

## КУЛОНОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ С ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

*Л. Д. Блохинцев, А. М. Мухамеджанов, А. Н. Сафронов*

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ,  
Москва

Рассмотрено влияние кулоновских эффектов на свойства амплитуд ядерных процессов. Выведено уравнение для кулоновско-ядерной вершинной функции, а также спектральное и  $N/D$ -представления для кулоновско-ядерной амплитуды. Получено обобщение  $K$ -матричного формализма на случай кулоновско-ядерного рассеяния. Проведен теоретический анализ реакций срыва заряженных частиц в резонансные состояния. Исследованы аналитические свойства нерелятивистских диаграмм Фейнмана при наличии кулоновского взаимодействия и показано, что кулоновские эффекты приводят к появлению полюсной особенности у неполюсных диаграмм (треугольной и др.). Рассмотренные методы применены для описания конкретных ядерных реакций с участием заряженных частиц; извлечена разнообразная спектроскопическая информация.

Coulomb effects on scattering amplitudes for nuclear processes are considered. The equation for the Coulomb-nuclear vertex function, as well as spectral and  $N/D$ -representations for the Coulomb-nuclear amplitude are derived.  $K$ -matrix formalism is generalized to the case of Coulomb-nuclear scattering. The theoretical analysis of charged particle stripping into resonance states is performed. Analytic properties of non-relativistic Feynman graphs in the presence of Coulomb interaction are investigated and it is shown that Coulomb effects result in the appearance of the pole singularity of non-pole graphs (triangular, etc.). The methods considered are used for the analysis of specific nuclear reactions with charged particles. Various spectroscopic information is extracted.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, добавление дальнедействующего кулоновского взаимодействия к короткодействующему ядерному потенциалу приводит к существенному изменению асимптотики волновых функций задачи рассеяния на больших расстояниях и как следствие к изменению характера энергетической зависимости амплитуд рассеяния при низких энергиях. Эти специфические черты кулоновского взаимодействия, важные для ряда практических приложений, в частности для проблемы управляемого термоядерного синтеза, четко проявляются уже в простейшем случае потенциальной задачи двух тел. Для большего числа тел учет кулоновского взаимодействия усложняет и без того сложную задачу решения соответствующих уравнений.

В последнее время в теории систем частиц с сильным взаимодействием, к которой относится и теория ядерных реакций, широко используются различного рода диаграммные и дисперсионные методы

(см., например, [1—3]). Для использования этих методов перво-степенное значение имеют аналитические свойства амплитуд рассеяния. Однако кулоновское взаимодействие радикально меняет аналитические свойства как всей амплитуды, так и отдельных диаграмм, что делает неприменимыми подходы, разработанные для короткодействующих потенциалов. В связи с этим возникает задача корректного выделения специфических «кулоновских» сингулярностей амплитуд рассеяния.

Настоящий обзор посвящен исследованию влияния кулоновских эффектов на свойства (в первую очередь аналитические) амплитуд рассеяния и необходимой модификации различных подходов в теории ядерных реакций, обусловленной наличием кулоновского взаимодействия.

В разд. 1 кратко обсуждается аналитическая структура потенциальной кулоновско-ядерной амплитуды на энергетической поверхности.

В разд. 2 и 3 выводятся уравнения для кулоновско-ядерной амплитуды вне энергетической поверхности и для кулоновско-ядерной вершинной функции, а также спектральное и  $N/D$ -представления для кулоновско-ядерной амплитуды.

Раздел 4 содержит обобщение  $K$ -матричного формализма на случай кулоновско-ядерного рассеяния.

В разд. 5 обсуждается способ расчета эффектов кулоновско-ядерной интерференции, основанный на использовании  $N/D$ -уравнений.

Методы, рассмотренные в разд. 1—5, применяются в разд. 6 для количественного анализа различных ядерных процессов и извлечения спектроскопической информации из экспериментальных данных.

Раздел 7 посвящен теоретическому анализу реакций срыва заряженных частиц в резонансные состояния.

В разд. 8 исследуются аналитические свойства нерелятивистских диаграмм Фейнмана при наличии кулоновского взаимодействия.

Наконец, в разд. 9 в рамках модели трех заряженных частиц подробно рассматривается роль кулоновских эффектов в реакциях передачи нуклона или кластера.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПАРЦИАЛЬНОЙ КУЛОНОВСКО-ЯДЕРНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим задачу нерелятивистского потенциального рассеяния двух бесспиновых частиц, взаимодействие которых есть сумма кулоновского и короткодействующего потенциалов. Пусть короткодействующий потенциал  $V_n(r)$  есть суперпозиция потенциалов Юкавы

$$V_n(r) = \int_{r_0}^{\infty} \sigma(v) \frac{e^{-vr}}{r} dv, \quad (1)$$

а кулоновский потенциал является отталкивающим. Аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния на энергетической поверхности для этого случая исследовались в работах [4—8]. Основным результатом этих исследований состоит в следующем. Приведенная парциальная амплитуда  $A_l(s)$  ( $s = k^2$ ,  $k$  — относительный импульс сталкивающихся частиц), связанная с парциальной  $S$ -матрицей соотношением

$$S_l = 1 + 2i \rho_l(s) A_l(s), \quad (2)$$

где  $\rho_l(s) = s^{l+1/2}$ , может быть представлена в виде

$$A_l(s) = A_l^{(e)}(s) + [h_l^{(c)}(\sqrt{s})]^{-2} T_l(s). \quad (3)$$

Здесь

$$h_l^{(c)}(k) = \frac{l! \exp\left(\frac{\pi}{2} \eta \operatorname{sign} \operatorname{Re} k\right)}{\Gamma(l+1+i\eta)} \quad (4)$$

— нормированная ( $h_l^{(c)}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ ) кулоновская функция Иоста;

$A_l^{(e)}(s)$  — приведенная парциальная амплитуда рассеяния на кулоновском потенциале;  $\eta = \lambda/k$  — кулоновский параметр Зоммерфельда,  $\lambda = \mu\alpha Z_1 Z_2 > 0$ ;  $\mu$  — приведенная масса частиц;  $Z_1, Z_2$  — их заряды;  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. Амплитуда  $T_l(s)$  — перенормированная кулоновско-ядерная амплитуда рассеяния. На первом (физическом) листе римановой поверхности комплексной переменной  $s$   $T_l(s)$  обладает той же аналитической структурой, что и амплитуда рассеяния на короткодействующем потенциале: она имеет левый (динамический) разрез  $C_L$  и правый (унитарный) разрез  $C_R$ , скачок на котором определяется выражением

$$\operatorname{Im} T_l(s) = \theta(s) \tilde{\rho}_l(s) |T_l(s)|^2, \quad (5)$$

где  $\theta(x) = 1$  ( $0$ ) для  $x > 0$  ( $x < 0$ ), а

$$\tilde{\rho}_l(s) = \rho_l(s) C_l^2(s), \quad C_l^2(s) \equiv |h_l^{(c)}(\sqrt{s})|^{-2} = \frac{\pi\eta}{\operatorname{sh}(\pi\eta)} e^{-\pi\eta} \prod_{m=1}^l (1 + \eta^2/m^2). \quad (6)$$

Из указанных свойств следует, что перенормированная амплитуда  $T_l(s)$  представляет собой аналог приведенной парциальной амплитуды для рассеяния на короткодействующем потенциале. Вместе с тем имеется различие в аналитических свойствах этих амплитуд на других листах римановой поверхности и в окрестности точки  $s = 0$ . На втором листе в плоскости переменной  $k = \sqrt{s}$   $T_l(s)$  имеет разрез  $-i\infty < k \leq 0$ , в точках  $k = i\lambda/(n+l)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет бесконечную последовательность нулей, а в близлежащих точках — бесконечную последовательность полюсов, причем точка  $s = 0$  является их точкой сгущения. Тем не менее на физическом листе

амплитуда  $T_l(s)$  ограничена в окрестности точки  $s = 0$  и при  $s \rightarrow 0$  ведет себя следующим образом:

$$T_l(s) \underset{s \rightarrow 0}{\cong} \left\{ R_l(s) - 2\pi i \frac{\lambda^{2l+1}}{(l!)^2} e^{-\frac{2\pi\lambda}{\sqrt{s}}} \right\}, \quad (7)$$

где  $R_l(s)$  — регулярная в окрестности  $s = 0$  функция. Можно показать (см. ниже), что амплитуда  $T_l(s)$  удовлетворяет  $N/D$ -представлению  $T_l(s) = N_l(s)/D_l(s)$ , где  $N_l(s)$  имеет только левый разрез, а  $D_l(s)$  — только правый. Эти функции являются решениями системы несингулярных интегральных уравнений, аналогичных обычным  $N/D$ -уравнениям (см., например, [9]), с той лишь разницей, что вместо спектральной функции  $\rho_l(s)$  они содержат функцию  $\tilde{\rho}_l(s)$  [см. формулу (6)], а так называемая потенциальная функция  $L_l(s)$  полностью определяется скачком перенормированной амплитуды на левом разрезе (т. е.  $\text{Im}L_l(s) = \text{Im}T_l(s)$  на  $C_L$ ) [8].

Если у системы есть связанное состояние, то амплитуда  $T_l(s)$  имеет полюс на первом листе при  $s = s_a$ . Вычет  $T_l(s)$  в этом полюсе можно связать с вершинной константой (ВК) \*  $G_l$  виртуального развала связанного состояния на два фрагмента, определяемой с учетом кулоновского взаимодействия между фрагментами [10]:

$$\lim_{s \rightarrow s_a} [(s - s_a) s^l T_l(s)] = -\frac{\mu^2}{\pi} \tilde{G}_l^2. \quad (8)$$

Можно показать, что определенная таким образом константа  $\tilde{G}_l^2$  является действительной величиной (этот результат следует, например, из  $N/D$ -уравнений). При выключенном кулоновском взаимодействии определение (8) совпадает с определением ВК в обзоре [2] для случая короткодействующего взаимодействия. Отметим, что константа  $\tilde{G}_l$  связана с ВК  $G_l$ , определенной в [2] (см. формулу (119) этого обзора), соотношением

$$G_l = \exp\left(\frac{i\pi\eta_0}{2}\right) \frac{\Gamma(l+1+\eta_0)}{l!} \tilde{G}_l,$$

где  $\eta_0 = \lambda/\kappa$ ,  $\kappa = \sqrt{-s_a}$ .

## 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КУЛОНОВСКО-ЯДЕРНОЙ АМПЛИТУДЫ ВНЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ И $N/D$ -ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Кулоновско-ядерную задачу рассеяния можно решать двумя эквивалентными методами. Первый метод состоит в том, что интегральные уравнения задачи рассеяния формулируются в терминах матричных элементов оператора перехода между кулоновскими асимптотическими состояниями [11]. В другом подходе в исходном

\* В обзоре [2] использовался термин «ядерные вершинные константы» (ЯВК).

уравнении Липпмана — Швингера для оператора перехода  $t(s)$  рассматривается экранированный кулоновский потенциал  $V_c^R$  с достаточно большим радиусом экранировки. В рассматриваемом нами случае отталкивающего кулоновского взаимодействия исходное уравнение можно перестроить, перейдя к кулоновскому представлению и перенормировав матричные элементы оператора рассеяния. Эти перенормированные матричные элементы стремятся к определенному пределу при  $R \rightarrow \infty$  и удовлетворяют интегральному уравнению, ядро которого является фредгольмовым оператором. Используя двухпотенциальную формулу [12] и совершая парциально-волновое разложение, для матричных элементов кулоновско-ядерной части оператора рассеяния  $t_{cn}^R(s)$  получаем уравнение [8]

$$t_l^{cn}(p', p; s) = v_l^{(+)}(p', p) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dp'' \frac{p''^2}{p''^2 - s - i\epsilon} v_l^{(-)}(p', p'') t_l^{cn}(p'', p; s), \quad (9)$$

$$v_l^{(\pm)}(p', p) = -\frac{\mu}{2\pi} \langle p_c^{(-)}, l | V_n | p_c^{(\pm)}, l \rangle,$$

$$t_l^{cn}(p', p; s) = -\frac{\mu}{2\pi} \langle p_c^{(-)}, l | t_{cn}^R(s) | p_c^{(+)}, l \rangle.$$

Кулоновские in- и out-парциально-волновые состояния  $|p_c^{(\pm)}, l\rangle$  нормированы условием

$$\langle p_c^{(\pm)}, l | p_c^{(\pm)}, l \rangle = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2} \delta(p - p'). \quad (10)$$

Матричные элементы  $v_l^{(\pm)}(p', p)$  и  $t_l^{cn}(p', p; s)$  при  $R \rightarrow \infty$  содержат кулоновские сингулярности по переменным  $p$  и  $p'$ , источником которых являются in- и out-кулоновские волновые функции. Эти сингулярности можно выделить, если перейти от матричных элементов в терминах in- и out-решений к матричным элементам в терминах регулярного решения уравнения Шредингера с граничным условием  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(l+1)} \varphi_l(p, r) = 1$ . Поскольку граничное условие для  $\varphi_l(p, r)$  не зависит от  $p$ , по теореме Пуанкаре [9] это решение является целой функцией  $p$ . Учитывая соотношение

$$\langle r | p_c^{(\pm)}, l \rangle = \frac{(ip)^l}{(2l+1)!! f_l^{(\pm)}(p)} \frac{\varphi_l(p, r)}{r}, \quad (11)$$

где  $f_l^{(\pm)}(p)$  — функция Йоста для экранированного кулоновского потенциала, введем перенормированные матричные элементы операторов  $V_n$ ,  $t_{cn}^R$  соотношениями

$$v_l^{(\pm)}(p', p) = (p'p)^l [f_l^{*(-)}(p') f_l^{(\pm)}(p)]^{-1} w_l(p', p),$$

$$t_l^{cn}(p', p; s) = (p'p)^l [f_l^{*(-)}(p') f_l^{(+)}(p)]^{-1} \tau_l(p', p; s). \quad (12)$$

В пределе  $R \rightarrow \infty$  функции  $f_l^{(+)}(p)$  и  $f_l^{*(-)}$  ( $p$ ) при действительных и положительных  $p$  отличаются лишь фазовым множителем вида  $\exp[\eta \ln(2pR)]$  от нормированной кулоновской функции Йоста  $h_l^{(c)}(p)$ , определенной формулой (4), а амплитуда  $\tau_l(p', p; s)$  при  $p' = p = \sqrt{s}$  совпадает с перенормированной амплитудой  $T_l(s)$  [см. (3)] на энергетической поверхности. Матричные элементы  $w_l(p', p)$  имеют такой же радиус аналитичности по переменным  $p$  и  $p'$ , что и матричные элементы короткодействующего потенциала  $V_n$ . С учетом (6), (9), (12) в пределе  $R \rightarrow \infty$  уравнение для амплитуды  $\tau_l(p', p; s)$  имеет вид

$$\tau_l(p', p; s) = w_l(p', p) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds' \tilde{\rho}_l(s')}{s' - s} w_l(p', \sqrt{s'}) \tau(\sqrt{s'}, p; s), \quad (13)$$

где функция  $\tilde{\rho}_l(s)$  определяется выражением (6).

С помощью метода Фредгольма [9] можно показать справедливость  $N/D$ -представления для амплитуды  $T_l(s)$ . Для доказательства сходимости рядов Фредгольма достаточно показать, что ядро интегрального уравнения (13) компактно в банаховом пространстве  $C_1$  непрерывных ограниченных функций с непрерывными ограниченными производными. Различие уравнений Липпмана—Швингера и (13) заключается в наличии фактора  $C_l^2(q^2)$  в ядре уравнения (13). Однако этот фактор на контуре интегрирования (если мы находимся в пределах первого листа, контур интегрирования не деформирован и представляет собой полуось от 0 до  $\infty$ ) является непрерывной ограниченной функцией с ограниченной производной. Таким образом, для первого листа доказательство компактности, данное в [13] для уравнения Липпмана — Швингера, непосредственно обобщается на уравнение (13). Отметим, что если исключить чисто мнимые значения  $k$  с  $\text{Im } k < 0$ , то доказательство компактности может быть распространено и на второй лист римановой поверхности, что важно для исследования резонансных состояний, которые отвечают полюсам на втором листе.

Если взаимодействие определяется нелокальным зависящим от энергии одночленным сепарабельным потенциалом с формфактором  $\chi^{(l)}(p, s)$  хюльтеновского типа (в этом случае при выключении кулоновского взаимодействия  $\chi^{(l)}(p, s) \rightarrow \bar{\chi}^{(l)}(p, s) = [p^2 + \beta^2(s)]^{-(l+1)}$ , то функция  $N_l(s)$  имеет вид

$$N_l(s) = \xi_l(s) \bar{N}_l(s), \quad (14)$$

где  $\bar{N}_l(s)$  — величина  $N_l(s)$  при выключенном кулоновском взаимодействии, а фактор

$$\xi_l(s) = \exp \left\{ \frac{4\lambda}{p} \text{arctg} \left[ \frac{p}{\beta(s)} \right] \right\} \quad (15)$$

учитывает эффект кулоновской перенормировки динамического разреза.

