«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,1985,
ТОМ 16, ВЫП. 1

Памяти J. A. Swieca

УДК 539.12.01

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЛОКАЛЬНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

М. Х. Минчев, И. Т. Тодоров

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики
Болгарской Академии наук, София

Рассматривается ковариантная формулировка квантовой электродинамики (с индефинитной метрикой). Картина спонтанного нарушения симметрии в (абелевой и неабелевой) калибровочной теории сопоставляется с теоремой Голдстоуна в стандартной квантовой теории поля (с положительной метрикой). Показано, что фотон может быть отождествлен с голдстоуновской частицей, ответственной за нарушение локальной калибровочной инвариантности при сохранении глобальной U (1)-инвариантности.

Построено лоренц- и локально-калибровочно инвариантное нелокальное заряженное поле. В рамках теории возмущений проверено, что соответствующее перенормированное составное поле обладает матричными элементами на массовой поверхности, свободными от инфракрасных расходимостей. Утверждается что такое поле может порождать физические электронные состояния без необходимости введения лоренц-неинвариантного облака мягких фотонов.

The covariant (indefinite metric) formulation of quantum electrodynamics is reviewed. The picture of spontaneous symmetry breaking in (abelian and non-abelian) gauge theories is contrasted with the Goldstone theorem is standard (positive metric) quantum field theory. In particular, the photon is viewed as a Goldstone particle for the spontaneously broken local gauge invarience; it belongs to the physical Hilbert space precisely because the corresponding global U (1)-symmetry is exact.

A Lorentz and locally gauge invariant nonlocal charged field is constructed first in the framework of classical electrodynamics. Its renormalized quantum version is shown to have infrared finite on shell matrix elements in perturbation theory. It is argued that such a field may give rise to a physical electron state with no need for introducing an additional soft photon cloud that breaks Lorentz invariance in the charged sector.

ВВЕДЕНИЕ

Господствующее положение калибровочных теорий в квантовой теории поля в течение последнего десятилетия связано, в первую очередь, с возможностью их перенормируемости (в неабелевом случае). Систематическое изложение калибровочной теории возмущений (вместе с доказательством перенормируемости) содержится в [56] (см. также [67, 68]). Практически все имеющиеся результаты по электрослабым взаимодействиям получены в рамках теории возмущения (см., например, [66]). Главный успех квантовой хромодинамики (КХД) — реализация и применение асимптотической свободы — тоже связан с ее перенормируемостью.

Последовательное уточнение математической структуры калибровочных теорий идет, по крайней мере, по трем направлениям.

К первому можно отнести работы, посвященные геометрическому подходу к калибровочным полям. Прогресс, достигнутый в этом направлении, касается прежде всего решения классических калибровочных уравнений (см. [2, 46]). Однако дифференциально-геометрическое понимание квантовой теории калибровочных полей все еще находится в зачаточном состоянии (см. [54]).

Мы не будем касаться здесь и работ второго направления — калибровочных теорий на решетке и исследования возможности перехода к непрерывному пределу. На этом пути получены интересные результаты лишь в случае пространства-времени низшей размерности (2 и 3) (см. [26]).

Аксиоматический подход к локальной и ковариантной формулировке квантовой теории калибровочных полей (в пространстве с индефинитной метрикой) в каком-то смысле наиболее близок к реальным применениям калибровочных теорий, начиная с простейшей и лучше всего подтвержденной из них — квантовой электродинамики. В данной статье мы рассмотрим основы этого подхода и некоторые его применения — прежде всего к спонтанно нарушенным симметриям. В отличие от ряда работ (см., например, [9, 28, 29]) здесь предполагается, что лоренцева инвариантность не нарушена в зарядовом секторе. Основанием для такого предположения является построение пуанкаре-ковариантного классического нелокального составного поля $\Psi(x, A)$, зависящего экспоненциально от электромагнитного потенциала A_μ, которое инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований (см. разд. 1, п. Б), и анализ инфракрасного поведения матричных элементов этого поля в квантовом случае, проведенный недавно в [15] на основе суммирования ряда теории возмущений. Большая часть рассматриваемых результатов была получена в работах R. Ferrari, E. Strocchi и покойного S. Swieca [21—24, 30, 57—61, 63, 64]. Мы не касаемся здесь двух фундаментальных достижений аксиоматического подхода к калибровочным теориям: доказательства правила суперотбора по электрическому заряду в квантовой электродинамике [61] и теоремы реконструкции в теории с индефинитной метрикой [48, 50]. Предысторию аксиоматического подхода к квантовой электродинамике можно проследить по работам [61, 73]. (В качестве стандартной ссылки по аксиоматической квантовой теории поля в гильбертовом пространстве с положительной пуанкаре-инвариантной метрикой мы пользуемся монографией [6].)

СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы пользуемся метрикой Паули (с пространственно подобной сигнатурой):

$$p^2=\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu=\mathbf{p}^2-p_0^2,\quad (\eta^{\mu\nu})=(\eta_{\mu\nu})=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Преобразование Фурье от функций, заданных в пространстве Минковского, запишется в форме

$$\psi(x)=\int e^{ipx}\psi(p)\,d_4p,\quad \psi(p)=\int e^{-ipx}\psi(x)\,d^4x, \tag{2}$$

$$d_4p=\frac{d^4p}{(2\pi)^4},\quad px=p_\mu x^\mu.$$

Энергия отождествляется с $-p_0$ ($=p^0$). (В случае частицы в стационарном поле тяготения, вообще говоря, лишь $E=-p_0$ является сохраняющейся величиной, в то время как $p^0=g^{0\mu}p_\mu$ может зависеть от времени.) Ковариантная производная применительно к волновой функции частицы с зарядом e (или к полю, уничтожающему заряд e) имеет вид

$$\mathscr{D}_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu\quad(\overline{\mathscr{D}}_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu), \tag{3}$$

где $\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Она соответствует локальным калибровочным преобразованиям

$$\psi(x)\longmapsto\exp[ie\lambda(x)]\,\psi(x),\quad A_\mu(x)\longmapsto A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x). \tag{4}$$

Матрицы Дирака определяются соотношением

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]_+=2\eta_{\mu\nu}, \tag{5а}$$

так что для любых векторов p и q пространства Минковского $\operatorname{tr}\hat{p}\hat{q}=4pq$, где

$$\hat{p}=p_\mu\gamma^\mu. \tag{5б}$$

Дираково сопряжение задается формулой

$$\tilde{\psi}=\psi^*\beta,\quad \beta\gamma_\mu+\gamma_\mu^*\beta=0,\quad \beta=\beta^*; \tag{6а}$$

в стандартном базисе, в котором

$$\gamma_\mu^*=\eta_{\mu\mu}\gamma_\mu,$$

мы полагает

$$\beta=i\gamma^0\equiv-\gamma_4. \tag{6б}$$

Псевдоскалярная матрица γ_5 ($=\gamma^5$) выбирается в виде $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, так что

$$\gamma_5^2=1. \tag{7}$$

Канонические скобки Пуассона совпадают с деленным на i (анти)коммутатором. В частности, если $\pi^\mu(x)$ — канонически сопряженные импульсы к компонентам поля $A_\mu(x)$, то

$$\delta(x^0-y^0)\{A_\nu(x),\pi^\mu(y)\}=\delta(x-y)\,\delta_\nu^\mu. \tag{8}$$

Заметим, что переход от временноподобной к пространственно-подобной метрике реализуется изменением знака у ковариантных составляющих векторов (типа p_μ, A_μ) и заменой $\gamma^\mu \to i\gamma^\mu$.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

А. Электродинамика Максвелла-Дирака в ковариантной калибровке. Начнем для определенности наше изложение с простейшего примера теории электрон-позитронного поля $\psi(x)$, взаимодействующего с электромагнитным полем $A_\mu(x)$. Лагранжиан теории выберем в невырожденной форме с членом $\mathscr{L}_{GF}$, задающим класс ковариантных калибровок и содержащим так называемый прапотенциал Герца *:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{inv}} + \mathscr{L}_{GF}, \quad \mathscr{L}_{\text{inv}} = \mathscr{L}_D + \mathscr{L}_{em}, \quad \mathscr{L}_{GF} = \mathscr{L}_B^{(\xi)} + \mathscr{L}_{g,h}; \tag{9а}$$

здесь лагранжианы Дирака и Максвелла

$$\mathscr{L}_D = \tilde{\psi}(m + \hat{\mathscr{D}})\psi, \quad \hat{\mathscr{D}} = \hat{\partial} - ie\hat{A}$$

и

$$\mathscr{L}_{em} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F^{\mu\nu} \tag{9б}$$

задают калибровочно-инвариантную часть $\mathscr{L}_{\text{inv}}$, в то время как члены, «фиксирующие калибровку», имеют вид:

$$\mathscr{L}_B^{(\xi)} = \frac{1}{2}\xi B^2 - B\,\partial A, \tag{9в}$$

$$\mathscr{L}_{g,h} = \frac{1}{2}[G_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}(\partial^\mu h^\nu - \partial^\nu h^\mu) - \partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu) H^{\mu\nu}] - \\ - \partial g\,\partial h - A_\mu g^\mu. \tag{9г}$$

Варьированием по $F_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ и $H_{\mu\nu}$ получаем соотношения

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{10а}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu, \tag{10б}$$

включающие стандартную связь между тензором Максвелла $F_{\mu\nu}$ и электромагнитным потенциалом A_μ. Уравнения движения для спинорного поля

$$(\hat{\mathscr{D}} + m)\psi(x) = 0 = \\ = \tilde{\psi}(x)(m - \overleftarrow{\hat{\mathscr{D}}})(\equiv -\partial_\mu\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu + \psi(x)(m - ie\hat{A}(x))) \tag{11}$$

* Введение прапотенциалов такого вида удобно для анализа инфракрасных особенностей функций Грина [14, 15, 77, 79].

обеспечивают закон сохранения тока

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{12а}$$

где

$$j^\mu (x) = \mathrm{i} e \tilde{\psi} (x)\, \gamma^\mu \psi (x). \tag{12б}$$

Калибровочно-зависимая часть лагранжиана, $\mathscr{L}_{GF}$, дает вклад в выражение для тока через потенциалы; из уравнения движения для поля A_μ находим

$$j^\mu (x) = \partial_\nu F^{\mu\nu} (x) + \mathfrak{A}^\mu (x), \tag{13а}$$

где добавочный член к дивергенции поля Максвелла,

$$\mathfrak{A}^\mu (x) = g^\mu (x) - \partial^\mu B (x), \tag{13б}$$

тоже является сохраняющимся током [как следствие (12)]:

$$\partial_\mu \mathfrak{A}^\mu (x) = 0, \text{ так что } \partial g (x) = \square B (x). \tag{13в}$$

Поля B и g^μ являются (неканоническими) свободными. Действительно, из вариации лагранжиана по полю h_μ (и $\partial_\mu h_\nu$) находим

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial g \equiv - \square g^\mu = 0, \tag{14а}$$

так что [в силу (13в)]

$$\square^2 B = 0 = \square^2 \mathfrak{A}^\mu. \tag{14б}$$

Наконец, варьированием по B и по g_μ (и $\partial_\mu g_\nu$) получаем связи

$$\partial A (x) = \xi B (x), \tag{15а}$$

$$A_\mu (x) = \square h_\mu (x). \tag{15б}$$

Из (14б) и (15) видно, что дивергенция $\partial A = \square \partial h$ тоже удовлетворяет (неканоническому) свободному уравнению

$$\square^2 \partial A = 0 = \square^3 \partial h. \tag{15в}$$

Полученные уравнения инвариантны относительно специальных калибровочных преобразований второго рода вида (4) с

$$\lambda = \lambda (x, \xi) = \partial_\mu l^\mu (x, \xi) = \lambda_0 (x) + \lambda_1 (x)\, \xi, \tag{16а}$$

где l^μ и λ удовлетворяют свободным уравнениям

$$\partial_\mu (\partial^\mu l^\nu - \partial^\nu l^\mu) = \square l^\nu - \partial^\nu \partial l = 0, \quad \square \lambda_0 = 0 = \square^2 \lambda_1; \tag{16б}$$

при этом вспомогательные поля B, h и g преобразуются по закону

$$h_\mu \mapsto h_\mu + l_\mu, \quad B \mapsto B + \frac{1}{\xi} \square \partial l = B + \square \lambda_1, \quad g_\mu \mapsto g_\mu + \partial_\mu \square \lambda_1. \tag{16в}$$

Для дальнейшего существенно, что среди этих специальных калибровочных преобразований есть «локальные», для которых $\lambda (x)$ убывает на бесконечности. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что любое λ_0 вида

$$\lambda_0(x)=\frac{f(t+r)-f(t-r)}{2r}, \quad t=x^0, \quad r=|\mathbf{x}|,$$

где f — гладкая убывающая на бесконечности функция на вещественной оси, является всюду регулярным решением уравнения Д'Аламбера, стремящимся к нулю при $r+|t|\to\infty$. Аналогично можно положить $l_\mu=\partial_\mu\rho$, где

$$\rho(x)=t\,\frac{F(t-r)-F(t+r)}{4r} \quad (\Box\rho=\partial l=\lambda_0 \text{ при } F'=f)$$

задает (при соответствующих F) гладкое убывающее решение уравнения $\Box^2\rho=0$ и т. д. [Более общие решения могут быть получены отсюда заменой $t\to t-\tau$, $r\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ и взятием (непрерывной) суперпозиции по τ и по $\mathbf{y}$.]

Лагранжиан (9) является обобщением часто используемого лагранжиана

$$\mathcal{L}_{g_\mu=0}=\mathcal{L}_{\text{inv}}+\mathcal{L}_B^{(\xi)} \tag{9д}$$

(см., например, [65]), интерполирующего между калибровкой Ландау, получаемой при $\xi=0$ [что согласно (16а) дает $\partial A=0$], и калибровкой Гупта — Блейлера при $\xi=1$ (в ней $\Box A^\mu=j^\mu-g^\mu=j^\mu$). Среди решений уравнений (10) — (15) находятся — при $g_\mu=0$ — решения уравнений движения для лагранжиана (9д). В квантовом случае теория с лагранжианом (9д) реализуется в подпространстве пространства состояний теории, задаваемой лагранжианом (9).

Калибровочно-инвариантная формулировка теории получается формально, если в лагранжиане (9д) (или в соответствующих уравнениях движения) перейти к пределу $B(x)\to 0$, $\xi\to\infty$, $\xi B(x)=\partial A(x)$ — конечно. В отличие от лагранжианов (9а) и (9д) калибровочно-инвариантный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ вырожден: он не зависит от $\dot{A}_0=\partial_0 A_0$ и приводит к гамильтоновой теории со связями (см., например, [20, 35, 69] и приведенные там ссылки на более ранние работы Дирака и др.).

