «лишних» нуклонов в импульсном пространстве, мы предлагаем учитывать энергетическую зависимость высоты кора с помощью фактора $\alpha(k)$, пропорционального объему перекрывания (в импульсном пространстве) фермисфер сталкивающихся ядер, центры которых разнесены на «расстоянии» k , а именно:

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} (k/2k_F) + \frac{1}{2} (k/2k_F)^3, & k \leq 2k_F, \\ 0, & k > 2k_F, \end{cases} \quad (60)$$

где k_F — граничный импульс Ферми, отвечающий нормальной плотности ρ_0 , т. е. $k_F \simeq 1,36$ фм⁻¹. При $k \ll k_F$ согласно (60) действие принципа Паули максимально. По мере увеличения отношения $k/2k_F$ оно ослабляется. При $k > 2k_F$ кор исчезает.

Таким образом, окончательное выражение для кора выглядит следующим образом:

$$V_{\text{кор}}(k, r) = A_p v_{\text{кор}} \alpha(k) f_{\text{кор}}(r). \quad (61)$$

Все входящие в эту формулу величины определены выше. Само это выражение содержит два свободных параметра: $r_0 \simeq 1$ фм и $v_{\text{кор}} \simeq 10 \div 30$ МэВ, которые подлежат определению по экспериментальным данным.

С учетом результатов обсуждавшихся выше работ мы воспользуемся параметризацией потенциала ядерного притяжения $V_N(k, r)$ (50), основанной на теореме о контактных силах:

$$V_N(k, r) = 2\pi \frac{R_p R_T}{R_p + R_T} v_N(k, s), \quad (62)$$

где $s = r - R_p - R_T$, а радиусы $R_{p,T}$ определены выше.

Опираясь на результаты Нгоу и других, мы предлагаем для $v_N(k, s)$, в отличие от традиционного вудс-саксоновского, следующее выражение:

$$v_N(k, s) = \begin{cases} -v_N(k), & s \leq 0, \\ -v_N(k) \exp[-(r - R_V)^2/a_V^2], & s \geq 0, \end{cases} \quad (63)$$

где радиус R_V определен выше, a_V — диффузность потенциала, которая является свободным параметром модели и подлежит определению по экспериментальным данным. Согласно (21) можно ожидать, что $a_V \simeq 1,9$ фм.

Для учета зависимости потенциала V_N от энергии столкновения мы выбираем простейшее выражение для величины

$$v_N(k) = v_N [1 + \beta (k/2k_F)^2], \quad (64)$$

где $v_N \simeq 4,8$ МэВ·фм⁻¹ согласно (21), а β — постоянная величина. Оба параметра v_N и β считаются свободными. Подчеркнем, что форма изменения потенциала притяжения с энергией (64) выбрана нами из интуитивных соображений. Однако в реальных ситуациях, когда анализируется упругое рассеяние тяжелых ионов в сравнительно небольших диапазонах (около 200 МэВ) энергии столкновения, импульс изменяется не сильно. Поэтому мы надеемся, что простая линейная аппроксимация позволит уловить основные закономерности изменения потенциала притяжения с энергией.

Кулоновское взаимодействие представим стандартным образом в виде потенциала равномерно заряженной сферы радиуса R_V .

Таким образом, реальная часть тяжелоионного оптического потенциала, определенная формулами (50), (53) и (60) — (64), содержит пять свободных параметров: v_{cor} , r_0 , v_N , a_V и β . Мы ожидаем, что все эти параметры, которые в основном зависят от свойств ядерной материи, не должны сильно меняться при переходе от одной пары сталкивающихся тяжелых ионов к другой. Ожидаемые значения этих параметров приведены выше.

В заключение настоящей работы отметим, что введение отталкивательного кора в потенциал взаимодействия тяжелых ионов позволило ряду авторов (см., например, [115—123]) добиться хорошего описания аномального рассеяния ионов на большие углы и отдельных характеристик ядерных молекул. С целью систематического изучения свойств ион-ионного взаимодействия необходимо применить предложенную здесь параметризацию реальной части оптического потенциала для согласованного анализа экспериментальных данных по упругому рассеянию тяжелых ионов в широком диапазоне энергий столкновения и углов рассеяния.

