«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 2

УДК 539.141

РАССЕЯНИЕ И РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ ЧЕТЫРЕХ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

В. В. Комаров, А. М. Попова, В. Л. Шаблов

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Рассматривается система четырех нерелятивистских бесспиновых частиц с двухчастичными потенциалами взаимодействия, аналитическими относительно комплексных масштабных преобразований. Для нахождения оператора рассеяния $T(z)$ данной системы и оператора $T^{\theta}(z)$, где θ — комплексный параметр масштабного преобразования, осуществляющего аналитическое продолжение $T(z)$ на часть нефизического листа, построены системы интегральных уравнений. Изучены свойства ядер этих уравнений. Получены условия на потенциалы взаимодействия, при которых данные интегральные уравнения имеют единственное решение. С помощью метода стационарной фазы изучены асимптотики волновой функции системы. Установлена связь между решениями соответствующих однородных уравнений и спектрами операторов Гамильтона H и $H(\theta)$, т.е. с энергиями связанных состояний и резонансов в системе нескольких нерелятивистских частиц. В качестве приложения метода комплексных масштабных преобразований построены огибающие областей местоположений резонансов в системах с различными потенциалами аналитического вида: Кулона, Юкавы, Ямагучи и экспоненциального типа. Дано теоретическое обоснование эффекта изменения параметров двухчастичных резонансов в системах нескольких частиц.

Quantum four-particle spinless nonrelativistic systems with two-particle analytic for complex scaling potentials are considered. Integral equations have been constructed for scattering operators $T(z)$ and $T^{\theta}(z)$ of systems, where θ is complex parameters of the complex scaling, which perform analytical prolongations of $T(z)$ onto nonphysical sheets. Kernels of equations have been investigated. Conditions on potentials by which integral equations have unique solutions are formulated. Asymptotics of the systems wave functions have been investigated by using stationary phase method. Connections between corresponding homogenious equations solutions and Hamiltons' operators spectra H and $H(\theta)$ or in other words bound states and resonances in the considered systems have been established. As an application of the complex scaling locations of resonances for different analytic potentials (Coulomb, Yukawa, Yamaguchi and exponential) have been found. Theoretical interpretations of the possible deviations of two-body resonances parameters in many-particle systems is given.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор посвящен изложению единого метода описания состояний рассеяния, дискретного спектра и резонансов в системе четырех нерелятивистских частиц. Метод основан на использовании интегральных уравнений с компактными ядрами для резольвенты гамильтониана системы [1, 2]. При таком подходе амплитуды рассеяния определяются решением неоднородной системы уравнений, в отличие от состояний дискретного спектра и резонансов, которые можно найти из соответствующей однородной системы после применения к ней комплексного масштабного преобразования [2—7].

Следует заметить, что рассматриваемая система четырех частиц с конечными массами существенно отличается от системы трех частиц с конечными массами. Это отличие, помимо увеличения числа частиц, связано с появлением несвязанного процесса нового типа: независимого взаимодействия частиц в парах, например (12) и (34). В нестационарной теории рассеяния, как отмечалось в [8—10], это требует специального доказательства существования асимптотического условия для волновых операторов. В частности, по той же причине задача о взаимодействии двух частиц во внешнем поле, т. е. когда масса третьей частицы равна бесконечности, должна быть выделена как самостоятельный случай, не сводящийся к трехчастичной проблеме. Подробное обсуждение затронутых вопросов имеется в работах [2, с. 370—371 и 173—177; 11—14].

В стационарной теории рассеяния при формулировке интегральных уравнений задачи $N \geqslant 3$ частиц появляются ядра особого типа [11—14]. Эти ядра связаны с рассеянием независимых, взаимодействующих между собой подсистем частиц и могут быть получены в явном виде с помощью представления функции Грина полной системы в виде свертки функций Грина несвязанных подсистем. Использование аппарата свертки в интегральных уравнениях для задач $N \geqslant 4$ частиц с конечными массами и $N \geqslant 2$ частиц во внешнем поле позволяет избежать нефизического разделения асимптотик, присущих подходам с классификацией амплитуд по выделенному первому взаимодействию. По поводу различия схем интегральных уравнений задачи N тел см. обзоры [15—17, 19]. Кроме того, использование аппарата свертки позволяет решить важную в практическом отношении задачу об установлении связи между трехмерной и четырехмерной теорией возмущений и, как следствие, между трехмерными диаграммами, являющимися интеграциями уравнения Липпмана — Швингера, и нерелятивистскими фейнмановскими диаграммами [14, 18—19].

Структура настоящей работы следующая: в разд. 1 выведены и исследованы интегральные уравнения для систем четырех частиц с конечными массами. Здесь изучены свойства ядер этих уравнений, построены системы интегральных уравнений для компонент полного T-оператора рассеяния и установлена связь между матричными элементами этих компонент и амплитудами реакций в задаче четырех тел. Здесь же сформулированы условия, при которых рассматриваемые интегральные уравнения имеют единственное решение. В разд. 2 рассматривается модификация полученных уравнений для описания резонансных состояний в рамках теории комплексных масштабных преобразований. Показано, что решения соответствующих однородных уравнений являются собственными значениями оператора Гамильтона системы, подвергнутой масштабному преобразованию.

С помощью развитого метода найдены местоположения резонансов в системах в различными аналитическими потенциалами.

В заключении разд. 2 дано теоретическое обоснование эффекта изменения параметров двухчастичных резонансов, проявляющегося в реакциях с образованием трех и более частиц.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Постановка задачи и определения. В этом разделе будет сформулирована система уравнений для операторов рассеяния в задаче четырех попарно взаимодействующих частиц с конечными массами. Эта система, как будет ясно из дальнейшего, носит вспомогательный характер и затем будет преобразована путем выделения главных особенностей в систему интегральных уравнений для компонент полного T-оператора рассеяния. Эта же система понадобится нам в разд. 2 при обсуждении резонансов.

Отметим, что система уравнений, о которой будет идти речь, имеет ту же структуру, что и система интегральных уравнений задачи четырех тел, записанная в рамках формализма вторичного квантования [18—20]. Обе системы (полученные в различных подходах) приводят к одному и тому же результату при определении элементов S-матрицы системы [14, 21]. Поскольку уравнения [18—20] были получены первоначально методом суммирования нерелятивистских фейнмановских диаграмм, то с помощью результатов работ [14, 21] легко установить связь между итерациями уравнений, изучаемых ниже, и фейнмановскими диаграммами и тем самым между трех- и четырехмерной теорией возмущений в задаче четырех тел.