Перейдем к заданию симплектической структуры на многообразии полей, входящих в лагранжиан (9). Рассматривая поля A_μ, h_μ, g_μ и ψ [которые входят в (9) вместе со своими производными] как обобщенные координаты, введем для этой цели канонически сопряженные к ним импульсы:

$$\pi_A^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu(x)}=-F^{0\mu}(x)-\eta^{0\mu}B(x)\quad(\eta^{0\mu}=-\delta_0^\mu), \tag{17а}$$

$$\pi_g^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{g}_\mu(x)}=-H^{0\mu}-\eta^{0\mu}\,\partial h,\quad \pi_h^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_\mu(x)}=-G^{0\mu}-\eta^{0\mu}\,\partial g, \tag{17б}$$

$$\pi_\psi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)}=-\tilde{\psi}(x)\,\gamma^0. \tag{17в}$$

Канонические скобки Пуассона для бозе-полей стандартны; нетривиальная одновременная скобка удовлетворяет (8). Свойства же «классического» поля Дирака менее привычны и требуют некоторого пояснения. Мы определим их формально, устремляя к нулю постоянную Планка $\hbar$ в канонических антиперестановочных соотношениях квантовых полей ψ и $\tilde{\psi}$. Это приводит к отождествлению полей $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ с элементами бесконечной грассмановой алгебры (т. е. к предположению, что они строго антикоммутируют) и к постулированию симметричных одновременных скобок Пуассона

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \pi_\psi(t, \mathbf{y})\} = \{\pi_\psi(t, \mathbf{y}), \psi(t, \mathbf{x})\} = \\ = \lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{i\hbar} [\psi(t, \mathbf{x}), \pi_\psi(t, \mathbf{y})]_+ = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{18а}$$

или, в базисе (6б),

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^*(t, \mathbf{y})\} = -i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{18б}$$

(остальные одновременные скобки равны нулю).

Из этих соотношений вытекает, в частности, что нулевая составляющая нётерова тока (12) ведет себя как плотность электрического заряда:

$$\left.\begin{aligned} \{j^0(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})\} &= ie\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\psi(t, \mathbf{x}), \\ \{j^0(t, \mathbf{x}), \tilde{\psi}(t, \mathbf{y})\} &= -ie\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\tilde{\psi}(t, \mathbf{x}), \\ \{j^\mu(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})\} &= \{j^\mu(t, \mathbf{x}), B(t, \mathbf{y})\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Таким образом, трехмерный (пространственный) интеграл от $j^0(x)$ может быть отождествлен с генератором калибровочных преобразований первого рода. Выражение для сохраняющегося тока, порождающего локальные калибровочные преобразования (4), (16), можно записать в виде

$$J_\mu(x; l(x, \xi)) = G_{\mu\nu}l^\nu - g_\nu(\partial_\mu l^\nu - \partial^\nu l_\mu) + \\ + l_\mu\,\partial g - \partial l \overleftrightarrow{\partial_\mu} B - \frac{1}{\xi}\,\Box\,\partial l \overleftrightarrow{\partial_\mu}\,\partial h \tag{20}$$

$$(\lambda \overleftrightarrow{\partial_\mu} B = \lambda\partial_\mu B - B\partial_\mu\lambda).$$

Его сохранение вытекает из уравнений (14) — (16), в то время как определяющие скобки Пуассона

$$\left.\begin{aligned} &\{Q_l, h_\mu(x)\} = l_\mu(x), \quad \{Q_l, B(x)\} = \frac{1}{\xi}\,\Box\,\lambda(x), \\ &\{Q_l, \psi(x)\} = ie\lambda(x)\,\psi(x), \quad \{Q_l, A_\mu(x)\} = \partial_\mu\lambda(x), \\ &\{Q_l, g_\mu(x)\} = \frac{1}{\xi}\,\partial_\mu\,\Box\,\lambda(x), \quad \lambda(x) = \partial l(x) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

для генератора

$$Q_l = \int J^0 (x;\ l (x,\ \xi))\, d^3x \tag{22}$$

локальных калибровочных преобразований (4), (16) выводятся из (8), (17) и из соотношения

$$\{\dot{B} (t,\ \mathbf{x}),\ \psi (t,\ \mathbf{y})\} = \mathrm{i}e\delta (\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \psi (t,\ \mathbf{x}), \tag{23}$$

которое, в свою очередь, следует из (19) и из уравнения движения (13).

Обстоятельство, что поля $g_\mu (x)$ и $B (x)$ удовлетворяют линейным («свободным») уравнениям (14), позволяет вычислить их скобки Пуассона с базисными полями при разных временах:

$$\left.\begin{aligned} \{g_\mu (x),\ h_\nu (y)\} &= -\eta_{\mu\nu} D (x-y), \\ \{A_\mu (x),\ B (y)\} &= \partial_\mu D (x-y), \\ \{B (x),\ h_\nu (y)\} &= \frac{1}{2} (y_\nu - x_\nu)\, D (x-y), \end{aligned}\right\} \tag{24а}$$

$$\left.\begin{aligned} \{B (x),\ \psi (y)\} &= \mathrm{i}eD (x - y)\, \psi (y), \\ \{B (x),\ \tilde{\psi} (y)\} &= -\mathrm{i}eD (x - y)\, \tilde{\psi} (y), \end{aligned}\right\} \tag{24б}$$

где $D (x)$ — коммутаторная функция Паули — Иордана скалярного безмассового поля:

$$D (x) = 2\pi \mathrm{i} \int \varepsilon (p^0)\, \delta (p^2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} d_4 p = \frac{1}{2\pi}\, \varepsilon (x^0)\, \delta (x^2), \tag{25а}$$

удовлетворяющая

$$\Box D (x) = 0,\ D (0,\ \mathbf{x}) = 0,\ \partial_0 D (0,\ \mathbf{x}) = \delta (\mathbf{x}). \tag{25б}$$

Б. Физические заряженные поля и калибровочно-инвариантные билокальные операторы. Теперь можно ввести заряженные поля, которые инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований (хотя, разумеется, приобретают нетривиальный фазовый множитель при глобальных преобразованиях). Введем нелокальное поле

$$\psi (x;\, f,\, A) = \exp \left[-\mathrm{i}e \int A_\mu (y)\, f^\mu (x-y)\, d^4y \right] \psi (x), \tag{26а}$$

где $f (x)$ — вещественная обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^\mu f_\mu (x) = \delta (x) \tag{26б}$$

и граничному условию

$$\int\limits_{S^3(R)} \lambda (x)\, f^\mu (x)\, dS_\mu \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{26в}$$

при любом выборе гладкой убывающей на бесконечности функций $\lambda(x)$ [$S^3(R)$ — евклидова сфера радиуса R]. Нетрудно проверить, что поле (26) не меняется при локальных калибровочных преобразованиях (4) [для которых $\lambda(x) \to 0$ при $x \to \infty$, но не требуется, чтобы функция $\lambda(x)$ удовлетворяла уравнению (16б)]. Специальные случаи таких «физических заряженных полей» рассматривались еще Дираком [16] (см. также [3, 4]). В работе [15] используется иная реализация этого поля, которая тоже выражается через экспоненту от линейного интеграла:

$$\psi(x, n; A) = E(x; n; A)\,\psi(x), \tag{27а}$$

где $n = (n^\mu)$ — произвольный ненулевой вектор;

$$E(x, n; A) = \exp\left[\frac{-ie}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varepsilon(\alpha)\, n^\mu A_\mu(x-\alpha n)\right] \tag{27б}$$

[$\varepsilon(\alpha) = \operatorname{sign}\alpha$ — знаковая функция]. Мы предоставляем читателю убедиться, что представление (27) получается как частный случай из (26) при

$$f_\mu(x) = -in_\mu \int \frac{e^{iqx}}{nq}\, d_4q = \frac{1}{2} n_\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\alpha)\,\delta(x-\alpha n)\, d\alpha,$$

где интеграл в первом равенстве нужно понимать в смысле главного значения. Нетрудно убедиться, что при таком выборе f_μ локально-калибровочная инвариантность поля (26а) [или (27)] имеет место для любой гладкой функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty} \lambda(x-\alpha n) = 0$ при $n \neq 0$.

В терминах поля (27) можно определить, следуя [15], пуанкаре-инвариантное нелокальное физическое заряженное поле

$$\psi(x; A) = \int d_4p \int d_4y\, e^{ip(x-y)}\psi(y; p, A) \tag{28}$$

(которое тоже инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований).

Из (11) вытекает, что преобразование фурье-поля (27) удовлетворяет интегральному уравнению

$$(i\hat{p} + m)\,\psi(p; n, A) = ie\int d_4q\left[\hat{A}(p-q) - (\hat{p}-\hat{q})\frac{nA(p-q)}{n(p-q)}\right]\psi(q; n, A). \tag{29}$$

Заметим, что (29) не дает возможности получить при $n = p$ простое (замкнутое) уравнение для физического поля

$$\psi(p; A) = \psi(p; p, A), \tag{30}$$

так как в правой части (29) входит интеграл по q от $\psi(q;\ p,\ A)$ (при $q \neq p$).

Поля (27) могут быть использованы для построения калибровочно- и пуанкаре-инвариантных билокальных полей, соответствующих паре раздвинутых противоположных зарядов. Полагая $n = y - x$ в произведении $\psi(x;\ n,\ A)\,\tilde{\psi}(y;\ n,\ A)$, получаем дипольное поле

$$\mathscr{D}(x,\ y) = \mathscr{D}(x,\ y;\ \psi,\ \tilde{\psi},\ A) = \psi(x;\ y-x,\ A)\,\tilde{\psi}(y;\ y-x,\ A) = \\ = \psi(x)\exp\left\{\mathrm{i}e\int_0^1 (y^\mu - x^\mu)\,A_\mu(\alpha x + (1-\alpha)\,y)\,d\alpha\right\}\tilde{\psi}(y). \tag{31}$$

Нетрудно убедиться, что поле $\mathscr{D}$ инвариантно относительно как локальных, так и глобальных калибровочных преобразований; кроме того, оно пуанкаре-ковариантно и удовлетворяет условию эрмитовости

$$\tilde{\mathscr{D}}(x,\ y) = \mathscr{D}(y,\ x)^*\,\beta\otimes\beta^{-1} = \mathscr{D}^\dagger(x,\ y), \tag{32}$$

где * означает комплексное сопряжение и перестановку множителей. (Напомним, что фермионные поля ψ и $\tilde{\psi}$ классически антикоммутируют.)

В. Модель Хиггса и неабелевы калибровочные теории. Абелева модель Хиггса спонтанного нарушения симметрии [19, 33, 36, 39, 49, 72] — это электродинамика скалярного заряженного поля φ, которое взаимодействует не только с электромагнитным полем, но и с самим собой посредством потенциала Хиггса V_H, обладающего минимумом на окружности ненулевого радиуса в комплексной плоскости φ. Лагранжиан этой модели можно записать в виде

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_\varphi - V_H, \tag{33}$$

где $\mathscr{L}_A = \mathscr{L}_{em} + \mathscr{L}_B^{(\xi)}$ [см. (9)] — лагранжиан свободного электромагнитного поля в ковариантной калибровке

$$\mathscr{L}_\varphi = -\overline{\mathscr{D}}^\mu\varphi^*\mathscr{D}_\mu\varphi, \quad (\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu); \tag{34}$$

$$V_H = \frac{1}{2}\,\varphi^*\varphi\,(\lambda^2\varphi^*\varphi - m_H^2). \tag{35}$$

Минимум потенциала (35) достигается при

$$(\varphi^*\varphi)_{\text{мин}} = \frac{1}{2\lambda^2}\,m_H^2. \tag{36}$$

Выбрав некоторую точку $\varphi_\alpha = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\,m_H e^{\mathrm{i}\alpha}$ на окружности (36) и сделав в окрестности этого минимума замену переменных

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_H}{\lambda} + \rho + \mathrm{i}\chi\right)e^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_H}{\lambda} + \rho - \mathrm{i}\chi\right)e^{-\mathrm{i}\alpha}, \tag{37}$$

можно выразить лагранжиан (33) через поля ρ и χ, нулевое значение которых соответствует минимальной энергии. В результате получаем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}' - m_H^4/2\lambda^2, \tag{38а}$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_A - \frac{m^2}{2} A^2 - \frac{1}{2}\left[(\partial\chi)^2 + (\partial\rho)^2\right] - \frac{m_H^2}{2}\rho^2 - mA^\mu\partial_\mu\chi, \tag{38б}$$

$$m = e\frac{m_H}{\lambda}$$

играет роль свободного лагранжиана асимптотических частиц, а

$$\mathcal{L}' = -eA^2\left(m\rho + e\frac{\chi^2+\rho^2}{2}\right) + eA_\mu\left(\rho\partial^\mu\chi - \chi\partial^\mu\rho\right) - \\ - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^2+\chi^2) - \frac{\lambda m_H}{2}(\rho^2+\chi^2)\rho \tag{38в}$$

— лагранжиан взаимодействия. Варьирование $\mathcal{L}_0$ приводит к линейным уравнениям движения:

$$(m^2 - \Box)A_\mu + \partial_\mu(m\chi + \partial A - B) = 0; \tag{39а}$$

$$\xi B = \partial A; \tag{39б}$$

$$\Box\chi + m\,\partial A = 0; \tag{39в}$$

$$(m_H^2 - \Box)\rho = 0. \tag{39г}$$

Взяв дивергенцию от (39а) и учитывая (39в), мы убеждаемся, что поле $B(x)$ удовлетворяет в этом случае уравнению $\Box B = 0$. Применяя оператор Д'Аламбера к обеим частям (39б) и (39в), отсюда находим

$$\Box\partial A = 0 = \Box^2\chi. \tag{40}$$

Обстоятельство, что (асимптотическое) поле χ удовлетворяет уравнению четвертого порядка (40), в то время как $\Box\chi$, вообще говоря (при $\xi \neq 0$), не обращается в нуль, играет роль в анализе спонтанно нарушенной симметрии (см. разд. 3, п. В).

Наконец, выпишем в качестве примера неабелевой калибровочной теории лагранжиан поля Хиггса $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$, взаимодействующего с полем Янга — Миллса

$$A_\mu(x) = g\frac{\tau_a}{2i}A_\mu^a, \quad (A_\mu^*(x) + A_\mu(x) = 0), \tag{41}$$

где τ_a — матрицы Паули (по повторному индексу a подразумевается суммирование от 1 до 3). Определив

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu^* = \partial_\mu - A_\mu, \tag{42}$$

положим

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} - \mathcal{D}_\mu^*\varphi^*\mathcal{D}^\mu\varphi - V_H, \tag{43}$$

где V_H — потенциал двухкомпонентного поля Хиггса, который вновь задается равенством (35) (с $\varphi^*\varphi = \varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_2^*\varphi_2$), а калибровочно-инвариантная часть лагранжиана Янга — Миллса имеет вид

$$\mathscr{L}_{YM}^{\mathrm{inv}} = \frac{1}{g^2} \operatorname{tr} \left([\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu] G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right). \tag{44}$$

Лагранжиан дублета спинорных полей $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\psi_{1,2} = (\psi_{1,2}^\alpha, \alpha = 1, \ldots, 4)$, взаимодействующих с полем Янга — Миллса, совпадает с $\mathscr{L}_{\mathscr{D}}$ (9б), но с $\hat{\mathscr{D}} = \hat{\partial} + \hat{A}$, где $A_\mu \in \mathrm{su}(2)$ [см. (41)]. Варьирование по $G_{\mu\nu}$ воспроизводит стандартную связь между напряженностью $G_{\mu\nu}$ и полем Янга — Миллса A_μ:

$$G_{\mu\nu} = g \frac{\tau_a}{2\mathrm{i}} G_{\mu\nu}^a,$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{45}$$

Калибровочные преобразования второго рода для полей φ, A_μ и $G_{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\varphi \to u\varphi, \quad u = \mathrm{e}^{-\chi}, \quad \chi = g \frac{\tau_a}{2\mathrm{i}} \chi^a; \tag{46а}$$

$$A_\mu \to u\mathscr{D}_\mu u^{-1} = uA_\mu u^{-1} + \partial_\mu \chi; \tag{46б}$$

$$G_{\mu\nu} \to uG_{\mu\nu}u^{-1} \tag{46в}$$

или

$$A_\mu^a \to R_b^a A_\mu^b + \partial_\mu \chi^a, \quad \text{где } u\tau_a u^{-1} = \tau_b R_a^b. \tag{47}$$

Прямым следствием инвариантности лагранжиана (43) относительно локальных калибровочных преобразований является выражение нётерова тока как дивергенции антисимметричного тензора напряженности поля:

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\mu^a} = \partial_\nu G_a^{\mu\nu} \tag{48}$$

(см., например, [69]). Так же как и в абелевой теории, это уравнение играет роль связи. При введении в лагранжиан члена, фиксирующего калибровку, оно получает добавку в правой части [ср. (13)]. Как мы увидим ниже (в разд. 2, п. В), оно выполняется лишь в слабом смысле в локальной формулировке квантовой теории калибровочных полей.

2. ПОСТУЛАТЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Необходимость модифицировать основные принципы квантовой теории поля (см., например, [6]) при попытке включить в рассмотрение хотя бы квантовую электродинамику, обусловлена двумя особенностями калибровочных теорий: 1) индефинитностью пуанкаре-инвариантной метрики и необходимостью использовать «нефизические» поля (и состояния) в любой локальной калибровке; 2) инфракрасным поведением и связанной с ним проблемой определения асимптотических состояний заряженных частиц (см. [27, 34, 40, 41, 44, 75, 76, 78, 80]). Вызванные этими особенностями видоизменения теории оказываются весьма существенными.

А. Пространство векторов состояний в локальной ковариантной калибровке. Индефинитная метрика с гильбертовой мажорантой [5, 7, 47, 48, 50, 61]. Необходимость использования индефинитной метрики в локальной квантовой электродинамике проявляется на простейшем примере теории свободного электромагнитного поля $A_\mu(x)$. Двухчастичная функция поля $A_\mu(x)$, удовлетворяющего уравнению

$$(\xi-1)\,\partial_\mu(\partial A)=\xi\,\square\,A_\mu, \tag{49}$$

соответствующему лагранжиану (9д) при $e=0\,(=j_\mu)$,

$$\langle A_\mu(x)\,A_\nu(y)\rangle_0= \\ =2\pi\int e^{ik(x-y)}\theta(k^0)\,[\eta_{\mu\nu}\delta(k^2)+(1-\xi)\,k_\mu k_\nu\delta'(k^2)]\,d_4k, \tag{50}$$

очевидно, не является положительно определенной ни при одном значении калибровочного параметра ξ. Неположительность скалярного квадрата вектора

$$A(f)|0\rangle=\int A_\mu(x)\,f^\mu(x)\,d^4x|0\rangle$$

при непоперечной пробной функции f^μ является общим свойством свободной теории в любой ковариантной калибровке и обобщается на взаимодействующие поля (как будет показано в последующем кратком обзоре). Более того, обстоятельство, что уравнение Максвелла в вакууме $\partial_\nu F^{\mu\nu}(x)=0$ заменено в нашем случае уравнением

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=\partial^\mu B, \tag{51}$$

не является случайным. Согласно анализу Строки [57], свободное уравнение Максвелла не может быть справедливым в операторном смысле ни в одной локальной или ковариантной калибровке [если теория сформулирована в терминах потенциала $A_\mu(x)$].

Предположим, что сглаженные поля $A(f)$, $\psi(u)$ и $\tilde{\psi}(u)$ реализованы как линейные операторы в векторном пространстве D с невырожденной эрмитовой формой

$$\langle\Phi,\Psi\rangle=\overline{\langle\Psi,\Phi\rangle},\ (\langle\Phi,\alpha_1\Psi_1+\alpha_2\Psi_2\rangle=\alpha_1\langle\Phi,\Psi_1\rangle+\alpha_2\langle\Phi,\Psi_2\rangle) \tag{52}$$

(переводящие D в D). Предположим далее, что при вещественных пробных функциях f и u оператор $A(f)$ симметричен, а операторы

$\psi(u)$ и $\psi^*(u) = \tilde{\psi}(u)\,\beta^{-1}$ сопряжены друг с другом относительно этой формы:

$$\langle \Phi, A(f)\Psi\rangle = \langle A(f)\Phi, \Psi\rangle, \quad \langle \Phi, \psi(u)\Psi\rangle = \langle \psi^*(u)\Phi, \Psi\rangle.$$

(Напомним, что форма $\langle\ ,\ \rangle$ называется невырожденной, если из равенства $\langle \Phi, \Psi\rangle = 0$ при всех Ψ из D следует $\Phi = 0$.) Потребуем далее, чтобы в пространстве D реализовалось псевдоунитарное представление алгебры Ли группы Пуанкаре (инфинитезимальное условие псевдоунитарности относительно заданной формы есть условие антиэрмитовости $\langle \Phi, X\Psi\rangle + \langle X\Phi, \Psi\rangle = 0$ математических генераторов X алгебры Ли).

При изучении топологических свойств теории удобно пользоваться предположением, что форма (52) обладает гильбертовой мажорантой. Другими словами, предположим, что в D определено положительное скалярное произведение $(\ ,\ )$, которому подчинена форма (52):

$$|\langle \Phi, \Psi\rangle|^2 \leqslant c\,(\Phi, \Phi)(\Psi, \Psi), \quad c > 0. \tag{53}$$

Нас будет интересовать не отдельное скалярное произведение $(\ ,\ )$, а лишь класс мажорирующих скалярных произведений, задающих эквивалентные топологии. Два скалярных произведения $(\ ,\ )_1$ и $(\ ,\ )_2$ задают эквивалентные топологии тогда и только тогда, когда они мажорируют друг друга:

$$(\Phi, \Phi)_1 \leqslant a_1 (\Phi, \Phi)_2, \ (\Phi, \Phi)_2 \leqslant a_2 (\Phi, \Phi)_1, \ a_{1,\,2} > 0. \tag{54}$$

Пополнение $\mathcal{H}$ пространства D относительно сильной топологии, задаваемой сходимостью по норме

$$\|\Phi - \Psi\| = (\Phi - \Psi, \Phi - \Psi)^{1/2}, \tag{55}$$

не зависит от частного выбора скалярного произведения внутри данного класса эквивалентности.

Как уже говорилось, в рамках ковариантной локальной формулировки квантовой электродинамики нет положительного скалярного произведения, инвариантного относительно преобразований Пуанкаре. Однако, предполагая существование глобальных псевдоунитарных преобразований $U(a, \underset{\sim}{\Lambda})$, можно потребовать, чтобы преобразованное скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi)_{a, \underset{\sim}{\Lambda}} = (U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\Phi, U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\Psi)$$

задавало ту же самую топологию, что и исходное. Для этой цели необходимо и достаточно, чтобы оператор $U(a, \underset{\sim}{\Lambda})$ был ограничен относительно гильбертовой нормы:

$$\|U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\| \leqslant B < \infty, \tag{56}$$

где $B = B(a, \underset{\sim}{\Lambda})$ — непрерывная функция групповых параметров. Здесь комплексная унимодулярная матрица $\underset{\sim}{\Lambda} \in SL(2, C)$ связана с собственным преобразованием Лоренца Λ соотношением $\Lambda\sigma_\mu\Lambda^* = \sigma_\nu (\Lambda)^\nu_\mu$, $\tilde{\Lambda}^{*-1}\tilde{\sigma}_\mu\tilde{\Lambda}^{-1} = \tilde{\sigma}_\nu (\Lambda)^\nu_\mu$, где $\sigma_k = (-\tilde{\sigma}_k)$; $k = 1, 2, 3$ — матрицы Паули; $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$ — единичная 2×2-матрица. Из (56) и из группового закона [обеспечивающего ограниченность $U^{-1}(a, \tilde{\Lambda})$] следует пуанкаре-инвариантность гильбертовой топологии.

Рассмотрим в качестве примера одночастичное пространство свободных фотонов в калибровке Гупта — Блейлера. Согласно (50) (при $\xi = 1$) векторы состояния в этом пространстве могут быть заданы как функции $\Phi^\mu(p)$ на световом конусе $p^0 = |\mathbf{p}|$. Пуанкаре-инвариантная индефинитная форма имеет вид:

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = \int \overline{\Phi^\mu}(p)\, \eta_{\mu\nu}\Psi^\nu(p)\,(dp)_0, \tag{57}$$

$$(dp)_m \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}}.$$

В качестве положительного скалярного произведения естественно взять

$$(\Phi, \Psi) = \int \overline{\Phi^\mu}(p)\, \delta_{\mu\nu}\Psi^\nu(p)\,(dp)_0. \tag{58}$$

Нетрудно проверить, что в этом случае равенство (56) выполняется, если отождествить B^2 с наибольшим собственным значением положительной матрицы ${}^t\Lambda\Lambda$.

Отметим, что в других калибровках (при $\xi \neq 1$), когда пространство однофотонных состояний может быть реализовано в терминах 8-компонентных вектор-функций на конусе (и как инвариантная форма $\langle\ ,\ \rangle$, так и скалярное произведение $(\ ,\ )$ задаются более сложными формулами), операторы трансляции $U(a)$ также неунитарны относительно положительного скалярного произведения, но условие (56) остается в силе.

Из неравенства (53) вытекает, что при заданных $\langle\ ,\ \rangle$ и $(\ ,\ )$ существует ограниченный эрмитов (относительно положительного скалярного произведения) оператор β, такой, что

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = (\Phi, \beta\Psi). \tag{59}$$

Мы предположим (вместе со Строки и др. [58—61]), что у β также имеется ограниченный обратный оператор. В таком случае за счет переопределения скалярного произведения внутри данного класса эквивалентности можно добиться, что

$$\beta^2 = 1 \tag{60}$$

[при этом неравенство (53) будет справедливо при $c = 1$].

Ковариантность рассматриваемого класса калибровок выражается стандартным законом преобразования базисных полей:

$$A_\nu(x) \to A_\mu(\Lambda x + a)\Lambda^\mu_\nu, \tag{61а}$$

$$\Psi(x) \to S^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda})\,\psi(\Lambda x + a), \tag{61б}$$

где $S(\underset{\sim}{\Lambda})$ — биспинорное представление группы SL (2, C). В реализации γ-матриц, в которой $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ — диагональна $\left(\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, представление $S(\underset{\sim}{\Lambda})$ приводится к виду $S(\underset{\sim}{\Lambda}) = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Lambda} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\Lambda}^{*-1} \end{pmatrix}$.

Б. Неприводимость и цикличность. Составные поля. Понятие электрического заряда [51, 53]. При аксиоматическом изложении квантовой электродинамики мы выписываем явно те же уравнения классической электродинамики, в которых не встречаются произведения полей в одной точке, чей смысл требует специального исследования в квантовом случае из-за ультрафиолетовых расходимостей [18]. Мы будем писать, например, уравнение (13), так как оно линейно относительно входящих в него полей и токов, но не будем пользоваться явным выражением (12) для тока j^μ через заряженные поля ψ и $\tilde{\psi}$. Вместо этого введем несколько более абстрактное понятие составного поля в квантовом случае.

Сначала предположим (в соответствие с поставленной задачей аксиоматического описания локальных ковариантных калибровок), что базисные поля * A_μ, ψ, $\tilde{\psi}$ и B удовлетворяют обычным условиям локальности: поля A_μ и B коммутируют между собой и со спинорными полями при пространственном разделении аргументов, в то время как ψ и $\tilde{\psi}$ локально антикоммутируют между собой. Кроме того, потребуем, чтобы они удовлетворяли следующему условию неприводимости.

С алгеброй полиномов FP от сглаженных базисных полей связана некоторая алгебра $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которая может быть определена как двойной коммутант, $(FP)''$, алгебры FP в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. [Напомним, что коммутант F' некоторой алгебры F операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ есть, по определению, алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, которые коммутируют с F. Можно думать об $\mathcal{F} = (FP)''$ как об алгебре, порожденной ограниченными функциями от диагонализуемых операторов из FP.] Аналогично можно определить алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = FP(\mathcal{O})''$, где $FP(\mathcal{O})$ — алгебра полиномов полей сгла-

* В калибровке, в которой параметр ξ в уравнении (15а) отличен от нуля, поле B является производным от полей A_μ : $B = \frac{1}{\xi}\,\partial A$. Для единства и компактности изложения, однако, его удобно всегда вводить отдельно.

женных пробными функциями с носителем в $\mathcal{O}$. Алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}$ задают сеть *алгебр полей* Доплихера, Хаага и Робертса [17]. Неприводимость алгебры $\mathcal{F}$ (или FP) означает, что любой ограниченный (относительно гильбертовой топологии) оператор, коммутирующий со всеми элементами $\mathcal{F}$, кратен единичному оператору в $\mathcal{H}$.

Покажем, что если алгебра $\mathcal{F}$, порождаемая базисными полями, неприводима, то любой ненулевой вектор Ψ пространства $\mathcal{H}$ цикличен относительно этой алгебры. Действительно, если замыкание линейного многообразия $\mathcal{F}\Psi$ относительно гильбертовой нормы является истинным подпространством пространства $\mathcal{H}$, то оператор проектирования на это подпространство будет коммутировать с алгеброй $\mathcal{F}$ в противоречии с гипотезой неприводимости.

Предположим теперь, что пространство D содержит пуанкаре-инвариантный *вектор вакуума* $|0\rangle$, для которого

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1. \tag{62}$$

(Мы не предполагаем единственность такого вектора.) Согласно доказанному, вектор $|0\rangle$ цикличен относительно алгебры $\mathcal{F}$.

Пусть далее ток $j^\mu(x)$ локален относительно базисных полей. Тогда, согласно известной теореме Борхерса (см. [6, теорема 5.2.7, с. 355]) $j^\mu(x)$ тоже является локальным полем, и, значит, принадлежит *классу Борхерса* базисных полей. Поля, принадлежащие классу Борхерса базисных полей, но не являющиеся линейными комбинациями базисных полей и их производных, называются *составными полями*. (Базисные поля удовлетворяют условию неприводимости и без добавления к ним составных полей, действующих в том же пространстве D.)

Из требований спектральности и лоренц-инвариантности и из закона сохранения тока следует представление Челлена — Лемана

$$w^{\mu\nu}(x-y) = \langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\rangle_0 =$$
$$= \int d_4p e^{ip(x-y)}\theta(p^0)\, p^2 (p\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \int_0^\infty ds \rho(s)\, \delta(s+p^2). \tag{63}$$

Анализ теории возмущений [25] указывает на то, что в случае массивного заряженного поля $\rho(s)$ интегрируема в окрестности $s = 0$. В частности, во втором порядке теории возмущений, в котором

$$\langle j^\mu(x)\, j^\nu(y)\rangle_0 = -e^2 \langle \tilde{\psi}_-(x)\, \gamma^\mu \psi_+(x)\, \tilde{\psi}_+(y)\, \gamma^\nu \psi_-(y)\rangle_0,$$

где $\psi_\pm(x)$ — слагаемые свободного поля Дирака с заданными знаками частоты, удовлетворяющие

$$\psi_+(x)\,|0\rangle = \tilde{\psi}_-(x)\,|0\rangle = 0 = \langle 0|\,\tilde{\psi}_+(y) = \langle 0|\,\psi_-(y),$$

спектральная функция

$$\rho(s) = \frac{\theta(s-4m^2)}{6\pi s}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\left(1+\frac{2m^2}{s}\right)$$

исчезает при $s < 4m^2$.