Первые попытки применить эту идеологию к анализу упругого рассеяния ионов ${}^6\text{Li}$ и ${}^{16}\text{O}$ на ядрах ${}^{28}\text{Si}$ оказались успешными [122—125].

Вместе с тем необходимо отметить, что для получения достаточно подробной картины зависимости свойств ион-ионного потенциала

от ядерных масс и энергии столкновения необходима новая экспериментальная информация, в частности, по упругому рассеянию ионов ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$ на ядрах ${}^{12}\text{C}$, ${}^{28}\text{Si}$, ${}^{40}\text{Ca}$, позволяющая проследить детально изменение аномального рассеяния этих ионов на большие углы в зависимости от энергии столкновения, масс налетающего ядра и мишени.

Авторы выражают искреннюю благодарность Д. П. Гречухину за постоянный интерес к работе, стимулирующие обсуждения и полезные критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.—Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 448.
2. Watson K. M.—Ibid., 1953, v. 89, p. 575.
3. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.—Ibid., 1953, v. 90, p. 166.
4. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.—Ibid., 1953, v. 91, p. 453.
5. Francis N. C., Watson K. M.—Ibid., 1953, v. 92, p. 291.
6. Adair R. K.—Ibid., 1954, v. 94, p. 737.
7. Brueckner K. A., Levinson C. A., Mahmoud H. M.—Ibid., 1954, v. 95, p. 217.
8. Saxon D. S., Woods R. D.—Ibid., p. 577.
9. Pezey C. M., Perey F. G.—Atomic Data and Nucl. Data Tables, 1976, v. 17, p. 1.
10. Rutherford E.—Philos. Mag., 1914, v. 21, p. 669.
11. Singh P. P., Schwandt P.—Nukleonika, 1976, v. 21, p. 451.
12. Igo G.—Phys. Rev. Lett., 1958, v. 1, p. 72.
13. Igo G.—Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 1665.
14. McFadden L., Satchler G. R.—Nucl. Phys., 1966, v. 84, p. 177.
15. Drisko R. M., Satchler G. R., Bassel R. H.—Phys. Lett., 1963, v. 5, p. 347.
16. Goldberg D. A., Smith S. M.—Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 500.
17. Goldberg D. A., Smith S. M., Burdzik G. F.—Phys. Rev., 1974, v. C10, p. 1362.
18. Ford K. W., Wheeler J. A.—Ann. Phys., 1959, v. 7, p. 259.
19. Wiktor S., Mayer-Böricke C., Kiss A. e. a.—Acta Phys. Polonica, 1981, v. B12, p. 491.
20. Dabrowski H., Freindl L.—IFJ Report No. 1122/PL, Krakow, 1981.
21. Cook J.—Atomic Data and Nucl. Data Tables, 1981, v. 26, p. 19.
22. Malfliet R. A., Landowne S., Rostokin V.—Phys. Lett., 1973, v. 44B, p. 238.
23. Da Silveira R.—Phys. Lett., 1973, v. 45B, p. 211.
24. Nilsson B. e. a.—Ibid., 1973, v. 47B, p. 189.
25. Knoll J., Schaeffer R.—Ibid., 1974, v. 52B, p. 131.
26. Koeling T., Malfliet R. A.—Phys. Repts, 1975, v. 22C, p. 181.
27. Christensen P. R., Winther A.—Phys. Lett., 1976, v. 65B, p. 19.
28. Macfarlane M. H., Pieper S. C.—Ibid., 1981, v. 103B, p. 169.
29. Majka Z., Gils H. J., Rebel H.—Z. Phys., 1978, Bd A288, S. 139.
30. Cook J., Gils H. J., Rebel H. e. a. KfK-report 3233, Karlsruhe, 1981.
31. Schwandt P., Kailas S., Jacobs W. W. e. a.—Phys. Rev., 1980, v. C21, p. 1656.
32. DeVries R. M., Goldberg D. A., Watson J. W. e. a.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 450.
33. Глухов Ю. А., Демьянова А. С., Дроздов С. И. и др.—ЯФ, 1981, т. 34, с. 312.
34. Zisman M. S., Cramer J. G., Goldberg D. A. e. a.—Phys. Rev., 1980, v. C21, p. 2398.

