

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Г. Ф. Филиппов, В. С. Василевский, Л. Л. Чоповский

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Обсуждаются свойства обобщенных когерентных состояний (ОКС), генерирующих базис многочастичных осцилляторных функций. В зависимости от выбора ОКС удается построить те или иные осцилляторные базисные функции, удобные для описания различных мод нуклонных систем — коллективных, внутренних, кластерных и т. д. Показано, что ОКС открывают принципиально новые возможности для исследования на микроскопической основе большого числа ядерных процессов и свойств атомных ядер: коллективных возбуждений, рассеяния, ядерных реакций, резонансных состояний.

The properties of the generalized coherent states (GCS), which generate the many-particle shell-model wave functions basis, are discussed. Depending on the choice of the GCS one can succeed in the construction of any oscillator basis functions convenient for the description of different modes of nucleon systems—collective, internal, cluster and so on. It is shown, that GCS reveal new principal ways for studying on the basis of microscopic theory numerous nuclear processes and nuclear properties: collective excitations, scattering, nuclear reactions.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из главных проблем микроскопической теории атомного ядра состоит в выделении доминирующих в рассматриваемом ядерном процессе корреляций и в их корректном учете. В этом направлении теоретической ядерной физики накоплен немалый опыт: предложен ряд методов выделения коллективных и внутренних степеней свободы, сформулированы различные приближения, предназначенные для последовательного решения уравнения Шредингера ядерной системы. Однако из-за отсутствия простых и надежных алгоритмов учета, заложенных в этих методах корреляций, многие интересные идеи и подходы остаются не реализованными, либо реализуются для весьма ограниченного класса ядерных процессов или атомных ядер (как правило, легчайших).

Между тем использование обобщенных когерентных состояний — ОКС (их также называют неприводимыми КС, производящими инвариантами, производящими функциями) дает принципиально новые возможности для учета доминирующих в том или ином ядерном процессе мод нуклонного движения и решения с заданной точностью многочастичного уравнения Шредингера.

Впервые система КС была использована Шредингером в 1926 г. для описания нерасплывающихся волновых пакетов осциллятора.

Несколько позже Глаубер, изучая вопросы когерентности пучка фотонов [1], ввел понятие когерентных состояний. Однако лишь в 1972 г. Переломов дал четкое определение ОКС для различных групп Ли [2]. Это сразу стимулировало исследования свойств различных физических систем с помощью техники ОКС, поскольку последняя, как оказалось, весьма удобна для изучения систем, гамильтонианы которых представимы в виде линейной комбинации генераторов соответствующей группы симметрии.

Вместе с тем в целом ряде задач и, в частности, в задачах ядерной физики приходится иметь дело с такими многочастичными гамильтонианами, которые не сводятся даже к полиномам конечной степени от генераторов соответствующей группы динамической симметрии. Поэтому использование ОКС в таких задачах оказалось малоэффективным.

Однако в последнее время развита техника, позволившая существенно расширить область применения ОКС и использовать их для изучения таких систем, исследование которых с помощью традиционных алгебраических методов не дало положительных результатов.

В настоящем обзоре изложены основные идеи построения и использования ОКС для различных задач ядерной физики.

План обзора следующий. В разд. 1 дана классификация задач микроскопической теории атомного ядра в зависимости от характера исследуемых нуклонных корреляций. Здесь же обсуждаются различные формы уравнения Шредингера (дифференциальная, интегральная, интегродифференциальная и алгебраическая), пригодные для исследования корреляционных проблем. Приведено определение ОКС. В разд. 2 рассмотрены группы динамической симметрии ядерных систем. В разд. 3—5 изложены идеи построения ОКС для исследования коллективных возбуждений, реакций и резонансов соответственно.

1. ЗАДАЧИ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА. ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Хорошо известно, что при исследовании структуры атомных ядер в рамках микроскопических подходов, как правило, приходится принимать во внимание те или иные корреляции в движении нуклонов, возникающие как результат межнуклонного взаимодействия. Это необходимо даже в том случае, когда отправной точкой исследования является концепция о независимом движении нуклонов в некотором среднем поле ядра. Наиболее ярким примером проявления нуклонных корреляций являются различные эффекты, связанные с коллективными квадрупольными движениями нуклонов, а также эффекты, обусловленные кластеризацией атомных ядер.

Для теоретического изучения нуклонных корреляций обычно (явно или не явно) из полного набора $3A-3$ независимых переменных $\{q\}$ волновой функции ядра Ψ после их перестройки выделяют такие,

которые непосредственно отражают доминирующие в данном процессе нуклонные моды. Обозначим эти переменные $\{q_D\}$ и будем условно называть их динамическими. Все остальные независимые переменные обозначим $\{q_K\}$ и будем называть их кинематическими. Это разделение независимых переменных на две группы $\{q\} = \{q_D, q_K\}$ оказывается полезным для уяснения смысла используемых теорией приближений. Число динамических переменных q_D (они, как и q_K , являются функциями одночастичных переменных) зависит от характера исследуемого процесса, а также от выбора приближения, которое используется при описании этого процесса. После того, как определены динамические и кинематические переменные, волновую функцию многочастичной системы удобно представить в следующем виде:

$$\Psi = A \left\{ \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(q_D) \chi_{\nu}(q_K) \right\}, \quad (1)$$

где \hat{A} — оператор антисимметризации. Если динамические переменные симметричны относительно перестановки координат нуклонов, то антисимметрию полной волновой функции будут обеспечивать функции χ_{ν} . Зависимость волновой функции Ψ от q_K или, иначе говоря, вид функций χ_{ν} определяется соответствующими для данной задачи физическими и кинематическими условиями, такими, например, как принцип Паули и др. В то же время компоненты $\Phi_{\nu}(q_D)$ многочастичной функции однозначно определяются в результате решения динамических уравнений, которым они удовлетворяют.

Заметим, что такое представление многочастичной функции Ψ является обобщением известного в теории молекул приближения Борна — Опенгеймера [3]. Медленному адиабатическому движению атомных ядер в данном случае сопоставляются те моды нуклонных систем, которые обусловлены изменением динамических переменных, а быстрому движению электронов молекулы — моды, связанные с кинематическими переменными.

Прежде чем говорить о построении уравнений для динамических компонент $\Phi_{\nu}(q_D)$, мы остановимся на традиционных задачах микроскопической теории атомных ядер.

Все задачи, решаемые микроскопической теорией, можно разбить на три группы в зависимости от характера тех корреляций, которые играют доминирующую роль в рассматриваемых процессах. К первой группе относятся задачи исследования коллективных возбуждений атомных ядер. Очевидно, что в этом случае динамические переменные совпадают с коллективными, а кинематические переменные — с внутренними. Функции χ_{ν} будут описывать внутреннее состояние ядра. Для корректного выделения внутренних и коллективных степеней свободы предложено два метода — метод гиперсферических функций (или метод K -гармоник) [5—8] и метод обобщенных гиперсферических функций (МОГФ) [9—12]. В методе K -гармоник коллективное движение связано с объемными, монополярными колебаниями

атомного ядра. Динамической переменной, воспроизводящей монопольные движения, является переменная ρ — гиперрадиус:

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{R}_A^2,$$

где \mathbf{r}_i — координата i -го нуклона, $\mathbf{R}_A = \frac{1}{\sqrt{A}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_A)$ — нормированная координата центра тяжести. Кинематические переменные в этом методе совпадают с $3A-4$ -внутренними угловыми переменными $\{\theta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 3A-4$.

В методе обобщенных гиперсферических функций для выделения коллективных движений привлекаются одновременно и монопольные, и квадрупольные степени свободы — $a, b, c, \varphi, \theta, \psi$. Здесь a, b, c — главные значения тензора инерции

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{A-1} x_{i\alpha} x_{i\beta}; \quad \alpha, \beta = x, y, z$$

($x_{i\alpha}$ — α -я компонента i -го вектора Якоби \mathbf{q}_i), а φ, θ, ψ — углы Эйлера, определяющие ориентацию главных осей эллипсоида инерции относительно внешней системы координат. Вместо переменных a, b, c часто используют переменные ρ, β, γ , которые связаны с a, b, c соотношениями

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2; \quad \rho^2 \beta \cos \gamma = c^2 - \frac{a^2 + b^2}{2};$$

$$\rho^2 \beta \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - b^2).$$

Переменные β и γ являются микроскопическим аналогом известных переменных модели Бора — Моттельсона [13]. В качестве внутренних (кинематических) переменных в МОГФ необходимо рассматривать степени свободы, описывающие движение нуклонов в системе главных осей эллипсоида инерции, или, что то же самое, в системе главных осей квадруполья масс.

Внутренняя функция χ_v удовлетворяет принципу Паули и, кроме того, имеет определенную четность, спин S , изоспин T и их проекции S_z и T_z , а также определенную $O(A-1)$ -симметрию $[f_1 f_2 f_3]$. Последнее требование является самым сильным, однако именно оно позволяет выделить ветви коллективных возбуждений, связанных интенсивными квадрупольными $E2$ - и монопольными $E0$ -переходами. Эти коллективные ветви наблюдаются практически у всех ядер, у которых измерены вероятности электромагнитных переходов, поэтому возможность ограничиться в первом приближении определенной $O(A-1)$ -симметрией при теоретическом изучении спектров коллективных возбуждений находит экспериментальное подтверждение.

Необходимость обращения к группе $O(A-1)$ (группе ортогональных преобразований в $(A-1)$ -мерном пространстве) обусловлена как тем, что параметры этой группы удобно выбрать в качестве независимых переменных внутренней функции $\{\chi_\nu(qK)\}$ [10, 11], так и тем, что трансляционно- и ротационно-инвариантные базисные функции неприводимых представлений (НП) группы $O(A-1)$ являются наиболее простым средством выражения идей модели оболочек (модели независимых частиц), приспособленным для изучения монопольных и квадрупольных возбуждений системы нуклонов. В отличие от функций трансляционно-инвариантной модели оболочек (ТИМО) внутренние функции $\{\chi_\nu\}$ остаются неизменными не только при движении центра масс, но и при движении квадрупольных масс, обеспечивая выполнение всех дополнительных кинематических условий, которым подчиняются координаты нуклонов в собственной системе координат ядра.

Замечательное обстоятельство заключается в том, что инвариантными функциями $\{\chi_\nu\}$ являются некоторые стандартные функции теории НП группы $(A-1)$ -мерных вращений и группы перестановок пространственных координат и спин-изоспиновых переменных системы A нуклонов (свойства этих функций хорошо известны [10]), и существует простая связь между квантовыми числами волновой функции модели оболочек, записанной в виде (1), и квантовыми числами стандартных инвариантных функций.

Вторая группа задач связана с изучением взаимодействия ядерных систем (т. е. рассеяния, реакций). Микроскопической основой для решения этих задач служит метод резонирующих групп (МРГ) [14—17], в котором предполагается, что внутренняя структура взаимодействующих подсистем (кластеров) не изменяется при их сближении и разлете. Если необходимо исследовать взаимодействие двух кластеров, состоящих из A_1 и A_2 нуклонов, то в качестве динамических переменных выбираются компоненты вектора Якоби q_1 , определяющего относительное положение двух кластеров. Остальные векторы Якоби, описывающие внутреннюю структуру этих кластеров, являются кинематическими переменными. Волновая функция такой системы представляется в виде

$$\Psi = \bar{A} \{ \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) f(q_1) \}. \quad (2)$$

Внутренние функции кластеров $\varphi_1(A_1)$ и $\varphi_2(A_2)$ фиксируются ($\chi_\nu \equiv \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2)$), а функция относительного движения $f(q_1)$ ($\Phi_\nu(q_D) \equiv f(q_1)$) зависит от выбора параметров нуклон-нуклонного потенциала.

Третью группу составляют задачи исследования коллективных резонансов, т. е. коллективных возбуждений, которые лежат в непрерывном спектре и характеризуются не только энергией возбуждения, но и шириной. Приближение фиксированной внутренней функции, используемое при решении задач первой группы, позволяет определить только энергию возбуждения, поскольку в таком при-

ближении учитывается лишь один канал распада системы на все составляющие ее нуклоны. С другой стороны МРГ дает возможность выявить те резонансы, которые обусловлены либо центробежным барьером, либо кулоновским взаимодействием, либо, наконец, связанными состояниями в закрытых кластерных каналах, когда изучается многоканальная задача. Поэтому для описания различных коллективных резонансов необходимо вместе с коллективными возбуждениями привлекать и набор внутренних функций, воспроизводящих движение подсистем по открытым каналам. Следовательно, динамическими переменными в этом случае будут коллективные и те внутренние переменные, которые связаны с кластеризацией ядра. Анализ кластерных функций, выполненный в [18], показал, что распад системы на два кластера описывают внутренние функции, $O(A - 1)$ -симметрия которых $[f_1 + 2k, f_2, f_3]$, где $K = 0, 1, 2, \dots$.

К третьей группе можно отнести также и задачи исследования коллективных возбуждений с более корректным, чем в приближении фиксированного внутреннего движения, учетом взаимодействия внутренних и коллективных степеней свободы. Такой учет взаимодействия коллективных и внутренних движений особенно актуален при описании ядер с ярко выраженной кластерной структурой. К этой же группе следует также отнести задачи исследования взаимодействия таких ядерных систем, которые изменяют свою внутреннюю структуру в процессе взаимодействия. Таким образом, при решении задач третьей группы используется более точное приближение, чем при решении задач первой и второй групп.

Вернемся теперь к волновой функции ядра (1). Напомним, что для всех перечисленных выше задач кинематические функции $\chi_\nu(q_K)$ фиксированы, а динамические компоненты $\Phi_\nu(q_D)$ должны быть найдены в результате решения дифференциального или интегродифференциального уравнения (точнее, системы уравнений). Чтобы вывести последнее, необходимо подставить в многочастичное уравнение Шредингера

$$(\hat{H} - E) \Psi = 0 \tag{3}$$

Ψ -функцию в виде (1), затем полученное соотношение домножить слева на функцию $\chi_{\nu'}(q_K)$ и проинтегрировать по кинематическим переменным

$$\langle \chi_{\nu'}(q_K) | \hat{H} - E | \hat{A} \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(q_D) \chi_{\nu}(q_K) \rangle = 0. \tag{4}$$

В итоге получим систему зацепляющихся интегродифференциальных уравнений (если динамические переменные q_D не симметричны относительно перестановок одночастичных координат) или систему дифференциальных уравнений (если q_K — симметричны). Напомним, что коллективные координаты в отличие от кластерных координат являются инвариантными относительно перестановки частиц.

Огромные трудности, связанные с записью в явном виде системы уравнений (4) для динамических компонент и численным решением этой системы, стимулировали поиски алгоритмов решения задачи, адекватных приведенному выше, но не столь сложных при практической реализации. Одним из таких алгоритмов является метод генераторных координат (МГК) [19—21]. В МГК используется интегральное представление для искомым коллективных компонент

$$\Phi_v(q_D) = \int g(\beta) \Phi_v^0(q_D, \beta) d\beta, \quad (5)$$

где $\Phi_v^0(q_D, \beta)$ — компоненты генераторной функции $\Psi^0(\beta, \{q\})$, имеющие тот или иной вид в зависимости от того, к какой из групп перечисленных в начале параграфа задач они относятся. Функции $\Phi_v^0(q_D, \beta)$ зависят как от динамических переменных q_D , так и генераторных параметров β ; при этом число генераторных параметров должно совпадать с числом переменных q_D . Легко видеть, что интегральное представление для динамических компонент эквивалентно интегральному представлению полной волновой функции

$$\Psi = \int d\beta g(\beta) \Psi^0(\beta, \{q\}), \quad (6)$$

где функция Ψ определена соотношением (1), а генераторная функция $\Psi^0(\beta, \{q\})$ * имеет вид

$$\Psi^0(\beta, \{q\}) = \hat{A} \left\{ \sum_v \Phi_v^0(\beta, q_D) \chi_v(q_R) \right\}, \quad (7)$$

наконец, неизвестная весовая функция $g(\beta)$ удовлетворяет интегральному уравнению Хилла — Уилера:

$$\int d\tilde{\beta} [\mathcal{H}(\beta, \tilde{\beta}) - E \mathcal{N}(\beta, \tilde{\beta})] g(\tilde{\beta}) = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\mathcal{N}(\beta, \tilde{\beta}) = \langle \Psi^0(\beta, \{q\}) | \Psi^0(\tilde{\beta}, \{q\}) \rangle \quad (9)$$

— интеграл перекрытия (интегрирование выполняется по всем одночастичным координатам),

$$\mathcal{H}(\beta, \tilde{\beta}) = \langle \Psi^0(\beta, \{q\}) | \hat{H} | \Psi^0(\tilde{\beta}, \{q\}) \rangle, \quad (10)$$

\hat{H} — многочастичный оператор Гамильтона.

* Функция $\Psi^0(\beta, \{q\})$, используемая для расчета свойств коллективных возбуждений атомных ядер, совпадает с детерминантом Слэтера, который конструируется из одночастичных осцилляторных функций анизотропного осциллятора. Частоты такого осциллятора, или их комбинации являются генераторными параметрами [22—25]. Для задач рассеяния $\Psi^0(\beta, \{q\})$ строят из кластерных орбиталей модели Бринка $\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_k)^2 \right\}$, где \mathbf{R}_k — кластерные параметры, выступающие в качестве генераторных координат [14, 16, 17, 26, 27].