Определим аппроксимацию электрического заряда

$$Q_R = \int f_R(x)\, j^0(x)\, d^4x, \tag{64а}$$

где f_R — пробная функция, зависящая от параметра R таким образом, что

$$f_R(x) \to \delta(x^0) \text{ при } R \to \infty. \tag{64б}$$

(Существование оператора Q_R следует из принятых нами аксиом, чего нельзя сказать априори относительно его предела $Q = \lim\limits_{R\to\infty} Q_R$.) Для обоснования необходимости такой аппроксимации исследуем поведение среднего по вакууму от Q_R^2, пользуясь представлением (63) (см., например, [51]). Пусть, для определенности,

$$f_R(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{R}}\exp\left(-\frac{r^2}{2R}-\frac{Rt^2}{2}\right) =$$
$$= (2\pi R)^{3/2}\int d_4p\exp\left\{ipx - \frac{R}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2R}p_0^2\right\}, \tag{64в}$$

где $r = |\mathbf{x}|$, $t = x^0$. Заметим прежде всего, что сглаживание по временным компонентам необходимо: замена f_R на $\exp\left(-\frac{r^2}{2R}\right)$ привела бы к расходящемуся выражению для $\langle Q_R^2\rangle_0$. Однако, интегрируя $f_R(x)\, w^{00}(x-y)\, f_R(y)$ по x и y, находим [пользуясь (63), (64) и заменяя переменную интегрирования $\mathbf{p}$ на $R^{-1/2}\mathbf{k}$]:

$$\langle Q_R^2\rangle_0 = \frac{\sqrt{R}}{4\pi}\int_0^\infty ds\int d^3k\left(s+\frac{\mathbf{k}^2}{R}\right)^{-1/2} s\mathbf{k}^2\rho(s)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{k}^2+\frac{s}{R}+\frac{\mathbf{k}^2}{R^2}\right)\right]\xrightarrow[R\to\infty]{}\infty.$$

Допуская существование (самосопряженного) оператора Q (сохраняющегося) электрического заряда в $\mathscr{H}$ (определенного на векторах состояний с конечным зарядом, в том числе и на векторе вакуума, причем $Q\mid 0\rangle = 0$), мы видим, что Q_R не может стремится к Q на области D относительно сильной операторной топологии, так как $\|(Q_R - Q)\mid 0\rangle\|^2 = \|Q_R\mid 0\rangle\|^2 = \langle Q_R^2\rangle_0 \to \infty$. Возникает вопрос, при каких условиях действительно существует оператор Q и в каком смысле он аппроксимируется сглаженными операторами Q_R (64)?

Заметим прежде всего, что для любого оператора φ полиномиальной алгебры FP с носителем в ограниченной области $\mathcal{O}$ пространства-времени предел коммутаторов

$$\lim_{R\to\infty} [Q_R, \varphi] \tag{65}$$

существует. Чтобы убедиться в этом, проще всего предположить, что функции f_R могут быть факторизованы в виде

$$f_R(x) = e_R(\mathbf{x})\, \delta_\varepsilon(x^0), \tag{66а}$$

где e_R и δ_ε — бесконечногладкие неотрицательные функции с компактным носителем, такие, что

$$e_R(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } |\mathbf{x}| \leqslant R; \tag{66б}$$

$$\int dt\delta_\varepsilon(t) = 1, \quad \delta_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \varepsilon = 0\left(\frac{1}{R}\right). \tag{66в}$$

При этих предположениях из постулата локальности следует, что $[Q_R\varphi]$ не зависит от R при достаточно больших R (превышающих максимальное расстояние точек области $\mathcal{O}$ от начала координат). Таким образом, инфинитезимальное преобразование локальных полей (47) (порождаемое некоторым локальным нётеровым током) существует всегда. Это еще не обеспечивает существование (самосопряженного) оператора Q в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, порождающего эти преобразования, Q существует в точности тогда, когда преобразование (47) задает (ненарушенную) симметрию *. (Несуществование оператора Q или соответствующего представления $e^{iQ\alpha}$ глобальных калибровочных преобразований является примером спонтанно нарушенной симметрии.) В следующем разделе мы приведем простой критерий существования (или несуществования) оператора Q.

Мы закончим этот пункт добавлением еще одного требования на область определения полей D.

При анализе классической электродинамики мы видим, что заряженные поля, инвариантные относительно локальных калибровочных преобразований, с необходимостью нелокальны. Мы потребуем существования квантового аналога нелокального составного поля $\psi(x; A)$ (28).

Пусть при достаточно хороших пробных функциях f существует оператор

$$\psi(f; A) = \int f(x)\, \psi(x; A)\, d^4x$$

из D в D, инвариантный относительно локальных калибровочных преобразований и такой, что

$$\lim_{R\to\infty} [Q_R, \psi(f; A)] = -\lim_{R\to\infty} [F^{0\nu}(\partial_\nu f_R), \psi(f; A)] = -e\psi(f; A).$$

* Определения понятий нарушенной и ненарушенной симметрий даны ниже в разд. 3. В случае точной симметрии оператор Q задается равенством (102).

Мы резюмируем здесь некоторые указания из теории возмущения (полученные в [15]), которые говорят в пользу такого предположения.

В представлении взаимодействия квантованное поле $\psi(x;\ A)$ записывается в виде

$$\psi(x;\ A) = Z_\psi \int d_4p \int d^4y : \exp\left\{\frac{-ie}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha\varepsilon(\alpha)\, p^\mu A_\mu (y - \right.$$
$$\left. - \alpha p)\right\} : \psi(y)\, e^{ip(x-y)}, \tag{67}$$

где : : — знак нормального произведения («свободных» полей A_μ); Z_ψ — перенормировочная постоянная, которая вмещает в себя всю зависимость от калибровки (т. е. от параметра ξ). Его перенормированная причинная двухточечная функция может быть записана следующим образом в окрестности массовой поверхности $m^2 + p^2 \approx 0$:

$$S^c(p,\ A) = i \int \langle T\psi(x,\ A)\, \tilde{\psi}(0;\ A)\rangle_0 e^{-ipx}\, d^4x \approx$$
$$\approx \frac{m - i\hat{p}}{m^2 + p^2 - i0} \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi}\, \frac{m^2+p^2}{p^2} \ln \frac{m^2+p^2-i0}{m_0^2}\right), \tag{68}$$

где $S = T\exp\left(i \int \mathcal{L}_I(x)\, d^4x\right) = T\exp\left(-e \int : \tilde{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu : (x)\, d^4x\right)$ —оператор рассеяния, а m_0 определяется точкой перенормировки волновой функции (в [15] выбрано $m_0 = m$; более общая форма (68) имеет преимущество, что в ней можно перейти к конформно-инвариантному пределу $m \to 0$). Представление (68) соответствует сумме диаграмм с многофотонным обменом (с опусканием внутренних электронных петель, которые в рассматриваемом случае электрона с массой, отличной от нуля, дают пренебрежимый вклад в окрестности массовой поверхности — см. [1]). «Физический пропагатор» $S^c(p,\ A)$ обладает свойством

$$\lim_{p^2 \to -m^2} (m + i\hat{p})\, S^c(p,\ A) = 1, \tag{69}$$

которое несправедливо для калибровочно-инвариантного, но лоренц-неинвариантного поля $\psi(x;\ n,\ A)$ (порождающего «когерентные состояния» — ср. [11, 27, 40, 41, 75, 76, 78]) и теряется в пределе $m \to 0$. Это свойство обеспечивает (при $m > 0$) существование асимптотического предела Лемана — Симанзика — Циммермана у поля $\psi(x;\ A)$, являющегося свободным электронным полем массы m (см., например, [6, § 4.1, 4.2]). Более того, в [15] показано (снова в рамках теории возмущения), что физическое электронное поле $\psi(x;\ A)$ и фотонное поле $F_{\mu\nu}$ обладают калибровочно-инвариантными функциями Грина и матрицей рассеяния, свободной от инфракрасных расходимостей.

Не вдаваясь в подробности этого расчета, отметим, что устранение инфракрасных расходимостей достигается за счет введения параметра μ размерности массы в определение пропагатора от потенциалов Герца h_ν. Фотонный пропагатор пишется в виде

$$D^c_{\rho\sigma}(x;\ \xi) = \mathrm{i}\,\langle T A_\rho(x)\,A_\sigma(0)\rangle_0 =$$
$$= \mathrm{i}\,\Box\,\langle T h_\rho(x)\,A_\sigma(0)\rangle_0 = -[\eta_{\rho\sigma}\Box - (1-\xi)\,\partial_\rho\partial_\sigma]\,E^c(\mu x), \tag{70а}$$

где

$$E^c(\mu x) = \int E^c(k;\ \mu)\,e^{ikx} d_4k = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\ln\frac{4}{\beta(\mu x)^2+\mathrm{i}0}; \tag{70б}$$
$$\beta = e^{2\gamma-1}\ (\approx 1{,}178),\quad \gamma = -\Gamma'(1) = 0{,}5772\ \ldots,$$
$$E^c(k;\ \mu) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\varepsilon\frac{1}{(k^2-\mathrm{i}0)^2}\left(\frac{k^2-\mathrm{i}0}{\mu^2}\right)^{\varepsilon}\right] =$$
$$= \lim_{\lambda\downarrow 0}\left[\frac{1}{(k^2+\lambda^2-\mathrm{i}0)^2} + \mathrm{i}\pi^2\ln\frac{e\lambda^2}{\mu^2}\,\delta(k)\right]; \tag{70в}$$
$$-\Box E^c(\mu x) = D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{x^2+\mathrm{i}0} = \int\frac{e^{ikx}}{k^2-\mathrm{i}0}\,d_4k, \tag{70г}$$

причем производные в (70а) переносятся на электронные пропагаторы, с которыми интегрируются $D^c_{\mu\nu}$. Это соответствует работе с эффективным лагранжианом, в котором член взаимодействия $j^\mu A_\mu(x)$ заменен $h_\mu\Box j^\mu$ (или, эквивалентно, $-\frac{1}{2}H^\mu_\nu\,\partial_\mu j_\nu$).

Заметим, что в соответствие с теоремой Блоха — Нордсика [4, 52, 62] в формулах для сечений между когерентными состояниями параметр μ эффективно заменяется разрешением прибора ΔE.

Как уже отмечалось, поле $\psi(x, A)$ не локально: коммутатор $[\psi(x, A), \psi(y, A)]$ не равен нулю при пространственном разделении аргументов и его нельзя представить даже классически в виде функционала, зависящего лишь от значений базисных полей в ограниченной области пространства-времени. Однако мы предположим, что векторы из D, порождаемые действием этих полей на вакуум, могут быть аппроксимированы локальными состояниями. Точнее, мы предположим, что вакуум цикличен относительно алгебры FP_0 полиномов из базисных полей, сглаженных пробными функциями с компактным носителем. Иными словами, мы предположим, что множество

$$D_0 = FP_0\,|\,0\rangle$$

(которое содержит лишь локализованные состояния) плотно в $\mathcal{H}$ относительно гильбертовой топологии.

В. Несправедливость уравнения Максвела div E = j^0 в локальной калибровке. В этом пункте мы проанализируем необходимость введения поля типа B, входящего в уравнение (13) в аксиоматической квантовой электродинамике.

Как уже отмечалось, введение члена $\mathcal{L}_{GF} = \mathcal{L}^{(\xi)}_B + \mathcal{L}_{gh}$, задающего класс ковариантных калибровок, а лагранжиан (9) электромагнитного поля обусловливается желанием работать (в рамках классической электродинамики) со стандартным каноническим формализмом. В аксиоматической квантовой теории взаимодействующих полей вместо канонических перестановочных соотношений используются только два следствия, из них: локальная (анти) коммутативность базисных полей и свойств «сглаженного заряда» порождать глобальные калибровочные преобразования полей:

$$\lim_{R\to\infty}[Q_R,\ \psi(x)] = -e\psi(x), \quad \lim_{R\to\infty}[Q_R,\ \tilde{\psi}(x)] = e\tilde{\psi}(x). \tag{71}$$

Возникает вопрос: если от канонического формализма осталось так мало, то нельзя ли обойтись без введения полей типа $B(x)$, $g_\mu(x)$ и $h_\mu(x)$ и постулировать вместо (13) привычные калибровочно-инвариантные уравнения Максвелла. Мы покажем, что это не так.

Предложение 2.1. В локальной калибровке, в которой $[\mathbf{E}(x),\ \psi(y)] = 0$ при $(x-y)^2 > 0$ $(E^k(x) = F^{0k}(x))$, условие (71) с $e \neq 0$ несовместимо с законом Гаусса

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = j^0(x), \tag{72}$$

связывающего плотность заряда с дивергенцией электрического поля.

Доказательство. Пусть Q_R задано формулой (64), где $f_R(x)$ имеет вид (66). При каждом фиксированном y можно найти достаточно большой радиус $R = R(y)$, такой, что каждое x из носителя f_R, для которого $|\mathbf{x}| \geqslant R$ пространственно подобно y. Пользуясь теоремой Гаусса и предположением (72), находим

$$[Q_R,\ \psi(y)] = \int dx^0\delta_\varepsilon(x^0) \int\limits_{|\mathbf{x}|=R} d\mathbf{s}\,[\mathbf{E}(x),\ \psi(y)], \tag{73}$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент площади на сфере $S^2(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3;\ |\mathbf{x}| = R\}$ (3-вектор $d\mathbf{s}$ направлен по внешней нормали к сфере). В силу предположения локальности (71) коммутатор под знаком интеграла исчезает, что приводит к равенству нулю заряда e.

Равенство (73), которое играет роль связи в явно калибровочно-инвариантной формулировке классической электродинамики, может быть сохранено в локальной квантовой электродинамике (в слабом смысле).

Предположим, что пространство D содержит подпространство D' со следующими свойствами:

а) D' инвариантно относительно действия операторов $U(a,\ \Lambda)$ представления квантовомеханической группы Пуанкаре и содержит вектор вакуума $|0\rangle$, для которого $\langle 0\,|\,0\rangle = 1$;

б) D' переводится в себя под действием калибровочно-инвариантных элементов полиномиальной алгебры FP; в частности:

$$F_{\mu\nu}(f)\,D' \subset D', \quad j_\mu(f)\,D' \subset D'. \tag{74}$$

Более того, если в пространстве D определено поле $\psi(f;\ A)$ (67), то оно тоже оставляет инвариантным подпространство D':

$$\psi(f;\ A)\, D' \subset D'; \tag{75}$$

в) связи, которые выводятся из калибровочно-инвариантного сингулярного лагранжиана, выполняются в смысле средних значений по векторам из D'; точнее,

$$\langle \Psi \mid j^{\mu}(f) + F^{\mu\nu}(\partial_{\nu} f) \mid \Phi \rangle = 0 \text{ для любого } \Phi \in D',\ \Psi \in \mathscr{H}' = \bar{D}', \tag{76}$$

где $\bar{D}'$ $(=\mathscr{H}')$ — замыкание D' относительно гильбертовой топологии;

г) пуанкаре-инвариантная полуторалинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$ неотрицательно определена на $\mathscr{H}'$:

$$\langle \Phi,\ \Phi \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } \Phi \in \mathscr{H}'. \tag{77}$$

Мы покажем, что из перечисленных свойств и из постулатов этого раздела вытекает, что D содержит ненулевые векторы с нулевым скалярным квадратом (77). Для этой цели нам понадобится прежде всего следующее обобщение теоремы Рее и Шлидера.