### 3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ КУЛОНОВСКО-ЯДЕРНОЙ АМПЛИТУДЫ. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

Операторное уравнение для  $t_{cn}^R(s)$  можно представить в виде

$$t_{cn}^R(s) = V_n + V_n G^R(s) V_n, \quad (16)$$

где  $G^R(s) = (s/2\mu - HS)^{-1}$ , причем  $H^R = H_0 + V_n + V_c^R$ . Пусть векторы  $|\alpha, l\rangle$  образуют полный ортонормированный набор векторов состояний гамильтониана  $H^R$  с заданным угловым моментом  $l$ ; здесь  $\alpha$  — полный набор квантовых чисел (кроме  $l$ ), характеризующих данное состояние. В соответствии с аргументацией предыдущего раздела кулоновские парциально-волновые in- и out-состояния представляем в виде

$$|p_c^{(\pm)}, l\rangle = (ip)^l [f_l^{(\pm)}(p)]^{-1} |p_c, l\rangle. \quad (17)$$

Используя полноту состояний  $|\alpha, l\rangle$  и учитывая соотношения (10) — (12) и (17), из уравнения (16) в пределе  $R \rightarrow \infty$  получаем спектральное представление для перенормированной амплитуды  $\tau_l(p', p; s)$  вида

$$\begin{aligned} \tau_l(p', p; s) = & w_l(p', p) - \sum_{\alpha} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \tilde{\rho}_l(s') \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds'' \tilde{\rho}_l(s'') \times \\ & \times w_l(p', \sqrt{s'}) \frac{\Phi_{\alpha, l}(\sqrt{s'}) \Phi_{\alpha, l}^*(\sqrt{s''})}{s - s_{\alpha, l}} w_l(\sqrt{s''}, p), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\Phi_{\alpha, l}(p) = \langle p_c, l | \alpha, l \rangle$ , Условие ортогональности для функций  $\Phi_{\alpha, l}(p)$  имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\rho}_l(s) \Phi_{l, \alpha}(\sqrt{s}) \Phi_{l, \alpha'}^*(\sqrt{s}) ds = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (19)$$

Из спектрального представления (18) следует, что если система имеет связанное состояние при  $s = s_a$ , то в окрестности точки  $s = s_a$

$$\tau_l(p', p; s) \cong - \frac{g_{\alpha, l}(p') g_{\alpha, l}(p)}{s - s_a}, \quad (20)$$

где вершинная функция

$$g_{\alpha, l}(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} w_l(p, \sqrt{s}) \Phi_{\alpha, l}(\sqrt{s}) \tilde{\rho}_l(s) ds. \quad (21)$$

В то же время из уравнения (13) и формулы (20) следует, что функция  $f_{\alpha, l}(p)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$f_{\alpha, l}(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} w_l(p, \sqrt{s}) g_{\alpha, l}(\sqrt{s}) \frac{\tilde{\rho}_l(s)}{s - s_a} ds. \quad (22)$$

Сопоставляя (21) и (22), получаем соотношение

$$\Phi_{\alpha, l}(p) = \frac{g_{\alpha, l}(p)}{p^2 + \kappa^2}. \quad (23)$$

Для взаимодействия вида (1) вершинная функция  $g_{\alpha, l}(p)$ , как следует из уравнения (22) и свойств матричных элементов  $w_l(p, p')$ , по переменной  $s = p^2$  имеет разрез от  $-\infty$  до  $\kappa_0^2$ . Отметим, что значение  $g_{\alpha, l}(p)$  в точке  $p = i\kappa$  непосредственно связано с ВК  $\tilde{G}_l$  соотношением

$$\tilde{G}_l^2 = (-1)^l \frac{\pi}{\mu^2} (\kappa)^{2l} g^2(i\kappa). \quad (24)$$

#### 4. ОБОБЩЕНИЕ $K$ -МАТРИЧНОГО ФОРМАЛИЗМА НА СЛУЧАЙ КУЛОНОВСКО-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

Известно, что  $K$ -матричный подход в теории ядерных реакций [12] используется как метод унитаризации амплитуды рассеяния. В работе [14] был предложен дисперсионный вывод уравнения Гайтлера, связывающего  $K$ -матрицу с амплитудой рассеяния. Аналогичный метод может быть применен и для обобщения этого уравнения с учетом кулоновских эффектов. Действительно, мнимая часть обратной амплитуды  $T_l^{-1}(s)$ , как следует из соотношения (5), не зависит от динамики сильного взаимодействия и равна  $-\theta(s) \tilde{\rho}_l(s)$ . Поэтому, если определить функцию  $K_l^{-1}(s)$  как разность между  $T_l^{-1}(s)$  и дисперсионным интегралом по правому разрезу

$$-i\sigma_l(s) = s^l \left[ \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_l(s') ds'}{(s')^{l+1}(s' - s - i\epsilon)} + \sum_{n=0}^l \alpha_n \lambda^{2n} / s^n \right], \quad (25)$$

где  $\alpha_n$  — некоторые вычитательные константы, то связь  $K_l(s)$  и  $T_l(s)$  будет иметь вид уравнения Гайтлера:

$$T_l(s) = K_l(s) + i K_l(s) \sigma_l(s) T_l(s). \quad (26)$$

Конкретный выбор констант  $\alpha_n$  отвечает некоторому способу определения  $K$ -матрицы для заряженных частиц (в частности, эти константы могут быть положены равными нулю). Введенная таким способом  $K$ -матрица аналитична в окрестности точки  $s = 0$  и содержит только динамический левый разрез. В [14] было сформулировано несингулярное интегральное уравнение для  $K$ -матрицы в теории потенциального рассеяния. В работе [15] был предложен  $K$ -матричный подход с учетом кулоновского взаимодействия, основанный на обобщении  $R$ -матричного формализма. Отметим, что  $K$ -матрица, введенная в работе [14] на основе дисперсионного подхода, в отличие от  $K$ -матрицы, рассмотренной в [15], не является мероморфной функцией в  $s$ -плоскости, поскольку для взаимодействия типа (1) она является аналитической функцией с динамическим левым разрезом.



Выше при формулировке  $N/D$ -уравнений и  $K$ -матричного формализма для простоты рассматривался случай одноканального рассеяния. Однако эти методы могут быть обобщены на многоканальный случай. При этом можно ввести перенормированную матрицу парциальных амплитуд  $\hat{T}(s)$ , для которой справедливо матричное  $N/D$ -представление  $\hat{T}(s) = \hat{N}(s) \hat{D}^{-1}(s)$ . Для  $\hat{N}(s)$  и  $\hat{D}(s)$  можно записать матричные уравнения, которые имеют такой же вид, как и одноканальные уравнения, с той лишь разницей, что  $L_l(s)$  следует заменить на потенциальную матрицу  $\hat{L}(s)$ , а  $\tilde{\rho}_l(s)$  — на диагональную матрицу, матричные элементы которой в канале  $\alpha$  имеют вид  $\tilde{\rho}_l(s_\alpha)$ , где  $s_\alpha$  — квадрат относительного импульса частиц в этом канале. Аналогично обобщается  $K$ -матричное уравнение (26), в котором величину  $\sigma_l(s)$  следует заменить на диагональную матрицу с матричными элементами  $\sigma_l(s_\alpha)$  в канале  $\alpha$ .

## 5. РАСЧЕТ ЭФФЕКТОВ КУЛОНОВСКО-ЯДЕРНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ

В ряде задач с заряженными частицами (как, например, в фазовом анализе, см. [16]) возникает проблема выделения вклада электромагнитных эффектов, среди которых в области низких и промежуточных энергий наиболее существенными являются кулоновские эффекты. Кулоновское взаимодействие целесообразно учитывать вне рамок теории возмущений, в то время как при расчете остальных электромагнитных поправок можно ограничиться теорией возмущений. Большой практический интерес представляет разработка таких методов учета кулоновских эффектов, которые в значительной мере являлись бы модельно-независимыми, допускали достаточно простое обобщение на релятивистский случай и опирались лишь на знание энергетической зависимости парциальных амплитуд на энергетической поверхности. В последние годы эта проблема интенсивно обсуждалась в литературе. Так, например, группой австрийских физиков был разработан метод [17], в котором кулоновско-ядерная поправка к фазе рассеяния выражается через фазу рассеяния и ее производную по энергии при выключенном кулоновском взаимодействии. Следует отметить, что указанная поправка к фазе рассеяния и параметру неупругости вычисляется в первом порядке по постоянной тонкой структуре, а метод обосновывается в рамках квазиклассического приближения. Указанный метод применялся, в частности, в одном из последних фазовых анализов  $NN$ -рассеяния [18].

В этом разделе мы рассмотрим метод расчета эффектов кулоновско-ядерной интерференции, основанный на использовании  $N/D$ -уравнений, причем мы будем предполагать, что энергетическая

зависимость парциальных амплитуд рассеяния на энергетической поверхности нам известна. Мы будем также считать, что рассеяние является, вообще говоря, неупругим. Рассматриваемый ниже метод учета неупругих каналов в  $N/D$ -уравнениях с учетом кулоновских эффектов продемонстрируем на примере сепарабельного, зависящего от энергии потенциала. Ограничимся для простоты одночленным сепарабельным взаимодействием, причем будем считать, что перенормировка функций  $N(s)$  (определяемая вкладом кулоновских эффектов на динамическом разрезе) дается выражением вида (14). Итак, мы считаем, что функция  $\lambda(s)$ , определяющая энергетическую зависимость сепарабельного потенциала, имеет разрез, начинающийся от порога неупругих каналов  $s_I$ . В таком случае скачок  $T^{-1}(s)$  на  $C_R$  имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Im } T_l^{-1}(s) &= -\tilde{v}_l(s) \equiv -\tilde{\rho}_l(s) + \frac{\text{Im } \lambda_l^{-1}(s)}{N_l(s)} \\ &= -[\rho_l(s) C_l^2(s) + \gamma_l(s)/\xi_l(s)], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\gamma_l(s) = -\text{Im } \lambda_l^{-1}(s) \sqrt{N_l(s)}$ , а величина  $\xi_l(s)$  — фактор кулоновской перенормировки функции  $N_l(s)$  [см. формулу (14)]. Таким образом, при выключении кулоновского взаимодействия  $\tilde{v}_l(s) \rightarrow v_l(s) \equiv \rho_l(s) + \gamma_l(s)$ . В результате для определения функции  $N_l(s)$  имеем линейное сингулярное неоднородное уравнение вида

$$N_l(s) \text{Re } T_l^{-1}(s) = 1 - \frac{s-s_0}{\pi} \int_{C_R} \frac{\tilde{v}_l(s') N_l(s')}{(s'-s)(s'-s_0)} ds'. \quad (28)$$

Применяя известные методы, получаем решение уравнения (28) в виде (в случае отсутствия связанных состояний)

$$N_l(s) = \frac{\sin \theta_l(s)}{v_l(s)} \exp[-W_l(s)], \quad (29)$$

$$W_l(s) = \frac{s-s_0}{\pi} P \int_{C_R} \frac{\theta_l(s') ds'}{(s'-s)(s'-s_0)}, \quad (30)$$

а фаза  $\theta_l(s)$  связана с фазой рассеяния  $\delta_l(s)$  и параметром  $\eta_l(s)$  (в терминах которых  $T_l(s)$  имеет вид  $[\eta_l(s) \exp(2i\delta_l(s)) - 1]/2i\rho_l(s)$ ):

$$\text{ctg } \theta_l(s) = \frac{\sin 2\delta_l(s)}{1 - \eta_l(s) \cos 2\delta_l(s)}, \quad (31)$$

при этом функцию  $v_l(s)$  также можно выразить через параметры  $\delta_l(s)$  и  $\eta_l(s)$ :

$$v_l(s) = \frac{\tilde{\rho}_l(s) (1 - \eta_l(s) \cos 2\delta_l(s))}{1 + \eta_l^2(s) - 2\eta_l(s) \cos 2\delta_l(s)}. \quad (32)$$

Теперь мы можем вычислить фазу рассеяния  $\delta_l^{(n)}$  и параметры неупругости  $\eta_l^{(n)}$  при выключенном кулоновском взаимодействии, исполь-

зую соотношение

$$\bar{T}_l = [\eta_l^{(n)} \exp(2i\delta_l^{(n)}) - 1] / 2i\rho_l(s) = \bar{N}_l(s) / \bar{D}_l(s),$$

где  $\bar{N}_l(s) = N_l(s) / \xi_l(s)$ , а  $\bar{D}_l(s)$  вычисляется по формуле

$$\bar{D}_l(s) = 1 - \frac{s-s_0}{\pi} \int_{C_R} \frac{\nu_l(s') \bar{N}_l(s')}{(s'-s)(s'-s_0)} ds'. \quad (33)$$

В связи с изложенной процедурой сделаем следующие замечания. Выше мы использовали модель сепарабельного взаимодействия с фактором хюлтеновского типа (но с зависящим, вообще говоря, от энергии параметром  $\beta(s)$ ) лишь для того, чтобы конкретизировать вид перенормировки вклада от динамического разреза [фактор  $\xi_l(s)$ ]. В остальном соотношения (27)—(28) имеют достаточно общий характер. В этой связи следует подчеркнуть, что кулоновская добавка  $\Delta L_l^{(c)}(s)$  к потенциальной функции  $\bar{L}_l(s)$ , приводящая к перенормировке ( $\bar{L}_l(s)$  — величина  $L_l(s)$  при выключенном кулоновском взаимодействии) функции  $\bar{N}_l(s)$ , обусловлена силами того же радиуса, что и радиус короткодействующей части взаимодействия (так как область аналитичности  $\bar{L}_l(s)$  и  $\Delta L_l^{(c)}(s)$  одна и та же). Эффект перенормировки левого разреза, разумеется, зависит от динамики взаимодействия. Тем не менее мы можем задать эффективную величину  $\beta_l(s)$  в модели сепарабельного взаимодействия, которая определяет фактор  $\xi_l(s)$  в формуле (14), исходя из анализа конкретных физических механизмов, отвечающих ближайшим особенностям амплитуды рассеяния по переданному импульсу. Кулоновская перенормировка спектральной функции  $\rho_l(s)$  на правом разрезе определяется фактором проницаемости  $C_l^2(s)$  и носит модельно-независимый характер. Фактор  $C_l^2(s)$  содержит наиболее сильную кулоновскую сингулярность при  $s \rightarrow 0$ , поэтому перенормировка правого разреза, по крайней мере в низкоэнергетической области, в основном определяет эффекты кулоновско-ядерной интерференции.

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

$N/D$ -уравнения использовались для расчета фаз рассеяния и дифференциальных сечений различных процессов с учетом кулоновских эффектов [8, 19—23]. Для решения этих уравнений скачки парциальных амплитуд рассеяния на динамическом разрезе, определяющие потенциальную функцию  $L_l(s)$ , задавались с учетом вклада механизмов, отвечающих наиболее близким особенностям амплитуды рассеяния по переданному импульсу. Так, например, при расчете энергетической зависимости  $S$ -фазы в  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ -рассеянии [22] потенциальную функцию  $L_l(s)$  вычисляли с учетом вклада диаграммы, отвечающей механизму передачи нейтрона. В расчете использо-

валось значение ВК  $G^2(^4\text{He} - ^3\text{He} n) = 12$  фм, что согласуется с имеющимися данными [2]. Отметим, в частности, что проведенный недавно анализ [24] данных по зарядовому формфактору ядра  $^4\text{He}$  с учетом вклада мезонных обменных эффектов хорошо согласуется с приведенным значением ВК  $G^2(^4\text{He} - ^3\text{He} n) = 11,6$  фм. Влияние кулоновских эффектов на динамическом разрезе в  $N/D$ -уравнениях учитывалось введением фактора перенормировки  $\xi_l(s)$  функции  $N_l(s)$  [см. формулу (14)]. Учет фактора  $\xi_l(s)$  частично компенсирует влияние перенормировки вклада от правого разреза в  $N/D$ -уравнениях. Из сравнения результатов вычислений с данными фазового анализа [25] следует, что учет полюсного механизма и особенностей, связанных с вершинной функцией, при расчете  $L_l(s)$  приводит к хорошему описанию экспериментальных данных (сплошная кривая на рис. 1). Тем не менее мы исследовали вклад более далеких особенностей, отвечающих механизму квазисвободного рассеяния  $\alpha$ -частицы на связанном нуклоне  $^3\text{He}$ . Учет этого механизма несколько улучшает согласие теории с экспериментом (штриховая кривая на рис. 1).

Для сравнения на рис. 1 представлены также результаты расчета  $S_{1/2}$ -фазы в  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ -рассеянии при выключенном кулоновском взаимодействии на правом и левом разрезах (штрихпунктирная кривая) для того же случая, который при включенном кулоновском взаимодействии приводит к сплошной кривой.

Изложенный метод применялся для нахождения  $S$ -фазы в  $^3\text{H} - ^4\text{He}$ -рассеянии на основе данных фазового анализа  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ -рассеяния. Аналогичный метод использовался для расчета энергетической зависимости  $S$ -фаз в  $p - ^3\text{He}$ - и  $p - ^4\text{He}$ -рассеянии. Результаты расчета находятся в хорошем согласии с данными фазовых анализов. Например, учет механизма обмена дейтроном при расчете  $^1S_0$ -фазы в  $p^3\text{He}$ -рассеянии приводит к хорошему согласию с данными фазового

анализа [26]. Значение ВК  $\tilde{G}^2(^3\text{He} - pd)$  было выбрано равным 1,3 фм, что согласуется с имеющимися в литературе данными [2]. В расчете был учтен также механизм квазисвободного рассеяния протона на связанном нуклоне ядра  $^3\text{He}$  и получено предсказание энергетической зависимости  $^1S_0$ -фазы в  $n^3\text{H}$ -рассеянии [8].