Использование интегрального представления для волновой функции (или, что то же самое, для динамических компонент) в значительной степени упрощает получение интегрального уравнения, однако оставляет открытой проблему численного решения этого уравнения. Обычно для его решения используют дискретный вариант интегрального уравнения (8)

$$\sum [\mathcal{H}(\beta_i, \beta_j) - E \mathcal{N}(\beta_i, \beta_j)] g(\beta_j) = 0, \quad (11)$$

где суммирование ведется по некоторому дискретному набору точек $\{\beta_j\}$. Точность решения системы алгебраических уравнений (9) определяется тем, насколько удачно определен такой набор дискретных точек (они называются узловыми точками). Проблеме выбора узловых точек и, следовательно, проблеме точного решения системы (11) посвящено много работ (см., например, [28, 29]), однако алгоритмы, предложенные в этих работах, чрезвычайно громоздки, требуют большого объема численных расчетов, точность которых к тому же не всегда достаточно хорошо контролируема и особенно в случае многомерных генераторных координат.

Наиболее простым методом решения многочастичного уравнения Шредингера оказался метод осцилляторного базиса, который использует разложение искомой функции Ψ в ряд по полному набору многочастичных осцилляторных функций

$$\Psi = \sum_n C_n |n\rangle \quad (12)$$

или, что то же самое,

$$\Phi_v(q_D) = \sum_n C_n \Phi_v^n(q_D), \quad (13)$$

где Φ_v^n — динамическая компонента многочастичной осцилляторной функции

$$|n\rangle = \hat{A} \left\{ \sum_v \Phi_v^n(q_D) \chi_v(q_k) \right\}. \quad (14)$$

В результате такого разложения вместо системы дифференциальных или интегродифференциальных уравнений для функций $\Phi_v(q_D)$ получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{n'} \{ \langle n | \hat{H} | n' \rangle - E \delta_{n, n'} \} C_{n'} = 0 \quad (15)$$

для неизвестных коэффициентов C_n (другими словами — для волновой функции системы в осцилляторном представлении). Метод осцилляторного базиса можно применять не только для расчета свойств коллективных возбуждений, когда система совершает конечные движения, но и с большим успехом (как показано в [30—32]) для решения задач непрерывного спектра. В конкретных расчетах бесконечную систему уравнений (15) приходится заменять конечной и вместо полного набора базисных функций для решения многочастичного

уравнения использовать их конечное число. Точность решения системы (15) обычно контролируют, изучая зависимость рассчитываемых параметров ядра от числа привлекаемых базисных функций. В итоге выбирают такое достаточно большое число базисных функций, начиная с которого эта зависимость исчезает. Тем не менее возникает вопрос о вкладе отброшенных в системе (15) слагаемых, а также о том, в какой степени учет этих членов уточняет полученные в обрезанном базисе решения. Влияние этих членов можно учесть, если, следуя работе [31], предположить, что начиная с некоторого n_0 коэффициенты C_n принимают асимптотический вид $C_n \cong a_0 C_n^{\text{as}}$ (a_0 — постоянный коэффициент, определяемый из условия сшивания точного решения — C_v , $v < n_0$ — и асимптотического — C_n^{as} , $n \geq n_0$), характерный для каждой из перечисленных выше задач. Коэффициенты C_n^{as} однозначно определяются номером базисной функции n , E — энергией конкретного состояния и фазой рассеяния (если речь идет о состояниях непрерывного спектра). Принимая во внимание выражения для C_n^{as} , систему уравнений (15) приведем к виду

$$\sum_{n'=1}^{n_0-1} \langle n | \hat{H} | n' \rangle - E \delta_{nn'} \rangle C_{n'} + a_0 \sum_{v=n_0}^{\infty} C_v^{\text{as}} \langle n | \hat{H} | v \rangle = 0. \quad (16)$$

В результате система линейных однородных уравнений (15) превращается в замкнутую систему нелинейных уравнений для связанных состояний или в систему неоднородных линейных уравнений для состояний непрерывного спектра. Более подробно такие системы, а также явный вид C_n^{as} обсуждаются в разд. 4.

Главные трудности при реализации метода осцилляторного базиса (они связаны с вычислением матричных элементов оператора Гамильтона \hat{H} и других операторов на многочастичных осцилляторных функциях $|n\rangle$) удается преодолеть с помощью производящих инвариантов или обобщенных когерентных состояний (ОКС) [2, 3]. ОКС $\Phi(\beta)$ зависят от координат (пространственных, спиновых и изоспиновых) всех без исключения нуклонов, а также от некоторого определенного числа генераторных параметров $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$, а их важная особенность заключается в том, что они являются производящими функциями полного набора обладающих определенными свойствами базисных функций $\{|n\rangle\}$:

$$\Phi(\beta) = \sum_n a_n \beta^n |n\rangle, \quad (17)$$

причем степень $n = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ генераторного параметра β однозначно определяет квантовые числа базисной функции $|n\rangle$ (a_n — структурная константа). Если вычислен матричный элемент произвольного оператора \hat{F} на ОКС $\Phi(\beta)$ и $\Phi(\tilde{\beta})$ (такой матричный элемент мы будем называть производящим), то в силу того, что

$$\langle \Phi(\beta) | \hat{F} | \Phi(\tilde{\beta}) \rangle = \sum_{n, n'} a_n a_{n'} \beta^n \tilde{\beta}^{n'} \langle n | \hat{F} | n' \rangle, \quad (18)$$

матричный элемент этого оператора на базисных функциях $|n\rangle$ легко получить дифференцированием (18) по генераторным параметрам

$$\langle n | \hat{F} | n' \rangle = (a_n n! a_n n')^{-1} \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \frac{\partial^{n'}}{\partial \tilde{\beta}^{n'}} \langle \Phi(\beta) | \hat{F} | \Phi(\tilde{\beta}) \rangle \Big|_{\beta=\tilde{\beta}=\nu}. \quad (19)$$

Структурные константы a_n могут быть извлечены таким же способом из матричного элемента единичного оператора или, другими словами, из интеграла перекрытия

$$\langle \Phi(\beta) | \Phi(\tilde{\beta}) \rangle. \quad (20)$$

Один из возможных вариантов построения ОКС определенного НП группы G заключен в следующем равенстве:

$$\Phi(\beta) = e^{\beta \hat{J}^+} | 0 \rangle, \quad (21)$$

где $|0\rangle$ — младший вектор данного НП, а \hat{J}^+ — повышающий генератор алгебры Ли группы G . Результат не изменится, если вместо младшего вектора взять старший и вместо повышающего \hat{J}^+ использовать \hat{J}^- понижающий генератор. В том случае, когда у интересующей нас группы G (точнее у ее алгебры Ли) не один, а несколько повышающих генераторов $\hat{J}^+ = \{\hat{J}_1^+, \hat{J}_2^+, \dots, \hat{J}_k^+\}$, то столько же будет генераторных параметров $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$, и поэтому произведение $\beta \hat{J}^+$ в экспоненте (21) превратится в свертку

$$\sum_i \beta_i \hat{J}_i^+.$$

Если НП группы G конечномерно, сумма по n в (17) конечна, в противном случае эта сумма содержит бесконечное число слагаемых. В качестве примера приведем ОКС НП группы вращений в трехмерном пространстве — $SO(3)$ [3]:

$$\Phi(\beta) = \sum_{n=0}^{2j} \sqrt{\frac{(2j)!}{n!(2j-n)!}} \beta^n |j, -j+n\rangle, \quad (22)$$

а также ОКС НП некомпактной группы $SO(2,1)$ или локально изоморфной ей группы $SU(1,1)$ [3]:

$$\Phi(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2j)}{n! \Gamma(2j)}} \beta^n |j, j+n\rangle. \quad (23)$$

Произведение $a_n \beta^n$ [оно содержится в разложении ОКС $\Phi(\beta)$ (17)] следует рассматривать как осцилляторную функцию $|n\rangle$, которая

определена в комплексном пространстве * — обобщенном пространстве Баргмана [33]. Размерность этого пространства равна числу динамических переменных q_D и, следовательно, числу генераторных параметров β . ОКС при этом являются ядром интегрального преобразования (6) от координатного представления к баргмановскому и от баргмановского к координатному. Осцилляторные функции в обобщенном представлении Баргмана

$$\langle \beta | n \rangle \equiv a_n \beta^n \quad (24)$$

составляют полный ортонормированный набор функций и имеют более простой вид, чем те же функции в (3А — 3)-мерном координатном пространстве. Этот базис $\{\langle \beta | n \rangle\}$ целесообразно использовать для разложения $g(\beta)$ — собственных функций гамильтониана в баргмановском представлении

$$g(\beta) = \sum_n C_n \langle \beta | n \rangle. \quad (25)$$

Такое разложение эквивалентно разложению функции Ψ по базисным функциям координатного представления $\{\langle x | n \rangle\}$:

$$\Psi = \sum_n C_n \langle x | n \rangle.$$

Многочастичному гамильтониану \hat{H} можно сопоставить эффективный гамильтониан $\hat{H}_{\text{эф}}(\beta)$, который действует только на переменные β и собственные функции которого совпадают с $g(\beta)$. С помощью эффективного гамильтониана очень удобно формулировать различные приближенные методы исследования многочастичных систем и выявлять качественные особенности полученных решений. Впервые такой гамильтониан атомного ядра с реалистическим нуклон-нуклонным взаимодействием был построен в [34] для $SU(3)$ -модели Эллиотта [35].

2. ГРУППА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ЯДЕРНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Для того чтобы построить ОКС, прежде всего необходимо указать группу динамической симметрии ** исследуемой ядерной системы или модельного гамильтониана, собственные функции которого ис-

* В соответствии с общими требованиями теории ОКС [2, 3] генераторные параметры β должны быть комплексными величинами. Однако в тех случаях, когда $\Phi(\beta)$ используются как производящие функции, параметры β могут быть действительными.

** Как известно (см., например, [36]), группа симметрии G_C позволяет из одной собственной функции Ψ_1 гамильтониана \hat{H} получить набор собственных функций \hat{H} с той же энергией, что и Ψ_1 . Группа динамической симметрии $G_{\text{д.с.}}$, которая включает в себя G_C в качестве подгруппы, из функции Ψ_1 позволяет

пользуются в качестве базиса для диагонализации микроскопического гамильтониана с реалистическим ядерным взаимодействием. Поскольку таким модельным гамильтонианом, как было отмечено выше, является гамильтониан многомерного осциллятора $\hat{H}_{\text{осц}}$, то и группа динамической симметрии ядерного гамильтониана будет совпадать с группой динамической симметрии $\hat{H}_{\text{осц}}$. Последнюю, как показано в работе Мошинского и сотр. [37], образуют кососимметрические матрицы, осуществляющие линейные канонические преобразования в $(6A - 6)$ -мерном фазовом пространстве (т. е. в пространстве $3A - 3$ импульсов и $3A - 3$ координат). Следовательно, некомпактная симплектическая группа $Sp(6A - 6, R)$ — это группа динамической симметрии ядерного гамильтониана и $\hat{H}_{\text{осц}}$. Группа $Sp(6A - 6, R)$ содержит в качестве подгруппы группу симметрии $\hat{H}_{\text{осц}} - U(3A - 3)$.

Все осцилляторные функции положительной четности образуют базис НП $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4} \right] \equiv \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{3A-3} \right]$ группы $Sp(6A - 6, R)$, а функции отрицательной четности — НП $\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4} \right] \equiv \left[\frac{3}{4}, \left(\frac{1}{4} \right)^{3A-4} \right]$ этой группы. Таким образом, базисные функции НП группы $Sp(6A - 6, R)$ описывают все возможные типы движений, существующие в ядерной системе: внутренние, коллективные, кластерные и т. д. Однако при решении конкретных задач приходится ограничивать себя только лишь некоторыми, главными в исследуемых процессах модами движений. А это в свою очередь означает, что вместо ОКС группы $Sp(6A - 6, R)$ необходимо использовать ОКС групп меньшей размерности. Ниже перечислены те редукции группы $Sp(6A - 6, R)$, которые следует рассматривать при решении каждой из трех групп задач микроскопической теории атомного ядра, а также выделены те группы, ОКС которых будут привлекаться для решения соответствующих задач.

Для исследования коллективных возбуждений атомных ядер более часто используют две цепочки подгрупп группы $Sp(6A - 6, R)$:

$$Sp(6A - 6, R) \supset Sp(2, R) \otimes O(3A - 3) \quad (26)$$

и

$$Sp(6A - 6, R) \supset Sp(6, R) \otimes O(A - 1), \quad (27)$$

в которых группы $Sp(2, R)$ и $Sp(6, R)$ характеризуют коллективное движение, а $O(3A - 3)$ и $O(A - 1)$ определяют внутреннее дви-

построить полный набор собственных функций \hat{H} , связанных с различными собственными значениями \hat{H} . По этой причине группу $G_{\text{д.с}}$ иногда именуют группой, генерирующей спектр. Группа симметрии связывает в одно НП все собственные функции \hat{H} с заданной энергией, а группа динамической симметрии объединяет полный набор собственных функций этого гамильтониана в одно НП.

жение. Первая из этих цепочек соответствует базису метода K -гармоник [5—8], вторая — базису метода обобщенных гиперсферических функций [9—12]. Индексы j и K неприводимых представлений групп $Sp(2, R)$ и $O(3A - 3)$ связаны в силу дополнителности этих групп [37] (см. также [38]) соотношением [39]

$$j = \frac{1}{2} K + \frac{3}{4} (A - 1) - 1. \quad (28)$$

По этой же причине индексы НП группы $Sp(6, R)$ $[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$ связаны соотношением [39]

$$\sigma_i = \frac{1}{2} f_i + \frac{1}{4} (A - 1), \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

с индексами НП группы $O(A - 1)$ $[f_1 f_2 f_3]$. Эти соотношения отражают тот факт, что внутреннее движение однозначно определяет характер и разнообразие коллективных мод движения.

В минимальном приближении метода K -гармоник (т. е. в приближении фиксированного внутреннего движения) коллективное движение представлено только лишь монополярными (объемными) колебаниями, в то же время в минимальном приближении МОГФ наряду с монополярными подключаются и квадрупольные степени свободы. Поэтому для более полного учета всех мод коллективного движения и их связи с внутренним движением необходимо строить ОКС группы $Sp(6, R)$:

$$\Phi(\{b\}) = \exp \left\{ \sum_{r,s} b_{rs} \hat{A}_{rs}^+ \right\} |0\rangle, \quad (30)$$

$$\hat{A}_{rs}^+ = \sum_{i=1}^{A-1} a_{ir}^+ a_{is}^+, \quad (31)$$

где \hat{A}_{rs}^+ — оператор рождения коллективных квантов, a_{ir}^+ — оператор рождения осцилляторного кванта по степени свободы ir . Вакуумная функция $|0\rangle$ совпадает с $SU(3)$ -мультиплетом

$$|0\rangle = |N_{\min}(\lambda_0 \mu_0) \alpha LM [f_1 f_2 f_3]\rangle, \quad (32)$$

индексы симметрии которого $(\lambda_0 \mu_0)$ и главное квантовое число N_{\min} связаны с f_1, f_2, f_3 соотношениями

$$N_{\min} = f_1 + f_2 + f_3, \quad \lambda_0 = f_1 - f_2, \quad \mu_0 = f_2 - f_3. \quad (33)$$

αLM — квантовые числа редукции $SU(3) \supset SO(3)$.

Впервые важная роль группы $Sp(6, R)$ при описании коллективных возбуждений атомных, была отмечена в [39]. Там же была установлена связь между индексами НП группы $O(A - 1)$, определяющими внутреннее движение системы, и индексами НП симплектической группы $Sp(6, R)$, которые характеризуют коллективное движение. Затем в работе [40] были обсуждены проблемы использования базиса группы $Sp(6, R)$ для расчета спектра коллективных возбуждений. С того времени появилось множество работ [41—66],

посвященных этой проблеме. В результате возник новый термин — симплектическая модель ядра [46, 43]. Поскольку базис $Sp(6, R)$ довольно мощный, он включает множество ветвей коллективных возбуждений, то в конкретных расчетах стали привлекать лишь часть этого базиса и рассматривать подгруппы этой группы — $Sp(2, R)$ [52—64] и $Sp(4, R)$ [51]. Микроскопические модели, использующие базисы этих групп, стали именовать модель $Sp(2, R)$ и модель $Sp(4, R)$.

Каждый вектор $Sp(6, R)$, если все три индекса $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отличны друг от друга, должен быть пронумерован набором из девяти квантовых чисел. Для определения таких чисел используют редукцию

$$Sp(6, R) \supset U(3) \supset SU(3) \supset SO(3), \quad (34)$$

которая дает только шесть квантовых чисел: N — главное квантовое число, $(\lambda\mu)$ — индексы НП $SU(3)$, L, M — орбитальный момент и проекция на ось z лабораторной системы координат, а также число α , определяющее кратность появления данного L в $SU(3)$ -мультиплете $(\lambda\mu)$. Еще три неизвестных квантовых числа будут определять кратность $SU(3)$ представления в фиксированном НП группы $Sp(6, R)$. Проблема поиска этих квантовых чисел и соответствующих им операторов остается пока открытой.