Предложение 2.2. Предположим, что в теории с индефинитной формой типа (59), где самосопряженный оператор β ограничен и обладает ограниченным обратным, вакуум цикличен относительно полиномиальной алгебры FP базисных локальных полей $\varphi_k(x)$. [В случае квантовой электродинамики набор полей φ_k включает заряженные поля $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, электромагнитный потенциал $A_{\mu}(x)$ и поле $B(x)$.] В таком случае конечные линейные комбинации векторов вида

$$\Phi(f_1,\ \ldots,\ f_j) = \varphi_1(f_1) \ldots \varphi_j(f_j) \mid 0 \rangle,\ \operatorname{supp} f_k \subset \mathcal{O}, \tag{78}$$

где $\mathcal{O}$ — произвольное фиксированное открытое множество в пространстве Минковского, плотны в $\mathscr{H}$.

Схема доказательства. Допустим, что замыкание $\mathscr{H}(\mathcal{O})$ многообразия линейных комбинаций векторов вида (78) не совпадает с $\mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H}$ содержит вектор, скажем, Ψ', ортогональный (относительно заданного положительного скалярного произведения) подпространству $\mathscr{H}(\mathcal{O})$. В силу предположения существования и ограниченности оператора β^{-1} есть вектор $\Psi \in \mathscr{H}$, такой, что $\Psi' = \beta\psi = \beta^*\psi$ и, следовательно, согласно (59),

$$(\Psi',\ \Phi) = \langle \Psi,\ \Phi \rangle = 0 \text{ для всех } \Phi \in \mathscr{H}(\mathcal{O}). \tag{79}$$

В частности, все обобщенные функции

$$F_{\psi} = F_{\psi}^{\varphi_1 \ldots \varphi_n}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \langle \Psi \mid \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n) \mid 0 \rangle \tag{80}$$

исчезают при $x_k \in \mathcal{O}$ $(k = 1,\ \ldots,\ n)$. С другой стороны, функции F_{ψ} являются предельными значениями аналитических функций $F_{\psi}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, голоморфных в трубчатой области $\operatorname{Im} z_n \in V_+$,

$\mathrm{Im}\,(z_n - z_{n-1}) \in V_+, \ldots, \mathrm{Im}\,(z_2 - z_1) \in V_+$, где V_+ — конус будущего: $V_+ = \{y \in \mathbf{R}^4\colon\ y^0 > |\,\mathbf{y}\,|\}$. Локальность полей φ_k позволяет доказать аналитичность каждой функции F_ψ в более широкой области, включающей вещественные, пространственно-подобно разделенные точки. Отсюда следует, что функция (80) тождественно равна нулю, и значит, в силу цикличности вакуума, $\Psi = 0$ (см. детали в [59]).

Следствие. Равенство $\varphi(x)|0\rangle = 0$, где φ — произвольное локальное поле в рассматриваемой теории, влечет за собой операторное равенство $\varphi(x) = 0$.

Действительно, взяв область $\mathcal{O}$ пространственно-подобную точке x, находим, в силу локальной коммутативности, что $\varphi(x)\,\Phi = 0$ для любого Φ вида (78). Пользуясь предложением 2.2, отсюда заключаем, что $\varphi(x) = 0$.

Применим результат следствия к полю

$$\mathfrak{A}^\mu(x) = j^\mu(x) - \partial_\nu F^{\mu\nu}(x). \tag{81}$$

Оператор $\mathfrak{A}^0(f_R)$ обладает нетривиальным перестановочным соотношением с полем $\psi(x)$ при $e \neq 0$ (в силу предложения 2.1 и, значит, вектор

$$\Phi_R = \mathfrak{A}^0(f_R)\,|\,0\rangle \tag{82}$$

не равен нулю, в то время как

$$\langle\Phi_R,\ \Phi_R\rangle = 0. \tag{83}$$

Из существования ненулевого вектора с нулевым скалярным квадратом и из невырожденности формы $\langle\ ,\ \rangle$ следует, что в пространстве $\mathcal{H}$ обязательно имеются векторы с отрицательным $\langle\ ,\ \rangle$ квадратом. Таким образом, индефинитность метрики в пространстве векторов состояний, которая явствует из (50) в случае свободного поля A_μ в ковариантной калибровке, обязательно имеет место и в электродинамике взаимодействующих полей в любой локальной калибровке.

Пусть $\mathcal{H}''$ — подпространство векторов нулевой длины пространства $\mathcal{H}'$. Пространство физических состояний отождествляется с фактор-пространством $\mathcal{H}'/\mathcal{H}''$ (или с его замыканием относительно топологии скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$).

Г. Выводы. Постулаты калибровочных теорий. Изложение в предыдущих пунктах этого раздела носило в какой-то мере индуктивный характер: мы старались обосновать выбор основных требований калибровочной теории, используя наш опыт с квантовой электродинамикой.

Уместно просуммировать результаты этого обсуждения, перечисляя постулаты квантовой электродинамики в локальной ковариантной калибровке. При этом мы будем придерживаться общности, позволяющей включить в рассмотрение неабелевы калибровочные поля и теории со спонтанно нарушенной симметрией.

Основной объект теории — это полиномиальная алгебра FP локальных полей $\varphi_k(f) = \int \varphi_k(x) f(x) d^4x$ и ее представление неограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с индефинитной формой $\langle\ ,\ \rangle$, непрерывной относительно гильбертовой топологии. Базисные поля φ_k включают некоторую систему эрмитовых калибровочных полей $A^a_\mu(x)$, спинорные поля $\psi(x)$ и их сопряженные и скалярные поля, которые мы будем называть полями Хиггса, хотя к ним принадлежат и поля типа $B(x)$, в терминах которых фиксируется класс ковариантных калибровок. Среди полей, порождающих алгебру FP, имеются и составные локальные поля. Сюда входят сохраняющиеся токи $j^\mu_a(x)$ и компоненты тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, а в неабелевом случае также напряженности поля $G^a_{\mu\nu}(x)$ [см. (45)]. Пространство основных функций $J(\mathbf{R}^4)$ содержит бесконечногладкие финитные функции из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$ и содержится в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ быстро убывающих гладких функций.

Предположим, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с невырожденной эрмитовой формой $\langle\ ,\ \rangle$ и операторные обобщенные функции $\varphi_k(f)$ удовлетворяют следующим постулатам.

1. Индефинитная форма $\langle\ ,\ \rangle$ имеет вид (59), где β — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с ограниченным обратным.

2. В $\mathcal{H}$ реализуется представление $U(a, \underset{\sim}{\Lambda})$ универсальной накрывающей $\mathcal{P}_Q = \mathrm{ISL}(2, \mathbf{C})$ группы Пуанкаре («квантовая группа Пуанкаре»), сохраняющее индефинитную форму

$$\langle U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\Phi, U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\Psi\rangle = \langle \Phi, \Psi\rangle \tag{84}$$

для всех $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$. При фиксированном $(a, \underset{\sim}{\Lambda})$ оператор $U(a, \Lambda)$ ограничен относительно гильбертовой топологии. При любом выборе Φ и Ψ функция $\langle \Phi, U(a, \underset{\sim}{\Lambda})\Psi\rangle$ непрерывна относительно параметров группы.

3. В $\mathcal{H}$ существует (возможно, неединственный) пуанкаре-инвариантный вектор вакуума $|0\rangle$, удовлетворяющий

$$\langle 0 | 0\rangle = 1. \tag{85}$$

4. Операторные обобщенные функции $\varphi_k(f)$, где f пробегает некоторое пространство пробных функций *, обладают общей инвариантной областью определения $D \subset \mathcal{H}$, включающей вектор вакуума и удовлетворяющей

$$U(a, \underset{\sim}{\Lambda}) D \subset D. \tag{86}$$

* Опыт с двумерными моделями говорит о том, что в ситуации с конфайнментом, вообще говоря, нельзя пользоваться пробными функциями из пространства Шварца $\mathcal{S}$. В этом случае, по-видимому, можно пользоваться пространством $J(\mathbf{R}^4)$ фурье-образов функций класса Джафе [38]. Заметим, что $\mathcal{D}(\mathbf{R}^4) \subset J(\mathbf{R}^4) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$. В квантовой электродинамике и в моделях типа Салама — Вайнберга можно обойтись пространством быстро убывающих основных функций $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$.

Они ковариантны относительно представления U группы $\mathcal{P}_Q$ в $\mathcal{H}$. В частности, закон преобразования тока j^μ имеет вид

$$U(a,\ \underset{\sim}{\Lambda})\, j^\mu(x)\, U(a,\ \underset{\sim}{\Lambda})^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu\, j^\nu(\Lambda x + a). \tag{87}$$

5. Имеет место обычное условие спектральности:

$$\operatorname{supp} \int \langle \Phi \mid U(a,\ 1)\, \Psi \rangle\, e^{ipa} d^4 a \subset \overline{V}_+ = \{p \in \mathbf{R}^4 : p^0 \geqslant |\, \mathbf{p}\,|\} \tag{88}$$

(где существование преобразования Фурье предположено в смысле теории обобщенных функций *).

6. Имеет место свойство локальности полей с нормальной связью спина со статистикой.

7. Вакуум цикличен относительно полиномиальной алгебры базисных полей с компактными носителями.

Иными словами, линейная оболочка $D_0 = FP_0 \mid 0 \rangle$ векторов вида (88), где φ_k — базисные поля, плотна в $\mathcal{H}$ относительно гильбертовой топологии.

8. Имеется компактная калибровочная группа Ли G, которая действует автоморфизмами алгебры FP и оставляет инвариантным тензор энергии-импульса. Существует набор сохраняющихся токов j^μ_a и соответствующих тензоров напряженности калибровочных полей $G^{\mu\nu}_a$ $(a = 1, \ldots, \dim G)$, преобразующихся по присоединенному представлению группы G. Сглаженные заряды

$$Q_{a_R} = \int j^0_a(x)\, f_R(x)\, d^4 x, \tag{89}$$

где $f_R(x)$ — последовательность пробных функций, порождают инфинитезимальные калибровочные преобразования

$$\frac{\partial}{\partial \chi_a} U(\chi)\, \psi(x) \Big|_{\chi=0} = i g t_a \psi(x), \tag{90}$$

где t_a — эрмитовы матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[t_a,\ t_b] = i f_{abc} t_c \tag{91}$$

алгебры Ли группы G. Другими словами,

$$\lim_{R\to\infty} [Q_{a_R},\ \psi(x)] = -g t_a \psi(x); \tag{92}$$

$$\lim_{R\to\infty} [Q_{a_R},\ j^\mu_b(x)] = i f_{abc} j^\mu_c(x). \tag{93}$$

[В частном случае квантовой электродинамики группа G есть $U(1)$-матрица, t_a сводится к умножению на 1, $f_{abc} = 0$, и мы пользуемся обозначением e и $F^{\mu\nu}$ для заряда g и тензора напряженности $G^{\mu\nu}$.]

* Для этой цели достаточно, чтобы гильбертова норма $\| U(a1) \|$ была бы непрерывной полиномиально ограниченной функцией от a.

9. Пространство $\mathscr{D}$ ($\subset \mathscr{H}$) содержит подпространство $D' \subset D$ (чье гильбертово замыкание обозначается $\mathscr{H}'$), удовлетворяющее условиям а) — г) п. В разд. 2 (причем условия (74), (75) остаются в силе лишь в квантовой электродинамике [см. требование 10]; в случае неабелевой калибровочной теории величины j^μ и $F^{\mu\nu}$ и в уравнении (76) необходимо заменить j_a^μ и $G_a^{\mu\nu}$). В частности, в соответствии с (76)

$$\langle\Psi|\mathfrak{A}_a^\mu(x)|\Phi\rangle = 0 \text{ для всех } \Phi \in D',\ \Psi \in \mathscr{H}' \tag{93а}$$

и

$$\mathfrak{A}_a^\mu(x) = j_a^\mu - \partial_\nu G_a^{\mu\nu}(x). \tag{93б}$$

(Как отмечалось в конце разд. 1, это требование является отражением локальной калибровочной инвариантности теории.)

10. В случае квантовой электродинамики [или более общо, в случае если G содержит центральную подгруппу $U(1)$] тензор Максвелла удовлетворяет линейному уравнению [«тождеству Бианки», являющемуся необходимым условием представимости в виде (10)]:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \ \ [\text{или } d(F_{\mu\nu}\, dx^\mu \Lambda\, dx^\nu) = 0].$$

В ковариантной калибровке, в которой имеют место уравнения 13), (14), подпространство D' задается линейным условием

$$\mathfrak{A}_\mu^{(-)}(x)\,\Phi = 0, \tag{94}$$

где $\mathfrak{A}_\mu^{(-)}$ — отрицательно частотная часть (обобщенного) свободного поля $\mathfrak{A}_\mu(x)$. Кроме того, существует нелокальное, пуанкаре-ковариантное поле $\psi(x, A)$, оставляющее D' инвариантным см. (75)] и удовлетворяющее

$$[\mathfrak{A}^\mu(x),\ \psi(y, A)] = [j^\mu(x) - \partial_\nu F^{\mu\nu}(x),\ \psi(y, A)] = 0; \tag{95}$$

$$\lim_{R\to\infty}[Q_R,\ \psi(x, A)] = -e\psi(x, A). \tag{96}$$

Сформулированные постулаты позволяют вывести обычные свойства функций Уайтмана (см. [6]), за исключением положительной определенности и асимптотического разбиения на пучки. Обратно, по набору функций Уайтмана с этими свойствами, для которых порядок обобщенной функции по переменным $x_1, \ldots, x_j$

$$\int w_n(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, g(x_{j+1}, \ldots, x_n)\, d^4x_{j+1} \ldots d^4x_n$$

не зависит от n, можно восстановить гильбертово пространство $\mathscr{H}$ с ограниченной индефинитной формой, псевдоунитарное представление U группы Пуанкаре $\mathscr{P}_Q$ и операторы поля так, чтобы выполнялись требования 1)—10) за возможным исключением ограниченности операторов β^{-1} и $U(a, \Lambda)$ (см. [50]).

Постулаты 5), 8) и 9) обеспечивают существование нетривиального (замкнутого) подпространства $\mathscr{H}''$ пространства $\mathscr{H}'$, в котором пуанкаре-инвариантная форма $\langle \, , \, \rangle$ исчезает тождественно. Эта форма порождает положительное скалярное произведение на фактор-пространстве $\mathscr{H}'/\mathscr{H}''$.