$N/D$ -уравнения и  $K$ -матричный подход с учетом кулоновских эффектов использовались [19, 20] для расчета сечений рассеяния  $K^+$ -мезонов на ядрах  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . Парциальная  $K$ -матрица и функция  $L_l(s)$  в этом случае рассчитывались с учетом механизма квазисвободного рассеяния  $K^+$ -мезона на связанном нуклоне ядра-мишени.

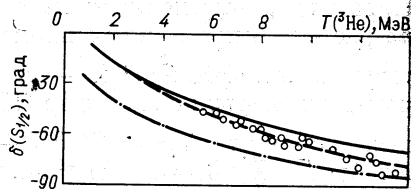


Рис. 1. Энергетическая зависимость  $S_{1/2}$ -фазы в  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ -рассеянии. Точки — результаты фазового анализа [25]

На основе анализа  $S$ -волнового  $pd$ -рассеяния с помощью  $N/D$ -уравнений [21] определялись ВК  $\tilde{G}^2$  ( ${}^3\text{He} - pd$ ). Потенциальная функция вычислялась с учетом вклада полюсной диаграммы, отвечающей механизму обмена нейтроном. Вклад более далеких особенностей аппроксимировался треугольной диаграммой, содержащей два свободных параметра: ВК в четырехлучевой вершине и хьюлтеновский параметр  $\beta$  в трехлучевой вершине (этот параметр определяет обрезание скачка парциальной амплитуды на левом разрезе). Первый параметр фиксировался условием, чтобы амплитуда имела правильное положение полюса по  $s$ , отвечающего связанному состоянию. Параметр  $\beta$  определялся из анализа данных низкоэнергетического  $nd$ -рассеяния при выключенном кулоновском взаимодействии. Результаты расчета ВК  $\tilde{G}^2$  ( ${}^3\text{He} - pd$ ), дублетной длины  $nd$ -рассеяния  $a_n$ , разности энергий связи ядер  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$   $\Delta E$ , а также разности вершинных констант  $\Delta G^2 = G^2({}^3\text{H} - nd) - \tilde{G}^2({}^3\text{He} - pd)$  представлены в табл. 1. При  $\beta = 0,9 \text{ фм}^{-1}$  значения  $G^2$ ,  $a_n$ ,  $\Delta E$  хорошо согласуются

Таблица 1. Значения вершинной константы  $\tilde{G}$  ( ${}^3\text{He} - pd$ ), дублетной длины  $nd$ -рассеяния  $a_n$ , разности энергий связи  $\Delta E$  ядер  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$ , а также разности констант  $\Delta G^2 = G^2({}^3\text{H} - nd) - \tilde{G}^2({}^3\text{He} - pd)$  в зависимости от параметра  $\beta$

$\beta$ , $\text{фм}^{-1}$	$\tilde{G}^2$ , $\text{фм}$	$a_n$ , $\text{фм}$	$\Delta E$ , МэВ	$\Delta G^2$ , $\text{фм}$
1	1,42	0,53	0,82	0,052
0,9	1,49	0,67	0,77	0,052
0,8	1,28	0,84	0,73	0,053

с экспериментальными значениями (напомним, что экспериментальное значение дублетной длины  $nd$ -рассеяния составляет 0,65 фм [27]). Результаты расчета  ${}^2S_{1/2}$ -фазы  $pd$ -рассеяния представлены на рис. 2. Значение дублетной длины  $pd$ -рассеяния при  $\beta = 0,9 \text{ фм}^{-1}$  составляет 2,17 фм. Из приведенных данных следует, что ВК  $\tilde{G}^2$  ( ${}^3\text{He} - pd$ ) на 0,05 фм меньше константы  $G^2$  ( ${}^3\text{H} - nd$ ). Этот результат практически не зависит от деталей аппроксимации далеких особенностей на левом разрезе.

$N/D$ -уравнения с учетом кулоновских эффектов могут быть использованы для извлечения информации о ВК ядер из данных фазового анализа аналитическим продолжением парциальной амплитуды в точку полюса, отвечающую связанному состоянию. Если известны данные фазового анализа в достаточно широкой области энергий, с этой целью можно использовать метод, описанный в разд. 6 [см. формулу (30)]. При наличии более ограниченных данных [т. е. если данных фазового анализа недостаточно для прямого

восстановления функции  $N_l(s)$  по формуле (30)] можно использовать некоторую аналитическую аппроксимацию функции  $N_l(s)$ . Проиллюстрируем сказанное на примере расчета ВК  $\tilde{G}^2(^7\text{Be} - ^4\text{He} \ ^3\text{He})$  [22]. Представим функцию  $N_l(p', p; s)$ , определяющую перенормированную амплитуду рассеяния вне энергетической поверхности, в сепарабельной форме с формфактором хьюлтеновского типа. Величины  $\lambda$  и  $\beta$ , определяющие интенсивность и эффективный радиус взаимодействия, предполагались не зависящими от энергии и были выбраны

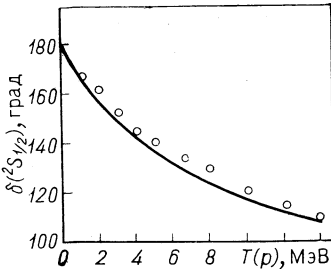


Рис. 2. Энергетическая зависимость  $S_{1/2}$ -фазы в  $rd$ -рассеянии. Точки — данные фазового анализа [28]

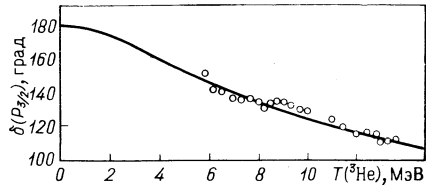


Рис. 3. Энергетическая зависимость  $P_{3/2}$ -фазы в  $^3\text{He}-^4\text{He}$ -рассеянии. Точки — результаты фазового анализа [25]

методом  $\chi^2$  по  $P_{3/2}$ -фазе  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ -рассеяния [25]. Как видно из рис. 3, указанная параметризация функции  $N_l(s)$  хорошо воспроизводит энергетическую зависимость  $P_{3/2}$ -фазы. Значение ВК  $\tilde{G}^2(^7\text{Be} - ^4\text{He} \ ^3\text{He})$  при этом составляет 0,24 фм.

Рассматриваемый метод может быть эффективно применен для определения модельно-независимых параметров резонансных состояний. В качестве примера рассмотрим определение параметров  $P$ -волновых резонансов в  $r\alpha$ -рассеянии [23]. Известно, что энергии и ширины окологороговых  $P_{3/2}$ - и  $P_{1/2}$ -резонансов в  $N\alpha$ -рассеянии, определяемые с помощью различных резонансных формул и, в частности, в  $R$ -матричном анализе, содержат большие неопределенности и существенно зависят от используемой модели [28, 29]. В этой связи большое значение имеет модельно-независимое, т. е. основанное на аналитических свойствах  $S$ -матрицы, определение резонансных параметров. Согласно аналитической теории  $S$ -матрицы резонанс отвечает полюсу парциальной  $S$ -матрицы на втором листе римановой поверхности комплексной  $s$ -плоскости, а его параметрами являются: положение указанного полюса и значение вычета  $S$ -матрицы в этом полюсе (см., например, [30]). Следует подчеркнуть, что это есть универсальное и наиболее последовательное определение резонансных параметров, применимое в том числе и к широким резонансам. При наличии кулоновского взаимодействия мы определим ВК резонанса на основе того же подхода, который использовался выше при

определении ВК для связанного состояния. При этом параметры связанного и резонансного состояний определяются с единой точки зрения. Наряду с ВК  $\tilde{G}_l$  [см. (12)] удобно рассмотреть безразмерную константу  $R_l$ , связанную с вычетом  $T_l(s)$  в  $k$ -плоскости:

$$R_l = i(-1)^{l+1} \lim_{k \rightarrow k_r} [(k - k_r) s^l T_l(s)], \quad (34)$$

где  $k_r$  определяет положение резонансного полюса на втором листе. В случае связанного состояния константа  $R_l$  действительна, положительна и связана с  $\tilde{G}_l^2$  соотношением  $\tilde{G}_l^2 = (-1)^l \cdot 2\pi\mu^{-2} R_l^*$ .

На основе данных фазовых анализов  $p\alpha$ -рассеяния [31, 33] были определены параметры  $P$ -волновых резонансов для рассеяния в состояниях с полным угловым моментом  $j = 3/2, 1/2$ : константы резонансов  $R_j$  и положения полюсов на втором листе, отвечающих этим

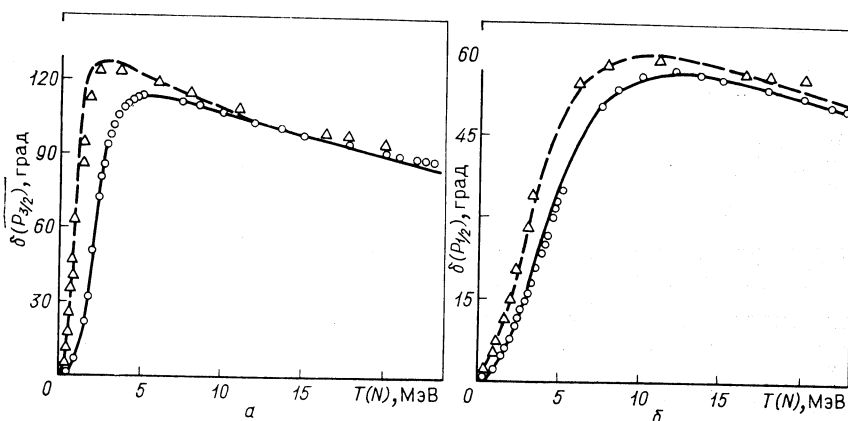


Рис. 4. Энергетическая зависимость  $P_{3/2}$ - (а),  $P_{1/2}$ -фаз (б) в  $N\alpha$ -рассеянии:

Сплошные кривые — расчет фаз в  $p\alpha$ -рассеянии с учетом кулоновского взаимодействия; штриховые кривые — расчет при выключенном кулоновском взаимодействии;  $\circ$  — данные фазовых анализов  $p\alpha$ -рассеяния [31, 32];  $\Delta$  — данные фазовых анализов  $n\alpha$ -рассеяния [32, 33]

резонансам в комплексной плоскости энергии  $E_{r,j} = (k_{r,j})^2/2\mu$ . Функция  $N(s)$  параметризовалась в той же форме, которая выше использовалась для описания  ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$ -рассеяния в  $P$ -волне, а соответствующие параметры  $\lambda$  и  $\beta$  были выбраны методом  $\chi^2$  по экспериментальным фазам  $p\alpha$ -рассеяния [31, 32]. Как видно из рис. 4, указанная параметризация (сплошные кривые) хорошо воспроизводит энергетическую зависимость  $P_{3/2}$ - и  $P_{1/2}$ -фаз рассеяния в области энергий налетающего протона  $T = 0 \div 23$  МэВ. Результаты расчета констант  $R_j \equiv |R_j| \exp(i\phi_j)$  и положения резонансных полюсов  $E_j$  на втором листе представлены в табл. 2. Рассматриваемый метод

\* В разд. 7 используется другое определение ВК резонанса.

Таблица 2. Параметры  $P$ -волновых резонансов в  $N\alpha$ -рассеянии

Ядро	$j^P$	Re $E_{rj}$ , МэВ	Im $E_{rj}$ , МэВ	$ R_j $	$\varphi_j$ , град
${}^5\text{Li}; p\alpha$	$3/2^-$	1,655	0,639	0,304	-135,5
	$1/2^-$	2,691	3,224	0,313	-177,9
${}^5\text{He}; n\alpha$	$3/2^-$	0,697	0,271	0,160	132,3
	$1/2^-$	1,875	2,648	0,237	177,1

позволяет рассчитать фазы и параметры резонансов в  $n\alpha$ -рассеянии на основе данных  $p\alpha$ -рассеяния. Эти величины вычисляются формальным выключением кулоновского взаимодействия при неизменных параметрах  $\lambda$  и  $\beta$ . Результаты такого расчета для фаз рассеяния изображены пунктирными кривыми на рис. 4. Как видно из рисунка, фазы рассеяния при выключенном кулоновском взаимодействии хорошо согласуются с данными фазового анализа по  $n\alpha$ -рассеянию [32, 33].

Указанные в табл. 2 вершинные константы  $P_{3/2^-}$  и  $P_{1/2^-}$ -резонансов в  $p\alpha$ -рассеянии найдены в [23]. Приведенные в этой таблице данные по энергиям и ширинам резонансов достаточно хорошо согласуются с результатами анализа, проведенного в работе [29], в которой эти параметры были найдены по положению резонансного полюса на втором листе. В то же время имеется существенное различие этих данных с результатами  $R$ -матричного анализа [34]. Параметры  $n\alpha$ -резонансов, приведенные в табл. 2, получены на основе данных  $p\alpha$ -рассеяния. Эти результаты также согласуются с данными работ [29, 35], в которых указанные параметры определялись из данных  $n\alpha$ -рассеяния.

## 7. РЕАКЦИЯ СРЫВА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В этом разделе рассмотрено применение дисперсионного подхода для анализа реакций срыва заряженных частиц в резонансные состояния (РС) конечных ядер. Известно, что при расчете амплитуд этих реакций в рамках МИВ возникают значительные сложности при вычислении радиальных интегралов, вызванные расходимостью интегралов на верхнем пределе [36]. В работе [37] был предложен дисперсионный метод расчета реакций срыва нейтронов в РС, свободный от возникающих в МИВ трудностей. В дисперсионном методе дифференциальное сечение реакции параметризуется непосредственно через ширину резонанса  $\Gamma$ , которая определяется из сравнения вычисленного и измеренного сечений. Кроме того, дисперсионный подход позволяет одинаково просто рассчитывать реакции срыва в РС, описываемые как простым, так и более сложными механизмами, например двухступенчатыми [38].



Кулоновская часть вершинного формфактора для распада резонансного состояния на две заряженные частицы. Приведем без строгого вывода выражение для кулоновской части вершинного формфактора (КЧВФ), отвечающего распаду РС ядра  $B^*$  на две заряженные частицы  $A$  и  $a$ :  $B^* \rightarrow A + a$ . Общее выражение для вершинного формфактора распада РС можно записать в виде

$$G(l_r j_r; q) = (q/q_r)^{l_r} G(l_r j_r) g(l_r j_r; q^2), \quad (35)$$

где  $g(l_r j_r; q^2)$  — приведенный вершинный формфактор, который можно представить в виде суммы кулоновского и кулоновско-ядерного членов [2]. Кулоновская часть имеет вид

$$g^{(C)}(l_r; q^2) = \exp(\pi\eta_r/2) \frac{2(l_r+1)!}{\Gamma(l_r+1+i\eta_r)} (q^2 - q_r^2) \times \\ \times \int_0^\infty dt t^{l_r+i\eta_r} (t-2iq_r)^{l_r-i\eta_r} [(t-iq_r)^2 + q^2]^{-l_r-2} (t-iq_r). \quad (36)$$

В (35) и (36) введены следующие обозначения:  $l_r$  и  $j_r$  — орбитальный и полный угловые моменты частицы  $a$  в вершине  $B^* \rightarrow A + a$ ;  $q$  — относительный импульс частиц  $a$  и  $A$ ;  $q_r = (2\mu_{Aa}E_r)^{1/2}$ ;  $E_r = E_0 - i\Gamma/2$ ;  $\eta_r = \mu_{Aa}Z_A Z_a e^2/q_r$ ;  $E_0$  и  $\Gamma$  — энергия и полная ширина РС ядра  $B^*$ ;  $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ ;  $m_\alpha$  и  $Z_\alpha e$  — масса и заряд частицы  $\alpha$ ;  $G(l_r j_r)$  — ВК [2]. В случае узкого резонанса ( $\Gamma \ll E_0$ ) можно положить  $q_r \approx q_0 = (2\mu_{Aa}E_0)^{1/2}$ ,  $\eta_r \approx \eta_0 = \mu_{Aa}Z_A Z_a e^2/q_0$ .

По поводу формул (35) и (36) заметим следующее. В работе [39] было найдено выражение для КЧВФ, отвечающего виртуальному распаду  $B \rightarrow A + a$  ядерно-стабильного состояния ядра  $B$  на заряженные частицы  $A$  и  $a$ . Формулы (35) и (36), определяющие КЧВФ для реального распада РС, можно получить из формул (13) и (15) работы [39] заменой в них  $\varepsilon$  на  $-E_r$  ( $\varkappa$  на  $-iq_r$ ), где  $\varepsilon = \varkappa^2/2\mu_{Aa} = m_A + m_a - m_B$  — энергия связи ядра  $B$  по отношению к виртуальному распаду на  $A$  и  $a$ .