Гамильтониан изучаемой системы четырех частиц имеет вид:

$$H=H_0+V, \quad H_0=\sum_{i=1}^{4} H_{0i}, \quad V=\sum_{\alpha} V_\alpha,$$
$$\alpha=ij, \; i<j, \; i, \; j=1, \; 2, \; 3, \; 4, \tag{1}$$

где H_{0i} — оператор кинетической энергии частицы i с массой m_i; V_{ij} — оператор взаимодействия между частицами i, j.

Относительно потенциалов V_α будем предполагать следующее. При любом α $V_\alpha(z)$ является аналитической функцией в секторе $|\arg z|<\sigma$, причем при любом φ: $|\varphi|<\sigma$ $V_\alpha(e^{i\varphi}r_\alpha)\in L^2(R^3)$; r и k определены в R^3. Кроме того, будем считать, что $V_\alpha(r_\alpha)$ убывает на бесконечности как $r_\alpha^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Эти условия означают, что потенциал V_α является аналитическим относительно масштабных преобразований и принадлежит классу $\mathbf{C}_\sigma$ (класс $\mathbf{C}_\sigma$ соответствует операторной версии аналитических потенциалов Агиляра — Балслева — Комба и определен в [2, с. 403] и [4, 5]). Для примера укажем, что потенциал Юкавы и потенциалы экспоненциального типа принадлежат классу $\mathbf{C}_{\pi/2}$, потенциал гауссова типа — классу $\mathbf{C}_{\pi/4}$, потенциал Вудса — Саксона $V(r)=V_0\left(1+\exp\left\{\frac{r-a}{R_0}\right\}\right)^{-1}$ — классу

$C_{\operatorname{arcctg}(a/\pi R_0)}$, в то время как потенциал прямоугольной ямы не является аналитическим. Заметим, что потенциалы, аналитические относительно масштабных преобразований, не обязательно являются локальными. В частности, широко используемый сепарабельный потенциал Ямагучи является аналитическим из класса $C_{\pi/2}$. Наложенные на потенциалы V_α условия понадобятся нам при изучении резонансов.

Как легко видеть, потенциалы $V_\alpha(r_\alpha)$ (вещественные при $r_\alpha \in \in \mathbf{R}^+$) являются потенциалами короткодействующего типа, а потому полный оператор рассеяния системы $T(z)$ определен и удовлетворяет уравнению Липпмана — Швингера [8, 21]:

$$T(z) = V + VG_0(z)\,T(z), \tag{2}$$

где $G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$ — свободная функция Грина системы. В (2) параметр z удовлетворяет условию $z \notin \sigma(H)$ [$\sigma(H)$ — спектр оператора H], хотя в дальнейшем, как обычно, будет совершен предельный переход $z \to E + i0$, $E \in \sigma_c(H)$, где $\sigma_c(H)$ — непрерывный спектр оператора H.

Перестройка уравнения Липпмана — Швингера в систему уравнений. Следуя идеям, изложенным во введении и в [1, 2, 8—14] относительно роли коммутирующих гамильтонианов $H_\alpha = \sum\limits_{i\in\alpha} H_{0i} + + V_\alpha$ и $H_{\alpha'}$, $(\alpha, \alpha') \in \{(12{,}34), (13{,}24), (14{,}23)\}$ независимых подсистем (пар) частиц α и α', разобьем оператор V на следующие слагаемые:

$$V = \sum_{(\alpha,\alpha')} V_{\alpha,\alpha'},\quad V_{\alpha,\alpha'} = V_\alpha + V_{\alpha'}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что оператор $T(z)$ может быть представлен в виде

$$T(z) = \sum_{(\alpha,\alpha')} T_{\alpha,\alpha'}(z), \tag{4}$$

где

$$T_{\alpha,\alpha'}(z) = V_{\alpha,\alpha'} + V_{\alpha,\alpha'}G_0(z)\,T(z). \tag{5}$$

Обращая систему уравнений (4), (5), получаем систему из операторов $T_{\alpha,\alpha'}(z)$:

$$T_{\alpha,\alpha'}(z) = N_{\alpha,\alpha'}(z) + N_{\alpha,\alpha'}(z)\,G_0(z)\sum_{\beta,\beta'} T_{\beta,\beta'}(z),\quad \beta\beta' \neq \alpha\alpha', \tag{6}$$

где

$$N_{\alpha,\alpha'}(z) = [1 - V_{\alpha,\alpha'}G_0(z)]^{-1}\,V_{\alpha,\alpha'}. \tag{7}$$

Как легко видеть, операторы $N_{\alpha,\alpha'}(z)$ допускают следующее представление:

$$N_{\alpha,\alpha'}(z) = V_{\alpha,\alpha'} + V_{\alpha,\alpha'}G_{\alpha,\alpha'}(z)\,V_{\alpha,\alpha'}, \tag{8}$$

где $G_{\alpha,\alpha'}(z)$ обозначена резольвента гамильтониана $H_{\alpha,\alpha'} = H_0 + + V_{\alpha,\alpha'}$ независимых пар частиц α и α'. Свойства операторов

$N_{\alpha,\alpha'}(z)$ и $G_{\alpha,\alpha'}(z)$ были подробно изучены ранее (см. работы [11—14]), поэтому мы сформулируем только окончательный результат.