Последнее наше требование, не накладывая никаких новых ограничений на структуру теории, задает ее физическую интерпретацию.

11. *Пространство физических состояний* $\mathscr{H}_{\text{PHYS}}$ *есть пополнение по норме* $\| \Phi \| = \sqrt{\langle \Phi, \Phi \rangle}$ *фактор-пространства* $\mathscr{H}'/\mathscr{H}''$. *Физические операции* — это такие операторы в $\mathscr{H}$, которые вместе со своими сопряженными относительно индефинитной формы $\langle \, , \, \rangle$ оставляют $\mathscr{H}'$ (или D') инвариантным. (Тогда, как следствие, они также оставляют инвариантным подпространство $\mathscr{H}''$ и, следовательно, порождают операторы на фактор-пространстве $\mathscr{H}_{\text{PHYS}}$.) Самосопряженные (относительно $\langle \, , \, \rangle$) физические операции, инвариантные относительно глобальных калибровочных преобразований, называются *наблюдаемыми*. Вероятности перехода и средние значения наблюдаемых определяются в терминах пуанкаре-инвариантного скалярного произведения в $\mathscr{H}_{\text{PHYS}}$.

Заканчивая данный раздел, уместно прокомментировать распространенное утверждение о спонтанном нарушении лоренцевой инвариантности в секторах с ненулевым зарядом в квантовой электродинамике * [9, 28, 29, 31, 55].

Противоречие между этим утверждением и нашим постулатом 2) снимается, если удастся (в рамках изложенного здесь подхода) построить модель с более узким лоренц-неинвариантным пространством заряженных состояний. Мы поясним эту возможность на языке теории рассеяния.

В рамках теории возмущения ** в рассматриваемой здесь работе [15] построено гильбертово пространство физических асимптотических состояний $\mathscr{H}^{ex}$ и оператор рассеяния $S(\mu)$, где μ — параметр (размерности массы), введенный равенством (70), причем: 1) в $\mathscr{H}^{ex}$ реализуется унитарное представление группы Пуанкаре, коммутирующее с оператором заряда и оставляющее $S(\mu)$ инвариантным; 2) сечения процессов рассеяния заряженных частиц с участием конечного числа фотонов конечны и зависят от μ; 3) сумма интегралов этих сечений с возрастающим числом мягких фотонов (с суммарной энергией, не превышающей заданное разрешение ΔE) не зависит от μ (но зависит от ΔE в соответствии с теоремой Блоха — Нордсика). Теория Фрелиха и др. [28, 29] и Бухгольца [9] соответствовала бы на этом языке некоторому пространству когерентных асимптотических состояний $\mathscr{H}^{ex}_{\Delta E} \subset \mathscr{H}^{ex}$ (в котором не было бы состояний, скажем, с одним электроном и с конечным числом фото-

* Не вдаваясь в детальное обсуждение ргументации этих работ, заметим, что критика Гупта [32] равенства $\partial_0 \partial A = \partial_0 \partial (A^{\text{in}})$ относится к представлению взаимодействия и, по-видимому, не применима к уравнению (2.14) работы [28].

** Заметим, что в конструктивной квантовой теории поля асимптотическая полнота не доказана даже для двумерных моделей.

нов) и оператору S, таким, что упомянутые выше суммы интегралов сечений воспроизводятся как квадраты модуля матричных элементов S-оператора между подходящими когерентными состояниями. В зарядовом секторе пространства $\mathscr{H}^{ex}_{\Delta E}$ лоренц-инвариантность была бы нарушена по построению.

Однако мы не исключаем возможности, что в подпространстве с фиксированным зарядом физического гильбертова пространства алгебра локальных наблюдаемых приводима.

3. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

А. Инфинитезимальная характеристика спонтанно нарушенной симметрии. Обобщенная теорема Голдстоуна. Чтобы определить понятие «спонтанного нарушения», необходимо разграничивать алгебраические симметрии от симметрий, задаваемых унитарными операторами в пространстве векторов состояний β.

Под *алгебраической симметрией* мы будем подразумевать прежде всего автоморфизм * $\varphi \to \tau(\varphi)$ полиномиальной алгебры FP [или соответствующей алгебры ограниченных операторов $\mathscr{F} = (FP)''$]. Если поля, порождающие алгебру FP, связаны некоторой системой уравнений, то мы будем считать, что симметрии сохраняют эти уравнения. В частности, в случае калибровочной теории, постулаты которой сформулированы в предыдущем разделе, мы предположим, что симметрии τ оставляют инвариантными слабые уравнения (93) и закон сохранения токов. Симметрия τ называется *точной*, если существует псевдоунитарный оператор U (или более общо, оператор U, удовлетворяющий $|\langle U\Phi, U\Psi\rangle| = |\langle\Phi, \Psi\rangle|$), такой, что

$$\tau(\varphi) = U\varphi U^{-1} \text{ и } U|0\rangle = |0\rangle. \tag{97}$$

В противном случае симметрия называется *спонтанно нарушенной*. Однопараметрическая группа $\tau_\alpha(\varphi)$ алгебраических симметрий [с аддитивным параметром α, удовлетворяющим $\tau_0(\varphi) = \varphi$] называется *калибровочной*, если:

1) $\tau_\alpha[FP(\mathcal{O})] = FP(\mathcal{O})$;

2) $\tau_\alpha(\varphi)^* = \tau_\alpha(\varphi^*)$ (где звездочка означает сопряжение относительно индефинитного скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$);

3) существует сохраняющийся ток $j^\mu(x)$ и кососимметрическое (локальное) тензорное поле $F^{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющие (76) и такие,

* Напомним, что автоморфизм τ, по определению, сохраняет алгебраические операции:

$$\tau(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\tau(\varphi_1) + \lambda_2\tau(\varphi_2),\ \tau(\varphi_1\varphi_2) = \tau(\varphi_1)\,\tau(\varphi_2),\ (\lambda_k \in \mathbb{C}).$$

Заметим, что дискретные преобразования симметрии, включающие отражение времени, задаются антиавтоморфизмами рассматриваемой алгебры [для которых $\tau(\lambda\varphi) = \bar{\lambda}\tau(\varphi)$, $\tau(\varphi_1\varphi_2) = \tau(\varphi_2)\,\tau(\varphi_1)$]. Непрерывные (связные) группы симметрий, с которыми будем иметь дело в этом разделе, задаются непрерывными группами автоморфизмов.

что сглаженный заряд Q_R (64), (66) является инфинитезимальным генератором группы τ_α:

$$i \frac{d}{d\alpha} \tau_\alpha (\varphi) = \lim_{R\to\infty} [Q_R, \ \tau_\alpha (\varphi)]. \tag{98}$$

(Мы пользуемся обозначениями абелевой калибровочной теории, однако настоящие обсуждения годятся и для неабелевой теории. В общем случае можно думать, что j^μ и $F^{\mu\nu}$ являются краткими обозначениями для j^μ_a и $G^{\mu\nu}_a$ при некотором a.)

Предложение 3.1. Для спонтанного нарушения калибровочной симметрии с генератором Q_R необходимо и достаточно, чтобы существовал сглаженный полином от полей с компактным носителем $\varphi \in FP_0$, такой, что

$$c \equiv \lim_{R\to\infty} \langle [Q_R, \ \varphi] \rangle_0 \neq 0. \tag{99}$$

Замечание. Существование предела в левой части (99) было доказано ранее [см. (65)].

Доказательство: *Достаточность* условия (99) очевидна: если бы симметрия была точной, то в силу (97) вакуумное среднее

$$\langle \tau_\alpha (\varphi) \rangle_0 = \langle U_\alpha \varphi U_\alpha^{-1} \rangle_0 = \langle \varphi \rangle_0 \tag{100}$$

не зависело бы от α, так что согласно (98) предел в левой части (99) равнялся бы нулю.

Необходимость условия (99) будем доказывать от противного. Пусть

$$\lim_{R\to\infty} \langle [Q_R, \ \varphi] \rangle_0 = 0 \ \text{при всех} \ \varphi \in FP_0. \tag{101}$$

Тогда существует симметрический (относительно формы $\langle \ , \ \rangle$) оператор заряда Q и псевдоунитарный оператор U_α, определяемые равенствами

$$Q\varphi |0\rangle = \lim_{R\to\infty} [Q_R, \ \varphi] \, |0\rangle, \tag{102}$$

$$U_\alpha \varphi |0\rangle = \tau_\alpha (\varphi) |0\rangle \quad (\varphi \in FP_0). \tag{103}$$

Покажем прежде всего, что это определение корректно, т. е. что из $\varphi_1 |0\rangle = \varphi_2 |0\rangle$ следует $Q_R \varphi_1 |0\rangle = Q_R \varphi_2 |0\rangle$ и $U_\alpha \varphi_1 |0\rangle = U_\alpha \varphi_2 |0\rangle$. Действительно, для любого φ из FP_0

$$\langle \varphi Q (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_0 = \lim_{R\to\infty} \langle [Q_R, \ \varphi (\varphi_1 - \varphi_2)] - [Q_R, \ \varphi] (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_0 = 0$$

и корректность определения (102) следует из требования цикличности 7. Однако отсюда и из (98) вытекает, что

$$\frac{d}{d\alpha} \langle \varphi U_\alpha (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_0 = 0$$

и, следовательно, $U_\alpha (\varphi_1 - \varphi_2) \, | \, 0 \rangle = (\varphi_1 - \varphi_2) \, | \, 0 \rangle = 0$.

Псевдоунитарность оператора U_α вытекает из эквивалентности (101) и (100) и из цепочки равенств

$$\langle\varphi_1^* U_\alpha^* U_\alpha \varphi_2\rangle = \langle\tau_\alpha(\varphi_1)^* \tau_\alpha(\varphi_2)\rangle_0 = \langle\tau_\alpha(\varphi_1^*)\tau_\alpha(\varphi_2)\rangle_0 = \\ = \langle\tau_\alpha(\varphi_1^*\varphi_2)\rangle_0 = \langle\varphi_1^*\varphi_2\rangle_0.$$

Условие симметричности для оператора Q,

$$\langle\Phi_1, Q\Phi_2\rangle = \langle Q\Phi_1, \Phi_2\rangle \text{ для } \Phi_k = \varphi_k \mid 0\rangle,\ k = 1,\ 2,$$

получается отсюда дифференцированием по α. Таким образом, отрицание условия (99) приводит к точной калибровочной симметрии, т. е. это условие действительно необходимо для ее спонтанного нарушения.

При анализе спонтанного нарушения симметрии в локальной калибровочной теории поля с индефинитной метрикой (т. е. в теории, в которой выполняются постулаты 1) — 10) п. Г, разд. 2) центральную роль играет следующее обобщение теоремы Голдстоуна (см. [49]).

Предложение 3.2. Пусть в локальной квантовой теории поля существует φ из FP_0, для которого выполняется условие (99) спонтанного нарушения непрерывной симметрии. Тогда преобразование Фурье матричного элемента $\langle[j^0(x), \varphi]\rangle_0$ содержит особенность типа $\delta(p^2)$.

Замечание. Мы предполагаем сохранение тока j^μ, через нулевую компоненту которого определяется регуляризованный заряд Q_R (64), и допускаем индефинитность пуанкаре-инвариантной метрики в пространстве векторов состояний, однако не требуем выполнения слабого уравнения Максвелла (76), характерного для локальной калибровочной теории.

Схема доказательства. При сделанных предположениях справедливо представление Йоста — Лемана — Дайсона (см., например, [70, 71, 74]):

$$\langle[j^0(x),\ \varphi]\rangle_0 = \int_0^\infty dm^2 \int d^3y\,[\rho_1(m^2,\ \mathbf{y})\,D_m(x^0,\ \mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ + \rho_2(m^2,\ \mathbf{y})\,\partial_0 D_m(x^0,\ \mathbf{x}-\mathbf{y})], \tag{104}$$

где D_m — перестановочная функция для свободного скалярного поля массы m,

$$D_m(x) = 2\pi i \int \varepsilon(p^0)\,\delta(m^2 + p^2)\,e^{ipx} d_4p, \tag{105}$$

а $\rho_k(m^2, \mathbf{y})$ $(k = 1, 2)$ являются обобщенными функциями с компактным носителем по 3-вектору $\mathbf{y}$. Следуя Свиека [64], можно разбить каждую такую финитную обобщенную функцию на сумму

$$\rho_k(m^2,\ \mathbf{y}) = \rho_k(m^2)\,\delta(\mathbf{y}) + \nabla\sigma_k(m^2,\ \mathbf{y}), \tag{106a}$$

где σ_k — тоже финитная вектор-функция и

$$\rho_k(m^2) = \int \rho_k(m^2, \mathbf{y})\, d^3\mathbf{y}. \tag{106б}$$

Покажем, что

$$\rho_1(m^2) = 0, \ \rho_2(m^2) = c\delta(m^2), \tag{107}$$

где c ($\neq 0$) — константа (99).

Прежде всего освободимся от членов $\nabla\sigma_k$, умножая обе стороны (104) на $e_R(\mathbf{x})$ [см. (66б)] и интегрируя по $\mathbf{x}$; повторное интегрирование по частям (по $\mathbf{y}$ и по $\mathbf{x}$) дает:

$$\int e_R(\mathbf{x}) \langle [j^0(x), \ \varphi]\rangle_0\, d^3x =$$

$$= \int_0^\infty dm^2 \int d^3x \Big\{ [\rho_1(m^2) D_m(x) + \rho_2(m^2)\partial_0 D_m(x)]\, e_R(\mathbf{x}) -$$

$$- \int d_3y\, [\sigma_1(m^2, \mathbf{y}) D_m(x^0, \ \mathbf{x}-\mathbf{y}) +$$

$$+ \sigma_2(m^2, \mathbf{y})\, \partial_0 D_m(x^0, \ \mathbf{x}-\mathbf{y})]\, \nabla e_R(\mathbf{x}) \Big\} \equiv F_R(x^0).$$

При достаточно большом R градиент $\nabla e_R(\mathbf{x})$ исчезает на носителе интеграла по $\mathbf{y}$, так что

$$F(t) = \lim_{R\to\infty} F_R(t) = \int_0^\infty dm^2 \left[\rho_1(m^2) \frac{\sin(mt)}{m} + \rho_2(m^2)\cos(mt) \right]. \tag{108}$$

С другой стороны, закон сохранения тока гарантирует, что $\mathbf{F}(t)$ не зависит от t. Это возможно лишь при ρ_1 и ρ_2, заданных равенством (107), что и требовалось доказать.

Следствие. Если пуанкаре-инвариантная метрика $\langle\ ,\ \rangle$ положительна и пространство физических состояний совпадает с полным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, то из доказанного предложения следует стандартная теорема Голдстоуна, согласно которой в теории со спонтанно нарушенной непрерывной симметрией существует (физическая) частица нулевой массы.

В следующем пункте мы исследуем, как отражается особенность типа $\delta(p^2)$, существование которой устанавливается обобщенной теоремой Голдстоуна, на физический спектр масс в калибровочной теории.

Б. Явление Хиггса. Фотон как голдстоуновский бозон. *Предложение 3.3.* Пусть в предположениях предложения 3.2 ток j^μ удовлетворяет постулату 9) локальной калибровочной инвариантности [включающему слабую форму (76) уравнения Максвелла]. Тогда особенность $\delta(p^2)$, чье существование доказывается предыдущим предложением, не дает вклада в матричные элементы между векторами из D' и тем самым не соответствует физической частице с массой, равной нулю.