Реализация МРГ для двухкластерной системы ($A = A_1 + A_2$) приводит нас к следующей редукции группы $Sp(6A - 6, R)$:

$$Sp(6A - 6, R) \supset Sp(6A_1 - 6, R) \otimes Sp(6A_2 - 6, R) \otimes Sp(6, R), \quad (35)$$

где базисные функции НП групп $Sp(6A_1 - 6, R)$ и $Sp(6A_2 - 6, R)$ будут описывать внутреннее состояние первого и второго кластеров соответственно, а базисные функции $Sp(6, R)$ — относительное движение этих кластеров. Поскольку в МРГ внутреннее состояние взаимодействующих кластеров фиксировано, а функция относительного движения согласуется с выбранным нуклон-нуклонным потенциалом, то для решения задач второй группы необходимо строить ОКС группы $Sp(6, R)$ в пространстве кластерных функций. Но так как группы $Sp(2, R)$ и $O(3)$ дополнительные в этом пространстве, то для исследования двухкластерных систем можно ограничиться ОКС группы $Sp(2, R)$:

$$\Phi(\mathbf{R}) = \hat{A} \{ \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) e^{R a_1^\dagger} | 0 \rangle \}, \quad (36)$$

где вектор \mathbf{R} — кластерный параметр, a_1^\dagger — оператор рождения осцилляторного кванта относительного движения кластеров,

$$| 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2} q_1^2}.$$

Такое ОКС будет порождать базис осцилляторных функций кластерной модели как положительной, так и отрицательной четности при

условии, что $A_1 \neq A_2$. В противном случае ($A_1 = A_2$) ОКС (36) генерирует состояния только положительной или только отрицательной четности.

Как уже отмечалось выше, для описания коллективных резонансов следует привлекать такой базис состояний, который передает не только возбуждение коллективных степеней свободы, но и кластеризацию ядра. Это означает, что ОКС резонансных состояний должны содержать в качестве генераторных параметров и b_{r_s} и кластерные параметры R . Последние при этом будут генерировать кластерные обобщенные гиперсферические функции, а b_{r_s} — коллективные возбуждения над такими функциями.

Как правило, ОКС с успехом применяются к тем системам, гамильтониан которых удастся представить в виде линейной комбинации генераторов группы динамической симметрии (см., например, [3, 36, 67]). Однако в таком виде не удастся представить ни ядерный гамильтониан, ни операторы многих других физических величин. Для того чтобы расширить область применения ОКС и на этот случай, в ряде работ [16, 59, 64, 65, 68] вместо операторной формы ОКС (24) была предложена координатная форма этих объектов. В координатной форме ОКС $\Phi(\beta)$ для всех перечисленных в предыдущем разделе задач имеют вид детерминантов Слэтера

$$\Phi(\beta) \equiv \det \| \varphi_i(r_j) \| ,$$

построенных из соответствующим образом определенных одночастичных орбиталей $\varphi_i(r_j)$. Эти орбитали для каждой из трех групп задач будут рассмотрены в последующих разделах обзора. Там же будет обсуждаться вопрос о вычислении производящих матричных элементов различных операторов на детерминантных функциях. Здесь мы лишь заметим, что работать с детерминантными функциями не очень сложно. Левдин [69] разработал достаточно простой алгоритм вычисления матричных элементов одно- и двухчастичных операторов, который снимает проблему получения производящих матричных элементов

$$\langle \Phi(\beta) | \hat{F} | \Phi(\tilde{\beta}) \rangle.$$

При этом дифференцирование таких матричных элементов по генераторным параметрам β и $\tilde{\beta}$ всегда можно выполнить в общем виде и получить в аналитической форме выражения для матричных элементов

$$\langle n | \hat{F} | n' \rangle \quad (37)$$

на базисных функциях $|n\rangle$ и $|n'\rangle$ со сколь угодно большими значениями квантовых чисел n и n' , характеризующих эти функции. Знание матричных элементов (37) при больших значениях n и n' позволяет, с одной стороны, получить их асимптотические выражения, которые упрощают численные расчеты, и, с другой, исследовать

асимптотический вид решений $\{C_n\}$ при $n \gg 1$, что необходимо для контроля точности полученных решений. Поскольку ОКС, как уже отмечалось выше, являются производящими функциями, то с помощью применяемых в теории специальных функций приемов можно установить рекуррентные соотношения для матричных элементов (37), что в значительной степени упрощает программирование этих матричных элементов на ЭВМ.

Как известно, в зависящей от одночастичных координат нуклонов детерминантной функции Ψ после перехода к координатам Якоби удается выделить множитель ψ_R , описывающий движение центра масс:

$$\Psi = \Phi \psi_R. \quad (38)$$

При этом функция Φ удовлетворяет условию трансляционной инвариантности, а если к тому же для Ψ определен соответствующий набор генераторных координат, то Φ фактически является ОКС для системы, описываемой функцией Ψ .

Таким образом, усредняя различные операторы на функциях Ψ , всякий раз необходимо заботиться об исключении движения центра тяжести. Это несложно сделать, воспользовавшись, с одной стороны, свойством (38), а с другой, тем обстоятельством, что практически все операторы \hat{F} , используемые при исследовании характеристик атомного ядра, можно разделить на три группы. В первую входят операторы трансляционно-инвариантные, т. е. $\hat{F} = \hat{F}_0$. Во вторую — операторы, содержащие движение центра тяжести в виде аддитивно-го слагаемого, т. е. $\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_R$. И, наконец, в третью — операторы типа $\hat{F} = \hat{F}_0 \hat{F}_R$. Примером операторов первой группы является оператор потенциальной энергии. Второй — оператор кинетической энергии, а третьей, например, оператор, определяющий формфактор рассеяния электронов:

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (1 + \hat{\tau}_{iz}) e^{ikz_i}.$$

Таким образом, вычислив интеграл перекрытия $\langle \Psi | \hat{F} | \tilde{\Psi} \rangle$ и воспользовавшись (38), соответствующие производящие матричные элементы можно получить по одной из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} 1. \langle \Phi | \hat{F}_0 | \tilde{\Phi} \rangle &= \langle \Psi | \hat{F} | \tilde{\Psi} \rangle / \langle \psi_R | \tilde{\psi}_R \rangle; \\ 2. \langle \Phi | \hat{F}_0 | \tilde{\Phi} \rangle &= \{ \langle \Psi | \hat{F} | \tilde{\Psi} \rangle - \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle \langle \psi_R | \hat{F}_R | \tilde{\psi}_R \rangle \} / \langle \psi_R | \tilde{\psi}_R \rangle; \\ 3. \langle \Phi | \hat{F}_0 | \tilde{\Phi} \rangle &= \langle \Psi | \hat{F} | \tilde{\Psi} \rangle / \langle \psi_R | \hat{F}_R | \tilde{\psi}_R \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Значения интегралов перекрытия $\langle \psi_R | \hat{F}_R | \tilde{\psi}_R \rangle$ и $\langle \psi_R | \hat{F}_R | \tilde{\psi}_R \rangle$ легко вычисляются из тех одночастичных интегралов перекрытия, к которым сводится интеграл $\langle \Psi | \hat{F} | \tilde{\Psi} \rangle$.

3. ОКС КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Напомним, что ОКС группы $Sp(6, R)$ в операторной форме имеет вид

$$\Phi(\{b_{rs}\}) = \exp\left\{\sum_{r,s} b_{rs} \hat{A}_{rs}^+ \mid 0\right\}, \quad (40)$$

а вакуумный вектор $\mid 0\rangle$ совпадает с $SU(3)$ -мультиплетом $(\lambda_0 \mu_0)$ таким, что

$$\lambda_0 = f_1 - f_2, \mu_0 = f_2 - f_3. \quad (41)$$

Для установления связи между координатной и операторной формами ОКС мы рассмотрим простейший случай, когда $f_1 = f_2 = f_3$ и, следовательно, $(\lambda_0 \mu_0) = (00)$. Такой вакуумный вектор реализуется в минимальном приближении МОГФ для магических ядер.

Рассмотрим тензор b_{rs} . Его всегда можно привести к диагональному виду. Пусть три взаимно ортогональных единичных вектора $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ задают ориентацию той системы координат, в которой тензор b_{rs} диагонален, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — его главные значения.

Тогда

$$b_{rs} = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} p_{\alpha r} p_{\alpha s}. \quad (42)$$

Здесь $p_{\alpha r}$ — r -я компонента вектора \mathbf{p}_{α} . Направим оси л. с. к. вдоль главных осей тензора b_{rs} . В такой системе координат компоненты $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ вектора Якоби q_i ($i = 1, 2, \dots, A - 1$) равны

$$\xi_i = (\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_i), \eta_i = (\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_i), \zeta_i = (\mathbf{p}_3 \mathbf{q}_i), \quad (43)$$

а входящая в (40) экспонента имеет диагональный вид

$$\exp\{\beta_1 \hat{A}_{\xi\xi}^+ + \beta_2 \hat{A}_{\eta\eta}^+ + \beta_3 \hat{A}_{\zeta\zeta}^+\}. \quad (44)$$

Здесь $\hat{A}_{\xi\xi}^+ = \sum p_{1r} \hat{A}_{rs}^+ p_{1s}$, $\hat{A}_{\eta\eta}^+ = \sum p_{2r} \hat{A}_{rs}^+ p_{2s}$, $\hat{A}_{\zeta\zeta}^+ = \sum p_{3r} \hat{A}_{rs}^+ p_{3s}$ — операторы рождения коллективных осцилляторных квантов, приведенные к той системе координат, оси которой совпадают с направлениями векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Вакуумный вектор $\mid 0\rangle$ $SU(3)$ -представления (00) является скаляром и поэтому не изменится при переходе от одной системы координат к другой. ОКС $\Phi(\{\beta_{\alpha}\})$, где

$$\Phi(\{\beta_{\alpha}\}) = \exp\{\beta_1 \hat{A}_{\xi\xi}^+ + \beta_2 \hat{A}_{\eta\eta}^+ + \beta_3 \hat{A}_{\zeta\zeta}^+\} \mid 0\rangle,$$

в этом случае генерирует базис осцилляторных функций $\mid n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta}\rangle$

$$\begin{aligned} \Phi(\{\beta_{\alpha}\}) &= \sum_{n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta}} \frac{\beta_1^{n_{\xi}} \beta_2^{n_{\eta}} \beta_3^{n_{\zeta}}}{n_{\xi}! n_{\eta}! n_{\zeta}!} (\hat{A}_{\xi\xi}^+)^{n_{\xi}} (\hat{A}_{\eta\eta}^+)^{n_{\eta}} (\hat{A}_{\zeta\zeta}^+)^{n_{\zeta}} \mid 0\rangle = \\ &= \sum_{n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta}} \sqrt{\frac{\Gamma(n_{\xi} + J) \Gamma(n_{\eta} + J) \Gamma(n_{\zeta} + J)}{n_{\xi}! \Gamma(J) n_{\eta}! \Gamma(J) n_{\zeta}! \Gamma(J)}} \beta_1^{n_{\xi}} \beta_2^{n_{\eta}} \beta_3^{n_{\zeta}} \mid n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta}\rangle, \quad (45) \end{aligned}$$

($J = f + (A - 1)/2$), который характеризуется числами квантов n_ξ , n_η , n_ζ коллективных возбуждений по каждой из осей ξ , η , ζ .

Теперь покажем, что функция

$$\Phi(\{\beta_\alpha\}) = [(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(1 - \beta_3)]^{-J} \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{A-1} \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \xi_i^2 + \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \eta_i^2 + \frac{\beta_3}{1 - \beta_3} \zeta_i^2 \right) \right\} |0\rangle \quad (46)$$

также является производящей функцией осцилляторного базиса $\{|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle\}$, т. е. имеет место разложение (45). Для этого вместо набора декартовых компонент $\{\xi_i\}$ введем гиперсферический радиус $\rho_\xi = [\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{A-1}^2]^{1/2}$ и соответствующие гиперсферические углы $\{\Theta_\xi^k, k = 1, 2, \dots, A - 2$. Аналогичные гиперсферические координаты ρ_η , $\{\Theta_\eta^k\}$ и ρ_ζ , $\{\Theta_\zeta^k\}$ введем вместо наборов $\{\eta_i\}$ и $\{\zeta_i\}$. Тогда функцию $|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$ можно записать в виде

$$|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle = L_{n_\xi}^{J-1}(\rho_\xi^2) L_{n_\eta}^{J-1}(\rho_\eta^2) L_{n_\zeta}^{J-1}(\rho_\zeta^2) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\rho_\xi^2 + \rho_\eta^2 + \rho_\zeta^2) \right\} (\rho_\xi \rho_\eta \rho_\zeta)^f Q_{[fff]}(\{\Theta_\xi^k\}, \{\Theta_\eta^k\}, \{\Theta_\zeta^k\}), \quad (47)$$

где $L_n^\alpha(x)$ — полином Лагерра. Чтобы получить функцию $\Phi(\{\beta_\alpha\})$ в форме (46), достаточно воспользоваться факторизацией базисных функций (47) в переменных ρ_ξ , ρ_η , ρ_ζ и явным видом производящей функции \mathcal{L}_γ для полиномов Лагерра

$$\mathcal{L}_\gamma(\rho, \beta) = (1 - \beta)^{-\gamma} \exp \left\{ - \frac{\beta}{1 - \beta} \rho^2 \right\} = \sum_n \beta^n L_n^{\gamma-1}(\rho^2). \quad (48)$$

Отметим далее, что произведение

$$(\rho_\xi \rho_\eta \rho_\zeta)^f Q_{[fff]}(\{\Theta_\xi^k\}, \{\Theta_\eta^k\}, \{\Theta_\zeta^k\})$$

инвариантно относительно поворота координатных осей и, будучи домножено на экспоненту $\exp \left\{ - \frac{1}{2} (\rho_\xi^2 + \rho_\eta^2 + \rho_\zeta^2) \right\}$, совпадает с вакуумной функцией $|0\rangle$.

ОКС $\Phi(\{\beta_\alpha\})$ (46) записано в системе координат, где тензор b_{rs} диагонален. Для того чтобы получить выражение $\Phi(\{\beta_\alpha\})$ в исходной л. с. к., необходимо компоненты ξ_i , η_i и ζ_i заменить скалярными произведениями $(\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_i)$, $(\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_i)$ и $(\mathbf{p}_3 \mathbf{q}_i)$ (43):

$$\Phi(\{\beta_\alpha\}) = [(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)(1 - \beta_3)]^{-J} \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{A-1} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\beta_\alpha}{1 - \beta_\alpha} (\mathbf{p}_\alpha \mathbf{q}_i)^2 \right\} |0\rangle. \quad (49)$$

Это выражение представляет собой ОКС группы $Sp(6, R)$ в координатной форме. Легко убедиться, что оно лишь множителем

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} q_A^2 - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\beta_\alpha}{1-\beta_\alpha} (\rho_\alpha q_A)^2 \right\}, \quad q_A = \frac{1}{\sqrt{A}} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_A),$$

описывающим движения центра масс, отличается от детерминанта Слэтера, который построен из одночастичных орбиталей вида

$$\psi(\mathbf{r}_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} r_i^2 - \sum_{\alpha} \frac{\beta_\alpha}{1-\beta_\alpha} (\rho_\alpha \mathbf{r}_i)^2 \right\} H_{n_x}(x_i) H_{n_y}(y_i) H_{n_z}(z_i),$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита, и умножен на

$$\prod_{\nu=1}^3 (1-\beta_\nu)^{-J_\nu}, \quad J_\nu = f_\nu + (A-1)/2.$$

Далее будем рассматривать ОКС группы $Sp(6, R)$ для произвольных НП этой группы, ограниченных лишь некоторыми естественными с физической точки зрения дополнительными условиями.

Ограничимся теми НП группы $Sp(6, R)$, $SU(3)$ -мультиплеты которых могут быть реализованы с помощью слэтеровских детерминантов (точнее теми НП (λ_0, μ_0) , старший вектор каждого из которых может быть записан в виде одного слэтеровского детерминанта). Тем самым мы подчиним определенным условиям индексы f_1, f_2, f_3 . Однако эти условия выделяют наиболее интересные внутренние функции, а именно те, построение которых осуществляется без дополнительного альтернирования по состояниям нуклонов открытых оболочек сверх альтернирования, необходимого для выполнения требований принципа Паули (иными словами, не требует дополнительного альтернирования по состояниям нуклонов, имеющим различные спин-изоспиновые квантовые числа).

Введем три ортогональных единичных вектора $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ и вместе с ними — одночастичные состояния:

$$\begin{aligned} \psi^0(\mathbf{n}; \nu | \mathbf{r}) &= \\ &= (\pi^{3/2} 2^n n!)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} r^2 \right) H_{n_1}(\mathbf{u}_1 \mathbf{r}) H_{n_2}(\mathbf{u}_2 \mathbf{r}) H_{n_3}(\mathbf{u}_3 \mathbf{r}) \zeta_\nu, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3, \quad n! = n_1! n_2! n_3!, \quad (51)$$

ζ_ν — спин-изоспиновая функция с квантовыми числами ν . Из орбиталей (50) мы будем строить слэтеровские детерминанты системы A нуклонов, придерживаясь следующих двух правил относительно порядка заполнения орбиталей открытых оболочек. Орбиталь $\psi^0(\mathbf{n}; \nu | \mathbf{r})$ заполняется, во-первых, не раньше, чем будут заполнены все орбитали, у которых число квантов возбуждения хотя бы по одному из трех направлений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ меньше, чем у орбитали

$\psi^0(n; \nu | \mathbf{r})$ по этому же направлению, а спин-изоспиновая функция ζ_ν та же самая, и, во-вторых, не раньше, чем будут заполнены все орбитали, которые получаются из $\psi^0(n; \nu | \mathbf{r})$ перебрасыванием квантов возбуждения (при сохранении полного их числа) с направления \mathbf{u}_2 на направление \mathbf{u}_1 и с направления \mathbf{u}_3 на направления \mathbf{u}_2 и \mathbf{u}_1 . Первое правило обеспечивает возможность заполнения сразу нескольких открытых оболочек с сохранением свойства факторизации слэтеровского детерминанта (т. е. выделения из него в виде множителя волновой функции центра тяжести в том случае, когда слэтеровский детерминант выражается через координаты Якоби). Второе правило приводит к тому, что в системе координат, оси которой направлены вдоль векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, слэтеровский детерминант оказывается старшим вектором НП $(\lambda_0 \mu_0) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3)$ группы $SU(3)$, причем f_1, f_2, f_3 — полное число квантов возбуждения слэтеровского детерминанта вдоль направлений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ соответственно:

$$f_1 = \sum n_1, f_2 = \sum n_2, f_3 = \sum n_3.$$

В произвольной системе координат этот же детерминант является производящим инвариантом НП $(\lambda_0 \mu_0)$ группы $SU(3)$, а векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ или три угла Эйлера, задающие ориентацию этих векторов, выступают в роли генераторных параметров производящего инварианта.