Согласно [11—14], из представления функции Грина $G_{\alpha,\alpha'}(z)$ в виде свертки функций Грина независимых пар частиц α и α'

$$G_{\alpha,\alpha'}(E+i\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\,g_\alpha(\varepsilon+i\tau_1)\otimes g_{\alpha'}(E-\varepsilon+i\tau_2), \tag{9}$$

$$g_\alpha(z)=\Big(z-\sum_{i\in\alpha}H_{0i}-V_\alpha\Big)^{-1},\quad \tau=\tau_1+\tau_2,\quad \tau_1>0,\quad \tau_2>0,$$

вытекает следующее представление оператора $N_{\alpha,\alpha'}(z)$ при $z=E+i\tau$:

$$N_{\alpha,\alpha'}(z)=t_\alpha(z_\alpha)+t_{\alpha'}(z_{\alpha'})+\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z). \tag{10}$$

Оператор $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha'}(z)$ в (10) имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,\alpha'}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\,&[g_{0\alpha}(\varepsilon+i\tau_1)\otimes I_{\alpha'}+I_\alpha\otimes g_{0\alpha'}(E-\varepsilon+i\tau_2)]\times\\ &\times\{t_\alpha(\varepsilon+i\tau_1)\otimes t_{\alpha'}(E-\varepsilon+i\tau_2)\}\times\\ &\times[g_{0\alpha}(\varepsilon+i\tau_1)\otimes I_{\alpha'}+I_\alpha\otimes g_{0\alpha'}(E-\varepsilon+i\tau_2)].\end{aligned} \tag{11}$$

Символ $\otimes$ в (9) и (11) означает тензорное произведение операторов; I_α — единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_\alpha=\mathbf{L}^2(R^6)$ координат частиц i и j ($\alpha=ij$), аналогично для $I_{\alpha'}$. Кроме того, в (10) и (11) использованы следующие обозначения: $g_{0\alpha}(z)=(z-\sum_{i\in\alpha}H_{0i})^{-1}$ — свободная функция Грина пары α (движение центра масс пары пока не выделено), $t_\alpha(z)=V_\alpha+V_\alpha g_\alpha(z)\times V_\alpha$ — оператор рассеяния пары α, действующий в пространстве $\mathcal{J}_\alpha$. Параметры z_α и $z_{\alpha'}$ в (10) определены соотношениями: $z_\alpha=z-\sum_{i\in\alpha'}\frac{p_i}{2m_i}$, аналогично для α'. Это означает, что ядро оператора $t_\alpha(z_\alpha)$ в импульсном представлении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}&\langle p_1p_2p_3p_4\mid t_\alpha(z)\mid p_1^0p_2^0p_3^0p_4^0\rangle=\\ &=\langle p_ip_j|\,t_\alpha\Big(z-\sum_{k'\in\alpha'}\frac{p_{k'}^2}{2m_{k'}}\Big)\,|p_i^0p_j^0\rangle\prod_{k'\in\alpha'}\delta(p_{k'}-p_{k'}^0)=\\ &=\langle p_\alpha|\,t_\alpha\Big(z-\frac{\mathcal{P}_\alpha^2}{2M_\alpha}-\sum_{k'\in\alpha'}\frac{p_{k'}^2}{2m_{k'}}\Big)\,|p_\alpha^0\rangle\,\delta(\mathcal{P}_\alpha-\mathcal{P}_\alpha^0)\prod_{k'\in\alpha'}\delta(p_k-p_k^0).\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\mathcal{P}_\alpha=\sum_{l\in\alpha}p_l$ ($\alpha=ij$) есть импульс движения центра масс пары α в R^3, $M_\alpha=m_i+m_j$, $p_\alpha=\frac{p_im_j-p_jm_j}{M_\alpha}$ — импульсы относительного движения частиц в паре α в R^3. Ядро оператора $\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ в импульсном представлении записывается следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(p_1p_2p_3p_4;\ p_1^0p_2^0p_3^0p_4^0;\ z) = \delta(\mathcal{P}-\mathcal{P}^0)\,\delta(\mathcal{P}_{\alpha,\alpha'}-\mathcal{P}^0_{\alpha,\alpha'})\times$$
$$\times\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}\left(p_\alpha p_{\alpha'};\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'};\ z-\frac{\mathcal{P}^2}{2M}-\frac{\mathcal{P}^2_{\alpha\alpha'}}{2M_{\alpha\alpha'}}\right), \tag{13}$$

где $\mathcal{P}=\sum_{i=1}^{4} p_i$ — полный импульс системы в R^{12}, а импульс p_i определен в R^3; $\mathcal{P}_{\alpha,\alpha'} = (\mathcal{P}_\alpha M_{\alpha'} - \mathcal{P}_{\alpha'}M_\alpha)/M$, где $M = M_\alpha + M_{\alpha'}$ — полная масса системы, $M_{\alpha,\alpha'} = M_\alpha M_{\alpha'}/M$. Согласно (11) ядро $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'};\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z)$ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'};\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'};\ z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon-\tilde{p}^2_\alpha+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-\tilde{p}^2_{\alpha'}+i\tau_2}\right)\times$$
$$\times t_\alpha(p_\alpha,\ p^0_\alpha,\ \varepsilon+i\tau_1)\,t_{\alpha'}(p_{\alpha'},\ p^0_{\alpha'},\ E-\varepsilon+i\tau_2)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon-\tilde{p}^{02}_\alpha+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-\tilde{p}^{02}_{\alpha'}+i\tau_2}\right). \tag{14}$$

На основании формул (10) и (11) и системы (6) можно получить систему уравнений для операторов, описывающих переходы в состоянии, в которых частицы распределены в независимые пары. Согласно (6) и (10) имеем:

$$T_{\alpha,\alpha'}(z) = T_\alpha(z) + T_{\alpha'}(z) + T_{\alpha\otimes\alpha'}(z), \tag{15}$$

где $T_\alpha(z)$, $T_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
T_\alpha(z) &= t_\alpha(z_\alpha) + t_\alpha(z_\alpha)\,G_0(z)\sum_{\alpha\neq\beta\neq\alpha'} T_\beta(z) +\\
&\quad + t_\alpha(z)\,G_0(z)\sum_{\alpha\alpha'\neq\beta\beta'} T_{\beta\otimes\beta'}(z);\\
T_{\alpha\otimes\alpha'}(z) &= \mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z) + \mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)\,G_0\sum_{\alpha\neq\beta\neq\alpha'} T_\beta(z) +\\
&\quad + \mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)\,G_0(z)\sum_{(\alpha,\,\alpha')\neq(\beta,\,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z).
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Уравнение для оператора $T_\alpha(z)$ необходимо подвергнуть дальнейшей перестройке для того, чтобы выделить каналы группировки, соответствующие взаимодействию трех частиц. С этой целью оператор $T_\alpha(z)$ представим в виде

$$T_\alpha(z) = T^{(1)}_\alpha(z) + \sum_{\alpha\in\eta} T^{\eta}_\alpha(z), \tag{17}$$