Доказательство. Поле $\mathfrak{A}^{\mu}(x)$ (81) обладает всеми свойствами сохраняющегося тока. Более того, в силу предложения 2.1 $\mathfrak{A}^0(f_R)$ обладает теми же свойствами коммутации (при $R \to \infty$) с элементами алгебры FP_0, что и Q_R. Таким образом, к нему можно применить предложение 3.2, из которого следует существование вектора Ψ из D_0, такого, что фурье-образ матричного элемента $\langle 0 \mid \mathfrak{A}^0(x) \mid \Psi \rangle$ обладает особенностью типа $\delta(p^2)$. Векторы Ψ с этим свойством, по определению, содержат вклад от состояния с безмассовой (голдстоуновской) частицей. Если допустить, что среди них имеется вектор из D' (или $\mathscr{H}'$), мы придем к противоречию с предположением 9), что матричные элементы $\mathfrak{A}^{\mu}$ между физическими состояниями равны нулю.

До сих пор мы изучали спонтанное нарушение глобальной калибровочной инвариантности [хотя в предложении 3.3 предполагали справедливость уравнения (76), отражающего локальную калибровочную инвариантность]. Однако спонтанное нарушение локальной калибровочной инвариантности есть черта стандартного формализма квантовой теории калибровочных полей (хотя это редко отмечается). Мы приведем здесь простой критерий такого нарушения [23, 37, 58] и исследуем его эффект на спектр масс физических частиц.

Предложение 3.4. Если в квантовой теории заряженного поля $\varphi(x)$ двухточечная функция $\langle \varphi(x)\varphi^*(y) \rangle_0$ отлична от нуля, то локальная абелева калибровочная симметрия $\varphi(x) \to e^{ie\lambda(x)}\varphi(x)$ спонтанно нарушена.

Доказательство. Если бы существовал (псевдо)унитарный оператор $U(\lambda)$, такой, что

$$U(\lambda)\,\varphi(x)\,U(\lambda)^{-1} = e^{ie\lambda(x)}\varphi(X), \qquad U(\lambda) \mid 0 \rangle \langle 0 \mid U^{-1}(\lambda) = \\ = \mid 0 \rangle \langle 0 \mid,$$

то все вакуумные средние от полей φ должны были быть инвариантными относительно калибровочных преобразований второго рода; в частности, мы имели бы

$$\langle \varphi(x)\,\varphi^*(y) \rangle_0 = \langle \varphi(x)\,\varphi^*(y) \rangle_0 \exp\{ie[\lambda(x) - \lambda(y)]\}.$$

В силу произвольности $\lambda(x)$ это возможно лишь при

$$\langle \varphi(x)\,\varphi^*(y) \rangle_0 = c\delta(x-y).$$

Условие спектральности приводит к $c = 0$, что противоречит предположению предложения.

Таким образом, квантовая электродинамика является примером спонтанно нарушенной локальной калибровочной симметрии. В этом случае справедливо следующее обобщение предложения 4.1.

Предложение 3.5. Пусть $J^\mu(x;\ \lambda(x))$ — трансляционно-неинвариантный нётеров ток [задаваемый выражением типа (20)], порождающий локальные калибровочные преобразования. Если двухточечная функция $\langle \varphi(x)\,\varphi^*(y)\rangle_0 \neq 0$ и $f(x, y)$ — финитная (ненулевая) основная функция, то фурье-образ матричного элемента

$$\langle [J^\mu(x;\ \lambda(x)),\ \int\int \varphi(y)\,\varphi^*(z)\,f(y,\ z)\,d^4y\ d^4z]\rangle_0 \tag{109}$$

имеет сингулярность типа $\delta^{(k)}(p^2)$ при некотором $k = 0, 1, \ldots$ (см. [22, 58]).

Только член, содержащий особенность типа $\delta(p^2)$, может в принципе давать вклад при вычислении матричных элементов между векторами из подпространства $D \subset D$ [определенного условиями а) — г) разд. 2] и тем самым, между векторами из физического гильбертого пространства $\mathscr{H}_{\mathrm{PHYS}}$ [определенного требованием 11) разд. 2, п. Г]. Оказывается, что наличие особенности типа $\delta(p^2)$ в $\mathscr{H}_{\mathrm{PHYS}}$ (т. е. существование физической голдстоуновской частицы) контролируется поведением теории при глобальных калибровочных преобразованиях. Справедлива следующая теорема Свиека [63].

Предложение 3.6. Пусть в абелевой калибровочной теории удовлетворяются постулаты разд. 2, п. Г и условие (101) (обеспечивающее существование заряда Q). Пусть далее существуют (обобщенные) физические асимптотические состояния $|\,p\rangle$ $(= |\,p;\ m,\ e\rangle$ с импульсом p, массой m и зарядом $e \neq 0$, нормированные условием

$$\langle p|q\rangle = (2\pi)^3\,(p^0 + q^0)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad p^{(0)} = \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2},\quad q^0 = \sqrt{m^2+\mathbf{q}^2}. \tag{110}$$

Тогда оператор квадрата массы обладает непрерывным спектром с нижней границей m^2.

Схема доказательства. Из пуанкаре-ковариантности теории следует, что матричный элемент от напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ между состояниями $|\,p\rangle$ и $|\,q\rangle$ имеет вид

$$\langle p|F_{\mu\nu}(x)|q\rangle = 2i\,(q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu)\,\rho(t)\,e^{i(q-p)x}, \tag{111а}$$

где

$$t = -(p-q)^2 = 2\,(pq + m^2). \tag{111б}$$

Отсюда, пользуясь слабой формой уравнения Максвелла (76), находим

$$\langle p|j^\mu(x)|q\rangle = (p^\mu + q^\mu)\,t\rho(t)\,e^{i(q-p)x}. \tag{112}$$

Предположим, что $|\,p\rangle$ и $|\,q\rangle$ — состояния с зарядом e, вместе с нормировочным условием (110) дают

$$\langle p\,|\,Q\,|\,q\rangle = (p^0 + q^0)\,(2\pi)^3\delta\,(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,t\rho\,(t),$$

т. е.

$$\lim_{t\to 0} t\rho(t) = e \neq 0. \tag{113}$$

Таким образом, «формфактор» $\rho(t)$ ведет себя как $1/t$ при $t \to 0$. Однако анализ работы [10, см. § 2] показывает, что если бы существовала щель между одночастичным гиперболоидом $-p^2 = m^2$ и началом непрерывного спектра в однозарядовом секторе, то функция $\rho(t)$ была бы гладкой при $t = 0$. Таким образом, массовой щели в однозарядовом секторе действительно не существует.

Замечание. Полученный результат остается в силе в пространстве-времени любой размерности не ниже трех. В двумерном случае он несправедлив, так как тогда имеется еще инвариантный кососимметрический тензор $\varepsilon_{\mu\nu}$, который может давать вклад в правой части (111а). Отметим также существенную роль, которую играет уравнение Максвелла (76) для справедливости полученного результата. Если (76) нарушается, то заключение предложения 3.6 тоже не имеет места. Действительно, если добавить к лагранжиану спинорной электродинамики член типа

$$-\frac{1}{2} m^2 (A_\mu - \partial_\mu \chi)(A^\mu - \partial^\mu \chi),$$

где $\chi(x)$ — скалярное калибровочное поле, которое преобразуется как $\chi(x) \to \chi(x) + \lambda(x)$ при преобразованиях (97), то «фотон» приобретает массу в физическом пространстве. Однако в этом случае уравнение (76) заменится

$$\langle \Psi | j^\mu(x) - \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) - m^2 (A^\mu - \partial^\mu \chi) | \Phi \rangle = 0$$

при $\Psi \in \mathscr{H}'$, $\Phi \in D'$, т. е. ток не будет дивергенцией антисимметричного тензора даже в смысле средних по физическим состояниям.

Результаты предложений 3.3—3.6 могут быть резюмированы следующим образом. В пространстве с индефинитной метрикой D $(\subset \mathscr{H})$ в локальной абелевой калибровочной теории всегда имеется сингулярность типа $\delta^{(k)}(p^2)$, обусловленная спонтанно нарушенной локальной калибровочной инвариантностью. Если при этом соответствующая глобальная калибровочная симметрия не нарушена, то имеется физическая частица нулевой массы. Если же глобальная калибровочная симметрия спонтанно нарушена, то как в абелевой, так и в неабелевой калибровочной теории сингулярность типа $\delta(p^2)$ проявляется лишь при вычислении матричных элементов между состояниями из нефизической части гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Эти результаты весьма примечательны и могут рассматриваться как веский качественный аргумент в пользу калибровочных теорий. Действительно, единственный бозон нулевой массы, наблюдаемый в природе,— фотон, может рассматриваться как голдстоуновский бозон, соответствующий спонтанно нарушенной локальной калибровочной инвариантности в квантовой электродинамике при точной глобальной $U(1)$-симметрии (ответственной за сохранение электрического заряда). (Этот факт был отмечен Феррари и Пикассо еще в 1977 г. [23]; см. также более общее рассмотрение в работе [37].) Напомним, что стандартная теорема Голдстоуна, справедливая в локальной квантовой теории поля в пространстве с положительной метрикой, предсказывает существование скалярной безмассовой частицы, сопровождающей спонтанное нарушение симметрии, а таких частиц в природе не наблюдается.

B. Калибровочно-инвариантные составные поля, соответствующие физическим частицам в модели Салама — Вайнберга. Принято считать, что теория электрослабых взаимодействий дает пример спонтанного нарушения глобальной калибровочной симметрии. На самом деле такая интерпретация вызывает серьезные возражения [12, 18, 30, 43]. Имеется более привлекательная (хотя и менее разработанная и менее популярная) точка зрения, согласно которой глобальная симметрия остается точной и в то же время остаются в силе физические результаты теории Салама — Вайнберга, такие, как спонтанное порождение массы у векторных бозонов слабого взаимодействия. Это достигается за счет того, что частицы ассоциируются не с исходными базисными полями теории, а с подходящими калибровочно-инвариантными составными полями.

Для изложения этой точки зрения нам понадобится перечень квантовых чисел базисных полей в модели Салама — Вайнберга (см., например, гл. 8 работы [56]).

Электромагнитный потенциал A_μ и поле нейтрального векторного мезона Z_μ задаются линейными комбинациями

$$A_\mu = \cos\theta B_\mu + \sin\theta W^0_\mu, \quad Z_\mu = -\sin\theta B_\mu + \cos\theta W^0_\mu, \qquad (114)$$

где $\theta\ (=\theta_W)$ — угол слабых взаимодействий («угол Вайнберга»).

Пусть классический потенциал Хиггса V_H задан формулой (35). Тогда мы предположим, что вакуумное среднее от калибровочно-инвариантного составного поля * $\varphi^*\varphi$ равно значению (36), в котором V_H достигает минимума:

$$\langle\varphi^*(x)\,\varphi(x)\rangle_0 = \frac{1}{2\lambda^2}\,m_H^2. \qquad (115)$$

Потребуем, чтобы физические частицы соответствовали следующим калибровочно-инвариантным составным полям:

левый лептон ($l = e^-$ или μ^-):

$$C_l\,(\varphi^*\psi_{lL})\,(x,\ A), \qquad (116\text{а})$$

зависимость от A_μ произведения $\varphi^*\psi_{lL}$ определится (классически) по аналогии с (28);

l-нейтрино ν_l:

$$C_\nu \det[\varphi(x) \otimes \psi_{lL}(x)] = C_\nu\,[\varphi_1(x)\,\psi_{l2}(x) - \varphi_2(x)\,\psi_{l1}]_L; \qquad (116\text{б})$$

* Здесь и в дальнейшем мы не пытаемся придать точный смысл произведению операторных обобщенных функций в одной точке, а рассматриваем их как новые поля (в классе Борхерса полей $\psi^{(*)}$, $\varphi^{(*)}$, W_μ и B_μ), чьи трансформационные свойства подсказываются свойствами соответствующих классических полей.

Таблица квантовых чисел базисных полей в модели Салама — Вайнберга

Поле	t	t_3	y	$Q=t_3+\frac{y}{2}$	Спин	Определяющие соотношения
$\psi_{eL}=\begin{pmatrix}\psi_{e1}\\ \psi_{e2}\end{pmatrix}$, $\psi_{\mu L}=\begin{pmatrix}\psi_{\mu 1}\\ \psi_{\mu 2}\end{pmatrix}$	1/2	$\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$	1/2	$\psi_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_L$
ψ_{eR}, $\psi_{\mu R}$	0	0	-2	-1	1/2	$\psi_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R$
$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\text{Поле}\\ \text{Хиггса}\end{pmatrix}$	1/2	$\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$	0	—
$\mathbf{W}_\mu=\begin{pmatrix}W_\mu^+\\ W_\mu^0\\ W_\mu^-\end{pmatrix}$, $\mathbf{G}_{\mu\nu}$	1	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$	1	$G^i_{\mu\nu}=\partial_\mu W^i_\nu-\partial_\nu W^i_\mu+g\varepsilon_{ijk}W^j_\mu W^k_\nu$
B_μ, $B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$	0	0	0	0	1	—

нейтральный скалярный мезон Хиггса:

$$C_H\varphi^*(x)\,\varphi(x); \tag{117}$$

$W_\pm$-мезоны:

$$W_+=C_W(\varphi^*\boldsymbol{\tau}\varepsilon\varphi^*\mathbf{G}_{\mu\nu})(x,\ A),\quad W_-=W_+^*; \tag{118а}$$

Z-мезон:

$$C_Z(\cos\theta\varphi^*\boldsymbol{\tau}\varphi\mathbf{G}_{\mu\nu}+\sin\theta\varphi^*\varphi B_{\mu\nu}); \tag{118б}$$

γ-квант:

$$C_\gamma(-\sin\theta\varphi^*\boldsymbol{\tau}\varphi\mathbf{G}_{\mu\nu}+\cos\theta\varphi^*\varphi B_{\mu\nu}). \tag{118в}$$

Заметим, что эти выражения переходят в хорошо известные формулы [см. работу [56]), если заменить всюду φ

$$\varphi_{\mathrm{cl}}(\alpha)=\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}m_H e^{i\alpha}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{119}$$

а в (118) заменить еще φ^* комплексно-сопряженной величиной и положить

$$C_l=\frac{\lambda\sqrt{2}}{m_H}e^{i\alpha},\quad C_\nu=-\frac{\lambda\sqrt{2}}{m_H}e^{-i\alpha},$$

$$C_W=\frac{\lambda^2\sqrt{2}}{m_H^2}e^{2i\lambda},\quad C_\gamma=-C_Z=\frac{2\lambda^2}{m_H^2}.$$

Небольшая модификация стандартного описания механизма Хиггса, состоящая в том, что транслируется не $\varphi(x)$, а составное поле $\varphi^*(x)\,\varphi(x)$ на величину $m_H^2/2\lambda^2$, воспроизводит известные выражения для масс $W_\pm$- и Z-бозонов:

$$m_{W_\pm} = \frac{em_H}{2\lambda\sin\theta} = m_Z\cos\theta, \tag{120}$$

где e — заряд позитрона ($e^2/4\pi = 1/137$). При определении (116) физических полей лептонов тоже срабатывает механизм возникновения массы электрона и мюона.