Следуя сформулированным выше правилам для каждого ядра, мы получим, вообще говоря, несколько слэтеровских детерминантов, отличающихся $SU(3)$ - и $O(A-1)$ -симметрией. Эти слэтеровские детерминанты обозначим $\Psi^0(f_1, f_2, f_3)$, а их трансляционно-инвариантную часть через $\Phi^0(f_1, f_2, f_3)$. Последнюю назовем вакуумной функцией соответствующего НП $[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$ группы $Sp(6, R)$. Вопрос о том, какое из НП группы $Sp(6, R)$ может претендовать на доминирующую роль в основном состоянии и в спектре квадрупольно-монопольных возбуждений над основным состоянием, должен решить расчет энергии основного состояния с тем или иным полуреалистическим нуклон-нуклонным взаимодействием или же анализ $O(A-1)$ -симметрии схем Нильссона, сопоставляемых (в соответствии с экспериментальными данными) основным состояниям.

Детерминант Слэтера, построенный из одночастичных орбиталей

$$\psi(n; \nu | \mathbf{r}) = \exp \left\{ - \sum_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha}}{1 - \beta_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{r})^2 \right\} \psi^0(n; \nu | \mathbf{r}), \quad (52)$$

вместе с множителем $\prod_{\nu=1}^3 (1 - \beta_{\nu})^{J_{\nu}}$ представляет собой ОКС неприводимого представления $[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$ группы $Sp(6, R)$. Генераторными параметрами будут углы ориентации репера $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ и углы, задающие репер $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ (т. е. углы ориентации главных осей тензора b_{rs}), а также $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — главные значения тензора b_{rs} .

Введем теперь второй слэтеровский детерминант $\tilde{\Psi} (f_1 f_2 f_3)$, который получается из $\Psi (f_1 f_2 f_3)$ заменой репера $\{p_\alpha\}$ репером $\{q_\alpha\}$ и главных значений $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ на $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$ (или, иначе, тензора b_{rs} тензором \tilde{b}_{rs}) и, кроме того, заменой репера $\{u_\nu\}$ репером $\{v_\nu\}$.

В первую очередь нас будет интересовать матричный элемент единичного оператора на производящих функциях $\Psi (f_1 f_2 f_3)$ и $\tilde{\Psi} (f_1 f_2 f_3)$:

$$\langle \Psi (f_1 f_2 f_3) | \tilde{\Psi} (f_1 f_2 f_3) \rangle = \det \| F_{i, \tilde{i}} \|, \quad (53)$$

где $\| F_{i, \tilde{i}} \|$ — матрица, составленная из интегралов перекрытия орбиталей $\psi (n; \nu | r)$ и $\tilde{\psi} (n; \tilde{\nu} | r)^*$, образующих детерминанты $\Psi (f_1 f_2 f_3)$ и $\tilde{\Psi} (f_1 f_2 f_3)$:

$$F_{i, \tilde{i}} = f_{n, \tilde{n}}^\nu \delta_{\nu \tilde{\nu}} = \langle n | \tilde{n} \rangle \delta_{\nu \tilde{\nu}}; \quad (54)$$

$$i = \{n, \nu\}, \quad \tilde{i} = \{\tilde{n}, \tilde{\nu}\}, \quad n = \{n_1, n_2, n_3\}, \quad \tilde{n} = \{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3\}.$$

Матрица $\| F_{i, \tilde{i}} \|$ в силу ортогональности спин-изоспиновых функций квазидиагональна и распадается на четыре блока $\| f_{n, \tilde{n}}^\nu \|$, а ее детерминант имеет вид произведения

$$\det \| F_{i, \tilde{i}} \| = \prod_\nu \det \| f_{n, \tilde{n}}^\nu \|. \quad (55)$$

Индекс ν принимает четыре различных значения по числу возможных спин-изоспиновых состояний ζ_ν . У матричного элемента $f_{n, \tilde{n}}^\nu$ этот индекс показывает, к какому из четырех блоков матрицы он принадлежит.

В каждом из матричных элементов $f_{n, \tilde{n}}^\nu$ под знаком интеграла содержится экспонента

$$\exp \left\{ - \sum_{r,s} B_{rs} x_r x_s \right\},$$

где x_1, x_2, x_3 — компоненты вектора r , а $\| B_{rs} \|$ — симметричная матрица 3×3 , элементы которой можно рассматривать как компоненты тензора второго ранга

$$B_{rs} = \delta_{rs} + \sum_\alpha C_\alpha p_{\alpha r} p_{\alpha s} + \sum_\alpha \tilde{C}_\alpha q_{\alpha r} q_{\alpha s}. \quad (56)$$

Здесь

$$C_\alpha = \frac{\beta_\alpha}{1 - \beta_\alpha}, \quad \tilde{C}_\alpha = \frac{\tilde{\beta}_\alpha}{1 - \tilde{\beta}_\alpha}. \quad (57)$$

* По определению $\tilde{\psi} (\tilde{n}; \tilde{\nu} | r) = (\pi^{3/2} 2^{\tilde{n}} \tilde{n}!)^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{1}{2} r^2 - \sum_\alpha \frac{\tilde{\beta}_\alpha}{1 - \tilde{\beta}_\alpha} (q_{\alpha r})^2 \right\} \times H_{n_1} (v_1 r) H_{n_2} (v_2 r) H_{n_3} (v_3 r) \zeta_\nu$

Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ — компоненты вектора \mathbf{r} в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей тензора B_{rs} , тогда

$$\sum_{r,s} B_{rs} x_r x_s = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2, \quad (58)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные значения тензора B_{rs} .

Выполним преобразование к новым переменным $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$:

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1} \tilde{x}_1, \quad \xi_2 = \sqrt{\lambda_2} \tilde{x}_2, \quad \xi_3 = \sqrt{\lambda_3} \tilde{x}_3, \quad (59)$$

$$d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{x}_3 = (\det \|B_{rs}\|)^{-1/2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\det \|B_{rs}\| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Первое правило заполнения орбиталей слэтеровского детерминанта вместе с известной инвариантностью детерминанта относительно добавления к его строке линейной суперпозиции остальных строк позволяет, не изменяя Ψ , вместо произведения полиномов Эрмита $H_{n_1}(\mathbf{u}_1 \mathbf{r}) H_{n_2}(\mathbf{u}_2 \mathbf{r}) H_{n_3}(\mathbf{u}_3 \mathbf{r})$ в выражении для орбиталей $\psi(\mathbf{n} | \mathbf{r})$ оставить лишь старшие степени аргументов полиномов Эрмита, т. е.

$$2^{n_1} (\mathbf{u}_1 \mathbf{r})^{n_1} 2^{n_2} (\mathbf{u}_2 \mathbf{r})^{n_2} 2^{n_3} (\mathbf{u}_3 \mathbf{r})^{n_3}.$$

Аналогичное утверждение может быть сделано и относительно орбиталей $\tilde{\psi}(\mathbf{n} | \mathbf{r})$.

Преобразуем теперь к новым переменным скалярное произведение одного из векторов \mathbf{u}_i на вектор \mathbf{r}

$$(\mathbf{u}_i \mathbf{r}) = \sum_{\nu} u_{i\nu} x_{\nu} = \sum_{\nu} \tilde{u}_{i\nu} \tilde{x}_{\nu} = \sum_{\alpha} \frac{\tilde{u}_{i\alpha}}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} \xi_{\alpha} = (\mathbf{u}'_i \xi), \quad (60)$$

$$\mathbf{u}'_i = \left\{ \frac{\tilde{u}_{i1}}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\tilde{u}_{i2}}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{\tilde{u}_{i3}}{\sqrt{\lambda_3}} \right\}; \quad |\mathbf{u}'_i| = u'_i.$$

Аналогичное соотношение справедливо для $(\mathbf{v}_j \mathbf{r})$:

$$(\mathbf{v}_j \mathbf{r}) = (\mathbf{v}'_j \xi).$$

Вместо векторов $\{\mathbf{u}'_i\}$, которые, как легко видеть, не являются ортогональными, введем три единичных ортонормированных вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Последние связаны с векторами $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3$ треугольной матрицей преобразования $\|\alpha_{ij}\|$

$$\mathbf{u}'_i = \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_j = \sum_i \alpha_{ij}^{-1} \mathbf{u}'_i, \quad (61)$$

где

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \quad \|\alpha_{ij}^{-1}\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{-1} & \alpha_{12}^{-1} & \alpha_{13}^{-1} \\ & \alpha_{22}^{-1} & \alpha_{23}^{-1} \\ & & \alpha_{33}^{-1} \end{vmatrix}. \quad (62)$$

Диагональные матричные элементы матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ и обратной ей матрицы $\|\alpha_{ij}^{-1}\|$ (только такие матричные элементы будут нужны нам в последующих вычислениях) равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= |u'_1|, & \alpha_{22} &= \frac{|[u'_1 u'_2]|}{|u'_1|}, & \alpha_{33} &= \frac{|(u'_1 u'_2 u'_3)|}{|[u'_1 u'_2]|}; \\ \alpha_{11}^{-1} &= (\alpha_{11})^{-1}, & \alpha_{22}^{-1} &= (\alpha_{22})^{-1}, & \alpha_{33}^{-1} &= (\alpha_{33})^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Использование треугольной матрицы означает, что вектор \mathbf{a}_1 коллинеарен вектору u'_1 , а вектор \mathbf{a}_2 лежит в плоскости, проходящей через u'_1 и u'_2 . Аналогичным образом вместо векторов v'_1, v'_2, v'_3 введем ортонормированный репер $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$

$$v'_i = \sum_j \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{b}_j = \sum_i \tilde{\alpha}_{ij} v'_i. \quad (64)$$

В силу второго правила заполнения орбиталей слэтеровского детерминанта можно, не изменяя значения детерминанта $\Psi ([f_1 f_2 f_3])$, каждое из произведений

$$(u'_2 \xi)^{n_1} (u'_2 \xi)^{n_2} (u'_3 \xi)^{n_3}$$

в выражении для соответствующей орбитали ψ заменить на

$$\alpha_{11}^{n_1} \alpha_{22}^{n_2} \alpha_{33}^{n_3} (a_1 \xi)^{n_1} (a_2 \xi)^{n_2} (a_3 \xi)^{n_3}.$$

Аналогичная процедура может быть выполнена и для орбиталей $\tilde{\psi}$ детерминанта $\tilde{\Psi} ([f_1 f_2 f_3])$.

Теперь уместно, чтобы обеспечить биортогональность* орбиталей ψ и $\tilde{\psi}$ с разными значениями $n = n_1 + n_2 + n_3$ и $\tilde{n} = \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \tilde{n}_3$, но $v = \tilde{v}$, от максимальных степеней скалярных произведений $(a_i \xi)$ и $(b_j \xi)$ вновь вернуться к полиномам Эрмита, но уже с аргументами $(a_i \xi)$ и $(b_j \xi)$.

В итоге становится ясным, что интеграл перекрытия детерминантов $\Psi ([f_1 f_2 f_3])$ и $\tilde{\Psi} ([f_1 f_2 f_3])$ выражается через интеграл перекрытия $\Psi^a ([f_1 f_2 f_3])$ и $\Psi^b ([f_1 f_2 f_3])$, отличающихся от вакуумных детерминантных функций $\Psi^0 ([f_1 f_2 f_3])$ и $\tilde{\Psi}^0 ([f_1 f_2 f_3])$ только тем, что вместо векторов u_i и v_j в них участвуют единичные ортогональные векторы a_i и b_j , т. е. имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi ([f_1 f_2 f_3]) | \tilde{\Psi} ([f_1 f_2 f_3]) \rangle = \\ & = \langle \Psi^a ([f_1 f_2 f_3]) | \Psi^b ([f_1 f_2 f_3]) \rangle (\det \|B_{rs}\|)^{-\frac{A}{2}} (\alpha_{11} \tilde{\alpha}_{11})^{f_1} (\alpha_{22} \tilde{\alpha}_{22})^{f_2} (\alpha_{33} \tilde{\alpha}_{33})^{f_3}. \end{aligned} \quad (65)$$

* Напомним, что два набора функции $\{\psi_i\}$ и $\{\tilde{\psi}_i\}$ называются биортогональными, если выполняется условие $\langle \psi_i | \tilde{\psi}_j \rangle = 0$, когда $i \neq j$.

Интеграл перекрытия осцилляторных функций, имеющих определенную $SU(3)$ -симметрию, был найден Эллиоттом [35].

$$\langle \Psi^a ([f_1 f_2 f_3]) | \Psi^b ([f_1 f_2 f_3]) \rangle = (a_1 b_1)^{f_1 - f_2} (a_1 a_2 [b_1 b_2])^{f_2 - f_3} \{ (a_1 a_2 a_3) (b_1 b_2 b_3) \}^{f_3}. \tag{66}$$

Ниже, при решении задачи о построении одночастичной матрицы плотности на функциях $\Psi^a ([f_1 f_2 f_3])$ и $\Psi^b ([f_1 f_2 f_3])$ будет указан простой вывод этого выражения. Здесь отметим, что ОКС группы $Sp(6, R)$ с помощью операций вращения и растяжения можно свести к ОКС соответствующего НП группы $SU(3)$.

Итак, интегрирование по всем одночастичным координатам, необходимое для расчета матричного элемента единичного оператора на функциях $\Psi ([f_1 f_2 f_3])$ и $\tilde{\Psi} ([f_1 f_2 f_3])$, выполнено. Приняв во внимание связь между векторами u_i, v_j и a_i, b_j , соотношения

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}^{-1} u'_1, & b_1 &= \tilde{\alpha}_{11}^{-1} v'_1, \\ [a_1 a_2] &= \alpha_{11}^{-1} \alpha_{22}^{-1} [u'_1 u'_2], & [b_1 b_2] &= \tilde{\alpha}_{11}^{-1} \tilde{\alpha}_{22}^{-1} [v'_1 v'_2], \\ (a_1 a_2 a_3) &= \alpha_{11}^{-1} \alpha_{22}^{-1} \alpha_{33}^{-1} (u'_1 u'_2 u'_3); & (b_1 b_2 b_3) &= \tilde{\alpha}_{11}^{-1} \tilde{\alpha}_{22}^{-1} \tilde{\alpha}_{33}^{-1} (v'_1 v'_2 v'_3), \end{aligned}$$

а также формулы (65) и (66), получим

$$\langle \Psi ([f_1 f_2 f_3]) | \tilde{\Psi} ([f_1 f_2 f_3]) \rangle = (\det \| B_{rs} \|)^{-A/2} (u'_1 v'_1)^{f_1 - f_2} ([u'_1 u'_2] [v'_1 v'_2])^{f_2 - f_3} \{ (u'_1 u'_2 u'_3) (v'_1 v'_2 v'_3) \}^{f_3}. \tag{67}$$

Теперь мы должны вернуться к векторам u_i и v_j . Для этого заметим, что в системе координат, где матрица B_{rs} диагональна,

$$(u'_i v'_j) = \sum_{\alpha} \frac{u_i v_j \alpha}{\lambda_{\alpha}} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (u_{i1} v_{j1} \lambda_2 \lambda_3 + u_{i2} v_{j2} \lambda_3 \lambda_1 + u_{i3} v_{j3} \lambda_1 \lambda_2). \tag{68}$$

Но выражение в скобках в правой части равенства есть свертка матрицы $\| C_{kl} \|$, составленной из алгебраических дополнений матричных элементов матрицы $\| B_{kl} \|$, и векторов u_i, v_j , а $\lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2$ — главные значения тензора C_{kl} . Поэтому

$$(u'_i v'_j) = (\det \| B_{kl} \|)^{-1} \sum_{r,s} C_{rs} u_{ir} v_{js}. \tag{69}$$

Матрицу $\| C_{kl} \|$ несложно вычислить. Ее матричные элементы выражаются через символы Кронекера δ_{kl} и компоненты векторов p_{α} и q_{α} :

$$\begin{aligned} C_{kl} &= \delta_{kl} (1 + \sum_{\alpha} C_{\alpha} + \sum_{\alpha} \tilde{C}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} C_{\alpha} p_{\alpha k} p_{\alpha l} - \sum_{\alpha} \tilde{C}_{\alpha} q_{\alpha k} q_{\alpha l} + \\ &+ \sum_{\nu < \mu} C_{\nu} C_{\mu} [p_{\nu} p_{\mu}]_k [p_{\nu} p_{\mu}]_l + \sum_{\nu < \mu} \tilde{C}_{\nu} \tilde{C}_{\mu} [q_{\nu} q_{\mu}]_k [q_{\nu} q_{\mu}]_l + \\ &+ \sum_{\nu, \mu} C_{\nu} \tilde{C}_{\mu} [p_{\nu} q_{\mu}]_k [p_{\nu} q_{\mu}]_l. \end{aligned} \tag{70}$$

Свертка тензора C_{rs} с векторами u_i и v_i равна

$$\sum_{r,s} C_{rs} u_{1r} v_{1s} = \prod_v [(1 - \beta_v) (1 - \tilde{\beta}_v)]^{-1} \mathcal{A}, \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (R^1 S^1) - \sum_{\lambda, \mu} \beta_\lambda \tilde{\beta}_\mu (p_\lambda q_\mu) ([p_\lambda R^1] [q_\mu S^1]) + \\ & + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_\lambda \tilde{\alpha}_\mu (p_\lambda q_\mu) (p_\lambda R^1) (q_\mu S^1), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \beta_2 \beta_3, \quad \alpha_2 = \beta_3 \beta_1, \quad \alpha_3 = \beta_1 \beta_2, \\ \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3, \quad \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_3 \tilde{\beta}_1, \quad \tilde{\alpha}_3 = \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Векторы R^v получаются из векторов u_v соответствующим растяжением их компонент в системе координат, оси которой направлены вдоль ортов p_1, p_2, p_3 . В этой системе

$$\begin{aligned} R^v = & \{(R^v p_1), (R^v p_2), (R^v p_3)\}, \\ (R^v p_\lambda) = & (1 - \beta_\lambda) (u^v p_\lambda). \end{aligned} \quad (74)$$

В свою очередь компоненты векторов S^v в системе координат, связанной с репером q_1, q_2, q_3 , определяются преобразованием:

$$(S^v q_\mu) = (1 - \beta_\mu) (v^v q_\mu). \quad (75)$$

Для вывода выражения (72) векторы u_i и v_j целесообразно представить в виде

$$u_i = \sum_v (u_i p_v) p_v, \quad v_j = \sum_v (v_j q_v) q_v \quad (76)$$

и найти сначала свертку тензора C_{kl} с векторами p_λ и q_μ и только потом составить искомого свертку.