Вершинный формфактор для виртуального распада связанного состояния  $B = A + a$  определяется формулой [39]

$$G(l_j; q) = -(\sqrt{\pi}/\mu_{Aa}) (q^2 + \varkappa^2) \int_0^\infty \varphi_{lj}(r) j_l(qr) r^2 dr, \quad (37)$$

где  $j_l(x)$  — сферическая функция Бесселя. Аналогичным образом определяется и вершинный формфактор для реального распада РС. При этом следует заменить в (37)  $\varkappa^2$  на  $-q_r^2$ , а вместо  $\varphi_{lj}(r)$  взять волновую функцию Гамова  $\varphi_{l_r j_r}(r)$ , экспоненциально растущую при  $r \rightarrow \infty$ . Для придания смысла интегралу его надо регуляризовать, например, введением фактора  $\exp(-\beta r^2)$ ,  $\beta \rightarrow +0$  [40]. В результа-

те для вершинного формфактора в случае РС получаем

$$G(l_r j_r; q) = -(\sqrt{\pi}/\mu_{Aa})(q^2 - q_r^2) \lim_{\beta \rightarrow +0} \times \\ \times \int_0^{\infty} dr r^2 \exp(-\beta r^2) \varphi_{l_r j_r}(r) j_{l_r}(qr). \quad (38)$$

КЧВФ для распада РС на две заряженные частицы учитывает вклад в  $G(l_r j_r; q)$  от «кулоновского» разреза, идущего в  $q^2$ -плоскости от  $q^2 = q_r^2$  до  $\infty$ , и получается подстановкой в (38) вместо  $\varphi_{l_r j_r}(r)$  функции  $c_{l_r j_r} r^{-1} W_{-i\eta_r, l_r+1/2}(2i q r r)$ , где  $W_{\lambda, \nu}(x)$  — функция Уиттекера [41],  $c_{l_r j_r}$  — асимптотический коэффициент, связанный с ВК соотношением

$$G(l_r j_r) = -\exp\left[i\pi\left(\frac{l_r + i\eta_r}{2}\right)\right] (\sqrt{\pi}/\mu_{Aa}) c_{l_r j_r}. \quad (39)$$

Аналогичное соотношение для связанного состояния получается заменой  $\eta_r \rightarrow -i\eta$ ,  $q_r \rightarrow i\kappa$ ,  $c_{l_r j_r} \rightarrow c_{l j}$ , где  $c_{l j}$  и  $\eta$  — асимптотический коэффициент и кулоновский параметр связанного состояния [2]. В работе [42] было показано, что вычет в полюсе  $s$ -матрицы упругого рассеяния связан с  $c_{l_r j_r}$  соотношением

$$A_{l_r j_r} = -i(-1)^{l_r} \exp(-\pi\eta_r) c_{l_r j_r}^2. \quad (40)$$

Поскольку  $A_{l_r j_r}$  выражается через величину  $\gamma = \Gamma/(2E_0)$  [42], то  $c_{l_r j_r}$  непосредственно связан с шириной резонанса  $\Gamma(l_r j_r)$  для распада по каналу  $(aA l_r j_r)$ . В случае узкого резонанса с точностью до членов порядка  $\gamma$  [42]

$$c_{l_r j_r}^2 = [\mu_{Aa} \Gamma(l_r j_r)/q_0] \exp(2i\delta_{l_r j_r}(q_0) - i\pi l + \pi\eta_0),$$

где  $\delta_{l_r j_r}$  — фаза нерезонансного рассеяния. Отметим, что строгий вывод формулы (36) дан в [43].

**Дифференциальное сечение реакций срыва заряженных частиц в резонансное состояние.** Рассмотрим реакцию срыва

$$A(x, y) B^*(a)A \quad (41)$$

и предположим, что она протекает в два этапа: сначала происходит срыв заряженной частицы  $a$  в РС ядра  $B$ , а затем распад РС на две частицы  $A$  и  $a$  (рис. 5). Ограничимся рассмотрением узких изолированных резонансов, распад которых происходит только по упругому каналу ( $B^* \rightarrow A + a$ ).

В этом случае, как показано в [37], дифференциальное сечение реакций (41) в с.ц.и., проинтегрированное по всем кинематическим переменным, кроме угла вылета частицы  $y$ , совпадает с дифференциальным сечением бинарной реакции  $A(x, y) B^*$ , являющейся пер-

вым этапом процесса (41). В работе [37] получено выражение для дифференциального сечения реакций срыва нейтронов в РС. Случай передачи заряженной частицы требует определенной модификации формул работы [37]. Мы проанализировали реакции  $(d, n)$  и  $({}^3\text{He}, d)$ . В реакции  $(d, n)$  кулоновское взаимодействие в трехлучевой вершине  $d \rightarrow n + p$  отсутствует, а в реакции  $({}^3\text{He}, d)$  кулоновским взаимодействием в вершине  ${}^3\text{He} \rightarrow d + p$  в силу малости кулоновского параметра в этой вершине ( $\eta \sim 0,1$ ) можно пренебречь. Поэтому для указанных реакций ограничиваемся рассмотрением кулоновских эффектов только в трехлучевой вершине  $A + a \rightarrow B^*$ . Кроме того,

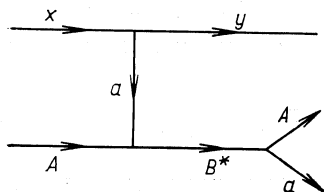


Рис. 5. Диаграмма Фейнмана, описывающая механизм реакции срыва заряженной частицы  $a$  в резонансное состояние  $B^*$  конечного ядра

мы учитываем приближенно эффекты кулоновско-ядерного  $xA$ - и  $yB^*$ -рассеяния в начальном и конечном состояниях (поскольку по предположению РС ядра  $B$  является узким, рассеяние  $y$  на  $B^*$  рассматривается как рассеяние на стабильном ядре  $B$ ).

Дифференциальное сечение реакции  $A(x, y)B^*$  рассчитывалось в рамках дисперсионной периферийной модели [37]. В этой модели амплитуда реакции раскладывается в ряд по парциальным волнам и вклад от низких парциальных волн полностью отбрасывается. В учитываемых периферийных парциальных амплитудах эффекты искажений в начальном и конечном состояниях рассчитывались в дифракционной модели [43]. Явное выражение для дифференциального сечения реакции  $A(x, y)B^*$  в случае передачи заряженных частиц (протона) дано в работе [43] с учетом результатов [37].

Сравнение с экспериментом. Численные расчеты проведены для реакций  $(d, n)$  и  $({}^3\text{He}, d)$ , указанных в табл. 3. Для проанализированных реакций дифференциальное сечение в с.д.и., проинтегрированное по всем кинематическим переменным, кроме угла вылета нейтронов или дейтронов, имеет вид [37]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2J + 1) \Gamma G_x^2 \sigma(E_i, z). \quad (42)$$

Здесь  $G_x^2 = 0,43$  и  $1,34$  фм — ВК для распадов  $d \rightarrow n + p$  ( $x = d$ ) и  ${}^3\text{He} \rightarrow p + d$  ( $x = {}^3\text{He}$ ) соответственно [2],  $\sigma(E_i, z)$  — известная функция  $z = \cos \theta$  ( $\theta$  — угол рассеяния вылетающих нейтронов или дейтронов в с.д.и.) и  $E_i$ . Фазы рассеяния в начальном и конечном состояниях рассчитывались по оптической модели.

\* В работе [44] показано, что в реакциях срыва можно пренебречь вкладом в ядерные вершинные формфакторы от ядерного разреза.

Таблица 3. Результаты анализа угловых распределений реакции срыва на легких ядрах

Реакция	Остаточное ядро	Энергия возбуждения РС, МэВ	Информация о РС из упругого рассеяния протонов			$E_{\text{лаб}}$ , МэВ	$\eta_0$	$\eta_i$	$\eta_f$	$\Gamma$ , кэВ	
			$L_T$	$J^\pi$	$\Gamma$ , кэВ					с учетом кулоновского взаимодействия	без него
$d, n$	$^8\text{Be}$	17,84	1	$1^+$	$10,7 \pm 0,5$	9,75	0,71	0,21	0	$19,4 + 13,2 - 4,1$	94,6
	$^8\text{Be}$	18,14	1	$1^+$	147	9,75	0,47	0,21	0	$118 + 72 - 23$	$2,31 \cdot 10^2$
	$^{13}\text{N}$	2,37	0	$1/2^+$	$35 \pm 1$	11,8	1,39	0,39	0	30	$1,91 \cdot 10^3$
	$^{13}\text{N}$	2,37	0	$1/2^+$	$35 \pm 1$	15,25	1,39	0,34	0	41	$2,4 \cdot 10^3$
	$^{21}\text{Na}$	4,47	2	$3/2^+$	22	6,12	1,08	0,90	0	10-35	222
$^3\text{He}, d$	$^{15}\text{O}$	7,752	0	$1/2^+$	$1,6 \pm 0,5$	5,6	2,09	0,66	0	0,8	$1,7 \cdot 10^3$
	$^{15}\text{O}$	7,752	0	$1/2^+$	$1,6 \pm 0,5$	6,0	2,09	0,64	0	1,2	$1,7 \cdot 10^3$
	$^{13}\text{N}$	2,37	0	$1/2^+$	$35 \pm 1$	16	1,39	0,82	0,55	34,2	$2,5 \cdot 10^3$
						17	1,39	0,79	0,53	28	$1,7 \cdot 10^3$
						18	1,39	0,77	0,50	24,8	$1,6 \cdot 10^3$
	$^{19}\text{F}$	8,795	0	$1/2^+$	26	16	1,34	1,09	0,70	$16,5 + 9,8 - 6,1$	$4,1 \cdot 10^2$
	$^{19}\text{F}$	10,267	2	$3/2^+$	11	16	0,81	1,09	0,78	$14,4 + 1,7 - 8,9$	24,3
	$^{19}\text{F}$	10,33	2	$3/2^+$	5,2	16	0,80	1,09	0,79	$9,8 + 11,3 - 5,2$	15,7

Примечание. Ссылки на работы, откуда взяты экспериментальные данные и информация о РС, см. в [43].

Из (42) следует, что дифференциальное сечение реакции пропорционально величине  $(2J + 1) \Gamma$ , которая может быть определена сравнением рассчитанных и экспериментальных дифференциальных сечений. В наших расчетах значения фактора  $(2J + 1) \Gamma$  и параметров обрезания  $L$  и  $L'$  по орбитальным моментам во входном и выходном каналах соответственно, подбираемые так, чтобы обеспечить наилучшую подгонку рассчитанных дифференциальных сечений к экспериментальным, определялись по минимуму  $\chi^2$ .

Для иллюстрации некоторые из вычисленных угловых распределений приведены на рис. 6. Как видно, теоретические угловые распределения хорошо воспроизводят экспериментальные в области

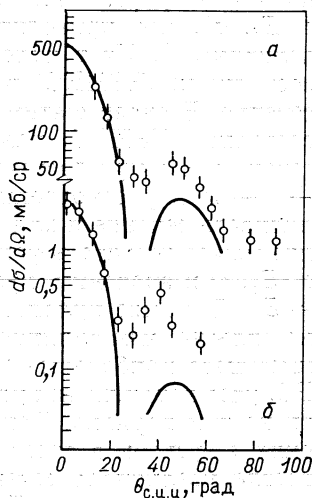


Рис. 6. Дифференциальное сечение реакции  $^{12}\text{C}(d, n)^{13}\text{N}$  (2,37 МэВ;  $1/2^+$ ):

$a - E_d = 11,8$  МэВ;

$b - E_d = 15,25$  МэВ

главного (стрипшингового) пика и правильно передают форму экспериментальных угловых распределений вне главного пика, хотя по абсолютной величине теоретические дифференциальные сечения в этой области оказываются ниже экспериментальных. В связи с этим следует подчеркнуть, что в наших расчетах мы учли простейший механизм образования РС (см. рис. 5), имеющий ближайшую к физической области особенность по  $z$  и поэтому дающий основной вклад в амплитуду реакции в области главного максимума. В области же минимумов и последующих пиков существенный вклад дают более сложные механизмы, имеющие более далекие особенности по  $z$ . Эти механизмы мы здесь не учитывали, поэтому и не следует ожидать хорошего согласия рассчитанных угловых распределений с экспериментальными. Главное — добиться наилучшего согласия в области главного пика, который дает всю спектроскопическую информацию о РС. Отметим, что, вообще говоря, форма углового распределения не сильно зависит от  $l_r$ . Однако абсолютное значение  $\sigma(E_i, z)$  оказывается очень чувствительным к значениям  $l_r$ , что позволяет при известном значении ширины  $\Gamma$ , полученном из анализа данных по упругому рассеянию, определять однозначно  $l_r$ , или наоборот. Здесь для демонстрации предсказательной способности теории мы определяли значения полных ширин РС  $\Gamma$ , используя известные из независимых экспериментов по упругому рассеянию протонов на соответствующих ядрах-мишенях значения  $l_r$ , спина и четности РС  $J^\pi$ . Результаты анализа сведены в табл. 3. Неопределенности в значениях  $\Gamma$  получены в результате такого варьирования  $L$  и  $L'$ , при котором вычисленные угловые распределения описывают экспериментальные в области главного пика (с учетом погрешностей).

Расчеты показывают, что кулоновские эффекты почти не влияют на характер угловых распределений, но зато сильно увеличивают  $\sigma(E_i, z)$ , что приводит к уменьшению определяемой из анализа величины  $\Gamma$ . Учет кулоновских эффектов в начальном и конечном состояниях (КЭНКС) в рассмотренных нами реакциях увеличивал сечение. В связи с этим отметим, что в реакциях срыва в связанные состояния КЭНКС, как правило, уменьшают абсолютное значение сечения. Но при достаточно малой энергии связи  $\varepsilon$  в вершине  $A + a \rightarrow B$  в рассмотренной области энергий КЭНКС начинают увеличивать сечение и для реакций срыва в РС, где  $\varepsilon < 0$ , это увеличение может достигать фактора 2. Но особенно чувствительны значения  $\sigma(E_i, z)$  к значению кулоновского параметра  $\eta_0$  в вершине  $A + a \rightarrow B^*$ . Влияние кулоновского взаимодействия в вершине значительно сильнее, чем влияние КЭНКС. Так, для РС (7,752 МэВ) ядра  $^{15}\text{O}$ , имеющего наибольшее  $\eta_0 = 2,09$  из всех проанализированных нами РС, учет вершинных кулоновских эффектов увеличивает  $\rho(E_i, z)$  почти на три порядка. Таким образом комбинированный учет кулоновских эффектов в трехлучевой вершине образования РС и КЭНКС всегда увеличивал сечение  $\sigma(E_i, z)$ , что уменьшало определяемую из анализа величину  $\Gamma$ .

## 8. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ДИАГРАММ С УЧЕТОМ КУЛОНОВСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Наряду с традиционными методами, например методом искаженных волн (МИВ), для анализа ядерных реакций успешно применялся и дисперсионный подход (см. [2] и ссылки, приведенные там), впервые предложенный Шапиро [45]. Идея этого подхода основана на предположении о доминирующей роли ближайших к физической области особенностей амплитуды реакции по  $z = \cos\theta$  ( $\theta$  — угол рассеяния в с.п.и). Эта амплитуда может быть представлена в виде бесконечного ряда нерелятивистских диаграмм Фейнмана, и нахождение ее ближайших особенностей сводится к нахождению особенностей простейших диаграмм. Аналитические свойства различных скелетных диаграмм, т. е. диаграмм с постоянными вершинами, исследовались во многих работах (см., например, [46] и цитируемую там литературу). Усложнение диаграмм при включении ядерных взаимодействий между частицами, как правило, приводит к удалению особенности по  $z$  от физической области, поэтому при конкретном расчете амплитуд ядерных реакций в дисперсионном подходе предполагается, что можно ограничиться учетом вклада только простейших диаграмм. Иная ситуация возникает в случае процессов с заряженными частицами.

Усложнение диаграмм при включении трех- и четырехлучевых кулоновских вершин\* не сдвигает особенностей исходной диаграммы. Но отсюда следует, что на основе произвольной исходной диаграммы, описывающей рассматриваемый процесс, можно построить бесконечный ряд диаграмм, содержащих всевозможные кулоновские перерасеяния внутренних частиц исходной диаграммы, и все эти диаграммы будут иметь особенность по  $z$  там же, где и исходная диаграмма, и потому должны быть учтены при расчете амплитуды реакции. В этом заключается главная особенность процессов с заряженными частицами.

В данном разделе рассмотрены аналитические свойства нерелятивистских диаграмм при учете кулоновских взаимодействий между частицами. Сформулировано несколько общих теорем, определяющих изменение аналитических свойств исходных диаграмм при включении кулоновских вершин, при этом в качестве исходных диаграмм для простоты берутся только скелетные диаграммы, т. е. диаграммы с постоянными трех- и четырехлучевыми вершинами. Учет кулоновско-ядерных вершин в исходных диаграммах не влияет на полученные результаты.

**Положение особенностей фейнмановских диаграмм с кулоновскими вершинами.** Пусть  $L$  — произвольная исходная (связная) нерелятивистская диаграмма с  $n$  внутренними линиями и  $\nu$  вершин-

\* Трехлучевые вершины на диаграмме описывают виртуальный или реальный распад (или синтез) ядра на две частицы, а четырехлучевые вершины — рассеяние двух частиц.

ными частями, описывающая бинарную реакцию, а  $L_C$  — модифицированная диаграмма, полученная из  $L$  включением кулоновских вершин. Амплитуда диаграммы  $L$   $M_L$  зависит от двух инвариантных кинематических переменных, в качестве которых можно выбрать, например, суммарную кинетическую энергию сталкивающихся частиц в с.ц.и.  $E_i$  и  $z$ . Опуская для краткости доказательство, сформулируем важную теорему, определяющую изменение аналитических свойств диаграммы  $L$  при включении кулоновских взаимодействий.

**Теорема 1.** При включении кулоновского взаимодействия между частицами 1 и 2 диаграммы  $L$  положение собственных особенностей \* диаграммы  $L$  не меняется, т. е. эти особенности являются общими особенностями диаграмм  $L$  и  $L_C$  \*\*.