где η — подсистема из трех частиц. Операторы $T_\alpha^{(1)}(z)$ и $T_\alpha^\eta(z)$ в (17) заданы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_\alpha^{(1)}(z) &= t_\alpha(z_\alpha) + t_\alpha(z_\alpha)\, G_0(z) \sum_{(\alpha,\,\alpha')\neq(\beta,\,\beta')} T_{\underset{(\beta,\,\beta')}{\beta\otimes\beta'}}(z); \\ T_\alpha^\eta(z) &= t_\alpha(z_\alpha)\, G_0(z) \sum_{\beta\in\eta} T_\beta(z). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Второе из уравнений (18) можно обратить, используя уравнения для трехчастичных операторов рассеяния в подсистеме η. В результате приходим к системе уравнений для вспомогательных операторов $T_\alpha^{(1)}(z)$, $T_\alpha^\eta(z)$, $T_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$, в которой выделены все возможные несвязанные процессы. Эта система имеет вид [12—14]:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\otimes\alpha'}(z) &= \mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z) + \mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)\, G_0(z) \times \\ &\times \Big\{ \sum_{(\alpha,\,\alpha')\neq(\beta,\,\beta')} [T_\beta^{(1)}(z) + \sum_{\mu,\,\beta\in\mu} T_\beta^\mu(z)] + \sum_{(\alpha,\,\alpha')\neq(\beta,\,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z) \Big\}; \\ T_\alpha^\eta(z) &= \sum_{\gamma\in\eta} M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z_\eta) + \sum_{\gamma\in\eta} M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z_\eta)\; G_0(z) \Big\{ \sum_{\substack{(\gamma,\,\gamma')\neq(\beta,\,\beta') \\ \beta\notin\eta}} T_\beta^{(1)}(z) + \\ &+ \sum_{\substack{(\gamma,\,\gamma')\neq(\beta,\,\beta') \\ \beta\in\eta,\ \eta\neq\mu}} T_\beta^\mu(z) + \sum_{(\gamma,\,\gamma')\neq(\beta,\,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z) \Big\}; \\ T_\alpha^{(1)}(z) &= t_\alpha(z) + t_\alpha(z_\alpha) G_0(z) \sum_{(\alpha,\,\alpha')\neq(\beta,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z). \end{aligned} \tag{19}$$

При этом операторы $M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z)$ определяются как связанная часть трехчастичной амплитуды $T_{\alpha\gamma}^\eta(z)$:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z) = T_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z) - t_\alpha(z_\alpha)\,\delta(\alpha,\,\gamma),\ \ T_{\alpha,\gamma_1}^\eta(z) = t_\alpha(z_\alpha)\,\delta(\alpha,\ \gamma) + \\ + t_\alpha(z_\alpha)\ \ G_0(z) \sum_{\beta\neq\alpha} T_{\beta,\,\gamma}^\eta(z). \end{aligned}$$

Параметр z_η в (18) определен аналогично параметру z_α: $z_\eta = z - \sum_{i\notin\eta} \frac{p_i^2}{2m_i}$. Ядро оператора $M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z_\eta)$ в импульсном представлении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 p_3 p_4 \mid M_{\alpha,\,\gamma}^\eta(z_\eta) \mid p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0\rangle = \delta(\mathcal{P} - \mathcal{P}^0)\,\delta(\mathcal{P}_\eta - \mathcal{P}_\eta^0) \times \\ \times M_{\alpha,\,\gamma}^\eta\left(p_\alpha p_{\alpha\eta},\ \ p_\alpha^0 p_{\alpha\eta}^0,\ \ z - \frac{\mathcal{P}^2}{2M} - \frac{\mathcal{P}_\eta^2}{2n_\eta}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

В (20) $p_{\alpha\eta}$ есть импульс относительного движения центра масс пары α и третьей частицы в подсистеме $p_{\alpha\eta} = [\mathcal{P}_\alpha (M_\eta - M_\alpha) - M_\alpha (\mathcal{P}_\eta - \mathcal{P}_\alpha)]/M_\eta$; p_η — импульс относительного движения центра масс трехчастичной подсистемы η и четвертой частицы: $p_\eta = [\mathcal{P}_\eta (M - M_\eta) - M_\eta (\mathcal{P} - \mathcal{P}_\eta)]/M$. Наконец, n_η есть приведенная масса подсистемы η и четвертой частицы. В дальнейшем мы будем работать в системе центра масс, т. е. полагать $\mathcal{P}=0$. Тогда ($\mathcal{P}_{\alpha,\alpha'}=\mathcal{P}_\alpha$ и $p_\eta=\mathcal{P}_\eta$. Кроме того, в целях упрощения записи будем использовать следующие обозначения: $\widetilde{\mathcal{P}}^2_\alpha=\mathcal{P}^2_\alpha/2M_{\alpha\alpha'}$; $\widetilde{p}^2_\alpha=p^2_\alpha/2\mu_\alpha$; $\widetilde{\mathcal{P}}^2_\eta=\mathcal{P}^2_\eta/2n_\eta$; $\widetilde{\mathcal{P}}^2_{\alpha\eta}=\mathcal{P}^2_{\alpha\eta}/2n_\alpha$, где $n_\alpha=M_\alpha(M_\eta-M_\alpha)/M_\eta$, $n_\eta=M_\eta(M-M_\eta)/M$. В этих обозначениях оператор кинетической энергии имеет вид:

$$H_0=\widetilde{\mathcal{P}}^2_\alpha+\widetilde{p}^2_\alpha+\widetilde{p}^2_{\alpha'},$$

либо

$$H_0=\widetilde{\mathcal{P}}^2_\eta+\widetilde{p}^2_\alpha+\widetilde{p}^2_{\alpha\eta}.$$

Свойства ядер системы уравнений для вспомогательных операторов в заряде четырех тел. Поскольку нашей основной целью является получение однозначно разрешимой системы интегральных уравнений с компактным ядром, то мы должны подвергнуть систему уравнений для вспомогательных операторов (19) дальнейшей перестройке. Первый шаг здесь заключается в вычитании операторов рассеяния, соответствующих несвязанным процессам. Вводя в рассмотрение операторы $\mathcal{K}_\alpha(z)$, $\mathcal{K}^\eta_\alpha(z)$, $\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ с помощью соотношений

$$\mathcal{K}_\alpha(z)=T^{(1)}_\alpha(z)-t_\alpha(z);$$

$$\mathcal{K}^\eta_\alpha(z)=T^\eta_\alpha(z)-\sum_{\gamma\in\eta}M^\eta_{\alpha\gamma}(z);$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)=T_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$$