В системе координат, где матрица B_{rs} диагональна, простой вид имеет и скалярное произведение векторов $[u'_1 \ u'_2] [v'_1 \ v'_2]$

$$\begin{aligned} [(u'_1 \ u'_2) (v'_1 \ v'_2)] &= \frac{[u_1 u_2]_1 [v_1 v_2]_1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{[u_1 u_2]_2 [v_1 v_2]_2}{\lambda_3 \lambda_1} + \frac{[u_1 u_2]_3 [v_1 v_2]_3}{\lambda_1 \lambda_2} = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \sum_v [u_1 u_2]_v [v_1 v_2]_v \lambda_v = (\det \| B_{kl} \|)^{-1} \sum_{r,s} B_{rs} [u_1 u_2]_r [v_1 v_2]_s. \end{aligned} \quad (77)$$

Снова, как и при вычислении предыдущей свертки, сначала найдем

$$\sum_{r,s} B_{rs} p_{\lambda r} q_{\mu s},$$

а затем, используя соотношения (76), получим искомого выражение

$$\sum_{r,s} B_{rs} [u_1 u_2]_r [v_1 v_2]_s = \prod_v [(1 - \beta_v) (1 - \tilde{\beta}_v)]^{-1} \mathcal{B}, \quad (78)$$

где

$$\mathcal{B} = ([R^1 R^2] [S^1 S^2]) - \sum_{\lambda, \mu} \beta_\lambda \tilde{\beta}_\mu (p_\lambda p_\mu) (p_\lambda [R^1 R^2]) (q_\mu [S^1 S^2]), \quad (79)$$

Наконец, легко показать, что

$$(u_1 u_2 u_3) (v_1 v_2 v_3) = \frac{\hat{\pi}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = (\det \| B_{rl} \|)^{-1} \hat{\pi}. \quad (80)$$

Здесь $\hat{\pi} = 1$, если обе тройки векторов — u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 правые или левые одновременно, и $\hat{\pi} = -1$, если одна из этих троек правая, а другая — левая.

Детерминант матрицы $\| B_{rl} \|$ был найден в работе [64]

$$\det \| B_{rl} \| = \prod_v [(1 - \beta_v) (1 - \tilde{\beta}_v)]^{-1} \Delta, \quad (81)$$

$$\Delta = 1 - \sum_{r, s} (\beta_r \tilde{\beta}_s - \alpha_r \tilde{\alpha}_s) (p_r q_s)^2 - D \tilde{D}, \quad (82)$$

$$D = \beta_1 \beta_2 \beta_3, \quad \tilde{D} = \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3.$$

Итак, мы вычислили все элементы, из которых состоит интеграл перекрытия (67), и теперь можем выписать его выражение, предварительно учтя множитель, обусловленный движением центра масс:

$$\langle \psi_R | \tilde{\psi}_R \rangle = \Delta^{-1/2}.$$

В результате находим, что интеграл перекрытия двух ОКС НП $[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$ группы $Sp(6, R)$ равен

$$\langle \Phi([f_1 f_2 f_3]) | \tilde{\Phi}([f_1 f_2 f_3]) \rangle = \frac{\mathcal{A}^{f_1 - f_2} \mathcal{B}^{f_2 - f_3}}{\Delta^{f_1 + (A-1)/2}}. \quad (83)$$

Формула (83) является обобщением известного [35] эллиптового интеграла перекрытия функций определенной $SU(3)$ -симметрии на случай функций определенной $Sp(6, R)$ -симметрии. Каждая из перекрываемых функций зависит от девяти генераторных параметров (если $f_1 \neq f_2 \neq f_3$) и является суперпозицией всех базисных функций НП $[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$, причем любая из базисных функций этого НП может быть выделена из соответствующего ОКС простой операцией проектирования.

Интеграл перекрытия (83) полезен для исследования квантовых чисел базисных функций, а также для расчета тех коэффициентов линейной суперпозиции, с которыми нормированные базисные функции участвуют в производящей функции.

Мы отложим пока обсуждение интегралов перекрытия (83), как и вопрос о вычислении коэффициентов суперпозиции, и займемся расчетом производящих матричных элементов операторов кинетической и потенциальной энергии системы нуклонов.

Чтобы найти матричный элемент оператора кинетической энергии \hat{T} , будем использовать соотношение

$$\langle \alpha | \hat{T} | \alpha' \rangle = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \begin{cases} N + \frac{3}{2}(A-1), & \alpha = \alpha' \\ -\langle \alpha | \rho^2 | \alpha' \rangle, & \alpha \neq \alpha', \end{cases} \quad (84)$$

где α — набор квантовых чисел, характеризующих базисную функцию, N — главное квантовое число функции $|\alpha [f_1 f_2 f_3]\rangle$, а ρ^2 — сумма квадратов координат Якоби, r_0 — осцилляторный радиус. Таким образом, вычисление $\langle \alpha | \hat{T} | \alpha' \rangle$ сводится к вычислению матричного элемента оператора ρ^2 . Для этого удобно использовать вспомогательный оператор

$$\hat{\Gamma} = \exp\left(-\gamma \sum_{i=1}^A r_i^2\right) = \prod_{i=1}^A \exp(-\gamma r_i^2). \quad (85)$$

Поскольку этот оператор можно представить в виде произведения

$$\hat{\Gamma} = \exp(-\gamma \rho^2) \exp(-\gamma q_A^2),$$

где $q_A = \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i / \sqrt{A}$ — нормированная координата центра тяжести,

а каждый из детерминантов $\Psi([f_1 f_2 f_3])$ и $\tilde{\Psi}([f_1 f_2 f_3])$ после перехода от одночастичных координат $\{\mathbf{r}_i\}$ к векторам Якоби $\{\mathbf{q}_i\}$ факторизуется и принимает вид произведения волновой функции относительного движения нуклонов $\Phi([f_1 f_2 f_3])$ (или $\tilde{\Phi}([f_1 f_2 f_3])$) и волновой функции центра тяжести ψ_R (или $\tilde{\psi}_R$), то справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \langle \Psi([f_1 f_2 f_3]) | \hat{\Gamma} | \tilde{\Psi}([f_1 f_2 f_3]) \rangle = \\ & = \langle \Phi([f_1 f_2 f_3]) | e^{-\gamma \rho^2} | \tilde{\Phi}([f_1 f_2 f_3]) \rangle \langle \psi_R | e^{-\gamma q_A^2} | \tilde{\psi}_R \rangle, \end{aligned}$$

выражающее матричный элемент оператора $\hat{\Gamma}$ через легко вычисляемый множитель — интеграл перекрытия волновых функций центра тяжести с оператором $\exp(-\gamma q_A^2)$ и матричный элемент оператора $\exp(-\gamma \rho^2)$ на ОКС. Последний и представляет собой интерес, так как, дифференцируя его по параметру γ n раз и обращая затем γ в нуль, мы получим матричный элемент оператора ρ^{2n} и, в частности, матричный элемент оператора ρ^2 , который, как было отмечено выше, дает исчерпывающую информацию о матричных элементах оператора кинетической энергии \hat{T} .

Матричный элемент оператора $\exp(-\gamma \rho^2)$ на ОКС группы $S_p(6, R)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle \Phi([f_1 f_2 f_3]) | e^{-\gamma \rho^2} | \tilde{\Phi}([f_1 f_2 f_3]) \rangle = \\ & = (1 + \gamma)^{-f_1 - f_2 - f_3 - \frac{3}{2}(A-1)} \frac{\mathcal{A}_\gamma^{f_1 - f_2} \mathcal{B}_\gamma^{f_2 - f_3}}{\Delta_\gamma^{f_1 + (A-1)/2}}, \quad (86) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\gamma &= \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} P\right) \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \tilde{P}\right) (\mathbf{R}^1 \mathbf{S}^1) + \\
 &+ \sum_{\lambda} \left[\frac{\gamma}{1+\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \tilde{P}\right) \beta_{\lambda} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \left(1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{P}\right) \alpha_{\lambda} \right] \times \\
 &\quad \times (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{R}^1) (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{S}^1) + \sum_{\mu} \left[\frac{\gamma}{1+\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} P\right) \tilde{\beta}_{\mu} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \left(1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} P\right) \tilde{\alpha}_{\mu} \right] (\mathbf{q}_{\mu} \mathbf{R}^1) (\mathbf{q}_{\mu} \mathbf{S}^1) + \\
 &+ \sum_{\lambda, \mu} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \left(\beta_{\lambda} - \frac{1-\gamma}{\gamma} \alpha_{\lambda}\right) \left(\tilde{\beta}_{\mu} - \frac{1-\gamma}{\gamma} \tilde{\alpha}_{\mu}\right) (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{q}_{\mu}) (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{R}^1) (\mathbf{q}_{\mu} \mathbf{S}^1) - \\
 &\quad - \frac{1}{(1+\gamma)^2} \sum_{\lambda, \mu} \beta_{\lambda} \tilde{\beta}_{\mu} (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{q}_{\mu}) ([\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{R}^1] [\mathbf{q}_{\mu} \mathbf{S}^1]); \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_\gamma &= ([\mathbf{R}^1 \mathbf{R}^2] [\mathbf{S}^1 \mathbf{S}^2]) - \frac{\gamma}{1+\gamma} \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} (\mathbf{p}_{\lambda} [\mathbf{R}^1 \mathbf{R}^2]) (\mathbf{p}_{\lambda} [\mathbf{S}^1 \mathbf{S}^2]) - \\
 &\quad - \frac{\gamma}{1+\gamma} \sum_{\mu} \tilde{\beta}_{\mu} (\mathbf{q}_{\mu} [\mathbf{R}^1 \mathbf{R}^2]) (\mathbf{q}_{\mu} [\mathbf{S}^1 \mathbf{S}^2]) - \\
 &\quad - \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \sum_{\lambda, \mu} \beta_{\lambda} \tilde{\beta}_{\mu} (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{q}_{\mu}) (\mathbf{p}_{\lambda} [\mathbf{R}^1 \mathbf{R}^2]) (\mathbf{q}_{\mu} [\mathbf{S}^1 \mathbf{S}^2]); \quad (88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_\gamma &= 1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} (P + \tilde{P}) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} (Q + \tilde{Q} + P\tilde{P}) + \\
 &\quad + \frac{\gamma(1-\gamma)}{(1+\gamma)^2} (P\tilde{Q} + Q\tilde{P}) - \frac{\gamma^3}{(1+\gamma)^3} (D + \tilde{D}) - \\
 &- \frac{\gamma^2(1-\gamma)}{(1+\gamma)^3} (Q\tilde{Q} + D\tilde{P} + P\tilde{D}) - \frac{\gamma(1-\gamma)^2}{(1+\gamma)^3} (D\tilde{Q} + Q\tilde{D}) - \frac{(1-\gamma)^3}{(1+\gamma)^3} D\tilde{D} - \\
 &\quad - \sum_{\lambda, \mu} \left[\frac{1}{(1+\gamma)^2} \beta_{\lambda} \tilde{\beta}_{\mu} + \frac{\gamma}{(1+\gamma)^3} (\alpha_{\lambda} \tilde{\beta}_{\mu} + \beta_{\lambda} \tilde{\alpha}_{\mu}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-\gamma}{(1+\gamma)^3} \alpha_{\lambda} \tilde{\alpha}_{\mu} \right] (\mathbf{p}_{\lambda} \mathbf{q}_{\mu})^2; \quad (89)
 \end{aligned}$$

$$P = \sum_{\nu} \beta_{\nu}, \quad \tilde{P} = \sum_{\nu} \tilde{\beta}_{\nu}, \quad Q = \sum_{\nu} \alpha_{\nu}, \quad \tilde{Q} = \sum_{\nu} \tilde{\alpha}_{\nu}.$$

Производящий матричный элемент оператора ρ^2 выражается через логарифмические производные по γ от \mathcal{A}_γ , \mathcal{B}_γ и Δ_γ :

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi (|f_1 f_2 f_3\rangle) | \rho^2 | \tilde{\Phi} (|f_1 f_2 f_3\rangle) \rangle &= \left[f_1 + f_2 + f_3 + \frac{3}{2} (A-1) + \right. \\
 &\quad + (f_1 - f_2) \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \mathcal{A}_\gamma |_{\gamma=0} + (f_2 - f_3) \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \mathcal{B}_\gamma |_{\gamma=0} - \\
 &\quad \left. - \left(f_1 + \frac{A-1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \Delta_\gamma |_{\gamma=0} \right] \langle \Phi (|f_1 f_2 f_3\rangle) | \tilde{\Phi} (|f_1 f_2 f_3\rangle) \rangle. \quad (90)
 \end{aligned}$$

Наша следующая задача — найти матричные элементы оператора потенциальной энергии нуклон-нуклонного взаимодействия

$$\hat{V} = \sum_{i < j} V_0 \exp \left[-\frac{(r_i - r_j)^2}{s_0^2} \right] \tag{91}$$

для парного потенциала в гауссовой форме. Заметим, что, рассчитав этот матричный элемент, несложно затем в случае необходимости выполнить переход от него к матричному элементу для потенциальной энергии парного потенциала $\mathcal{V}(\mathbf{r})$, представимого в виде интеграла по s от $\exp(-r^2/s^2)$ с ядром $K(s)$:

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty K(s) \exp(-r^2/s^2) ds.$$

Такое представление допускает широкий класс потенциалов.

Поскольку ОКС группы $S_p(6, R)$, как было отмечено выше, можно привести к ОКС $\Phi^0(f_1, f_2, f_3)$ группы $SU(3)$, то все внимание мы сосредоточим на вычислении матричного элемента

$$\langle \Phi^0(f_1 f_2 f_3) | \hat{V} | \Phi^0(f_1 f_2 f_3) \rangle.$$

(Заметим, что матрицы, совершающие переход от ОКС группы $S_p(6, R)$ к соответствующим ОКС группы $SU(3)$, образуют группу $GL(3, R)$. Эти матрицы можно представить в виде произведения ортогональной и диагональной матриц. Матричные элементы диагональной матрицы совпадают с $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные значения матрицы $\|B_{r_s}\|$.)

При расчете интеграла перекрытия вакуумных функций был использован известный результат Эллиотта и не было необходимости исследовать связанную с этим интегралом перекрытия матрицу $\mathcal{J}_{i, \tilde{i}}$, детерминант которой является интегралом перекрытия вакуумных функций

$$\left. \begin{aligned} \langle \Psi^0(f_1 f_2 f_3) | \tilde{\Psi}^0(f_1 f_2 f_3) \rangle &= \det \| \mathcal{J}_{i, \tilde{i}} \|, \\ \mathcal{J}_{i, \tilde{i}} &= g_{\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}}^{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}} \delta_{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}} = \langle \mathbf{n} | \tilde{\mathbf{n}} \rangle \delta_{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}}, \\ i &= \{\mathbf{n}, \mathbf{v}\}, \quad \tilde{i} = \{\tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{v}}\}. \end{aligned} \right\} \tag{92}$$

Между тем, чтобы построить одночастичную матрицу плотности (т. е. интеграл от произведения $\Psi^0(f_1 f_2 f_3)$ и $\tilde{\Psi}^0(f_1 f_2 f_3)$ по всем одночастичным векторам $\{r_i\}$, кроме одного, и вместе с ней матричные элементы $\langle \Psi^0(f_1 f_2 f_3) | \hat{V} | \tilde{\Psi}^0(f_1 f_2 f_3) \rangle$, требуется в соответствии с результатами Левдина [69] предварительно найти алгебраические дополнения $A_{i, \tilde{i}}$ матричных элементов матрицы $\mathcal{J}_{i, \tilde{i}}$ (или, что то же

самое, алгебраические дополнения $a_{\tilde{n}, \tilde{n}}^v$ матрицы $g_{\tilde{n}, \tilde{n}}^v$, через которые одночастичная матрица плотности выражается.