Эта теорема справедлива как в случае, когда включается четырехлучевая кулоновская вершина, описывающая рассеяние частиц 1 и 2, так и в случае, когда учитываются кулоновские эффекты в трехлучевой вершине  $3 \Leftrightarrow 1+2$ .

**Поведение вблизи особенностей по  $z$  диаграмм с учетом кулоновских взаимодействий.** Учет кулоновского взаимодействия в начальном и (или) конечном состоянии. Покажем, как меняется характер особенностей по  $z$  диаграммы  $L$  при учете кулоновского рассеяния в начальном и (или) конечном состоянии. Амплитуда модифицированной диаграммы  $L_C$ , полученной из  $L$  включением кулоновского рассеяния в начальном состоянии, дается выражением [47]

$$M_{L_C}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} M_L(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}) \Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)}(\mathbf{p}), \quad (43)$$

где  $M_L(\mathbf{k}_f, \mathbf{p})$  — амплитуда диаграммы  $L$  наполовину (по импульсу)  $\mathbf{p}$  вне энергетической поверхности,  $\Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)}(\mathbf{p})$  — фурье-компонента кулоновской волновой функции непрерывного спектра в импульсном представлении [48],  $\mathbf{k}_i$  ( $\mathbf{k}_f$ ) — относительный импульс частиц в начальном (конечном) состоянии. Пусть  $\zeta$  — собственная особенность по  $z$  амплитуды  $M_{L_C}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  на энергетической поверхности. Согласно теореме 1 амплитуда  $M_{L_C}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  также имеет особенность при  $z = \zeta$ . Мы хотим найти поведение  $M_{L_C}$  при  $z \rightarrow \zeta$ , зная поведение вблизи этой особенности амплитуды  $M_L$ . Для этого разложим  $M_{L_C}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  и  $M_L(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  в ряд по парциальным волнам и рассмотрим парциальную амплитуду диаграммы  $L_C$  на энергетической поверхности

$$M_{L_C l}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \equiv M_{L_C l}(E_i) = \exp(i\sigma_l^{(1)}) \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} p^2 M_{L l}(\mathbf{k}_f, p) \Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)}(p). \quad (44)$$

\* Собственной особенностью диаграммы называется особенность, в образовании которой участвуют полюсы пропагаторов всех внутренних частиц.

\*\* Для краткости мы говорим об особенностях диаграммы, подразумевая под этим особенности ее амплитуды.

Здесь  $M_{Ll}(k_f, p)$  — парциальная амплитуда диаграммы  $L$  наполовину вне энергетической поверхности,  $\sigma_l^{(i)}$  — кулоновские фазы рассеяния в начальном состоянии,  $\Psi_{ik_i}^{(C)}(p)$  — парциальная кулоновская волновая функция в импульсном представлении, явное выражение для которой получено в [47, 49]. Согласно асимптотической теореме [50] поведение парциальных амплитуд диаграммы при  $l \rightarrow \infty$  и характер ее ближайшей к физической области особенности по  $z$  взаимно однозначно связаны. Поэтому, зная  $M_{L_C l}(E_i)$  при  $l \rightarrow \infty$ , можно найти поведение  $M_{L_C}(E_i, z) \equiv M_{L_C}(k_f, k_i)$  вблизи ближайшей особенности по  $z$ . Пусть  $\phi$  — ближайшая к физической области особенность по  $z$  амплитуды  $M_L(E_i, z)$ . Тогда при  $l \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow k_i$  [50] \*

$$M_{Ll}(k_f, p) \approx C(k_f, p) \varepsilon_\chi l^{-(\chi+3/2)} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^2-1}} (\zeta^2-1)^{(\chi+1)/2} \times \exp(-l \ln \tau), \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \zeta - \sqrt{\zeta^2 + 1}, \quad \chi = (3n - 4\nu + 3)/2, \\ \varepsilon_\chi &= \begin{cases} 1/\Gamma(-\chi), & \chi \neq 0, 1, 2, \dots, \\ (-1)^\chi \chi!, & \chi = 0, 1, 2, \dots; \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$C$  — предэкспоненциальный множитель, определяющий мощность особенности и зависящий от типа диаграммы. Если  $\zeta$  — не ближайшая особенность, то формула (45) остается в силе после выделения из  $M_L(k_f, k_i)$  вклада более близких, чем  $\zeta$ , особенностей по  $z$ . Асимптотическое выражение при  $l \rightarrow \infty$  для  $\Psi_{ik_i}^{(C)}(p)$  дается выражением

$$\Psi_{ik_i}^{(C)}(p) \approx -\frac{2\pi}{k_i p} \exp(-\pi\eta_i/2) \sqrt{\frac{\pi}{l}} \lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{1}{d\gamma} \left\{ \left[ \frac{p^2 - (k_i + i\gamma)^2}{p^2 - (k_i - i\gamma)^2} \right]^{\frac{1}{2}\eta_i} \times \right. \\ \left. \times \exp(-l \ln \tau_\gamma(k_i, p)) / (\tau_\gamma^2(k_i, p) - 1)^{1/2}, \quad (47) \right.$$

где  $\tau_\gamma(k_i, p)$  и  $\zeta_\gamma(k_i, p)$  связаны соотношением (46),  $\zeta(k_i, k) = (k_i^2 + p^2 + \gamma^2)/2k_i p$ . Подставляя (45) и (47) в (44), можно вычислить интеграл при  $l \rightarrow \infty$  методом перевала. При этом удобно вначале вычислить интеграл, а затем выполнить дифференцирование по  $\eta$  и после перейти к пределу  $\gamma \rightarrow +0$ . В результате получаем главный член асимптотического разложения  $M_{L_C l}(E_i)$  по  $l^{-1}$  при  $l \rightarrow \infty$ :

$$M_{L_C l}(E_i) \approx \rho(E_i) l^{\eta_i} M_{Ll}(E_i), \quad (48)$$

\* В силу свойств  $\Psi_{ik_i}^{(C)}(p)$  [47] основной вклад в интеграл (44) при  $l \rightarrow \infty$  дает окрестность точки  $p = k_i$ , поэтому достаточно знать поведение при  $l \rightarrow \infty$  амплитуды  $M_{Ll}(E_i) \equiv M_{Ll}(k_f, k_i)$ .



где использовано соотношение  $\exp(i\sigma_l^{\eta_i}) \approx l^{\eta_i}$ ,  $l \rightarrow \infty$ ,  $\eta_i$  — кулоновский параметр в начальном состоянии. Явный вид  $\rho(E_i)$  нам здесь не важен, главное, что он не зависит от  $l$ . Из сравнения (48) и (44) видно, что при  $l \rightarrow \infty$  свертка обобщенной функции  $\Psi_{k_i}^{(C)}(p)$  с регулярной при  $p = k_i$  функцией  $M_{L_l}(k_f, p)$  сводится к умножению  $M_{L_l}(E_i)$  на  $\rho(E_i)$ . Выход в результате интегрирования  $M_{L_l}(k_f, p)$  на энергетическую поверхность обусловлен тем, что при  $l \rightarrow \infty$  носитель  $\Psi_{k_i}^{(C)}(p)$  сосредоточен при  $p^2 = k_i^2$ : точка перевала в (44) дается выражением  $p^2 = k_i^2 + O(\gamma)$ .

Согласно [50] характер ближайшей особенности по  $z$  амплитуды  $M_{L_C}(E_i, z)$  определяется зависимостью от  $l$  при больших  $l$  ее парциальных амплитуд  $M_{L_C l}(E_i)$ , поэтому появление множителя  $l^{\eta_i}$  в (48) изменяет характер особенности  $\zeta$  амплитуды  $M_L(E_i, z)$ . С помощью формул работы [50] из (48) и (45) получаем старшие сингулярные члены  $M_{L_C}(E_i, z)$  и  $M_L(E_i, z)$  при  $z \rightarrow \zeta$ :

$$M_{L_C}^{(s)} = \rho(E_i) \Gamma(i\eta_i - \chi) \varepsilon_\chi (\zeta^2 - 1)^{i\eta_i/2} C(E_i) (\zeta - z)^{\chi - i\eta_i}, \quad (49)$$

$$M_L^{(s)} = C(E_i) (\zeta - z)^\chi, \quad \chi \neq 0, 1, 2, \dots, \quad (50a)$$

$$M_L^{(s)} = -C(E_i) (\zeta - z)^\chi \ln(\zeta - z), \quad \chi = 0, 1, 2, \dots, \quad (50b)$$

$$C(E_i) \equiv C(k_f, k_i).$$

Как видно из формул (49) и (50), учет кулоновского взаимодействия в начальном состоянии не меняет положения особенностей по  $z$  исходной диаграммы  $L$ , но меняет характер и мощность этих особенностей. Изменение мощности вызвано появлением фактора  $\rho(E_i) \Gamma(i\eta_i - \chi) \varepsilon_\chi (\zeta^2 - 1)^{i\eta_i/2}$ . При учете кулоновского взаимодействия в конечном или одновременно в начальном и конечном состояниях в формулах (48) и (49) следует заменить  $\eta_i$  на  $\eta_f$  или  $\eta_i + \eta_f$  соответственно ( $\eta_f$  — кулоновский параметр в конечном состоянии).

*Учет кулоновского рассеяния внутренних частиц. Теорема 2.* Характер собственных особенностей по  $z$  диаграммы  $L$  не меняется при включении кулоновского рассеяния двух внутренних частиц 1 и 2\*.

*Доказательство.* Учет кулоновского рассеяния частиц 1 и 2 эквивалентен замене свободной функции Грина этих частиц  $G_0$  на кулоновскую функцию Грина  $G_C$ . Спектральное разложение парциальной кулоновской функции Грина  $G_{Cl}$  дается интегралом, содержащим произведение комплексно-сопряженных парциальных кулоновских волновых функций. При этом фазовые множители

\* Это утверждение справедливо также, когда одна из частиц 1, 2 — внешняя, а другая внутренняя, либо обе внешние, но одна частица относится к начальному, а другая — к конечному состоянию.

$\exp(i\sigma_l)$ , изменяющие характер особенностей по  $z$  при включении кулоновского взаимодействия в начальном и (или) конечном состоянии, сокращаются. А при  $l \rightarrow \infty$  в силу свойств парциальных кулоновских волновых функций  $G_{Cl} = NG_{0l}$ , где перенормировочный множитель  $N$  зависит от блоков диаграммы  $L$ , с которыми сворачивается  $G_{Cl}$  [этот результат является следствием соотношения (48)]. Таким образом, учет кулоновского рассеяния двух внутренних частиц диаграммы при больших орбитальных моментах относительного движения этих частиц сводится к простой перенормировке парциальной свободной функции Грина этих частиц, что не меняет ни положения, ни характера собственных особенностей по  $z$  диаграммы, а меняет только их мощность.

До сих пор в качестве исходных мы брали только скелетные диаграммы, но результаты не меняются, если исходные диаграммы уже содержат двухчастичные кулоновские функции Грина. Отсюда следует, что замена трехчастичной свободной функции Грина трехчастичной кулоновской функцией Грина, отвечающей учету кулоновского взаимодействия трех частиц в промежуточном состоянии, также не меняет ни положения, ни характера собственных особенностей по  $z$  исходной диаграммы  $L$ , но меняет их мощность.

*Учет трехлучевых кулоновских вершин.* Сформулируем без доказательства теорему:

**Т е о р е м а 3.** Учет трехлучевой кулоновской вершины  $3 \rightleftharpoons 1 + 2$  меняет как характер, так и мощность собственных особенностей по  $z$  диаграммы  $L$ .

Старший сингулярный член амплитуды модифицированной диаграммы  $L_C$  при  $z \rightarrow \xi$  ( $\xi$  — собственная особенность по  $z$  диаграммы  $L$ ) дается выражением [ср. с (50)]

$$M_{L_C}^{(s)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \tilde{C}(E_i) (\xi - z)^{\chi + \eta_{12}}, \quad (51)$$

где  $\eta_{12} = Z_1 Z_2 e^2 \mu_{12} / \kappa_{12}$  — кулоновский параметр в вершине  $3 \rightleftharpoons 1 + 2$ ,  $\chi$  дается формулой (46), коэффициент  $\tilde{C}$  определяет мощность особенности  $\xi$ .

## 9. СИНГУЛЯРНАЯ ЧАСТЬ АМПЛИТУДЫ РЕАКЦИИ ПЕРЕДАЧИ В МОДЕЛИ ТРЕХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим реакцию передачи

$$(\beta\gamma) + \alpha \rightarrow \beta + (\alpha\gamma), \quad (52)$$

где  $(\beta\gamma)$  — связанное состояние частиц  $\beta$  и  $\gamma$ ; предполагается, что все три частицы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  одноименно заряжены. Без ограничения общности спины частиц можно не учитывать, поскольку интересующие нас кулоновские эффекты от спинов не зависят.

Диаграмма рис. 7, а определяет простейший механизм реакции (52), имеющий ближайшую к физической области особенность при  $z =$

=  $\zeta$ , где

$$\zeta = (k_i^2 + k_{f1}^2 + \kappa_{\alpha\gamma}^2)/2k_i k_{f1}, \tag{53}$$

$z = -\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f / k_i k_f = -\cos \theta$ ,  $\mathbf{k}_i$  ( $\mathbf{k}_f$ ) — импульс частицы  $\alpha$  ( $\beta$ ) в начальном (конечном) состоянии в с. п. и.,  $\mathbf{k}_{f1} = (m_\alpha / m_{\alpha\gamma}) \mathbf{k}_f$ ,  $\kappa_{\alpha\gamma}^2 = 2\mu_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha\gamma}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\gamma}$  — энергия связи связанного состояния ( $\alpha\gamma$ ),  $m_{\alpha\gamma} = m_\alpha + m_\gamma$ . На основе диаграммы рис. 7, а можно построить бесконечный ряд диаграмм, учитывающих всевозможные последовательные кулоновские перерасеяния трех частиц  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в промежуточном состоянии (диаграммы б, в, г, д . . . на рис. 7). Согласно теореме 1 все диаграммы этого ряда имеют особенность при  $z = \zeta$ . Если учесть

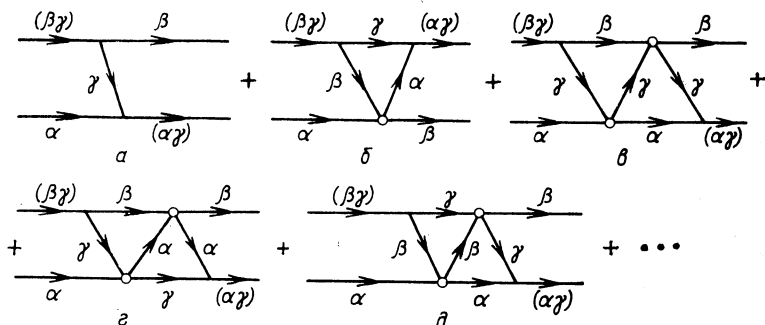


Рис. 7. Бесконечный ряд диаграмм, учитывающих всевозможные последовательные кулоновские перерасеяния частиц  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в промежуточном состоянии и описывающих механизм реакции передачи заряженной частицы  $\gamma$  в модели трех тел:

светлые кружки — четырехлучевые кулоновские вершины

еще кулоновское взаимодействие частиц в начальном и конечном состояниях, то мы получим выражение для амплитуды реакции  $\tilde{M}^*$ :

$$\tilde{M} = \langle \Psi_{\mathbf{k}_f}^{(C)(-)} | \varphi_\beta | V_\beta^N g_C V_\alpha^N | \varphi_\alpha \Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)} \rangle. \tag{54}$$

Здесь  $\Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)}$  и  $\Psi_{\mathbf{k}_f}^{(C)(-)}$  — двухчастичные кулоновские волновые функции рассеяния в начальном и конечном состояниях соответственно,  $g_C = (E - T - V_C + i0)^{-1}$  — трехчастичная кулоновская функция Грина,  $V_\alpha^C$  ( $V_\alpha^N$ ) — кулоновский (ядерный) потенциал взаимодействия частиц  $\beta$  и  $\gamma$  пары  $\alpha$ ,  $E$  ( $T$ ) — полная энергия (суммарный оператор кинетической энергии) трехчастичной системы,  $\varphi_\alpha$  — волновая функция связанного состояния пары  $\alpha$ . Старший

\* Выражение (54) может быть получено непосредственно из выражения для точной амплитуды реакции с помощью уравнений Фаддеева для операторов перехода Альта — Грассбергера — Сандхаса [51]. Тем самым доказывается, что одновременный учет кулоновского взаимодействия в начальном и конечном состояниях и в промежуточном состоянии не приводит к его переучету.

сингулярный при  $z = \zeta$  член амплитуды  $\tilde{M}$  совпадает со старшим сингулярным членом  $M^{(s)}$  точной (в модели трех заряженных частиц) амплитуды реакции  $M$ . Если в (54) заменить  $\Psi_{k_{i,f}}^{(C)(+)}$  плоскими волнами  $|k_{i,f}\rangle$ , то получим амплитуду  $B$ , определяющую механизм реакции и являющуюся суммой бесконечного ряда диаграмм рис. 7.