приходим к системе уравнений для этих операторов. Запишем данную систему в виде

$$\mathcal{K}(z)=\mathcal{K}_0(z)+A(z)\,\mathcal{K}(z), \tag{21}$$

где $\mathcal{K}(z)$ — вектор-функция, элементами которой являются шесть операторов типа $\mathcal{K}_\alpha(z)$, двенадцать операторов типа $\mathcal{K}^\eta_\alpha(z)$ и три оператора $\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$, $A(z)$ — операторная матрица размером ($21\times\times 21$). Явный вид элементов вектор-функции $\mathcal{K}_\alpha(z)$ и $A(z)$ легко восстанавливается с помощью системы уравнений (19) и определения оператора типа $\mathcal{K}$.

Второй шаг заключается в переходе к компонентам операторов $\mathcal{K}_\alpha(z)$, $\mathcal{K}^\eta_\alpha(z)$, $\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ путем выделения главных особенностей в ядрах этих операторов в импульсном представлении. Напомним, что главные особенности возникают вследствие существования связанных состояний в подсистемах [12, 13, 22, 23]. В рассматриваемом случае это подсистемы двух, трех частиц и двух независимых пар частиц. Согласно упомянутым выше работам, главные особенности записываются в виде $[z-\varepsilon-f(p)]^{-1}$, где ε — энергия связанного состояния в одной из подсистем, $f(p)$ — некоторая квадратичная форма импульсов частиц. Если число связанных состояний в подсистемах конечно и при этом все $\varepsilon < 0$, то главные особенности не пересекаются с особенностями свободной функции Грина $G_0(z)$ и могут быть выделены в явном виде [12, 22]. Соответствующая процедура и приводит к появлению компонент, число которых оказывается конечным. Процедура выделения компонент может быть применена как к полному T-оператору рассеяния системы, так и к некоторым вспомогательным операторам, на которые разбивается оператор $T(z)$ и для которых формулируется система интегральных уравнений. Мы в основном будем работать с компонентами вспомогательных операторов.

Для решения поставленной задачи — разложения операторов типа $\mathscr{K}$ на компоненты — необходимо знание свойств ядер системы уравнений (21). К изучению этих свойств мы и переходим.

Свойства оператора рассеяния системы двух частиц хорошо известны [22, 24]. Однако прежде чем формулировать их, обсудим свойства двухчастичных связанных состояний. Из результатов [2, гл. XIII] и [25] вытекает, что в используемом классе потенциалов дискретный спектр гамильтониана h_α внутреннего движения в паре α, $h_\alpha = \tilde{p}_\alpha^2 + V_\alpha$, $\sigma_d(h_\alpha)$ состоит из не более чем конечного числа собственных значений конечной кратности, причем среди них нет положительных собственных значений. Как обычно в таких случаях, будем считать, что имеется ровно одно собственное значение единичной кратности: $-\varkappa_\alpha^2 \in \sigma_d(h_\alpha)$ с волновой функцией $|\psi_\alpha\rangle$. Кроме того, будем считать, что ни одна из двухчастичных подсистем не имеет виртуальных состояний с нулевой энергией (по поводу последних см. [24]). Тогда ядро $t_\alpha(p_\alpha, p_\alpha^0, z)$ представляем в виде

$$t(p, p^0, z) = \frac{\varphi(p)\varphi^*(p^0)}{z+\varkappa^2} + \hat{t}(p, p^0, z), \tag{22}$$

где $\varphi(p) = \langle p \mid V \mid \psi\rangle$, $\hat{t}(p, p^0, z)$ — несингулярная часть двухчастичной амплитуды. (Если двухчастичная система имеет виртуальное состояние с нулевой энергией, то это состояние приводит к появлению в $t(z)$ особенности вида $z^{-1/2}$ [24].) Полюсная особенность в (22) вида $(z+\varkappa^2)^{-1}$ приводит к появлению в уравнении (21) главных особенностей вида $(z + \varkappa_\alpha^2 - \tilde{\mathscr{P}}_\alpha^2 - \tilde{p}_\alpha^2)^{-1}$.

Свойства ядер $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$, заданного формулами (13) и (14), были подробно изучены в [12, 13, 20, 26, 27]. Результаты этих работ заключаются в следующем. Оператор $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ представляется в виде

$$\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'}, \cdot, z) = \frac{\zeta_{\alpha,\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'})\zeta^*_{\alpha\alpha'}(\cdot)}{z+\varkappa_\alpha^2+\varkappa_{\alpha'}^2} + L_{\alpha\alpha'}(p_\alpha p'_{\alpha'}, \cdot, z) +$$
$$+ \frac{\varphi(p_\alpha)L_{\alpha'}(p_{\alpha'}, \cdot, z)}{z+\varkappa_\alpha^2-\tilde{p}_{\alpha'}^2} + \frac{\varphi(p_{\alpha'})L_\alpha(p_\alpha, \cdot, z)}{z+\varkappa_{\alpha'}^2-\tilde{p}_\alpha^2}, \tag{23}$$

где операторы $L_\beta(z)$, $\beta=\alpha,\ \alpha',\ (\alpha,\ \alpha')$ есть out-компоненты оператора $\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$. Каждый из этих операторов, в свою очередь, раскладывается на in-компоненты следующим образом:

$$L_\beta(\cdot,\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'},z)=\frac{L^\alpha_\beta(\cdot,\ p^0_\alpha,\ z)\,\varphi^*_{\alpha'}(p^0_{\alpha'})}{z+\varkappa^2_{\alpha'}-\widetilde{p}^{02}_{\alpha}}+$$
$$+\frac{L^{\alpha'}_\beta(\cdot,\ p^0_{\alpha'},\ z)\,\varphi^*_\alpha(p^0_\alpha)}{z+\varkappa^2_\alpha-\widetilde{p}^{02}_{\alpha'}}+L^{\alpha,\alpha'}_\beta(\cdot,\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z). \qquad (24)$$

Функция $\zeta_{\alpha,\alpha'}(p_\alpha,\ p_{\alpha'})$ имеет вид:

$$\zeta_{\alpha,\alpha'}(p_\alpha, p_{\alpha'})=\langle p_\alpha p_{\alpha'}\mid V_{\alpha,\alpha'}\mid\psi_\alpha\psi_{\alpha'}\rangle.$$

Выражения для операторов типа L, фигурирующих в разложении (23), приведены в приложении А. Из (13) и (23) вытекает, что ядро $\widetilde{\mathcal{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ помимо главных особенностей, связанных с двухчастичными связанными состояниями, приводит к главной особенности вида $(z+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'}-\widetilde{\mathcal{P}}^2_\alpha)^{-1}$.