35. Satchler G. R., Halbert M. L., Stokstad R. G. e. a.— Nucl. Phys., 1980, v. A346, p. 179.
36. Cramer J. G., DeVries R. M., Goldberg D. A. e. a.— Phys. Rev., 1976, v. C14, p. 2158.
37. Myers W. D., Swiatecki W. J.— Nucl. Phys., 1966, v. 81, p. 1.
38. Wilczynski J., Siwek-Wilczynska K.— Phys. Lett., 1975, v. 55B, p. 270.
39. Wilczynski J.— Nucl. Phys., 1973, v. A216, p. 386.
40. Myers W. D.— Nucl. Phys., 1973, v. A204, p. 465.
41. Krappe H. J.— Lecture Notes in Phys., 1975, v. 33, p. 24.
42. Krappe H. J., Nix J. R., Sierk A. J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 215.
43. Krappe H. J., Nix J. R., Sierk A. J.— Phys. Rev., 1979, v. C20, p. 992.
44. Delion D. S. e. a.— Z. Phys., 1980, Bd A297, S. 115.
45. Brink D. M., Rowley N.— Nucl. Phys., 1974, v. A219, p. 79.
46. Gross D. H. E., Kalinowski H.— Phys. Lett., 1974, v. 48B, p. 302.
47. Rickertsen L. D., Satchler G. R.— Ibid., 1977, v. 66B, p. 9.
48. Satchler G. R.— Phys. Lett., 1975, v. 59B, p. 121.
49. Satchler G. R., Love W. G.— Phys. Lett., 1976, v. 65B, p. 415.
50. Bertsch G. e. a.— Nucl. Phys., 1977, v. A284, p. 399.
51. Reid R. V.— Ann. Phys., 1968, v. 50, p. 411.
52. Satchler G. R.— Phys. Lett., 1975, v. 55B, p. 167.
53. Satchler G. R.— Ibid., p. 201.
54. Satchler G. R.— Phys. Lett., 1975, v. 58B, p. 408.
55. Singh P. P., Schwandt P., Yang G. C.— Ibid., v. 59B, p. 113.
56. Satchler G. R.— Nucl. Phys., 1977, v. A279, p. 493.
57. Satchler G. R. e. a.— Ibid., 1978, v. A298, p. 313.
58. Satchler G. R., Love W. G.— Phys. Repts, 1979, v. 55C, p. 183.
59. Satchler G. R., Love W. G.— Phys. Lett., 1978, v. 76B, p. 23.
60. Satchler G. R.— Ibid., 1979, v. 83B, p. 284.
61. Satchler G. R.— Nucl. Phys., 1979, v. A329, p. 233.
62. Brueckner K. A. e. a.— Phys. Rev., 1968, v. 171, p. 1188.
63. Brueckner K. A. e. a.— Ibid., 1969, v. 181, p. 1543.
64. Brueckner K. A., Buchler J. R., Kelly M. M.— Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 944.
65. Ngô C., Tamain B., Galin J. e. a.— Nucl. Phys., 1975, v. A240, p. 353.
66. Ngô C., Tamain B., Beiner M. e. a.— Ibid., v. A252, p. 237.
67. Lombard R. J.— Ann. Phys., 1973, v. 77, p. 380.
68. Beiner M., Lombard R. J.— Ibid., 1974, v. 86, p. 262.
69. Ngô C., Ngô H.— Nucl. Phys., 1980, v. A348, p. 140.
70. Buchler J. R., Ingber L.— Ibid., 1971, v. A170, p. 1.
71. Stancu F., Brink D. M.— Ibid., 1976, v. A270, p. 236.
72. Beiner M. e. a.— Ibid., 1975, v. A238, p. 29.
73. Fleckner J., Mosel U.— Ibid., 1977, v. A277, p. 170.
74. Behera B., Panda K. C., Satpathy R. K.— Phys. Rev., 1979, v. C20, p. 683.
75. Ismail M., Osman M. M.— Ibid., 1981, v. 24, p. 458.
76. Blocki J. e. a.— Ann. Phys., 1977, v. 105, p. 427.
77. Randrup J.— Nucl. Instrum. and Methods, 1977, v. 146, p. 213.
78. Israelachvili J. N., Tabor D.— Proc. Roy. Soc., 1972, v. A331, p. 19.
79. Johnston K. L., Kendall K., Roberts A. D.— Ibid., 1971, v. A324, p. 301.
80. Seyler R. G., Blanchard C. H.— Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 227.
81. Seyler R. G., Blanchard C. H.— Ibid., 1963, v. 131, p. 355.
82. Myers W. D., Swiatecki W. J.— Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 395.
83. Blocki J., Swiatecki W. J.— Ibid., 1981, v. 132, p. 53.
84. Beck F., Müller K.-H., Köhler H. S.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 837.
85. Brueckner K. A.— Phys. Rev., 1955, v. 97, p. 1353.
86. Goldstone J.— Proc. Roy. Soc., 1957, v. A239, p. 267.
87. Izumoto T., Krewald S., Faessler A.— Phys. Lett., 1980, v. 95B, p. 16.
88. Izumoto T., Krewald S., Faessler A.— Nucl. Phys., 1980, v. A341, p. 319.