Отметим, что выражение (54) можно рассматривать как корректное обобщение подбарьерного МИВ для реакций передачи заряженных частиц, учитывающее трехчастичную кулоновскую динамику процесса. Если в (54)  $\Psi_{k_{i,f}}^{(C)(\pm)}$  заменить кулоновско-ядерными искаженными волнами, то получим аналогичное обобщение МИВ на случай надбарьерных реакций передачи. Поскольку  $\tilde{M}$  имеет правильное поведение при  $z \rightarrow \zeta$ , где  $\zeta$  — ближайшая особенность, то согласно асимптотической теореме в  $\tilde{M}$  правильно учитывается вклад периферийных (больших) парциальных волн (в случае подбарьерных реакций можно также говорить о правильном учете вклада внешней области). Раскладывая  $g_C$  в ряд по  $\Delta V_{\alpha,\beta}^C$ , где

$$\Delta V_{\beta}^C = V_{\alpha}^C + V_{\gamma}^C - U_{\beta}^C; \quad \Delta V_{\alpha}^C = V_{\beta}^C + V_{\gamma}^C - U_{\alpha}^C;$$

$U_{\alpha}^C$  ( $U_{\beta}^C$ ) — кулоновский потенциал взаимодействия частицы  $\alpha$  ( $\beta$ ) и центра масс пары  $\alpha$  ( $\beta$ ), получаем

$$\tilde{M} = \langle \Psi_{k_f}^{(C)(-)} | \varphi_{\beta} | V_{\alpha}^N + \Delta V_{\beta}^C | \varphi_{\alpha} \Psi_{k_i}^{(C)(+)} \rangle + \langle \Psi_{k_f}^{(C)(-)} | \varphi_{\beta} | \Delta V_{\beta}^C g_C \Delta V_{\alpha}^C | \varphi_{\alpha} \Psi_{k_i}^{(C)(+)} \rangle,$$

где первое слагаемое есть амплитуда обычного подбарьерного МИВ. Ясно, что в отличие от обычного МИВ в  $\tilde{M}$  учитываются все члены ряда теории возмущений по  $\Delta V_{\alpha,\beta}^C$ .

Следует отметить, что  $M$ , помимо ближайшей по  $z$  особенности  $\zeta$ , содержит и более далекие особенности по  $z$ , поэтому для нахождения сингулярной при  $z = \zeta$  части  $\tilde{M}^{(s)}$  амплитуды  $\tilde{M}$  нужно выделить вклад этих более далеких особенностей. Мы сделаем это отдельно для реакций передачи нейтрона и заряженных частиц.

Поведение амплитуды реакции передачи нейтрона вблизи особенности  $z = \zeta$ . Найдем в аналитическом виде старший сингулярный при  $z = \zeta$  член  $\tilde{M}^{(s)}$  амплитуды  $\tilde{M}$ , определяющий поведение  $\tilde{M}$ , а следовательно, и точной (в модели трех тел) амплитуды  $M$  при  $z \rightarrow \zeta$ .

В случае передачи нейтрона  $V_{\alpha}^C = V_{\beta}^C = 0$  ( $\gamma = n$ ) и  $g_C = (E - T - V_{\gamma}^C + i0)^{-1}$ . Перепишем (54) в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Psi_{k_f}^{(C)(+)}(\mathbf{k}') B(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Psi_{k_i}^{(C)(+)}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$B(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \langle \mathbf{k}', \varphi_{\beta} | V_{\beta}^N g_C V_{\alpha}^N | \varphi_{\alpha}, \mathbf{k} \rangle. \quad (56)$$

Используя соотношение

$$g_C = g_0 + g_0 t_V^C g_0,$$

где  $g_0 = (E - T + i0)^{-1}$  — трехчастичная свободная функция Грина,

$$t_V^C = V_V^C + V_V^C g_C V_V^C$$

— оператор кулоновского рассеяния частиц  $\alpha$  и  $\beta$  в трехчастичном пространстве, амплитуду  $\tilde{B}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  можно записать в виде суммы полюсной (а) и треугольной (б) диаграмм рис. 7 вне энергетической поверхности ( $k \neq k_i, k' \neq k_f$ ). Особенность полюсной диаграммы по переменной  $z' = \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}'/kk'$  находится при

$$\zeta(k', k) = (k^2 + k_1^2 + \tilde{\chi}_{\alpha\gamma}^2(k'))/2kk_1 \equiv (k_1^2 + k'^2 + \tilde{\chi}_{\beta\gamma}^2(k))/2k_1k'; \quad (57)$$

$$k_1 = (m_\beta/m_{\beta\gamma})k, \quad k'_1 = (m_\alpha/m_{\alpha\gamma})k';$$

$$\tilde{\chi}_{\alpha\gamma}^2(k') = \chi_{\alpha\gamma}^2 + (\mu_{\alpha\gamma}/\mu_f)(k'^2 - k_f^2);$$

$$\tilde{\chi}_{\beta\gamma}^2(k) = \chi_{\beta\gamma}^2 + (\mu_{\beta\gamma}/\mu_i)(k^2 - k_i^2), \quad (58)$$

$$\mu_i = m_\alpha m_{\beta\gamma}/\mathcal{M}, \quad \mu_f = m_\beta m_{\alpha\gamma}/\mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = m_\alpha + m_\beta + m_\gamma.$$

На энергетической поверхности  $\zeta(k_f, k_i) \equiv \zeta$  [см. (53)] — особенность, вблизи которой мы ищем поведение амплитуды  $\tilde{M}$ . Треугольная диаграмма б рис. 7 получается из полюсной диаграммы а при учете кулоновского рассеяния частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Это рассеяние описывается амплитудой кулоновского рассеяния вне энергетической поверхности, поэтому согласно теоремам 1 и 2 треугольная диаграмма имеет, так же как и диаграмма а рис. 7, полюс при  $z = \zeta$ . Кроме этой особенности, треугольная диаграмма имеет собственную треугольную особенность  $\zeta_\Delta$  [52]. Поэтому амплитуду  $B(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  можно записать в виде

$$B(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = B^{(s)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \Delta B(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (59)$$

где  $\Delta B$  — вклад от собственной треугольной и других неполюсных особенностей, а

$$B^{(s)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \Delta(k', k) B_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \quad (60)$$

— сингулярный при  $z' = \zeta(k', k)$  член  $B(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ ,  $B_0(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  — амплитуда полюсной диаграммы, даваемая формулой (10) работы [37], в которой следует заменить  $\zeta \rightarrow \zeta(k', k)$ ,  $k_i \rightarrow k$  и  $k_f \rightarrow k'$ ;  $\Delta(k', k)$  имеет вид [53]:

$$\begin{aligned} & \Delta(k', k) = \\ & = \left( \frac{\sqrt{m_{\beta\gamma}m_{\alpha\gamma}r_i} + \sqrt{m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}r_f} + i\sqrt{\frac{m_\gamma m_{\alpha\beta} \tilde{E}}{m_\gamma m_{\alpha\beta} \tilde{E}}}}{\sqrt{m_{\beta\gamma}m_{\alpha\gamma}r_i} + \sqrt{m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}r_f} - i\sqrt{\frac{m_\gamma m_{\alpha\beta} \tilde{E}}{m_\gamma m_{\alpha\beta} \tilde{E}}}} \right)^{in_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$r_i = k^2/2\mu_i - E - i0; \quad r_f = k'^2/2\mu_f - E - i0, \quad (62a)$$

$$\tilde{E} = E_{\alpha\beta} + \frac{c_f'}{m_{\alpha\beta}} \left( \frac{k'^2 - k_f^2}{2m_\beta} + \frac{k^2 - k_i^2}{2m_\alpha} \right), \quad (62b)$$

$$E_{\alpha\beta} = \frac{M}{m_{\alpha\beta}} E + \frac{m_{\alpha\gamma}}{m_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\gamma} + \frac{m_{\beta\gamma}}{m_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\beta\gamma}, \quad (63)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta e^2 \sqrt{\mu_{\alpha\beta}/2\tilde{E}}, \quad (64)$$

$$E = E_i - \varepsilon_{\beta\gamma}.$$

Из (60) следует, что учет треугольной диаграммы с четырехлучевой кулоновской вершиной приводит к перенормировке полюсной особенности (теорема 2), даваемой множителем  $\Delta(k', k)$ .

Подставляя (59) в (55), получаем выражение для сингулярного при  $z = \zeta$  члена амплитуды  $\tilde{M}$ , а следовательно, и  $M$  в случае реакции передачи нейтрона:

$$M^{(s)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Psi_{\mathbf{k}_f}^{(C)(+)}(\mathbf{k}') \Delta(k', k) B_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)}(\mathbf{k}). \quad (65)$$

Чтобы найти поведение  $M^{(s)}$  при  $z \rightarrow \zeta$ , достаточно разложить ее в ряд по парциальным волнам, найти поведение парциальных амплитуд  $M_l^{(s)}(E_i)$  при  $l \rightarrow \infty$  и затем восстановить поведение  $M^{(s)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  при  $z \rightarrow \zeta$ . Выражение для  $M_l^{(s)}(E_i)$  при  $l \rightarrow \infty$  можно получить, вычисляя интегралы по  $k'$  и  $k$  с помощью метода перевала. Асимптотическое выражение для  $\Psi_{lk_{i,f}}^{(C)}(k)$  дается формулой (47):

$$B_{0l}(k', k) \approx -G_\beta G_\alpha \frac{m_\gamma}{k'k} Q_l(\zeta(k', k)),$$

где  $Q_l$  — функция Лежандра второго рода,  $G_\alpha$  и  $G_\beta$  — ВК для распадов  $(\beta\gamma) \rightarrow \beta + \gamma$  и  $(\alpha\gamma) \rightarrow \alpha + \gamma$  соответственно [2]. В результате получаем

$$M_l(E_i) \approx M_l^{(s)}(E_i) \approx \exp[-(\eta_i \varphi_i + \eta_f \varphi_f)] \times \\ \times \Delta(k_f, k_i) B_{0l}^*(E_i) l^{i(\eta_i + \eta_f)}, \quad l \rightarrow \infty, \quad (66)$$

$$B_{0l}(E_i) \equiv B_{0l}(k_f, k_i), \\ \left. \begin{aligned} \varphi_i &= \arctg [(k_{f1}^2 - k_i^2 + \kappa_{\alpha\gamma}^2)/2\kappa_{\alpha\gamma}k_i], \\ \varphi_f &= \arctg [(k_{i1}^2 - k_f^2 + \kappa_{\beta\gamma}^2)/2\kappa_{\beta\gamma}k_f]. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Поскольку предполагается, что  $\zeta$  — ближайшая особенность, то (66) определяет поведение при  $l \rightarrow \infty$  не только  $\tilde{M}_l^{(s)}$ , но и  $\tilde{M}_l$ , а следовательно, и  $M_l$ . Из (66) с помощью формул работы [50] получаем стар-

ший сингулярный член  $M^{(s)}$ , определяющий поведение  $M$  при  $z \rightarrow \zeta$ :

$$\begin{aligned} M(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &\approx M^{(s)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \\ &= N(\zeta^2 - 1)^{i\eta/2} (\zeta - z)^{-i\eta} B_0(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i), \end{aligned} \quad (68)$$

$$N = \exp[-(\eta_i \varphi_i + \eta_f \varphi_f)] \Gamma(1 + i\eta) \Delta(k_f, k_i), \quad \eta = \eta_i + \eta_f. \quad (69)$$

При  $z \rightarrow \zeta$

$$B_0(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \approx -\frac{m_\gamma}{k_f k_i} \frac{G_\beta G_\alpha}{\zeta - z}. \quad (70)$$

Отметим, что поведение амплитуды реакции в МИВ при  $z \rightarrow \zeta$  дается выражением типа (68), в котором  $N$  следует заменить

$$N_{\text{post}}^{\text{МИВ}} = \exp[-(\eta_i \varphi_i + \eta_f \tilde{\varphi}_f)] \Gamma(1 + i\eta), \quad (71a)$$

$$\tilde{\varphi}_f = \arctg[(k_i^2 - k_{f1}^2 + \kappa_{\alpha\gamma}^2)/2\kappa_{\alpha\gamma} k_{f1}] \text{ (post-форма)}$$

или

$$N_{\text{prior}}^{\text{МИВ}} = \exp[-(\eta_i \tilde{\varphi}_i + \eta_f \varphi_f)] \Gamma(1 + i\eta), \quad (71b)$$

$$\tilde{\varphi}_i = \arctg[(k_f^2 - k_{i1}^2 + \kappa_{\beta\gamma}^2)/2\kappa_{\beta\gamma} k_{i1}] \text{ (prior-форма) [54].}$$

Из (68) видно, что учет кулоновских эффектов в начальном и конечном состояниях превращает полюс исходной амплитуды  $B_0(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  в точку ветвления, а также меняет мощность этой особенности, в то время как учет кулоновского взаимодействия в промежуточном состоянии (частиц  $\alpha$  и  $\beta$ ) меняет только мощность особенности (фактор  $\Delta$ ).

Поведение амплитуды реакции передачи заряженной частицы вблизи особенности  $z = \zeta$ . Найдем старший сингулярный при  $z = \zeta$  член  $M^{(s)}$  точной (в модели трех заряженных частиц) амплитуды реакции (52)  $M$ . Для этого нужно найти поведение  $M_l$  при  $l \rightarrow \infty$ , а затем восстановить  $M^{(s)}$ . Чтобы найти асимптотику  $M_l$ , воспользуемся результатами работы [55], в которой с помощью метода многомерной стационарной фазы была найдена асимптотика при больших  $l$  парциальных амплитуд реакций перезарядки при столкновении однозарядных ионов с атомами. Основной результат этой работы состоит в том, что учет трехчастичных кулоновских эффектов в процессе перезарядки приводит к простой перенормировке асимптотики парциальной амплитуды  $B_{0l}$  диаграммы *a* рис. 7. Этот результат является следствием теорем 1 и 2. При этом учет кулоновского взаимодействия передаваемой частицы  $\gamma$  с «остовами»  $\alpha$  и  $\beta$ , с одной стороны, и остовов  $\alpha$  и  $\beta$  между собой, с другой, приводит к произведению соответствующих перенормировочных факторов. Но в работе [55] был рассмотрен случай  $Z_\alpha = Z_\beta = -Z_\gamma = 1$ . Поэтому кулоновское взаимодействие в начальном и конечном состояниях отсутствовало. Наличие этого кулоновского взаимодействия приводит к изменению граничных условий, что у нас учитывается введением

парциальных кулоновских волновых функций в начальном и конечном состояниях, с которыми сворачивается парциальная амплитуда  $B_l(k', k)$  вне энергетической поверхности, описывающая механизм реакции (в данном случае механизм реакции дается бесконечным рядом диаграмм рис. 7). Второе отличие нашего случая от рассмотренного в [55] связано с использованным там приближением  $m_\gamma \ll m_{\alpha, \beta}$ . Это приближение влияет только на вид перенормировочного фактора, возникающего от учета взаимодействия частиц  $\alpha$  и  $\beta$ . Но мы уже нашли этот фактор в случае произвольных масс [выражением (61)]. Используя результаты [55] и формулу (61), получаем, что при  $l \rightarrow \infty$

$$B_l(k', k) = D(k', k) B_{0l}(k', k), \quad (72)$$

где  $B_{0l}(k', k)$  — парциальная амплитуда диаграммы  $a$  рис. 7 вне энергетической поверхности,

$$D(k', k) = \frac{\Gamma(1 - \eta_\alpha - \eta_\beta)}{\Gamma(1 - \eta_\alpha) \Gamma(1 - \eta_\beta)} \Delta(k', k), \quad (73)$$

$\eta_\alpha$  ( $\eta_\beta$ ) — кулоновский параметр в вершине  $(\beta\gamma) \rightarrow \beta + \gamma$  ( $(\alpha\gamma) \rightarrow \alpha + \gamma$ ). Тогда при  $l \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M_l(E_i) &\approx \int_0^\infty \frac{dk'}{2\pi^2} k'^2 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 \Psi_{lk_f}^{(C)}(k') D(k', k) B_{0l}(k', k) \Psi_{lk_i}^{(C)}(k) \approx \\ &\approx -2\mu_{\alpha\gamma} \left( \frac{m_\beta}{m_{\beta\gamma}} \right)^{2\eta_\alpha} \exp \left[ -\frac{\pi}{2} (\eta + i\eta_\alpha + i\eta_\beta) \right] \eta_\alpha \eta_\beta \times \\ &\quad \times (2k_i k_{f1})^{-1 - i\eta + \eta_\alpha + \eta_\beta} \frac{G_\beta G_\alpha}{(4\kappa_{\alpha\gamma}^2)^{\eta_\beta} (4\kappa_{\beta\gamma}^2)^{\eta_\alpha}} \times \\ &\quad \times Df(\zeta^2 - 1)^{(-i\eta + \eta_\alpha + \eta_\beta)/2} l^{i\eta - \eta_\alpha - \eta_\beta} Q_l(\zeta), \end{aligned} \quad (74)$$

$$D \equiv D(k_f, k_i). \quad (75)$$

В выражении (74)

$$f = \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_3 \frac{\alpha_1^{-1-\eta_\beta} \alpha_3^{-1-\eta_\alpha} \mathcal{R}_f \mathcal{R}_i^{\eta_i}}{[1 + \alpha_3(\nu - 1)]^{1+i\eta - \eta_\alpha - \eta_\beta}}, \quad (76)$$

$$\mathcal{R}_i = a^2 - (k_i + \sqrt{u})^2; \quad \mathcal{R}_f = \frac{\mu_{\alpha\gamma}}{\mu_{\beta\gamma}} d (b^2 - [k_f + i\sqrt{\rho}]^2);$$

$$a^2 = [1 + (\nu - 1)\alpha_3]^2 k_{f1}^2; \quad u = (\nu - 1)^2 \alpha_3 (1 - \alpha_3) k_{f1}^2 +$$

$$+ (1 - \alpha_3) \kappa_{\alpha\gamma}^2 + \left( \frac{m_{\beta\gamma}}{m_\beta} \right)^2 \alpha_3 \kappa_{\beta\gamma}^2;$$

$$b^2 = \left[ \frac{1 + (\nu - 1)\alpha_3}{d} \right]^2 k_{i1}^2;$$



$$\rho = \frac{[1 + (v-1)(\alpha_1 + \alpha_3)]d - [1 + (v-1)\alpha_3]^2}{d^2} k_{i1}^2 +$$

$$+ \frac{[1 - \alpha_1 + (v-1)\alpha_3] \kappa_{\beta\gamma}^2 + (\mu_{\beta\gamma}/\mu_{\alpha\gamma}) \alpha_1 \kappa_{\alpha\gamma}^2}{d};$$

$$d = 1 + (v-1)(\alpha_3 - v^{-1}\alpha_1); \quad v = \frac{m_{\alpha\gamma} m_{\beta\gamma}}{m_{\alpha} m_{\beta}}.$$