Перейдем теперь к изучению свойств ядра $M^\eta_{\alpha,\gamma}(z)$. Как и в двухчастичном случае, нас будут прежде всего интересовать вопросы конечности числа связанных состояний в трехчастичных подсистемах и отсутствия связанных состояний при положительных энергиях. Обозначим h_η гамильтониан внутреннего движения в трехчастичной подсистеме η, а $\sigma_d(h_\eta)$ — его дискретный спектр. В используемом классе потенциалов (и при отсутствии в двухчастичных подсистемах виртуальных состояний с нулевой энергией) отрицательный дискретный спектр оператора h_η [т. е. $\sigma_d(h_\eta)\cap(-\infty,\ 0)$] является конечным, причем каждое собственное значение имеет конечную кратность [25, 28, 30—32]. Отсутствие связанных состояний при положительных энергиях удается доказать для довольно узкого класса потенциалов, в который из наиболее употребительных ядерных потенциалов попадает только потенциал Юкавы (и его линейные комбинации) [2, XIII.13]. Мы будем считать, что h_η не имеет собственных значений на полупрямой $[0,\ \infty)$, более того, будем считать, что $\sigma_d(h_\eta)$ состоит из единственного собственного значения $-\varkappa^2_\eta$ единичной кратности, причем $-\varkappa^2_\eta<\Sigma_\eta$, где Σ_η — точка начала непрерывного спектра h_η: $\Sigma_\eta=\min\limits_{\alpha\in\eta}(-\varkappa^2_\alpha)$.

При сделанных предположениях для операторов $M^\eta_{\alpha,\gamma}(z)$ имеет место разложение вида [9, 12]

$$M^\eta_{\alpha,\gamma}(p_\alpha,\ p_{\alpha\eta},\ p^0_\gamma,\ p^0_{\gamma\eta},\ z)=\frac{\langle p_\alpha,\ p_{\alpha\eta}\mid V_\alpha P_\alpha V_\gamma\mid p^0_\gamma p^0_{\gamma\eta}\rangle}{z+\varkappa^2_\eta}+$$
$$+\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\mathcal{J}^{(1)}_{\alpha,\gamma}(p_{\alpha\eta},\ p^0_\gamma,\ p^0_{\gamma\eta}z)}{z+\varkappa^2_\alpha-\widetilde{p}^2_{\alpha\eta}}+\frac{\mathcal{J}^{(2)}_{\alpha,\gamma}(p_\alpha p_{\alpha\eta},\ p^0_{\gamma\eta},\ z)\,\varphi^*_\gamma(p^0_\gamma)}{z+\varkappa^2_\gamma-\widetilde{p}^{02}_{\gamma\eta}}+$$
$$+\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\mathcal{J}^{(3)}_{\alpha,\gamma}(p_{\alpha\eta},\ p^0_{\gamma\eta}z)\,\varphi^*_\gamma(p^0_\gamma)}{(z+\varkappa^2_\alpha-\widetilde{p}^2_{\alpha\eta})(z+\varkappa^2_\gamma-\widetilde{p}^{02}_{\gamma\eta})}+\mathcal{J}^0_{\alpha,\gamma}(p_\alpha p_{\alpha\eta},\ p^0_\gamma p_{\gamma\eta},\ z). \qquad (25)$$

В (25) P_d есть проектор на дискретный спектр $\sigma_d(h_\eta)$, который в нашем случае представляется в виде $P_d = |\psi_\eta\rangle\langle\psi_\eta|$, $h_\eta|\psi_\eta\rangle = -\varkappa_\eta^2|\psi_\eta\rangle$. Компоненты $\mathcal{J}^i_{\alpha,\gamma}(z)$, $i = 0, 1, 2, 3$, могут быть выражены через решения уравнений Фаддеева при физических значениях энергии, т. е. когда $z = E \pm i0$ и $E \in [\Sigma_\eta, \infty)$. Соответствующее рассмотрение проведено в работе [12]; его основные моменты будут воспроизведены в приложении Б. Согласно (20) и (25) трехчастичное связанное состояние в подсистеме η приводит к появлению главной особенности вида $(z + \varkappa_\eta^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\eta^2)^{-1}$.

Разложение вспомогательных операторов типа $\mathcal{K}$ на компоненты. На основании свойств ядер системы уравнений (21) можем выделить в этой системе все главные особенности, что повлечет за собой разложение вспомогательных операторов типа $\mathcal{K}$ (20) на компоненты.

Согласно (22) и уравнению для оператора $\mathcal{K}_\alpha(z)$ этот оператор разбивается на компоненты следующим образом:

$$\mathcal{K}_\alpha(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) = u_\alpha(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v_{\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z)}{z + \varkappa_\alpha^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha^2 - \tilde{p}_{\alpha'}^2}, \tag{26}$$

где

$$u_\alpha(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) = \langle\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}|\,\hat{t}_\alpha(z_\alpha)\, G_0(z) \sum_{(\alpha,\alpha')\neq\beta,\beta'} T_{\beta\otimes\beta'}(z)\,|\cdot\rangle, \tag{27}$$

$$v_{\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) = \langle\varphi_\alpha \mathcal{P}_\alpha p_{\alpha'}|\, G_0(z) \sum_{\alpha,\alpha'\neq\beta\beta'} T_{\beta\otimes\beta'}(z)\,|\cdot\rangle$$