Ситуация, обрисованная в модели Салама — Вайнберга, распространяется на более общие теории со спонтанным нарушением симметрии (например, на модели большого объединения). В общем случае справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.7. Пусть $G_{\{\varphi_{cl}\}}$ — малая группа орбиты $\{\varphi_{cl}\}$ минимумов потенциала Хиггса (т. е. подгруппа группы G, оставляющая инвариантной некоторую точку орбиты) и пусть T_F — (неприводимое) фермионное представление калибровочной группы G.

А. Если подгруппа $G_{\{\varphi_{cl}\}}$ тривиальна, то существует линейное соответствие между полями ψ, преобразующимися по представлению T_F и пространством G-инвариантных составных полей вида $P(\varphi)\,\psi\ (= P_\alpha(\varphi)\ \psi^\alpha)$. Это соответствие определено с точностью до инвариантных полей того же вида, которые обращаются в нуль на орбите $\{\varphi_{cl}\}$.

Б. Если малая группа $G_{\{\varphi_{cl}\}}$ нетривиальна, то всякой $G_{\{\varphi_{cl}\}}$-инвариантной неприводимой проекции Π_ψ в пространстве представления T_F соответствует G-ковариантный оператор $P(\varphi)$, полиномиальный по φ и φ^*, который совпадает с $\Pi_{\{\varphi_{cl}\}}$ на орбите $\{\varphi_{cl}\}$.

См. доказательство этого предложения в [30].

Изложенный подход к механизму Хиггса требует изменения стандартной теории возмущения. Если начать, как обычно, с некоторой фиксированной точки φ_{cl} на орбите минимумов потенциала V_H, то мы должны усреднить полученный результат по орбите $\{\varphi_{cl}\}$. Нетрудно убедиться, что такая модификация правил счета не затронет вид калибровочно-инвариантных матричных элементов.

Соображения, указывающие на то, что среднее по вакууму от калибровочно-неинвариантного поля Хиггса φ исчезает (в противоположность бытующему убеждению), носят непертурбативный характер. Они основаны на рассмотрении абелевой калибровочной теории на решетке [13] и на рассмотрении вклада разряженного инстантонного газа в $SU(2)$-теории Янга — Миллса [30] (см. также [49]).

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Е. д'Емилио и А. И. Оксака за многочисленные полезные обсуждения. Весьма полезными были также дискуссии с Д. Бухгольцем, Ю. Фрёлихом, Г. Моркио и Ф. Строки (хотя они не несут ответственности за принятую здесь точку зрения на физические заряженные состояния).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Appelquist T., Carazzone J.** Infrared singularities and massive fields.— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 2856—2861.
2. **Atiyah M. P.** Geometry of Yang-Mills Fields. Lezioni Fermiane Accademia Nazionale dei Lincei. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
3. **Bialynicki-Birula I.** Charge conservation and gauge invariance.— In: Mathematical Physics and Physical Mathematics/Ed. by K. Maurin and R. Razka. PWN, Warszawa, 1976, p. 39—51.
4. **Bloch F., Nordsieck A.** Note on the radiation field of the electron.— Phys. Rev., 1937, v. 52, p. 54—59.
5. **Bognar J.** Indefinite Inner Product Spaces. Springer Verlag, Berlin, 1974.
6. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
7. **Bongaarts P. J. M.** Maxwell's equations in axiomatic quantum field theory: I. Field tensor and potentials.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1510—1515; II. Covariant and non-covariant gauges.— J. Math. Phys., 1982, v. 23, p. 1881—1898.
8. **Brandt R.** Field equations in quantum electrodynamics.— Fortschr. Phys., 1970, v. 18, p. 249—283.
9. **Buchholz D.** The physical state space of quantum electrodynamics.— Commun. Math. Phys., 1982, v. 85, p. 49—74.
10. **Buchholz D., Fredenhagen K.** Charge screening and mass spectrum in abelian gauge theories.— Nucl. Phys., 1979, v. B154, p. 226—238.
11. **Chung V.** Infrared divergence in quantum electrodynamics.— Phys. Rev., 1965, v. 140B, p. 1110—1122.
12. **Creutz M., Tudron T.** Higgs mechanism in the temporal gauge.— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2619—2623.
13. **De Angelis G. T., De Falco D., Guerra F.** Note on the Abelian Higgs-Kibble model on a lattice; Absence of spontaneous magnetization.— Phys. Rev,. 1978, v. D17, p. 1624—1628.
14. **D'Emilio E., Mintchev M.** About the charge operator in quantum electrodynamics. Preprint IFUP-Th. 20, Pisa, 1981.
15. **D'Emilio E., Mintchev M.** Locally gauge-invariant charged states in quantum electrodynamics.— Nuovo cimento, 1982, v. 69A, p. 43—60; The asymptotic limit of the electron field in quantum electrodynamics.— Nuovo cimento Lett., 1982, v. 34, p. 545—552; Physical charged sectors in quantum electrodynamics: I. Infrared asymptotics. Preprint IFUP-TH 11/82 II. The charge operator. Preprint IFUP-Th. 12/82; A nonperturbative approach to the infrared behaviour in physical charged sectors of gauge theories. Preprint IFUP-Th. 25/82.
16. **Dirac P. A. M.** Gauge invariant formulation of quantum electrodynamics. — Canad. J. Phys., 1955, v. 33, p. 650—660.
17. **Doplicher S., Haag R., Roberts J. E.** Fields, observables and gauge transformations. I and II.— Commun. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 1—23; v. 13, p. 173—200.
18. **Elithur S.** Impossibility of spontaneously breaking local symmetries.— Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 3978—3982.
19. **Englert F., Brout R.** Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 321—323.
20. **Фаддеев Л. Д.** Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов.— ТМФ, 1969. т. 1, с. 3—18.
21. **Ferrari R.** On Goldstone's theorem for a class of currents non covariant under translations.— Nuovo cimento, 1973, v. 14A, p. 386—402.
22. **Ferrari R.** Some comments on the Higgs phenomenon.— Nuovo cimento, 1974, v. 19A, p. 204—218.
23. **Ferrari R., Picasso L.** Spontaneous breakdown in quantum electrodynamics.— Nucl. Phys., 1971, v. B31, p. 316—330.
24. **Ferrari R., Picasso L., Strocchi F.** Some remarks on local operators in quantum electrodynamics.— Commun. Math. Phys., 1974, v. 35, p. 25—38; Local

operators and charged states in quantum electrodynamics.— Nuovo cimento, 1977, v. 39A, p. 1—8.

25. **Фрадкин Е. С.** Метод функций Грина в теории квантованных полей и квантовой статистике.— Тр. Физ. ин-та АН СССР, 1965, т. 29, с. 7—138.

26. **Frohlich J.** Lectures on Yang—Mills theory. IHES preprint, Bures-sur-Yvette, 1979; see also lectures by J. Frohlich and by G. Mack at the Berlin Conference on Mathematical Physics (August 1981) and references therein.

27. **Frohlich J.** On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons.— Ann. Inst. Poincare, 1973, v. 19A, p. 1—103.

28. **Frohlich J., Morchio G., Strocchi F.** Charged sectors and scattering states in quantum electrodynamics.— Ann. Phys. (N. Y.), 1979, v. 121, p. 227—284.

29. **Frohlich J., Morchio G., Strocchi F.** Infrared problem and spontaneous breaking of the Lorentz group in QED.— Phys. Lett., 1979, v. 89B, p. 61—64; **Morchio G., Strocchi F.** A nonperturbative approach to the infrared problem in QED. Construction of charged states. SISSA preprint 19/82/E. P. Trieste, 1982.

30. **Frohlich J., Morchio G., Strocchi F.** Higgs phenomenon without a symmetry breaking order parameter.— Phys. Lett., 1980, v. 97B, p. 249—252; Higgs phenomenon without symmetry breaking order parameter.— Nucl. Phys., 1981, v. B190, p. 553—582.

31. **Gervais J. L., Zwanziger D.** Derivation from first principles of the infrared structure of quantum electrodynamics.— Phys. Lett., 1980, v. 94B, p. 389—393.

32. **Gupta S. N.** Comment on quantum electrodynamics.— Phys. Rev., 1969, v. 180, p. 1601—1602.

33. **Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W.** Global conservation laws and massless particles.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 585—587.

34. **Haller K.** Gupta-Bleuler condition and infrared-coherent states.—Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 3045—3050.

35. **Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C.** Constraint Hamiltonian Systems. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.

36. **Higgs P. W.** Broken symmetries, massless particles and gauge fiels.— Phys. Lett., 1964, v. 12, p. 132—133; Broken symmetries and the masses of gauge bosons.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 508—509; Spontaneous Symmetry breakdown without massless bosons.— Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1156—1163.

37. **Ivanov E. A., Ogievetsky V. I.** Gauge theories as theories of spontaneous breakdown.— Lett. Math. Phys., 1976, v. 1, p. 309—313.

38. **Jaffe A.** High energy behaviour in quantum field theory: I. Strictly localizable fields.— Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 1454—1461.

39. **Kibble T. W.** Symmetry breakdown in non-abelian gauge theories.— Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 1554—1561.

40. **Kibble T. W.** Coherent soft-photon states and infrared divergences: I. Classical currents.— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 315—324; II. Mass-shell singularities of Green functions.— Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1527—1535; III. Asymptotic states and reduction formulas.— Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 1882—1901; The scattering operator.— Phys. Rev., 1968, v. 175, p. 1624—1640.

41. **Кулиш П. П., Фаддеев Л. Д.** Асимптотическое условие и инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике.— ТМФ, 1970, т. 4, с. 153—170.

42. **Квантовая** теория калибровочных полей. Сб. статей/Под ред. А. П. Коноплевой. М.: Мир, 1977.

43. **Mack G.** Quark and colour confinement through dynamical Higgs mechanism preprint DESY. Hamburg, 1978.

44. **Maison D., Zwanziger D.** On the subsidiary condition in quantum electrodynamics.— Nucl. Phys., 1979, v. B91, p. 425—431.

45. **Mandelstam S.** Quantum electrodynamics without potentials.— Ann. Phys. (N. Y.), 1962, v. 19, p. 1—24.

46. **Манин Ю. И.** Калибровочные поля и голоморфная геометрия. М.: ВИНИТИ, 1981.

47. **Mintchev M.** Quantization in indefinite metric.— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, v. 13, p. 1841—1859.

48. **Mintchev M., d'Emilio E.** On the reconstruction of the physical Hilbert spaces for quantum field theories with indefinite metric.— J. Math. Phys., 1981, v. 22, p. 1267—1271.
49. **Минчев М., Тодоров И. Т.** Аксиоматический подход в теории калибровочных полей и механизм Хиггса. XIV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1980, с. 150—174.
50. **Morchio G., Strocchi F.** Infrared singularities, vacuum structure and pure phases in local quantum field theory.— Ann. Inst. H. Poincare, 1980, v. A33, p. 251—282.
51. **Orzalesi C. A.** Charges and generators of symmetry transformations in quantum field theory.— Rev. Mod. Phys., 1970, v. 42, p. 381—408.
52. **Пронько Г. П., Соловьев Л. Д.** Инфракрасная асимптотика функции Грина.— ТМФ, 1974, т. 19, с. 172—182.
53. **Reeh H., Requardt M.** Some properties of the electric charge operator.— Rep. Math. Phys., 1980, v. 17, p. 55—58; **Requardt M.** Symmetry conservation and integration over local charge densities in quantum field theory.— Commun. Math. Phys., 1976, v. 50, p. 259—263.
54. **Roberts J.** The search for quantum differential geometry. Talk at the Berlin Conference on Mathematical Physics. August 1981.
55. **Roepstorff G.** Coherent photon states and spectral condition.— Commun. Math. Phys., 1970, v. 19, p. 301—314.
56. **Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
57. **Strocchi F.** Gauge problem in quantum field theory.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1429—1438; Quantization of Maxwell equations and week local commutativity.— Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 2334—2340.
58. **Stroachi F.** Spontaneous symmetry breaking in local gauge quantum field theory; the Higgs mechanism.— Commun. Math. Phys., 1977, v. 56, p. 57—78.
59. **Strocchi F.** Local and covariant gauge quantum field theories. Cluster properties, superselection rules and infrared problem.— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2010—2021.
60. **Strocchi F.** Gauss low in local quantum field theory.— In: Field Theory Quantization and Statistical Physics/Ed. by E. Tirapegui, D. Reidel. Publ. Co. Dordnecht, 1981, p. 227—236.
61. **Strocchi F., Wightman A. S.** Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 2198—2224; Erratum, ibid., 1976, v. 17, p. 1930—1931.
62. **Свидзинский А. В.** Определение функции Грина в модели Блоха—Нордсика методом функционального интегрирования.— ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 324—329.
63. **Swieca J.** Charge screening and mass spectrum.— Phys. Rev., 1976, v. 130, p. 312—314.
64. **Swieca J.** Goldstone theorem and related topics. Cargese Lectures in Physics. Vol. 4/Ed. by D. Kastler. N. Y. (Gordon and Breach, 1970).
65. **Symanzik K.** Lectures in Lagrangian Quantum Field Theory. Internal Bericht, DESY, 1971.
66. **Тейлор Дж.** Калибровочные теории электрослабых взаимодействий: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
67. **t'Hooft G.** Renormalizable Lagrangians for massive Yang—Mills fields.— Nucl. Phys., 1971, v. B35, p. 167—183.
68. **t'Hooft G., Veltman M.** Diagrammar. Preprint CERN 73-9, Geneva, 1973.
69. **Todorov I. T.** Topics in gauge theories. XII Intern. School on High Energy Physics for Young Scientist's. Primorsko Bulgaria, 1978; ОИЯИ, Д1, 2-12450, Дубна, 1979, с. 317—392.
70. **Владимиров В. С.** Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
71. **Владимиров В. С., Завьялов Б. И.** Автомодельная асимптотика при-

чинных функций и их поведение на световом конусе.— ТМФ, 1982, т. 50, с. 163—194.

72. **Weinberg S.** General theory of broken local symmetries.— Phys. Rev., 1978, v. D7, p. 1068—1082.

73. **Wightman A. S., Garding L.** Fields as operation-valued distributions in relativistic quantum field theory.— Arkiv fys., 1964, v. 28, p. 129—184.

74. **Завьялов Б. И.** Представление Йоста — Лемана — Дайсона в пространствах $\mathscr{S}'_\alpha$— ТМФ, 1981, т. 49, с. 147—155.

75. **Zwanziger D.** Scattering theory for quantum electrodynamics: I. Infrared renormalization and asymptotic fields.— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 3481—3503; II. Reduction and cross-section formulas.— Plys. Rev., 1975, v. D11, p. 3504—3530.

76. **Zwanziger D.** Physical states in quantum electrodynamics.— Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 2570—2589.

77. **Zwanziger D.** The lesson of a soluble model of quantum electrodynamics.— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 457.

78. **Zwanziger D.** Gupta-Bleuler and infrared-coherence subsidiary conditions. — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 3051—3054.

79. **Zwanziger D.** Infrared catastrophe averted by Hertz potential.— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 3614—3634.

80. **Zwanziger D.** Energy and momentum spectral function of coherent bremsstrahlung radiation.— Phys. Rev., 1979, v. D20, p. 2011—2026.