89. Жуков М. В., Эфрос В. Д.— ЯФ, 1971, т. 14, с. 577.
90. Базь А. И., Жуков М. В.— ЯФ, 1972, т. 16, с. 60.
91. Базь А. И., Жуков М. В.— Там же, с. 958.
92. Базь А. И.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 607.
93. Базь А. И.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 397.
94. Baz A. I., Bragin V. M.— Phys. Lett., 1976, v. 64B, p. 128.
95. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
96. Partridge R. A., Brown R. E., Tang Y. C., Thompson D. R.— In: Proc. of the Second Intern. Conf. on Clustering Phenomena in Nuclei, College Park, Maryland, 1975, p. 225.
97. Chien W. S., Brown R. E.— Phys. Rev., 1975, v. C10, p. 1767.
98. Partridge R. A., Tang Y. C., Thompson D. R.— Nucl. Phys., 1976, v. A373, p. 341.
99. Feshbach H.— Ann. Phys., 1962, v. 19, p. 287.
100. Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.— ЭЧАЯ, 1979, т. 10, вып. 6, с. 1236.
101. Saito S.— Progr. Theoret. Phys., 1969, v. 41, p. 705.
102. Tonsaki-Suzuki A., Kamimura M., Ikeda K.— Suppl. Progr. Theoret. Phys., 1980, v. 68, p. 359.
103. Neudetchin V. G. e. a.— Phys. Lett., 1974, v. 34B, p. 581.
104. Neudetchin V. G.— Nuovo cimento Lett., 1972, v. 5, p. 834.
105. Pruess K., Greiner W.— Phys. Lett., 1970, v. 33B, p. 197.
106. Вершинин Г. А., Черданцев П. А.— ЯФ, 1974, т. 19, с. 1019.
107. Yukawa T.— Phys. Lett., 1972, v. 38B, p. 1.
108. Cognon G., Doubre H., Flocard H.— Nucl. Phys., 1979, v. A331, p. 213.
109. Филиппов Г. Ф.— ЯФ, 1981, т. 33, с. 928.
110. Гурбанович И. С., Зеленская Н. С.— ЯФ, 1978, т. 27, с. 1513.
111. Гурбанович И. С., Зеленская Н. С.— ЯФ, 1982, т. 36, с. 1180.
112. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 569.
113. Гомбаш П. Проблема многих тел в квантовой механике: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
114. Бете Г. Теория ядерной материи: Пер. с англ. М.: Мир, 1974, с. 46.
115. Гриднев К. А., Дарвиш Н. З., Демьянова А. С. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1978, т. 42, с. 2361.
116. Baz A. I., Goldberg V. Z., Darwisch N. Z. e. a.— Nuovo cimento Lett., 1977, v. 18, p. 227.
117. Baz A. I., Goldberg V. Z., Gridnev K. A. e. a.— Z. Phys., 1977, Bd A28¹, S. 174.
118. Darwisch N. Z. e. a.— Nuovo cimento, 1977, v. 42, p. 303.
119. Гриднев К. А., Оглоблин А. А.— ЭЧАЯ, 1975, т. 6, с. 393.
120. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Т. 1.: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975.
121. Michaud G. J.— Phys. Rev., 1973, v. C8, p. 525.
122. Брагин В. Н. Препринт ИАЭ-3460/2. М., 1981.
123. Брагин В. Н.— ЯФ, 1982, т. 36, с. 656.
124. Брагин В. Н. Препринт ИАЭ-3467/2. М., 1982.
125. Брагин В. Н.— ЯФ, 1983, т. 37, с. 1217.