и $|\cdot\rangle$ обозначен некоторый набор относительных импульсов частиц в начальном состоянии. Разложение (23) ядра $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ порождает разложение оператора $\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ на компоненты вида

$$\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) = u_{\alpha,\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v^{\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z)}{z + \varkappa_\alpha^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha^2 - \tilde{p}_{\alpha'}^2} + \frac{\varphi_{\alpha'}(p_{\alpha'})\, v^{\alpha}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha,\ \cdot,\ z)}{z + \varkappa_{\alpha'}^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha^2 - \tilde{p}_\alpha^2} + \frac{\zeta_{\alpha,\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'})\, v_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha,\ \cdot,\ z)}{z + \varkappa_\alpha^2 + \varkappa_{\alpha'}^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\alpha^2}. \tag{28}$$

При этом компоненты оператора $\mathcal{K}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ заданы соотношениями:

$$u_{\alpha,\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ \cdot,\ z) = \langle\mathcal{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}|\, L_{\alpha,\alpha'}(z)\, G_0(z) \times \Big[\sum_{(\alpha\alpha')\neq(\beta,\beta')} T^{(1)}_\beta(z) + \sum_{\substack{(\alpha,\alpha')\neq(\beta,\beta')\\ \beta\in\mu}} T^{\mu}_\beta(z) + \sum_{(\alpha,\alpha')\neq(\beta,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z)\Big]\,|\cdot\rangle;$$

$$v_{\alpha,\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha,\ \cdot,\ z) = \langle\zeta_{\alpha,\alpha'}\mathcal{P}_\alpha|\, G_0(z)\,[\ldots]\,|\cdot\rangle;$$

$$v^{\alpha}_{\alpha,\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha,\ \cdot,\ z) = \langle\varphi_\alpha \mathcal{P}_\alpha p_\alpha|\, L_\alpha(z)\, G_0(z)\,[\ldots]\,|\cdot\rangle. \tag{29}$$

Квадратные скобки в двух последних выражениях (29) те же, что и в определении для $u_{\alpha,\,\alpha'}(z)$. Оператор $\mathscr{K}_\alpha^\eta(z)$ разбивается на компоненты следующим образом:

$$\mathscr{K}_\alpha^\eta(\mathscr{P}_\eta p_\alpha p_{\alpha\eta},\ \cdot,\ z) = u_\alpha^\eta(\mathscr{P}_\eta p_\alpha p_{\alpha\eta},\ \cdot,\ z) + \frac{\Phi_{\alpha\eta}(p_\alpha p_{\alpha\eta})\, v_\eta(\mathscr{P}_\eta,\ \cdot,\ z)}{z+\varkappa_\eta^2-\widetilde{\mathscr{P}}_\eta^2} + \\ + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v_\alpha^\eta(\mathscr{P}_\eta p_{\alpha\eta},\ \cdot,\ z)}{z+\varkappa_\alpha^2-\widetilde{\mathscr{P}}_\eta^2-\widetilde{p}_{\alpha\eta}^2}, \tag{30}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&v_\eta(\mathscr{P}_\eta,\ \cdot,\ z) = \langle\psi_\eta\mathscr{P}_\eta \mid \sum_{\gamma\neq\eta} V_\gamma G_0(z)\ \times \\
&\times\Big[\sum_{(\gamma,\gamma')\neq(\beta,\beta')} T_\beta^{(1)}(z) + \sum_{\substack{(\gamma,\gamma)\neq(\beta,\beta')\\ \beta\notin\eta,\ \beta\in\mu}} T_\beta^\mu(z) + \sum_{(\gamma,\gamma')\neq(\beta,\beta')} T_{\beta\otimes\beta'}(z)\Big] \mid\cdot\rangle; \\
&u_\alpha^\eta(\mathscr{P}_\eta p_\alpha p_{\alpha\eta},\ \cdot,\ z) = \\
&= \langle\mathscr{P}_\eta p_\alpha p_{\alpha\eta} \mid \sum_{\gamma\in\eta}\left\{\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}^0(z_\eta) + \mathscr{I}_{\alpha,\gamma}^{(2)}(z_\eta)\frac{\langle\varphi_\gamma\mid}{z_\eta+\varkappa_\gamma^2-h_{0\gamma\eta}}\right\}\ \times \\
&\times G_0(z)\,[\ldots]\mid\cdot\rangle; \\
&v_\alpha^\eta(\mathscr{P}_\eta p_{\alpha\eta},\ \cdot,\ z) = \langle\mathscr{P}_\eta p_{\alpha\eta} \mid\ \times \\
&\times\sum_{\gamma\in\eta}\left\{\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}^{(1)}(z_\eta) + \mathscr{I}_{\alpha,\gamma}^{(3)}(z_\eta)\frac{\langle\varphi_\gamma\mid}{z_\eta+\varkappa_\gamma^2-h_{0\gamma\eta}}\right\} G_0(z)\,[\ldots]\mid\cdot\rangle.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Соглашение о квадратных скобках в (31) такое же, как и в (29). Оператор $h_{0\gamma\eta}$ в (31) есть оператор кинетической энергии относительно движения центра масс пары γ и третьей частицы в подсистеме η, т. е. $\widetilde{p}_{\gamma\eta}^2$.

В (26), (28) и (30) главные особенности выделены только в конечном состоянии, аналогично могут быть выделены главные особенности в начальном состоянии. В результате описанной выше процедуры выделения главных особенностей вместо 21 вспомогательного оператора типа $\mathscr{K}$ возникает 60 компонент типов u и v. Для этих компонент с помощью (19), (21), (26), (28), (30) и определений операторов типа $\mathscr{K}$ легко может быть получена система интегральных уравнений вида

$$U(z) = U_0(z) + W(z)\,U(z), \tag{32}$$

которую следует рассматривать во вспомогательном пространстве 52 функций типов u и v. Для сравнения заметим, что в случае уравнений Якубовского [33] из 18 уравнений для вспомогательных операторов получается система 43 интегральных уравнений для компонент [при тех же условиях на $\sigma_d(h_\alpha)$ и $\sigma_d(h_\eta)$]. В общем случае число компонент, получаемых из системы уравнений (21), равно

$$N_1 = 21 + 4\sum_{\alpha} n_\alpha + \sum_{\alpha\alpha'} n_\alpha n_{\alpha'} + \sum_{\eta} n_\eta, \tag{33}$$

где число состояний в $\sigma_d\,(n_\alpha)$ обозначено n_α, а число состояний в $\sigma_d\,(n_\eta)$ — n_η, в то время как уравнения в [33] разбиваются на

$$N_2 = 18 + 3\sum_{\alpha} n_\alpha + \sum_{\alpha\alpha'} n_\alpha n_{\alpha'} + \sum_{\eta} n_\eta \tag{34}$$