Выражение (74) можно рассматривать как парциальную амплитуду реакции в эйкональном приближении, отвечающем  $l \gg 1$ , с учетом трехчастичных кулоновских эффектов. В силу

$$Q_l(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{l}} \exp(-l \ln \tau) / \sqrt{\tau^2 - 1}, \quad l \rightarrow \infty, \quad (77)$$

где  $\tau$  и  $\xi$  связаны соотношением (46), при достаточно больших  $l$  выживает вклад в парциальные амплитуды  $M_l$  только от ближайшей особенности  $\xi$ , поэтому в эйкональном приближении достаточно учесть вклад только от этой особенности. Учет кулоновских эффектов приводит к появлению множителя  $l^{i\eta - \eta_\alpha - \eta_\beta}$  и изменяет абсолютную величину парциальной амплитуды реакции. С помощью формул (45) и (50а) находим старший сингулярный при  $z = \xi$  член амплитуды реакции  $M$ :

$$M^{(s)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Psi_{\mathbf{k}_f}^{(C)(+)}(\mathbf{k}') D(k', k) \times$$

$$\times B_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}_i}^{(C)(+)}(\mathbf{k}) \approx$$

$$\approx -2\mu_{\alpha\gamma} \left(\frac{m_\beta}{m_{\beta\gamma}}\right)^{2\eta_\alpha} \exp\left[-\frac{\pi}{2}(\eta + i\eta_\alpha + i\eta_\beta)\right] \times$$

$$\times \Gamma(1 + i\eta - \eta_\alpha - \eta_\beta) \eta_\alpha \eta_\beta \frac{G_\beta G_\alpha}{(4\kappa_{\alpha\gamma}^2)^{\eta_\beta} (4\kappa_{\beta\gamma}^2)^{\eta_\alpha}} \times$$

$$\times Df \frac{1}{[2k_i k_{f1} (\xi - z)]^{1+i\eta - \eta_\alpha - \eta_\beta}}. \quad (78)$$

Таким образом, не решая уравнений Фаддеева, мы нашли в явном виде асимптотику парциальных амплитуд и старший сингулярный при  $z = \xi$  член точной (в модели трех заряженных частиц) амплитуды реакции  $M$ . Полученные нами парциальные амплитуды  $M_l$  могут быть использованы для расчета поверхностных ядерных реакций передачи, где основной вклад дают периферийные парциальные волны, отвечающие  $l \geq kR$  [ $k = (k_i + k_f)/2$ ,  $R$  — радиус канала]. Выражение (78) может быть использовано для определения ВК экстраполяцией экспериментальных дифференциальных сечений в точку сингулярности  $z = \xi$  [2]. Отметим также, что при нахождении амплитуд реакций с заряженными частицами путем решения трехчастичных уравнений Фаддеева — Меркурьева [56] существенные сложности возникают при вычислении парциальных амплитуд реакций

при больших  $l$ . Формула (74) позволяет ограничиться расчетами парциальных амплитуд при небольших  $l$ , а затем сплечь вычисленные амплитуды с амплитудами (74).

Покажем, как приведенные результаты используются для анализа реакций передачи и получения спектроскопической информации (ВК).

**Реакции передачи нейтрона.** Обычно при расчете таких реакций применяется МИВ. С помощью формулы (66) можно проверить, насколько аккуратно учитывается в МИВ вклад периферийных парциальных амплитуд. Амплитуда в МИВ имеет особенность  $z = \xi$ , отвечающую механизму  $a$  рис. 7. Явный вид периферийных парциальных амплитуд в МИВ в post- и prior-формах нетрудно найти из (68), (71), (50a) и (45)\*. Тогда получаем

$$C_1 = M_l(E_i) / M_{l\text{post}}^{\text{МИВ}}(E_i) \approx \Delta(k_f, k_i) \exp[\eta_f(\tilde{\varphi}_f - \varphi_f)], \quad (78a)$$

$$C_2 = M_l(E_i) / M_{l\text{prior}}^{\text{МИВ}}(E_i) \approx \Delta(k_f, k_i) \exp[\eta_i(\tilde{\varphi}_i - \varphi_i)], \quad (78b)$$

где  $M_l(E_i)$  дается выражением (66).

В табл. 4 приведены значения  $C_1$  и  $C_2$ , вычисленные для различных реакций передачи нейтрона  $A(x, y)B$ . При расчете амплитуд  $M_l(E_i)$  учитывался вклад полюсной (a) и треугольной (б) диаграмм

Таблица 4. Отношение периферийных парциальных амплитуд в модели трех тел ( $M_l$ ) и в МИВ ( $M_l^{\text{МИВ}}$ ) для реакций передачи нейтрона

Реакция	$E_i$ , МэВ	$C_1$	$C_2$
$^{27}\text{Al}(d, p)^{28}\text{Al}$	10	1	1,28
	30	1	1,24
$^{12}\text{C}(^{14}\text{N}, ^{13}\text{N})^{13}\text{C}$	70	1,09	1,09
$^{208}\text{Pb}(^{16}\text{O}, ^{17}\text{O})^{207}\text{Pb}$	90	3,2	1,1
	150	3,05	1,1

рис. 7 ( $y = \beta$ ,  $A = \alpha$ ,  $n = \gamma$ ,  $x = y + n$  и  $B = A + n$ ). Из этой таблицы видно, что в случае  $x < A$  следует использовать post-форму, а при  $x > A$  — prior-форму, причем для легких и средних ядер отличие  $M_l^{\text{МИВ}}(E_i)$  от  $M_l(E_i)$  при  $l \gg 1$  не превышает 10%.

**Определение ВК для отделения нейтрона от ядер.** ВК для  $d \rightarrow p + n$ . Расчеты с помощью реалистических потенциалов дают  $G_d^2 = 0,43$  фм [2]. Феноменологическое значение  $G_d^2$  можно получить экстраполяцией экспериментальных дифференциальных сечений упру-

\* Впервые асимптотики парциальных амплитуд МИВ при  $l \gg \eta_i, f, \eta_i, f < 1$  и  $\sqrt{l^2 + \eta^2/4} \gg 1$  были найдены в [57, 58].

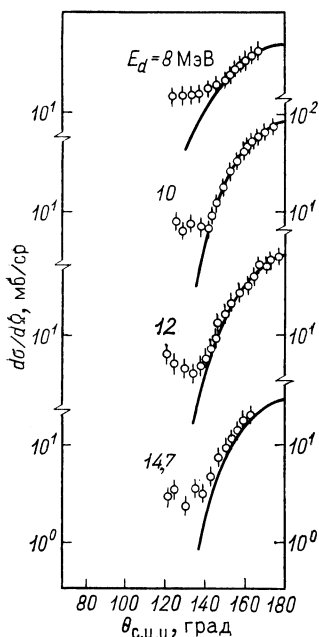


Рис. 8. Дифференциальное сечение упругого рассеяния  $d + {}^6\text{Li}$  в области больших углов. Сплошные кривые — наш расчет по периферийной модели с учетом кулоновских эффектов

гого обменного рассеяния  $p + d$  в точку обменной сингулярности  $z = \zeta$  [формула (53)] — особенность диаграммы  $a$  рис. 7. При анализе этого процесса важны кулоновские эффекты, и без их учета не удастся получить правильное значение  $G_d^2$  [59]. В то же время из анализа рассеяния  $n + d$ , где кулоновские эффекты отсутствуют, с помощью процедуры экстраполяции получают значения  $G_d^2$ , согласующиеся с теоретическим [59]. В работе [60] были определены квадраты ВК  $G_d^2$  экстраполяцией с помощью формул (68) и (69) экспериментальных дифференциальных  $pd$ -сечений в точку особенности  $z = \zeta$ . При анализе использованы экспериментальные данные при 14 энергиях падающих протонов  $3 \leq E_p \leq 46,3$  МэВ. Найденное с учетом кулоновских эффектов

среднее значение  $G_d^2 = (0,427 \pm 0,003)$  фм прекрасно согласуется с теоретическим.

**ВК для распада  $t \rightarrow d + n$ .** Аналогичный анализ реакции  $d(d, p)t$  при 19 энергиях падающих дейтронов в интервале  $4,0 \leq E_d \leq 83$  МэВ дает  $G_t^2 = (1,34 \pm 0,02)$  фм [61]. Другие оценки этой ВК даны в обзоре [2].

**ВК для распада  ${}^{13}\text{C} \rightarrow {}^{12}\text{C} + n$ .** Экстраполяция экспериментального дифференциального сечения реакции  ${}^{12}\text{C}(d, p){}^{13}\text{C}$  (осн.) при  $E_d = 12$  МэВ в точку  $z = \zeta$  дает значение  $G_{{}^{13}\text{C}}^2 = 0,4$  фм [62], совпадающее с оценками ВК, полученными другими методами (см. [62] и ссылки, приведенные там).

**Реакции передачи заряженных частиц.** В этом случае периферийные парциальные амплитуды (ППА) в МИВ могут значительно отличаться от  $M_l(E_i)$ , что приводит к необходимости учета трехчастичных кулоновских эффектов при расчете амплитуд реакций передачи заряженных частиц.

**Определение ВК для отделения заряженных частиц от ядер.** Для определения ВК, отвечающих развалу ядер на два заряженных фрагмента, использована периферийная модель [37], в которой для расчета периферийных парциальных волн применялось выражение (74).

**Реакция  ${}^6\text{Li}(d, {}^6\text{Li}){}^2\text{H}$ .** В экспериментальных угловых распределениях упругого рассеяния  $d + {}^6\text{Li}$  при энергиях падающих дейтронов в лабораторной системе  $E_d = 8 \div 14,7$  МэВ [63, 64] имеется

резкий подъем при больших углах (рис. 8). Его возникновение можно естественным образом объяснить, если предположить, что при больших  $\theta$  главный вклад в сечение рассеяния дает особенность по  $z$  механизма обмена  $\alpha$ -частицей (диаграмма  $a$  рис. 7, где  $\alpha = \beta = d$ ,  $\gamma = {}^4\text{He}$ ), расположенная гораздо ближе к границе физической области  $z = 1$ , чем особенности, отвечающие другим простейшим механизмам, описываемым петлевыми (передача пары частиц  $pt$ ,  $n {}^3\text{He}$ ,  $dd$ ) или треугольными диаграммами [65]. Однако все диаграммы рис. 7, отвечающие учету кулоновских перерасеяний двух дейтронов и  $\alpha$ -частицы в промежуточном состоянии, имеют особенность там же, где и диаграмма  $a$  рис. 7, и должны быть учтены при расчете. Вычисленные дифференциальные сечения приведены на рис. 8. Вклад  $D$ -состояния в вершинах  ${}^6\text{Li} \rightleftharpoons \alpha + d$  не учитывался. Как видно, рассчитанные угловые распределения хорошо описывают экспериментальные в области больших углов, причем кулоновское перерасеяние в начальном и конечном состояниях и трехчастичные кулоновские эффекты практически не влияют на форму угловых распределений в этой области. Найденные из сравнения рассчитанных и экспериментальных дифференциальных сечений квадраты ВК  $G_{\alpha d}^2$  для распада  ${}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + d$  приведены в табл. 5. В скобках указаны значения парциальных амплитуд, даваемых МИВ, в котором не учитываются трехчастичные кулоновские эффекты. Учет трехчастичных кулоновских эффектов в периферийных парциальных амплитудах увеличивает теоретическое сечение примерно в 8 раз, что приводит к уменьшению извлекаемых значений  $G_{\alpha d}^2$  примерно в 2,8 раза. Отметим, что кулоновское взаимодействие в трехлучевых вершинах  ${}^6\text{Li} \rightleftharpoons \alpha + d$  диаграммы рис. 7,  $a$  увеличивает извлекаемые значения  $G_{\alpha d}^2$  примерно в 2 раза [2] (это взаимодействие учитывается и в МИВ), в то время как одновременный учет кулоновского взаимодействия в трехлучевых вершинах и трехчастичных кулоновских эффектов в рассматриваемом случае уменьшает определяемую величину  $G_{\alpha d}^2$ . Этот пример показывает, насколько важен одновременный учет всех кулоновских эффектов. Отметим, что имеющиеся в литературе оценки  $G_{\alpha d}^2$ , полученные различными методами, сильно отличаются друг от друга [2]. В работе [66] для нахождения волновой функции ядра  ${}^6\text{Li}$  в модели  $\alpha - p - n$  был использован вариационный стохастический метод. Полученная с помощью этого метода волновая функция с правильной асимптотикой дает  $G_{\alpha d}^2 = 0,46$  ф.м.

**Реакция  ${}^7\text{Li}(d, {}^6\text{Li}){}^3\text{H}$ .** Угловое распределение в этой реакции при энергии  $E_d = 12$  МэВ имеет пик при  $\theta = 180^\circ$  [67]. Ближайшей особенностью к точке  $z = 1$  является особенность диаграммы рис. 7,  $a$ ,

Т а б л и ц а 5. ЯВК для распада  ${}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + d$

$E_d$ , МэВ	$G_{\alpha d}^2$ , ф.м
8,0	0,16 (0,48)
10,0	0,34 (0,97)
12,0	0,31 (0,86)
14,7	0,24 (0,63)
Среднее	0,26 (0,74)

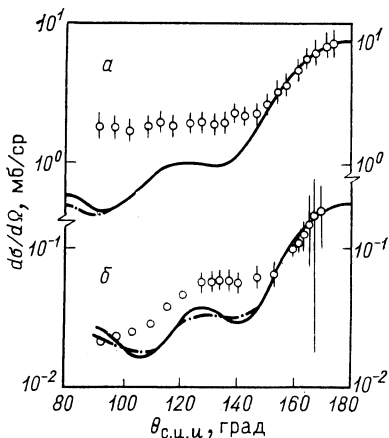


Рис. 9. Дифференциальные сечения реакций:

$a - {}^7\text{Li}(d, {}^3\text{He}){}^3\text{H}$  при  $E_d = 12$  МэВ [67];  
 $b - {}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$  при  $E_p = 45,2$  МэВ [68];  
 кривые — расчеты по периферийной модели (сплошные — с учетом кулоновских эффектов; пунктир — без учета кулоновских эффектов)

описывающей передачу  $\alpha$ -частицы ( $\alpha = d$ ,  $\beta = {}^3\text{H}$  и  $\gamma = {}^4\text{He}$ ). Дифференциальное сечение рассчитано в рамках периферийной модели (рис. 9). Влияние кулоновских эффектов качественно такое же, как и в предыдущей реакции. В частности, они практически не влияют на форму вычисленного углового распределения, которое

подгонялось к экспериментальному в области больших углов ( $\theta \geq 150^\circ$ ), где следует ожидать доминирующего вклада механизма подхвата  $\alpha$ -частицы (диаграмма рис. 7,  $a$ ). Поскольку дифференциальное сечение в периферийной модели пропорционально  $G_{\alpha t}^2 G_{\alpha d}^2$ , где  $G_{\alpha t}^2$  — квадрат ВК для распада  ${}^7\text{Li} \rightarrow \alpha + t$ , то из сравнения рассчитанного и экспериментального дифференциальных сечений в области больших углов можно определить  $G_{\alpha t}^2 G_{\alpha d}^2$ . При  $G_{\alpha d}^2 = 0,26$  фм получено значение  $G_{\alpha t}^2 = 0,33$  фм.

**Реакция  ${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$ .** На основе периферийной модели вычислено дифференциальное сечение этой реакции при энергии падающих протонов 45,2 МэВ (рис. 9) в предположении, что пик в экспериментальном угловом распределении при больших углах [68] обусловлен особенностью по  $z$  механизма передачи тритона (диаграмма рис. 7,  $a$ ,  $\alpha = p$ ,  $\beta = {}^4\text{He}$  и  $\gamma = {}^3\text{H}$ ). Найденное с учетом кулоновских эффектов значение  $G_{\alpha t}^2 = 0,28$  фм. При этом использовалось значение квадрата ВК для распада  $\alpha \rightarrow t + p$   $G_{tp}^2 = 12,4$  фм, являющееся средним значением  $G_{tp}^2$  и  $G_{\tau n}^2$  ( $\tau = {}^3\text{He}$ ), найденных в [69—71] анализом экспериментальных данных с помощью дисперсионного соотношения вперед. В этой реакции влияние кулоновских эффектов наименьшее в силу большого значения  $E_p$  и большой энергии связи в трехлучевой вершине  $t + p \rightarrow \alpha$ . Как видно, значения  $G_{\alpha t}^2$ , полученные из анализа двух различных реакций, оказываются близкими.