Вычисление алгебраических дополнений тривиально для матричных элементов диагональной матрицы. Однако матрица $g_{\tilde{n}, \tilde{n}}^v$ не является таковой, поскольку состояния $|n\rangle$ и $|\tilde{n}\rangle$ не биортогональны, если принадлежат одной оболочке. Поэтому возникает проблема их биортогонализации. Возможность ее решения простыми средствами следует из мультипликативного вида детерминанта матрицы $g_{\tilde{n}, \tilde{n}}^v$. Покажем теперь, как эта задача решается.

В соответствии с правилами, сформулированными выше, заполнение n -й оболочки должно начинаться с орбитали

$$|n, 0, 0\rangle = \frac{\exp(-r^2/2)}{\sqrt{2^n n!} \pi^{3/2}} H_n(\mathbf{u}_1 \mathbf{r}) \equiv |(n, 0), n\rangle (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{n/2}.$$

Следующая среди привлекаемых орбиталей имеет вид

$$|n-1, 1, 0\rangle = \frac{\exp(-r^2/2)}{\sqrt{2^n (n-1)!} \pi^{3/2}} H_{n-1}(\mathbf{u}_1 \mathbf{r}) H_1(\mathbf{u}_2 \mathbf{r}).$$

Она отличается от предыдущей тем, что один из ее осцилляторных квантов направлен вдоль вектора \mathbf{u}_2 . Состояния $|n-1, 1, 0\rangle$ и $|n, 0, 0\rangle$ не ортогональны, если $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{v}_1$. Однако линейная суперпозиция

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) |n-1, 1, 0\rangle - \sqrt{n} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2) |n, 0, 0\rangle = \\ = (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{\frac{n-2}{2}} (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{1/2} |n-2, 1, n\rangle \end{aligned}$$

уже обладает свойством ортогональности по отношению к состоянию $|(n, 0), n\rangle \sim |n, 0, 0\rangle$, а аналогичная линейная суперпозиция

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{\frac{n-2}{2}} (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{\frac{1}{2}} |n-2, 1, n\rangle = \\ = (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) |n-1, 1, 0\rangle - \sqrt{n} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1) |n, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

ортогональна $|n, 0, n\rangle$, в чем легко убедиться непосредственно.

Для того чтобы выражения для биортогональных орбиталей были максимально простыми в том случае, когда осцилляторные кванты распределены по трем взаимно перпендикулярным направлениям $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, а преобразования, проводимые с ними, максимально просты, орбиталь $|n_1, n_2, n_3\rangle$ запишем в виде производной от экспоненты, показатель которой содержит векторный параметр $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$:

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = D(\mathbf{n}, \mathbf{t}) \exp\left\{-t^2 + 2 \sum_{\alpha} t_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{r}) - \frac{1}{2} r^2\right\} \Big|_{\mathbf{t}=0}, \quad (93)$$

$$D(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = (2^n n! \pi^{3/2})^{-1/2} \frac{\partial^{n_1}}{\partial t_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial t_2^{n_2}} \frac{\partial^{n_3}}{\partial t_3^{n_3}}.$$

Это выражение является известным дифференциальным представлением для полиномов Эрмита. Аналогичную запись, но с векторным параметром $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ мы будем использовать и для орбитали $|\bar{\mathbf{n}}\rangle$. Введем, кроме того, шесть новых операторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_1} &= (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t_1}, & \frac{\partial}{\partial \sigma_1} &= (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} &= [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{-1/2} \begin{vmatrix} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \\ (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1) \frac{\partial}{\partial t_2} \end{vmatrix}, & \frac{\partial}{\partial \sigma_2} &= \\ &= [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{1/2} \begin{vmatrix} (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1) \frac{\partial}{\partial s_1} \\ (\mathbf{v}_2 \mathbf{u}_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \end{vmatrix}, & & (94) \\ \frac{\partial}{\partial \tau_3} &= (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} \begin{vmatrix} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial t_1} \\ (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \\ (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial t_3} \end{vmatrix}, & \frac{\partial}{\partial \sigma_3} &= \\ &= (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} \begin{vmatrix} (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1) (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2) \frac{\partial}{\partial s_1} \\ (\mathbf{v}_2 \mathbf{u}_1) (\mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2) \frac{\partial}{\partial s_2} \\ (\mathbf{v}_3 \mathbf{u}_1) (\mathbf{v}_3 \mathbf{u}_2) \frac{\partial}{\partial s_3} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Переход от параметров $\{t_i\}$, $\{s_i\}$ к параметрам $\{\tau_i\}$, $\{\sigma_i\}$ осуществляется с помощью простого треугольного преобразования

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{-1/2} \tau_1 - [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{-1/2} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1) \tau_2 + \\ &\quad + (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3) \tau_3, \end{aligned} \right\} (95a)$$

$$\left. \begin{aligned} t_2 &= [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{-1/2} \tau_2 + (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3) \tau_3, \\ t_3 &= (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3) \tau_3; \\ s_1 &= (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{-1/2} \sigma_1 - [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{-1/2} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2) \sigma_2 + \\ &\quad + (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1) \sigma_3; \\ s_2 &= [(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)]^{-1/2} \sigma_2 + (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3) \sigma_3, \\ s_3 &= (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3)^{-1/2} (\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3) \sigma_3. \end{aligned} \right\} (95b)$$

Теперь мы получаем возможность привести выражения для биортогональных орбиталей

$$\begin{aligned}
 & |(n_1 - n_2, n_2 - n_3) n\rangle = \\
 & = D(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) \exp \left\{ -t^2 + 2 \sum_{\alpha} t_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{r}) - \frac{1}{2} r^2 \right\} \Big|_{t=0}, \quad (96a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |(m_1 - m_2, m_2 - m_3) m\rangle = \\
 & = D(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) \exp \left\{ -s^2 + 2 \sum_{\alpha} s_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}) - \frac{1}{2} r^2 \right\} \Big|_{s=0}. \quad (96b)
 \end{aligned}$$

Покажем, что орбитали $|(n_1 - n_2, n_2 - n_3) n\rangle$ и $|(m_1 - m_2, m_2 - m_3) m\rangle$ ортогональны, если $n_3 \neq m_3$ или если $n_3 = m_3$, но $n_2 \neq m_2$ или, наконец, если $n_3 = m_3$, $n_2 = m_2$, но $n_1 \neq m_1$. Обратим сначала внимание на то, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \exp \left\{ -t^2 - s^2 + 2 \sum_{\alpha} t_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{r}) + 2 \sum_{\alpha} s_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}) - r^2 \right\} = \\
 & = \pi^{3/2} \exp \left\{ 2 \sum_{\alpha, \beta} t_{\alpha} s_{\beta} (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{v}_{\beta}) \right\} = \pi^{3/2} \exp \left\{ 2 \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}. \quad (97)
 \end{aligned}$$

Подставив соотношение (97) в интеграл перекрытия двух орбиталей, получим, что

$$\langle (n_1 - n_2, n_2 - n_3) n | (m_1 - m_2, m_2 - m_3) m \rangle = \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} \delta_{n_3, m_3}$$

Обращение к биортогональным орбиталям (96a) и (96b) позволяет существенно упростить выражение для одночастичной матрицы плотности $\rho(\lambda, \mu | 1, 2)$, построенной на детерминантах Слэтера $\Phi^0(|f_1 f_2 f_3\rangle)$ и $\tilde{\Phi}^0(|f_1 f_2 f_3\rangle)$. Она становится аддитивной не только по спин-изоспиновым квантовым числам, но и по квантовым числам $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ биортогональных орбиталей

$$\begin{aligned}
 \rho(\lambda, \mu | 1, 2) & = \left\{ \sum_{\mathbf{v}} \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \zeta_{\mathbf{v}}(1) \zeta_{\mathbf{v}}(2) \right\} (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1)^{\lambda} (\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2)^{\mu}, \quad (98) \\
 \lambda & = f_1 - f_2, \quad \mu = f_2 - f_3,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & = \sum_{\mathbf{n}} D(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) D(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) \exp \left\{ -t^2 - s^2 + 2 \sum_{\alpha} t_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{r}_1) + \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{\alpha} s_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right\} \Big|_{t=s=0}. \quad (99)
 \end{aligned}$$

Производящий матричный элемент оператора потенциальной энергии определяется двумя основными выражениями — прямым и обратным интегралами

$$\left. \begin{aligned} V_{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}^{\text{dir}} &= \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \rho_{\tilde{\mathbf{v}}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) V_0 \exp \left[+ \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{s_0^2} \right] \equiv V_{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}^+, \\ V_{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}^{\text{exch}} &= \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_2 \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho_{\tilde{\mathbf{v}}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) V_0 \exp \left[- \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{s_0^2} \right] \equiv V_{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}^-. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Из (99) следует, что оба эти выражения имеют простое дифференциальное представление

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}^{\pm} &= z^{3/2} V_0 \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} D(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) D(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) \times \\ &\times D(\mathbf{m}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) D(\mathbf{m}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \pi^3 \exp \left\{ - (1-z) \left(\frac{\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \right. \\ &\left. - (1-z) \left(\frac{\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sum_{i,j} [(t_i + \tilde{t}_j)(s_i + \tilde{s}_j) \pm \right. \\ &\left. \pm z(t_i - \tilde{t}_j)(s_i - \tilde{s}_j)] (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j) \right\} \Big|_{\substack{\mathbf{t}=\mathbf{s}=0 \\ \tilde{\mathbf{t}}=\tilde{\mathbf{s}}=0}}. \end{aligned} \quad (101)$$

Параметры $\{\tilde{\tau}_i, \tilde{\sigma}_i\}$ и $\{\tilde{t}_i, \tilde{s}_i\}$ связаны теми же треугольными соотношениями (95а), (95б), какими связаны параметры $\{\tau_i, \sigma_i\}$ и $\{t_i, s_i\}$. Кроме того, $z = (1 + 2r_0^2/s_0^2)^{-1}$, где r_0 — осцилляторный радиус.

Чтобы выполнить переход от матричных элементов (100) оператора потенциальной энергии на вакуумных функциях к матричным элементам на производящих функциях $\Phi([f_1 f_2 f_3])$ и $\tilde{\Phi}([f_1 f_2 f_3])$ полного базиса НП группы $Sp(6, R)$, необходимо в выражениях (100) векторы \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_j заменить $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$ [см. определения (61) — (64), замечание к ним и формулу (65)] и, кроме того, экспоненту $\exp(-r^2/s_0^2)$ оператора потенциальной энергии нуклон-нуклонного взаимодействия в соответствии с преобразованием (59) записать в виде

$$\exp \left\{ - \frac{1}{s_0^2} \left(\frac{\xi_1^2}{\lambda_1} + \frac{\xi_2^2}{\lambda_2} + \frac{\xi_3^2}{\lambda_3} \right) \right\}.$$

Затем после вычисления интеграла по координатам двух нуклонов должны быть повторены в обратном порядке все операции, подробно изложенные выше, обеспечивающие возвращение от векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$ и собственных значений матрицы $\|B_{kl}\|$ к векторам $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$ и тензорам b_{kl} и \tilde{b}_{kl} .

4. ОКС КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ

В последнее десятилетие в теории ядерных реакций (по крайней мере тех, которые протекают с участием легких и даже средних ядер) произошел поразительный скачок. Стал возможным вполне последовательный расчет (на микроскопической основе с учетом многочастичной кинематики и динамики) таких процессов, как столкновение друг с другом ядер ^{16}O или ^{40}Ca , или же процессов неупругого рассеяния нуклонов, дейтронов и частиц на ядрах p -оболочки с учетом развала, возбуждения или перезарядки последних. Этот расчет осуществим в рамках МРГ.

Метод резонирующих групп, являясь по существу микроскопическим вариантом метода связанных каналов, сейчас успешно вытесняет как феноменологические варианты метода связанных каналов, так и оптическую модель. Если раньше для интерпретации эксперимента по рассеянию нуклонов на ядрах или одних ядер на других повсеместно использовалась оптическая модель, то теперь все чаще и чаще те, у кого есть соответствующая возможность, прибегают к МРГ. И эта переориентация с оптической модели на МРГ является необходимой не только по соображениям принципиального характера (вместо феноменологического подхода с параметрами, требующего их фиксации не только в зависимости от рассеиваемых ядер, но и от энергии, при которой происходит рассеяние, используется микроскопический подход, не содержащий каких-либо произвольных или свободных параметров), но и по соображениям практического плана: на основе МРГ удастся объяснить дифференциальные сечения рассеяния на большие углы (связанные с действием принципа Паули), поведение сечений рассеяния вблизи различных порогов и, наконец, учесть резонансы в различных связанных каналах, в частности закрытых.

ОКС кластерных систем, необходимые для решения задач МРГ, являются наиболее исследованными среди тех ОКС, которые были перечислены в разд. 1. В работе Хориучи [16] подробно изложена техника вычисления матричных элементов одно- и двухчастичных операторов, основанная на результатах Левдина [69]. В ряде работ [68, 70—75] разработан алгоритм построения ОКС в инвариантной форме и вычисления в инвариантной форме матричных элементов различных операторов на таких ОКС.

Обобщенные когерентные состояния для кластерных систем конструируются из одночастичных орбиталей

$$\psi(\mathbf{n}, k; \nu | \mathbf{r}) = (2^n n! \pi^{3/2})^{-1/2} H_{n_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{r} - \mathbf{R}_k) H_{n_2}(\mathbf{u}_2, \mathbf{r} - \mathbf{R}_k) \times \\ \times H_{n_3}(\mathbf{u}_3, \mathbf{r} - \mathbf{R}_k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} r^2 + 2\mathbf{R}_k \mathbf{r} - R_k^2 \right\} \zeta_\nu(i). \quad (102)$$

Здесь \mathbf{R}_k — кластерный параметр, который определяет положение k -го кластера. Построенная из этих орбиталей детерминантная фун-

кция $\Psi_k(A_k)$, где $k = 1, 2 \dots$ (она описывает внутреннее состояние k -го кластера), может быть представлена в виде произведения волновой функции движения центра масс

$$\psi_R^{(k)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta_k^2 + 2\sqrt{A_k} \mathbf{R}_k \eta_k - A_k R_k^2 \right\}, \quad (103)$$

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{A_k}} \sum_{i=1}^{A_k} \mathbf{r}_i$$

и функции $\varphi_k(A_k)$. Последняя является ОКС НП ($\lambda_k \mu_k$) группы $SU(3)$. Генераторными параметрами этого ОКС служат три взаимно ортогональных единичных вектора $\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \mathbf{u}_3^k$. Детерминантная функция двухкластерной системы в свою очередь имеет следующий вид:

$$\Psi = \hat{A} \left\{ \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{A-1} q_i^2 + 2\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A}} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \mathbf{q}_1 - \frac{A_1 A_2}{A} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)^2 \right] \right\} \psi_R, \quad (104)$$

где ψ_R — функция центра масс:

$$\psi_R = \exp \left\{ -\frac{1}{2} q_A^2 + \frac{2}{\sqrt{A}} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2) \mathbf{q}_A - \frac{1}{A} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2)^2 \right\}. \quad (105)$$

Вектор Якоби \mathbf{q}_1 , описывающий относительное движение двух кластеров, и вектор центра тяжести системы A нуклонов \mathbf{q}_A связаны с η_1 и η_2 — нормированными векторами Якоби центра тяжести первого и второго кластеров — соотношением

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{A_2}{A}} & -\sqrt{\frac{A_1}{A}} \\ \sqrt{\frac{A_1}{A}} & \sqrt{\frac{A_2}{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Заметим, что функция $\exp \{2\mathbf{q}\mathbf{R} - R^2\}$ является производящей функцией для осцилляторных функций $|Nlm\rangle$ (N — главное квантовое число, l — орбитальный момент, m — его проекция):

$$\exp \{2\mathbf{q}\mathbf{R} - R^2\} = \sum_{Nlm} A_{Nl} R^N |Nlm\rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}), \quad (107)$$

где

$$A_{Nl} = \left[\frac{4\pi}{2^N (N-l)!! (N+l+1)!!} \right]^{1/2},$$

а $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} / |\mathbf{R}|$ — единичный вектор, задающий направление вектора \mathbf{R} . Проекционный оператор $\hat{\mathcal{P}}_{Nlm}$, который предназначен для выделения из (107) осцилляторных функций $|Nlm\rangle$:

$$\hat{\mathcal{P}}_{Nlm} \exp \{2q\mathbf{R} - R^2\} = A_{Nlm} |Nlm\rangle,$$

содержит две операции: дифференцирование по модулю вектора \mathbf{R} и интегрирование по угловым переменным единичного вектора $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathcal{P}}_{Nlm} = \int d\hat{\mathbf{R}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{R}}) \frac{1}{N!} \frac{\bar{a}^N}{dR^N}. \quad (108)$$

Порядок выполнения этих операций может быть произвольным.

При вычислении матричных элементов на детерминантных функциях Ψ , как правило, вместо векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 вводят новый вектор

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2,$$

и, кроме того, \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 подчиняют условию

$$A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2 = 0.$$

В силу этого условия волновая функция движения центра масс принимает простой вид

$$\psi_{\mathbf{R}} = \exp \left(-\frac{1}{2} q_A^2 \right).$$

Интеграл перекрытия таких функций (при соответствующем выборе нормирующего множителя) равен единице. Однако для упрощения вычислений намного удобней один из кластеров поместить в начале координат, т. е. положить, например, $\mathbf{R}_1 = 0$. Тогда $\mathbf{R} = -\mathbf{R}_2$, а функция

$$\psi_{\mathbf{R}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} q_A^2 - \frac{2A_2}{\sqrt{A}} \mathbf{R} q_A - \frac{A_2^2}{A} q_A^2 \right\}. \quad (109)$$

Интеграл перекрытия этих функций равен

$$\langle \psi_{\mathbf{R}} | \tilde{\psi}_{\mathbf{R}} \rangle = \exp \left\{ \frac{2A_2^2}{A} (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}) \right\}. \quad (110)$$

Для построения одночастичной матрицы плотности, с помощью которой будут вычислены матричные элементы интересующих нас операторов, удобно использовать дифференциальное представление для полиномов Эрмита (93). Вычислив с помощью такого представления одночастичные интегралы перекрытия, затем легко построить биортогональные наборы одночастичных функций по аналогии с тем, как это было сделано в предыдущем параграфе.

Далее для простоты мы будем рассматривать волновые функции двух взаимодействующих α -ядер, т. е. ядер с числом нуклонов $A_1, A_2 \leq 4$. Однако многие приведенные ниже результаты справедливы и в более общем случае. Интеграл перекрытия для состояний положи-

тельной четности равен

$$\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle = \sum_{r=0}^{i_0} D_r \operatorname{ch} (\xi_r \mathbf{R} \tilde{\mathbf{R}}), \quad (111)$$

где

$$\xi_r = 2A_1 A_2 / A - 2r. \quad (112)$$

Если нуклоны второго кластера (при условии, что $A_2 \leq A_1$) находятся в тех же спин-изоспиновых состояниях, что и нуклоны первого кластера, то

$$D_r = \frac{(-1)^r i_0!}{r! (i_0 - r)!}, \quad i_0 = A_2. \quad (113)$$

Для состояний отрицательной четности интеграл перекрытия имеет вид

$$\langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle = \sum_{r=0}^{i_0} D_r \operatorname{sh} (\xi_r \mathbf{R} \tilde{\mathbf{R}}).$$

Разложим интегралы перекрытия по степеням \mathbf{R} и $\tilde{\mathbf{R}}$

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \tilde{\Phi} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(2n+f)!} (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{R}})^{2n+f} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(2n+f)!} (R \tilde{R})^{2n+f} \sum_L J_L^{2n+f} (Y_L(\hat{\mathbf{R}}) Y_L(\hat{\tilde{\mathbf{R}}})). \end{aligned} \quad (114)$$

Здесь

$$B_n = \sum_{r=0}^{i_0} D_r \xi_r^{2n+f}, \quad J_L^\lambda = \frac{4\pi\lambda!}{(\lambda-L)!! (\lambda+L+1)!!}, \quad (115)$$

а $(\hat{Y}_L(\mathbf{R}) Y_L(\hat{\mathbf{R}}))$ — скалярное произведение двух сферических функций. Действие принципа Паули на волновые функции (104) приводит к тому, что разложение интегралов перекрытия начинается с некоторой фиксированной для данного ядра и четности степени f генераторного параметра R . Параметр f , а также n однозначно определяют $SU(3)$ -симметрию осцилляторных функций, генерируемых двухкластерной функцией (104). Если A_1 и $A_2 \leq 4$, то

$$\lambda = 2n + f, \quad \mu = 0.$$

Осцилляторные функции с $\lambda < 2n + f$ запрещены принципом Паули.

Вычислим теперь матричный элемент оператора кинетической энергии. Как и в предыдущем разделе, для этой цели будем использо-

вать оператор

$$\hat{F} = \exp(-\gamma \rho^2) = \exp\left\{-\gamma \sum_{i=1}^{A-1} q_i^2\right\}.$$

Матричный элемент этого оператора равен интегралу

$$\begin{aligned} \langle \Phi | e^{-\gamma \rho^2} | \tilde{\Phi} \rangle &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{q}_{A-1} \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \hat{A} \left\{ \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \times \right. \\ &\times \exp\left[-(\gamma + 1) \sum_{i=1}^{A-1} q_i^2 + 2 \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A}} (\mathbf{R}\mathbf{q}_1 + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{q}_1) - \right. \\ &\left. \left. - \frac{A_1 A_2}{A} (R^2 + \tilde{R}^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (116)$$

Вместо векторов \mathbf{q}_i введем новые векторы ξ_i , такие, что

$$\xi_i = (\gamma + 1)^{1/2} \mathbf{q}_i, \quad (117a)$$

а также новые генераторные параметры

$$\mathbf{R}' = (\gamma + 1)^{-1/2} \mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{R}}' = (\gamma + 1)^{-1/2} \tilde{\mathbf{R}}. \quad (117b)$$

В результате такой замены матричный элемент оператора $e^{-\gamma \rho^2}$ равен

$$\begin{aligned} \langle \Phi | e^{-\gamma \rho^2} | \tilde{\Phi} \rangle &= (\gamma + 1)^{-\frac{3}{2}(A-1) - N_1 - N_2} \times \\ &\times \exp\left\{ -\frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{A_1 A_2}{A} (R^2 + \tilde{R}^2) \right\} \langle \Phi(\mathbf{R}') | \Phi(\tilde{\mathbf{R}}') \rangle. \end{aligned} \quad (118)$$

При получении этого выражения было учтено, что функции $\varphi_1(A_1)$ и $\varphi_2(A_2)$ однородны по координатам Якоби, причем степень их однородности совпадает с главными квантовыми числами N_1 и N_2 , характеризующими эти функции. Для s -ядер $N_1 = N_2 = 0$.

Из (118), дифференцируя по γ , находим производящий матричный элемент оператора $\frac{1}{2} \rho^2$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{R}) | \frac{1}{2} \rho^2 | \Phi(\tilde{\mathbf{R}}) \rangle &= \frac{1}{2} \left[N_1 + N_2 + \frac{3}{2} (A - 1) + \frac{A_1 A_2}{A} (R^2 + \tilde{R}^2) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \langle \Phi(\mathbf{R}') | \Phi(\tilde{\mathbf{R}}') \rangle |_{\gamma=0}, \end{aligned} \quad (119)$$

а затем и матричные элементы этого оператора на осцилляторных функциях. Отличными от нуля оказываются те матричные элементы $\langle n | \frac{1}{2} \rho^2 | m \rangle$, у которых $m = n$ и $m = n \pm 1$:

$$\langle n | \frac{1}{2} \rho^2 | n \rangle = \frac{1}{2} [2n + f + N_1 + N_2 + \frac{3}{2} (A - 1)], \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \langle n | \frac{1}{2} \rho^2 | n + 1 \rangle &= \langle n + 1 | \frac{1}{2} \rho^2 | n \rangle = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2A} \sqrt{\frac{B_n}{B_{n+1}}} (2n + f - L + 2) (2n + f + L + 3). \end{aligned} \quad (121)$$

При очень больших значениях n , где действием принципа Паули можно пренебречь, недиагональные матричные элементы оператора $\frac{1}{2} \rho^2$ совпадают с матричными элементами r^2 на трехмерных осцилляторных функциях:

$$\langle n | \frac{1}{2} \rho^2 | n+1 \rangle \simeq \frac{1}{4} \sqrt{(2n+f-L+2)(2n+f+L+3)}. \quad (122)$$

Производящие матричные элементы оператора потенциальной энергии представляют собой суперпозицию членов вида

$$\begin{aligned} & \exp \{ -C_1 R^2 - C_2 \tilde{R}^2 \} \operatorname{ch} (C_3 \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}) \text{ или} \\ & \exp \{ -C_1 R^2 - C_2 \tilde{R}^2 \} \operatorname{sh} (C_3 \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}). \end{aligned} \quad (123)$$

Коэффициенты такой суперпозиции, а также C_1 , C_2 и C_3 содержат параметры нуклон-нуклонного потенциала. Так, например, для потенциалов с гауссовой радиальной зависимостью

$$C_3 = 2 \frac{A_1 A_2}{A} - 2r - 1 \pm z, \quad z = \left(\frac{2r_0^2}{s_0^2} + 1 \right)^{-1}, \quad (124)$$

r_0 — осцилляторный радиус, s_0 — радиус NN -потенциала. Параметры C_1 , C_2 принимают одно из трех следующих значений:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}(1-z); \quad C_1 = -\frac{1}{2}(1-z), \\ C_2 = 0; \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2}(1-z). \end{aligned} \quad (125)$$

Разложение выражений по степеням генераторных параметров (его легко получить, используя известную формулу Лейбница для производной от произведения двух функций) имеет вид

$$\begin{aligned} & \exp \{ -C_1 R^2 - C_2 \tilde{R}^2 \} \operatorname{ch} (C_3 \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}) = \\ & = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1+m_2} R^{2m_1} \tilde{R}^{2m_2} \sum_{k=0}^{\bar{m}} (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}})^{2k} \frac{C_1^{m_1-k} C_2^{m_2-k} C_3^{2k}}{(m_1-k)! (m_2-k)! (2k)!}; \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} & \exp \{ -C_1 R^2 - C_2 \tilde{R}^2 \} \operatorname{sh} (C_3 \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}) = \\ & = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1+m_2} R^{2m_1+1} \tilde{R}^{2m_2+1} \sum_{k=0}^{\bar{m}} (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}})^{2k+1} \frac{C_1^{m_1-k} C_2^{m_2-k} C_3^{2k+1}}{(m_1-k)! (m_2-k)! (2k+1)!}, \end{aligned} \quad (127)$$

где $\bar{m} = \min\{m_1, m_2\}$. Отсюда находим, что матричные элементы оператора потенциальной энергии

$$\langle m_1 L | \hat{V} | m_2 L \rangle = \sum_{k=0}^{\bar{m}} A_{m_1 m_2}^L(k), \tag{128}$$

$$A_{m_1 m_2}^L(k) = (-1)^{m_1+m_2} \sqrt{\frac{(2m_1+f)!(2m_2+f)!}{B_{m_1} B_{m_2}}} \times \\ \times \frac{j_L^{2k+f} C_1^{m_1-k} C_2^{m_2-k} C_3^{2k+f}}{\sqrt{j_L^{2m_1+f} j_L^{2m_2+f}} (m_1-k)! (m_2-k)! (2k+f)!}. \tag{129}$$

Кроме того, диагональные матричные элементы содержат константы, определяющие энергию порога развала системы.

В пределе, когда m_1 и $m_2 \gg 1$, сумму по k в (128) удается вычислить аналитически.

Пусть $m_1 + m_2 = 2\nu$, $m_1 - m_2 = n$. Ограничимся такими n , которые удовлетворяют неравенству $n \ll \nu$, т. е. будем рассматривать матричные элементы, находящиеся возле главной диагонали. Для простоты полагаем $f = L = 0$. Обобщение на случай ненулевых значений L будет сделано ниже.

Предположим, что в сумме (128) существует максимальный член $A_{m_1 m_2}(k)$ с $k = \alpha\nu$, где $\alpha < 1$, и что главный вклад в эту сумму вносят те члены, у которых k удовлетворяет неравенству $|\alpha\nu - k| \ll \ll \alpha\nu$. Последующие вычисления подтвердят эти предположения.

Значения α найдем из условия максимума $A_{m_1 m_2}(k)$. Для этой цели k представим в следующем виде: $k = \alpha\nu + p$, где $|p| \ll \alpha\nu$, а затем запишем выражения для $\ln A_{m_1 m_2}(k)$, ограничиваясь главными членами при больших значениях ν :

$$\ln A_{m_1 m_2}(k) \approx 2 \left[(1-\alpha) \ln \frac{2\sqrt{\bar{C}_1 \bar{C}_2}}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{\bar{C}_3}{\alpha} \right] \nu - \\ - \ln [2\pi\alpha^{3/2} (1-\alpha) \nu] - 2p \left[\ln \frac{2\alpha}{1-\alpha} + \frac{\sqrt{\bar{C}_1 \bar{C}_2}}{\bar{C}_3} \right] - \\ - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{p^2}{\nu} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\alpha} \frac{n^2}{\nu} + \dots, \tag{130}$$

где

$$\bar{C}_i = C_i A / 2A_1 A_2. \tag{131}$$

В (130) опущены члены порядка p/ν , n/ν , $1/\nu$ и члены более высокого порядка малости по обратным степеням ν . Уравнение для определения α получаем, полагая равной нулю производную по α от линейных по ν членов в правой части уравнения (130)

$$\frac{2\sqrt{\bar{C}_1 \bar{C}_2}}{C_3} \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1. \tag{132}$$

Из (132) следует, что

$$\alpha = \frac{\bar{c}_3}{2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3}}, \quad 1 - \alpha = \frac{2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2}}{2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3}}. \quad (133)$$

Возвращаясь к $A_{m_1 m_2}(k)$, запишем их в асимптотическом виде, справедливом при больших значениях m_1 и m_2 :

$$A_{m_1 m_2}(k) \simeq [\pi(1-\alpha)\alpha^{3/2}]^{-1} \frac{(2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3})^{m_1+m_2}}{m_1+m_2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \frac{p^2}{m_1+m_2} - \frac{(m_1-m_2)^2}{2(1-\alpha)(m_1+m_2)}\right\}. \quad (134)$$

Таким образом, подтвердились наши предположения: коэффициенты $A_{m_1 m_2}(k)$ действительно имеют максимум при $k = \alpha v$ и экспоненциально уменьшаются с увеличением $p^2 = (k - \alpha v)^2$ при фиксированном $v = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$. Заменяв сумму по k в (128) интегралом Пуассона, легко получим следующий результат:

$$\langle m_1, L | \hat{V} | m_2, L \rangle \simeq \\ \simeq \frac{(-1)^{m_1+m_2}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)\alpha^2}} \frac{(2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3})^{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2}\right\}. \quad (135)$$

Это выражение справедливо также тогда, когда $L \ll m_1, m_2$.

Во всех случаях $2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3}$ не превышает единицы, и поэтому вычисленная сумма (128) либо медленно убывает как $1/\sqrt{m}$, если $m_1 = m_2 = m$, $m \rightarrow \infty$ и $2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3} = 1$, либо убывает как

$$\exp\{-2m \cdot \ln(2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3})\}, \quad (136)$$

если $2\sqrt{\bar{c}_1\bar{c}_2 + \bar{c}_3} < 1$.

Иследуем асимптотическое поведение амплитуд C_n . Напомним, что уравнение Шредингера в осцилляторном представлении имеет вид

$$\sum_{m_2} (\langle m_1 | \hat{H} | m_2 \rangle - E \delta_{m_1 m_2}) C_{m_2} = 0, \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots, \quad (137)$$

где

$$\langle m_1 | \hat{H} | m_2 \rangle = \langle m_1 | \hat{T} | m_2 \rangle + \langle m_1 | \hat{V} | m_2 \rangle. \quad (138)$$

Обычно решение уравнения Шредингера в координатном представлении начинается с исследования асимптотического поведения, т. е. поведения волновой функции при больших значениях радиуса (а также в окрестности других особых точек, если они есть). Установив асимптотическое поведение волновой функции, затем мы существен-

но его используем при выборе и осуществлении практически любой схемы расчета. Однако подобного изучения асимптотики амплитуд C_n разложения по дискретному базису, как правило, не проводят, предполагая, что метод постепенного расширения дискретного базиса автоматически снимает все вопросы, связанные с асимптотикой амплитуд C_n при $n \rightarrow \infty$. И даже в тех случаях, когда не обеспечивается быстрая сходимость рассматриваемых значений к предельному значению, соответствующему бесконечно большому числу базисных функций, плохую сходимость, как правило, связывают со свойствами базиса, хотя, как будет видно ниже, в ее основе может лежать другая причина. Она состоит в том, что в такой схеме не учитывается правильная асимптотика получаемых решений.

Для исследования асимптотики C_n рассмотрим уравнение (137) при $m_1 \gg 1$. В этом случае сумма

$$\sum_{m_2} \langle m_1 | \hat{V} | m_2 \rangle C_{m_2} \quad (139)$$

принимает вид линейной суперпозиции выражений

$$\sum_{m_2} (m_1) = \sum_{m_2} \frac{(-1)^{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}} a \exp \left\{ -b \frac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2} \right\} \quad (140)$$

[константы a и b легко определить, сравнивая это выражение с (135)]. Остальные члены в (139) вследствие их экспоненциальной малости могут быть опущены. Легко показать, что и выражение (140) дает нулевой вклад в (139) и, следовательно, в (137) с той точностью, с которой сумма по m_2 в (139) может быть заменена интегралом. Для этого в (140) отдельно запишем сумму по четным и нечетным значениям m_2 , а затем совершим предельный переход к интегралу

$$\begin{aligned} \sum (m_1) &\cong \frac{a}{\sqrt{2m_1}} \left\{ \sum_p \left[\exp \left[-b \frac{(2p)^2}{2m_1} \right] C_{m_1+2p} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left[-b \frac{(2p-1)^2}{2m_1} \right] C_{m_1+2p-1} \right] \right\} \cong \\ &\cong \frac{a}{\sqrt{2m_1}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{d}{dp} \left\{ \exp \left[-b \frac{p^2}{m_1} \right] C_{m_1+2p} \right\} \cong 0. \end{aligned} \quad (141)$$

Таким образом, в уравнениях в (137), которым соответствуют большие значения m_1 , мы можем опустить члены с матричными элементами оператора потенциальной энергии. Следовательно, уравнения системы (137) в пределе больших значений m_1 принимают простой вид

$$\begin{aligned} \langle m_1 | \hat{T} | m_1 - 1 \rangle C_{m_1-1} + (\langle m_1 | \hat{T} | m_1 \rangle - E) C_{m_1} + \\ + \langle m_1 | \hat{T} | m_1 + 1 \rangle C_{m_1+1} = 0. \end{aligned} \quad (142)$$

Эти уравнения эквивалентны дифференциальному уравнению

$$-\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} C + \left[\frac{1}{4} \frac{(L+1/2)^2}{x} - \xi \right] C = 0, \quad (143)$$

где

$$C_n \rightarrow C(x), \quad x = 2n + L + 3/2, \quad \xi = \frac{mr_0^2}{\hbar^2} E. \quad (144)$$

Решения этого уравнения для связанных состояний ($\xi < 0$) выражаются через функции Макдональда [76]

$$C_{nL} \cong \sqrt{x} K_L(x\sqrt{x}), \quad \kappa = \sqrt{2|\xi|}, \quad (145)$$

которые имеют затухающую экспоненциальную асимптотику $\exp\{-\kappa\sqrt{x}\}$, а для состояний непрерывного спектра ($\xi > 0$)

$$C_{nL} \cong \sqrt{x} [j_L(k\sqrt{2x}) - \text{tg} \delta_{LnL}(k\sqrt{2x})], \quad (146)$$

$$k = \sqrt{2\xi}.$$

Здесь $j_L(x)$, $n_L(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана соответственно. Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентами C_{nL} и данными рассеяния — фазами δ_L . Можно ослабить условия на значение n и соотношение между C_{nL} и фазами δ_L записать в виде

$$C_{nL} = A_{nL}(k) - \text{tg} \delta_L B_{nL}(k), \quad (147)$$

расширив тем самым область применимости предельной формулы для C_{nL} . Функции A и B дискретного переменного являются коэффициентами разложения соответственно регулярного и нерегулярного решений уравнений Шредингера для свободного движения, а также регулярным и нерегулярным решением линейных трехчленных рекуррентных соотношений (142), в которых $C_m = A_{mL}$ либо $C_m = B_{mL}$. Если $4n \gg (kr_0)^2$, то (147) переходит в (146).