Таким образом, мы проанализировали три реакции с легчайшими ядрами. Обычно наиболее сильное влияние на форму угловых распределений оказывает кулоновское перерассеяние в начальном и конечном состояниях, но оно существенно лишь при больших  $\eta_i$  и  $\eta_f$ . В рассмотренных нами случаях  $\eta_{i,f} < 0,3$ , поэтому влияние кулоновского взаимодействия на форму угловых распределений в рассмотренных реакциях несущественно. Иная ситуация имеет место в случае реакций с тяжелыми ионами, где  $\eta_{i,f} \gg 1$ .

**Угловые распределения в реакциях передачи, вызванных тяжелыми ионами.** Реакции передачи нуклона или группы нуклонов при энергиях около кулоновского барьера относятся к классу реакций, в которых кулоновское взаимодействие играет определяющую роль при формировании угловых распределений. Угловые распределения в таких реакциях, как правило, имеют колоколообразный вид с пиком при  $\theta \approx \theta_0$ , где  $\theta_0$  — угол рассеяния ядер, движущихся по резерфордовским траекториям, отвечающим «касательному» столкновению. Типичное колоколообразное экспериментальное угловое распределение показано на рис. 10. Причиной возникновения пика в

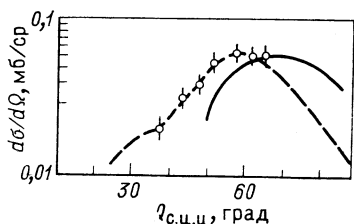


Рис. 10. Дифференциальные сечения реакции  $^{40}\text{Ca}(^{16}\text{O}, ^{15}\text{N})^{41}\text{Sc}$  (осн.) при энергии падающих ионов  $^{16}\text{O}$  48 МэВ, [взяты из [72]:

кривые — расчеты по МИВ (сплошная — со стандартными значениями параметров оптических потенциалов, пунктирная — с модифицированным оптическим потенциалом в выходном канале)

угловом распределении является конкуренция кулоновского отталкивания и ядерного притяжения. При больших прицельных параметрах  $\rho$ , отвечающих малым  $\theta$ , вероятность передачи частицы от ядра к ядру мала из-за слабого перекрытия волновых функций связанных состояний передаваемой частицы в начальном и конечном ядрах. При малых  $\rho$  ( $\rho < R_1 + R_2$ , где  $R_{1,2}$  — радиусы взаимодействующих ядер) вероятность квазиупругой (прямой) передачи \* частицы мала из-за сильного поглощения, возникающего вследствие конкуренции большого числа открытых каналов. Максимальная вероятность передачи имеет место при траекториях ядер, близких к касательным ( $\rho \approx \rho_0$ ,  $\rho_0 = R_1 + R_2$ ). Поэтому отвечающий им пик в угловом распределении часто называют касательным. Из-за сильного кулоновского отталкивания  $\theta_0$  составляет несколько десятков градусов. С уменьшением энергии касательные пики смещаются в область больших углов, а величина сечения в пике уменьшается. С ростом энергии эти пики сдвигаются в область меньших углов, при этом угловое распределение постепенно переходит в обычное дифракционное. Изящное объяснение механизма возникновения касательного пика в угловом распределении при  $\theta \approx \theta_0$  было дано В. М. Струтинским [74], который получил приближенное условие возникновения касательного пика

$$\theta_0/\lambda > 2, \quad (79)$$

\* Мы не рассматриваем здесь глубокоупругие реакции между тяжелыми ядрами, когда также может появиться пик в угловом распределении при  $\theta \approx \theta_0$  [73].

где  $\theta_0$  можно грубо оценить с помощью соотношения

$$\theta_0 \approx 2 \operatorname{arctg} \eta / l_0. \quad (80)$$

Здесь  $\eta = (\eta_i + \eta_f)/2$ ,  $l_0 \approx k_{\text{эф}} \rho_0$ ,  $k_{\text{эф}} = \sqrt{2\mu (E_i - V(\rho_0))}$ ,  $E_i$  — относительная кинетическая энергия сталкивающихся частиц,  $V(\rho_0)$  — потенциал взаимодействия ядер в точке их касания. Параметр  $\lambda$  связан с асимптотикой парциальной амплитуды реакции в плоско-волновом приближении при  $l \gg 1$  соотношением

$$B_l(E_i) \approx \exp(-\lambda l). \quad (81)$$

Используя формулу (45), можно связать  $\lambda$  с характеристиками диаграммы, описывающей механизм реакции передачи. При  $(l - l_0)/l_0 \ll 1$  и  $l \geq l_0 \gg 1$

$$\lambda = \ln \tau + \left( \chi + \frac{3}{2} \right) / l_0, \quad (82)$$

где  $\tau$  и  $\chi$  даются формулами (46). Таким образом, соотношения (79) и (82) позволяют оценить, для каких механизмов возможен касательный пик. Подчеркнем, однако, что условие (79) следует рассматривать как оценочное, поскольку при его получении был сделан ряд сильных упрощающих предположений, в частности, не учитывались ядерные фазы рассеяния при  $l > l_0$ , а кулоновские фазы рассеяния раскладывались в ряд около точки  $l = l_0$  и оставлялись только первые два члена разложения. Вычисления показывают также, что характер угловых распределений в области касательного пика зависит от параметров оптических потенциалов во входном и выходном каналах реакции. Подробное рассмотрение в рамках дифракционной модели причин возникновения касательного пика в реакциях передачи нейтрона, вызванных тяжелыми ионами, проведено в [58].

Помимо проблемы появления касательного пика, представляет интерес и точное описание его положения в зависимости от характеристик реакции (энергии падающего иона,  $Q$ -реакции). Расчеты угловых распределений реакций передачи нейтрона в рамках МИВ, как правило, согласуются с экспериментальными данными [75]. Однако в случае передачи протона при больших отрицательных значениях  $Q$ -реакции экспериментальные касательные пики расположены левее пиков, предсказываемых МИВ, причем с увеличением  $|Q|$  и уменьшением  $E_i$  разница увеличивается [72, 75]. Еще большее отличие даже при небольших  $|Q|$  наблюдается в случае передачи  $\alpha$ -частиц [76]. Смещение экспериментальных пиков влево указывает на то, что в случае передачи заряженной частицы относительный вклад периферийных парциальных амплитуд на самом деле больше, чем в МИВ. Увеличение относительного вклада периферийных парциальных амплитуд приводит к увеличению вероятности передачи при больших  $\rho$ , т. е. к смещению касательного пика в область меньших углов. Поскольку различие между теоретическими и экспериментальными угловыми распределениями проявляется только в

случае передачи заряженных частиц при энергиях вблизи кулоновского барьера, то ясно, что причиной расхождения является неаккуратный учет кулоновских эффектов в МИВ. На рис. 10 приведены угловые распределения реакции  $^{40}\text{Ca} (^{16}\text{O}, ^{15}\text{N}) ^{41}\text{Sc}$  (осн.) при  $E_i = 34,3$  МэВ, даваемые МИВ. Для описания экспериментальных угловых распределений обычно искусственно варьируют параметры оптических потенциалов, например, увеличивают диффузность потенциала в выходном канале [72]. Однако такой модифицированный потенциал не описывает упругое рассеяние. Наблюдаемое расхождение между теорией и экспериментом можно объяснить, если учесть трехчастичные кулоновские эффекты. Их учет приводит к увеличению относительного вклада периферийных амплитуд.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе рассмотрение подтверждает важную роль кулоновских эффектов в различных подходах к теории ядерных реакций, особенно в случае процессов при низких энергиях или процессов с участием слабосвязанных систем. Вместе с тем из изложенного выше следует, что корректный учет кулоновского взаимодействия позволяет получать неплохое описание экспериментальных данных по ядерным реакциям с заряженными частицами и получать из них ценную спектроскопическую информацию.

Кулоновское взаимодействие существенно меняет аналитические свойства амплитуд рассеяния; яркой иллюстрацией этого изменения может служить обсуждавшийся в разд. 9 нетривиальный факт появления полюсных особенностей, отвечающих механизму одночастичной передачи, у неполюсных диаграмм (треугольной и др.).

В настоящем обзоре авторы, разумеется, не ставили своей целью обсудить все вопросы, связанные с проявлением кулоновских эффектов в ядерных процессах. В частности, не была рассмотрена проблема учета кулоновского взаимодействия при решении уравнений Фаддеева для системы трех заряженных тел. Этой важной задаче, практическое решение которой еще нельзя считать завершенным, посвящено уже довольно много работ (см., например, [51, 56, 77—81]). В связи с этим отметим, что результаты, полученные в разд. 9, могут быть использованы для упрощения уравнений Альта — Грассберге-ра — Сандхаса (АГС) с тремя заряженными частицами [79] заменой недиагональных потенциалов переходов в этих уравнениях, содержащих трехчастичные кулоновские функции Грина, на их старшие сингулярные члены. Полученные приближенные уравнения АГС можно использовать для расчета амплитуд ядерных реакций в модели трех заряженных частиц. Но все это — тема специального обсуждения.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baryshnikov A. G., Blokhintsev L. D., Safronov A. N., Turovtsev V. V.— Nucl. Phys. A, 1974, v. 224, p. 61.
2. Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. И.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 6, с. 1189.
3. Бадалян А. М., Симонов Ю. А.— ЭЧАЯ, 1975, т. 6, вып. 2, с. 299.
4. Wong D. Y., Noyes H. P.— Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 1866.
5. Ментковский Ю. Л. Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
6. Hamilton J. e.a.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 60, p. 443.
7. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
8. Блохинцев Л. Д., Сафронов А. Н.— Изв. АН СССР, 1983, т. 47, № 11, с. 2168.
9. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
10. Сафронов А. Н.— Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат., 1982, № 2, с. 31.
11. Van Haeringen H.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 995; 1977, v. 18, p. 927; 1979, v. 20, p. 2520.
12. Гольдбергер М., Ватсон В. Теория столкновений: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
13. Lovelace C.— Phys. Rev. B, 1964, v. 135, p. 1225.
14. Блохинцев Л. Д., Сафронов А. Н.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1982, т. 46, с. 925.
15. Humblet J.— Phys. Lett. B, 1970, v. 32, p. 553.
16. Никитиу Ф. Фазовый анализ в физике ядерных взаимодействий. М.: Мир, 1983.
17. Fröhlich J. e.a.— J. Phys. G, 1980, v. 6, p. 841; Phys. Lett. B, 1979, v. 82, p. 173; Phys. Lett. B, 1980, v. 92, p. 8; Z. Phys. A, 1981, v. 302, p. 89.
18. Dubois R. e.a.— Nucl. Phys. A, 1982, v. 377, p. 529.
19. Blokhintsev L. D., Safronov A. N.— Czech. J. Phys., 1982, v. B32, p. 340.
20. Блохинцев Л. Д., Сафронов А. Н.— Проблемы ядерной физики и космических лучей, 1979, вып. 11, с. 7.
21. Сафронов А. Н.— В кн.: Тезисы докладов XXXII совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л.: Наука, 1982, с. 405.
22. Сафронов А. Н.— В кн.: Тезисы докладов XXXIII совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л.: Наука, 1983, с. 456.
23. Сафронов А. Н.— Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, вып. 12, с. 608.
24. Greben J. M.— Phys. Lett. B, 1982, v. 115, p. 363.
25. Hardy D. M. e.a.— Nucl. Phys., 1972, v. A195, p. 250.
26. McSherry D. H., Baker S. D.— Phys. Rev., 1970, v. C1, p. 888.
27. Dilg W. e.a.— Phys. Lett., 1971, v. 36B, p. 208.
28. Arvieux J.— Nucl. Phys., 1974, v. A221, p. 253.
29. Ahmed M. U., Shanley P. E.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 25.
- 29a. Lehman D. R., Gibson V. F.— Phys. Rev., 1977, v. C16, p. 1275.
30. Ball J. S. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1143; Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 1171.
31. Arndt R. A. e.a.— Phys. Rev., 1971, v. C3, p. 2100.
32. Arndt R. A. e.a.— Nucl. Phys., 1973, v. A209, p. 429.
33. Arndt R. A. e.a.— Ibid., p. 447.
34. Ajsenberg-Selove F.— Nucl. Phys., 1974, v. A227, p. 1; Nucl. Phys., 1979, v. A320, p. 1.
35. Сафронов А. Н.— В кн.: Тезисы докладов XXXI совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л.: Наука, 1981, с. 467.
36. Baur G., Trautmann L.— Phys. Repts, 1976, v. 25, p. 294.
37. Dolinsky E. I., Dzhamalov P. O., Mukhamedzhanov A. M.— Nucl. Phys., 1973, v. A202, p. 97.
38. Долинский Э. И. и др.— ЯФ, 1979, т. 29, с. 71.

39. Джамалов П. О., Долинский Э. И.— ЯФ, 1971, т. 14, с. 753.
40. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 776.
41. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
42. Долинский Э. И., Мухамеджанов А. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, т. 41, с. 2055.
43. Мухамеджанов А. М., Ярмахамедов Р., Джамалов П. О.— ЯФ, 1983, т. 37, с. 1405.
44. Борбей И. и др.— ЯФ, 1977, т. 26, с. 516.
45. Шапиро И. С.— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1616; Теория прямых ядерных реакций. М.: Атомиздат, 1963; УФН, 1967, т. 92, с. 549.
46. Блохинцев Л. Д., Труглик Э.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 2176; Блохинцев Л. Д., Сафронов А. Н., Шварц И. А.— Журнал теорет. и матем. физ., 1975, т. 24, с. 90.
47. Долинский Э. И., Мухамеджанов А. М.— ЯФ, 1966, т. 3, с. 252.
48. Guth E., Mullin C. J.— Phys. Rev., 1951, v. 83, p. 667.
49. Переломов А. М., Попов В. С.— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 179.
50. Попов В. С.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 2229.
51. Alt E. O., Sandhas W., Ziegelmann H.— Phys. Rev. C, 1978, v. 17, p. 1981.
52. Блохинцев Л. Д., Долинский Э. И., Попов В. С.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 1636; Nucl. Phys., 1963, v. 40, p. 117.
53. Dolinsky E. I., Mukhamedzhanov A. M.— Czech. J. Phys., 1982, v. B32, p. 302.
54. Santos F. D., Colby P.— Nucl. Phys., 1981, v. A367, p. 197.
55. Демков Ю. Н., Островский В. Н.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1582.
56. Merkurjev S. P.— Acta Physica Austriaca Suppl., 1981, v. 33, p. 65.
57. Шебеко А. В.— ЯФ, 1971, т. 13, с. 1259.
58. Kotlyar V. V., Shebeko A. V.— Z. Phys. A, 1981, v. 299, p. 311.
59. Borbely I.— J. Phys. G: Nucl. Phys., 1979, v. 5, p. 937.
60. Мухамеджанов А. М. и др.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1984, т. 48, с. 350.
61. Борбей И., Мухамеджанов А. М.— В кн.: Тезисы докладов XXXIV совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Алма-Ата, 1984, с. 413.
62. Гончаров С. А. и др.— ЯФ, 1982, т. 35, с. 662.
63. Bingham N. G. e.a.— Nucl. Phys. A, 1971, v. 173, p. 265.
64. Matsuki S. e.a.— J. Phys. Soc. Japan, 1969, v. 26, p. 1344.
65. Аваков Г. В. и др.— Проблемы ядерной физики и космических лучей. Харьков: Вища школа, 1977, вып. 7, с. 80.
66. Kukulin V. I., Krasnopolsky V. M., Voronchev V. T., Sazonov P. B.— Nucl. Phys. A, 1984, v. 417, p. 128.
67. Zander A. R., Kemper K. W., Fletcher N. R.— Nucl. Phys. A, 1971, v. 173, p. 273.
68. Craig R. M. e.a.— Nucl. Phys. A, 1967, v. 96, p. 367.
69. Locher M. P.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 36, p. 634.
70. Plattner G. R. e.a.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 206, p. 513.
71. Locher M. P.— Nucl. Phys. A, 1975, v. 251, p. 493.
72. Köster H. J. e.a.— Phys. Rev. C, 1973, v. 7, p. 107.
73. Волков В. В. Ядерные реакции глубокоэластичных передач. М.: Энергоиздат, 1982.
74. Струтинский В. М.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 2078.
75. Tamura T., Udagawa T., Mermaid M. C.— Physics Repts, 1980, v. 65, p. 345.
76. Berg G. P. A. e.a.— Phys. Rev. C, 1978, v. 18, p. 2204.
77. Веселова А. М.— ТМФ, 1972, т. 13, с. 368; 1978, т. 35, с. 180.
78. Харченко В. Ф., Шадчин С. А.— Укр. физ. журн., 1978, т. 23, с. 1651.
79. Alt E. O., Sandhas W.— Phys. Rev. C, 1980, v. 21, p. 1733.
80. Меркурьев С. П., Позднеев С. А.— ЯФ, 1979, т. 30, с. 941.
81. Pozdneev S.— J. Phys. G, 1982, v. 8, p. 1509.