Соотношение (146) составляет основу развиваемой в ИТФ АН УССР алгебраической версии метода резонирующих групп [30, 31, 68, 77, 78].

5. ОКС РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ

Для построения ОКС резонансных состояний следует привлечь орбитали

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{n}, k; \mathbf{v}; \mathbf{r}) &= (2^n n! \pi^{3/2})^{-1/2} H_{n_1}(z_1) H_{n_2}(z_2) H_{n_3}(z_3) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} r^2 - \sum_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha}}{1-\beta_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{r})^2 + \right. \\ &+ 2 \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{R}_k \mathbf{p}_{\alpha})(\mathbf{p}_{\alpha} \mathbf{r})}{1-\beta_{\alpha}} - \left. \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{R}_k \mathbf{p}_{\alpha})^2}{1-\beta_{\alpha}} \right\} \zeta_{\mathbf{v}}, \quad (148) \\ z_i &= (\mathbf{u}_i^k, \mathbf{r} - \mathbf{R}_k), \end{aligned}$$

которые наряду с кластерными параметрами R_h содержат параметры деформации $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Новые орбитали (148) в некоторых предельных случаях совпадают с орбиталями (52) и (102), использовавшимися ранее для конструирования ОКС кластерных систем и ОКС коллективных возбуждений. Так, полагая в (148) $\beta_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) и принимая во внимание, что

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha r} p_{\alpha s} = \delta_{rs}, \tag{149}$$

получаем кластерные орбитали (102). Если же в (148) устремить к нулю кластерный параметр R_h , то мы приходим к орбиталям (52). Такие предельные переходы связывают резонансные ОКС с кластерными и с ОКС коллективных возбуждений.

Помимо предельного перехода $\beta_\alpha = 0$, резонансные ОКС можно свести к кластерным с помощью преобразований поворота и растяжения, которые подробно описаны в разд. 3. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим интеграл перекрытия резонансных ОКС $\Phi(R, \beta)$ и $\Phi(\tilde{R}, \tilde{\beta})$. По аналогии с (104) интеграл перекрытия резонансных ОКС двухкластерной системы равен

$$\begin{aligned} \langle \Phi(R, \beta) \Phi(\tilde{R}, \tilde{\beta}) \rangle = & \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{A-1} \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \times \\ & \times \hat{A} \left\{ \tilde{\varphi}_1(A_1) \tilde{\varphi}_2(A_2) \exp \left[- \sum_{i=1}^{A-1} \sum_{r,s} B_{rs} x_{ir} x_{is} + 2 \sum_{\alpha} \frac{(Rp_{\alpha})(p_{\alpha}r_1)}{1-\beta_{\alpha}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \sum_{\alpha} \frac{(Sq_{\alpha})(q_{\alpha}r_1)}{1-\tilde{\beta}_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \frac{(Rp_{\alpha})^2}{1-\beta_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \frac{(Sq_{\alpha})^2}{1-\tilde{\beta}_{\alpha}} \right] \right\}, \tag{150} \end{aligned}$$

где $R = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A}} (R_1 - R_2)$, квадратичная форма B_{rs} определена равенством (56), а каждая из функций φ_k ($\tilde{\varphi}_k, k = 1, 2$) принадлежит $O(A_k - 1)$ -симметрии $[f_1^k f_2^k f_3^k]$ и содержит набор генераторных параметров $\{u_{\alpha}^k\}$ ($\{v_{\alpha}^k\}$). Так же, как и в разд. 3, сначала введем новые переменные $\xi_{i\nu} = \sum_{\mu} g_{\nu\mu} x_{i\mu}$, в которых квадратичная форма

$\sum_{r,s} B_{rs} x_{ir} x_{is}$ принимает простой вид

$$\sum_{r,s} B_{rs} x_{ir} x_{is} = \xi_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, A - 1.$$

Затем с помощью треугольного преобразования (61) перейдем к новым генераторным параметрам $\{a_{\alpha}^k\}$ и $\{b_{\alpha}^k\}$. Кроме того, переопределим кластерные параметры

$$\begin{aligned} R'_{\nu} &= \sum_{\alpha\mu} \frac{Rp_{\alpha}}{1-\beta_{\alpha}} p_{\alpha\mu} g_{\mu\nu}, \\ \tilde{R}'_{\nu} &= \sum_{\alpha\mu} \frac{Sq_{\alpha}}{1-\tilde{\beta}_{\alpha}} q_{\alpha\mu} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{151}$$

Здесь $g_{\nu\mu}^{-1}$ — матричные элементы матрицы $\|g_{\nu\mu}^{-1}\|$, обратной матрице $\|g_{\nu\mu}\|$. После таких преобразований интеграл перекрытия принимает следующий вид:

$$\langle \Phi(R, \beta) | \Phi(\tilde{R}, \tilde{\beta}) \rangle = F(R, \beta; \tilde{R}, \tilde{\beta}) \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{A-1} \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \times \\ \times \tilde{A} \left\{ \tilde{\varphi}_1(A_1) \tilde{\varphi}_2(A_2) \exp \left[- \sum_{i=1}^{A-1} \xi_i^2 + 2(R' + \tilde{R}') \xi_1 - (R'^2 + \tilde{R}'^2) \right] \right\}. \quad (152)$$

(3A-3)-мерный интеграл в этом соотношении совпадает с интегралом перекрытия кластерных ОКС $\langle \Phi(R') | \Phi(\tilde{R}') \rangle$, а функция $F(R, \beta; \tilde{R}, \tilde{\beta})$ равна

$$F(R, \beta; \tilde{R}, \tilde{\beta}) = (\det \|B_{rs}\|)^{-(A-1)/2} \prod_{k=1}^2 (\alpha_{11}^k \tilde{\alpha}_{11}^k)^{j_1^k} (\alpha_{22}^k \tilde{\alpha}_{22}^k)^{j_2^k} (\alpha_{33}^k \tilde{\alpha}_{33}^k)^{j_3^k} \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{\alpha} \left[\frac{(Rp_{\alpha})^2}{1-\beta_{\alpha}} - \frac{(Sq_{\alpha})^2}{1-\tilde{\beta}_{\alpha}} \right] + R'^2 + \tilde{R}'^2 \right\}, \quad (153)$$

где R' и \tilde{R}' определены равенством (151), а параметры $\alpha_{11}^k, \alpha_{22}^k, \alpha_{33}^k$ для каждого значения $k = 1, 2$ — равенством (63). Таким образом, преобразования поворота и растяжения приводят резонансные ОКС к кластерным. Для того чтобы от матричных элементов оператора \hat{F} , вычисленных на кластерных ОКС, перейти к матричным элементам этого оператора на резонансных ОКС, необходимо совершить обратный переход от параметров $\{a_{\alpha}^k\}$ и $\{b_{\alpha}^k\}$ к параметрам $\{u_{\alpha}^k\}$ и $\{v_{\alpha}^k\}$, параметры R' и \tilde{R}' заменить исходными кластерными параметрами R и \tilde{R} (151), а затем полученное выражение следует умножить на функцию $F(R, \beta, \tilde{R}, \tilde{\beta})$.

Впервые резонансные ОКС для системы двух взаимодействующих кластеров, один из которых α -частица, а второй образован k нуклонами ($k \leq 4, A = 4 + k$), были построены в работе [79], где использовался упрощенный вариант орбиталей (148) ($\beta_1 = \beta, \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}, \beta_2 = \beta_3 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = 0; p_1 \parallel R, q_1 \parallel S$):

$$\exp \left\{ - \frac{1}{2} r^2 - \frac{\beta}{1-\beta} (pr)^2 + 2 \frac{(Rr)}{1-\beta} - \frac{R^2}{1-\beta} \right\}.$$

С помощью этих ОКС в [59, 64, 80] рассчитан спектр коллективных возбуждений легчайших ядер p -оболочки, а в [30, 78] исследованы связанные состояния и состояния непрерывного спектра ядер ${}^7\text{Li}$ и ${}^8\text{Be}$ в каналах $\alpha + t$ и $\alpha + \alpha$ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Техника обобщенных когерентных состояний является таким образом весьма мощным инструментом для исследования проблем структуры атомных ядер. Эта техника в настоящее время интенсивно развивается, и можно надеяться, что в ближайшее время на ее основе будут решены новые, еще более сложные задачи, не поддающиеся иным средствам исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glauber R. J. — Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 2529; 1963, v. 131, p. 2766.
2. Perelomov A. M. — Comment Math. Phys., 1972, v. 26, p. 222.
3. Переломов А. М. — УФН, 1977, т. 123, с. 23.
4. Бори М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Симонов Ю. А. — ЯФ, 1966, т. 3, с. 630.
6. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. — ЯФ, 1966, т. 3, с. 1032.
7. Базь А. И., Гринь Ю. Т., Демин В. Ф., Жуков М. В. — ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 2, с. 275.
8. Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В. — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 4, с. 847.
9. Дзюблик А. Я., Овчаренко В. И., Стещенко А. И., Филиппов Г. Ф. — ЯФ, 1972, т. 15, с. 869.
10. Филиппов Г. Ф. — ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 992; 1978, т. 9, с. 1241.
11. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Смирнов Ю. Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова думка, 1981.
12. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И. — In: Intern. School on Critical Phenomena in heavy Ion Physics. Brasov, 1980, p. 85.
13. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
14. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
15. Tang Y. C., LeMere M., Thompson D. K. — Phys. Rep., 1978, v. 47, p. 1.
16. Microscopic Method for the Interactions Between Complex Nuclei. — Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1977, v. 62.
17. Comprehensive Study of Structure of light Nuclei. — Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1980, v. 68.
18. Василевский В. С., Филиппов Г. Ф., Чоповский Л. Л. — Изв. АН СССР. Сер. Физ., 1979, т. 43, с. 2091.
19. Hill D. L., Wheeler J. A. — Phys. Rev., 1953, v. 89, p. 1102.
20. Griffin J. J., Wheeler J. A. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 311.
21. Lathouwers L., Van Leuven P. — Advances Chem. Phys., 1981.
22. Caurier E., Bourotte-Bilwes B., Abgrall Y. — Phys. Lett. B, 1973, v. 44, p. 411.
23. Flocard H., Vautherin D. — Phys. Lett. B, 1975, v. 55, p. 259.
24. Abgrall Y., Caurier E. — Ibid., v. 56, p. 229.
25. Pelet J., Letourneux J. — Nucl. Phys. A, 1977, v. 281, p. 277.
26. Alpha-like Four-Body Correlations and Molecular Aspects in Nucl. — Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1972, v. 52.
27. Giraud B., Le Tourneux J., Osnes E. — Ann. Phys., 1975, v. 89, p. 359.
28. The Generator Coordinate Method For Nuclear Bound States and Reactions. — Fizika, Suppl., 1973, v. 5.
29. Proc. of the Second International Seminar on the Generator Coordinate Method for Nuclear Bound States and Reactions. — Brussel, M. Bouten. — BLG Report no. 484, 1975.
30. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П. — ЯФ, 1980, т. 32, с. 932.
31. Филиппов Г. Ф. — ЯФ, 1981, т. 33, с. 928.

32. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Коваленко Т. П.— Препринт ИТФ-81-107Е, Киев, 1981.
33. Bargmann V.— Commun. Pure Appl. Math., 1961, v. 14, p. 187.
34. Филиппов Г. Ф., Авраменко В. И.— ЯФ, 1983, т. 37, с. 597.
35. Elliott J. P.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1958, v. 245, p. 128; v. 245, p. 562.
36. Мадкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
37. Moshinsky M., Quesne C.— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1631.
38. Кныр В. А., Пипирайте П. П., Смирнов Ю. Ф.— ЯФ, 1975, т. 22, с. 1063.
39. Ашерова Р. М., Кныр В. А., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 1126.
40. Rosensteel G., Rowe D. J.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 10.
41. Василевский В. С., Максименко В. Н., Филиппов Г. Ф.— Препринт ИТФ-78-56Р, Киев, 1978.
42. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., Шустов А. П.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1980, т. 44, с. 1019.
43. Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., Шустов А. П.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1982, т. 46, с. 100.
44. Asherova R. M., Smirnov Yu. F., Tolstoy V. N., Shustov A. P.— Nucl. Phys. A, 1981, v. 355, p. 25.
45. Rosensteel G., Rowe D. J.— Ann. Phys., 1979, v. 123, p. 36; 1980, v. 126, p. 198, 343.
46. Rosensteel G., Rowe D. J.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1119.
47. Rosensteel G.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 924.
48. Rosensteel G.— Nucl. Phys. A, 1980, v. 341, p. 397.
49. Hecht K. T.— J. Phys. Soc. Japan, 1978, v. 44, p. 232.
50. Hecht K. T., Braunschweig D.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 295, p. 34.
51. Peterson D. R., Hecht K. T.— Nucl. Phys. A, 1980, v. 344, p. 361.
52. Arickx F.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 268, p. 347.
53. Arickx F.— Ibid., 1977, v. 284, p. 264.
54. Arickx F., Broeckhove J., Deumens E.— Nucl. Phys. A, 1979, v. 318, p. 269.
55. Arickx F., Broeckhove J., Deumens E.— Phys. Lett. B, 1981, v. 106, p. 275.
56. Arickx F., Broeckhove J., Deumens E.— Nucl. Phys. A, 1982, v. 377, p. 121.
57. Broeckhove J.— Phys. Lett. B, 1982, v. 109, p. 5.
58. Arickx F., Broeckhove J., Deumens E.— Preprint DTWNRC, Antwerpen, 1980.
59. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П.— ЯФ, 1980, т. 32, с. 70.
60. Василевский В. С., Коваленко Т. П.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1981, т. 45, с. 80.
61. Filiprov F. G., Chorovsky L. L., Vasilevsky V. S.— Nucl. Phys., 1982, v. 388, p. 47.
62. Овчаренко В. И., Охрименко И. П., Стешенко А. И.— ЯФ, 1982, т. 35, с. 642.
63. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Терешин Ю. В.— ЯФ, 1981, т. 33, с. 932.
64. Василевский В. С., Смирнов Ю. Ф., Филиппов Г. Ф.— ЯФ, 1980, т. 32, с. 987.
65. Филиппов Г. Ф., Терешин Ю. В., Василевский В. С.— Препринт ИТФ-81-103Е, Киев, 1981.
66. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П.— Препринт ИТФ-78-131Р, Киев, 1978.
67. Карасев В. П., Шеленин Л. А.— Теоретическая и математическая физика, 1980, т. 45, с. 54.
68. Филиппов Г. Ф., Авраменко В. И.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1982, т. 46, с. 158.

69. Lowdin P. O. — Phys. Rev., 1955, v. 97, p. 1474.
70. Hecht K. T., Zahn W. — Nucl. Phys. A, 1979, v. 313, p. 77.
71. Hecht K. T., Zahn W. — Ibid., v. 318, p. 1.
72. Hecht K. T., Reske E. T., Seligman T. H., Zahn W. — Preprint MPI H-1980-VII, Heidelberg, 1980.
73. Fujiwara Y., Horiuchi H. — Progr. Theoret. Phys., 1980, v. 63, p. 895.
74. Fujiwara Y., Horiuchi H. — Ibid., 1981, v. 65, p. 1632.
75. Fujiwara Y., Horiuchi H. — Progr. Theoret. Phys., 1981, v. 65, p. 1901.
76. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968.
77. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Коваленко Т. П. — В сб.: Микроскопические расчеты легких ядер. Калинин: Изд-во Калин. гос. ун-та, 1982, с. 20.
78. Филиппов Г. Ф., Чоповский Л. Л., Василевский В. С. — Ядерная физика, 1983, т. 37, с. 839.
79. Василевский В. С., Филиппов Г. Ф., Чоповский Л. Л. — Преприят ИТФ-81-13Е, Киев, 1981.
80. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Кручинин С. П. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1980, т. 44, с. 2313.