компоненты. Формула (34) получена в предположении, что ядра типов $N^{12,\,34}_{12,\,12}$ и $N^{12,\,34}_{12,\,34}$ в [33] строятся с помощью свертки функций Грина $g_{12}(z)$ и $g_{34}(z)$ [см. формулу (9)]. В этом случае компоненты указанных операторов легко получить из формул, приведенных в приложении А. В первоначальном варианте ядра $N^{12,\,34}_{(\cdot)}(z)$ в [33] предлагалось искать как решения системы интегральных уравнений, в результате чего число компонент увеличивается до $N_2' = N_2 + 6 + \sum_{\alpha} n_\alpha$. Как легко видеть, $N_2 < N_1 < N_2'$. Сравнение уравнений (21) в [33] мы продолжим в приложении В, где покажем, что в уравнениях из [33] имеет место нефизическое разделение асимптотик.

Система интегральных уравнений (32) для компонент типов u и v, получающихся при выделении в in-состоянии главной особенности вида $(z + \varkappa_\alpha^2 + \varkappa_{\alpha'}^2 - \widetilde{\mathscr{P}}^{02}_{\alpha\alpha'})^{-1}$, приведена в приложении Г. Свойства системы (32), (В.1) — (В.3) мы обсудим ниже, а сейчас установим связь между компонентами u и v и элементами S-матрицы системы. Для определенности будем считать, что эти компоненты удовлетворяют системе интегральных уравнений (Г.1) — (Г.3). Положим в этой системе $z = -\varkappa_\alpha^2 - \varkappa_{\alpha'}^2 + \widetilde{\mathscr{P}}^0_\alpha + i0$. Тогда для элементов S-матрицы системы могут быть записаны выражения вида:

$$S_{(\beta+\beta')\leftarrow(\alpha+\alpha')}(\mathscr{P}_\beta,\ \mathscr{P}^0_\alpha) = \delta(\mathscr{P}_\beta - \mathscr{P}^0_\alpha)\,\delta[(\beta\beta'),\ (\alpha,\ \alpha')] -$$
$$- 2\pi i\delta(\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta - \widetilde{\mathscr{P}}^{02}_\alpha)\, v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0);$$

$$S_{\eta\leftarrow(\alpha+\alpha')}(\widetilde{\mathscr{P}}_\eta,\ \widetilde{\mathscr{P}}^0_\alpha) = -2\pi i\delta(\widetilde{\mathscr{P}}_\eta - \varkappa_\eta^2 - E)\, v_\eta(\mathscr{P}_\eta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0);$$

$$S_{\beta\leftarrow(\alpha+\alpha')}(\mathscr{P}_\beta p_\beta' \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) = 2\pi i\delta(\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta + \widetilde{p}^2_{\beta'} - \varkappa_\beta^2 - E)\times$$
$$\times[v_{\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^2_\alpha,\ E + i0) + v^{\beta'}_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) +$$
$$+ \sum_{\beta\in\eta} v^\eta_\beta(\mathscr{P}_\eta p_{\beta\eta},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0)];$$

$$S_{0\leftarrow(\alpha+\alpha')}(\mathscr{P}_\beta p_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) = -2\pi i\delta(\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta + \widetilde{p}^2_{\beta'} + \widetilde{p}^2_\beta - E)\times$$
$$\times\{\sum[u_\beta(\mathscr{P}_\beta p_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) - \psi_\beta(p_\beta)\, v_{\beta^\bullet}(\mathscr{P}_\beta p_{\beta^\bullet} \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0)] +$$
$$+ \sum_{\beta\beta'}[u_{\beta\beta^\bullet}(\mathscr{P}_\beta p_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) - \psi_\beta(p_\beta)\, v^{\beta'}_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E + i0) -$$

$$-\psi_{\beta'}(p_{\beta'})\,v^{\beta}_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_\beta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)-$$
$$-\psi_\beta(p_\beta)\,\psi_{\beta'}(p_{\beta'})\,v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)]+\sum_{\beta\in\eta}\Big[u^\eta_\beta(\mathscr{P}_\eta p_\beta p_{\beta\eta},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)-$$
$$-\psi_\beta(p_\beta)\,v^\eta_\beta(\mathscr{P}_\eta p_{\beta\eta},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)+\frac{\langle p_\beta p_{\beta\eta}\mid V_\beta\mid \Phi_\eta\rangle\,v_\eta(\mathscr{P}_\eta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)}{E+\varkappa^2_\eta-\mathscr{P}^2_\eta-\tilde{p}^2_{\beta\eta}}\Big]\Big\}. \quad (35)$$

Соотношения (35) являются следствием общих свойств компонент полного T-оператора рассеяния системы N частиц [12, 22, 23, 27]. Для примера мы докажем первое из соотношений (35), справедливость оставшихся может быть установлена аналогичным образом. Как легко видеть, компонента $v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)$ возникает при выделении главных особенностей вида $(z+\varkappa^2_\beta+\varkappa^2_{\beta'}-\tilde{\mathscr{P}}^2_\beta)^{-1}$ в out-состоянии и вида $(z+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'}-\tilde{\mathscr{P}}^{02}_\alpha)^{-1}$ в in-состоянии в операторе $T_{\beta\otimes\beta'/\alpha\otimes\alpha'}(z)$, где вспомогательные операторы типа $T_{(\cdot)/\alpha\otimes\alpha'}$ удовлетворяют системе уравнений (19) при условии, что все свободные члены в этой системе, исключая $\mathscr{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$, равны нулю. Далее, операторы типа $T_{\beta\otimes\beta/\gamma'\otimes\gamma}(z)$ выразим через операторы $T_{\beta\beta'/\gamma,\gamma'}(z)$. Последние удовлетворяют системе уравнений (6) при условии, что все свободные члены в этой системе, исключая $N_{\gamma,\gamma'}(z)$, равны нулю. Поскольку

$$T_{\beta,\beta'/\gamma,\gamma'}(z)=V_{\beta,\beta}\delta[(\beta\beta'),\ (\gamma\gamma']+V_{\beta\beta'}G(z)\,V_{\gamma\gamma'},$$

где $G(z)=(z-H)^{-1}$ — полная функция Грина системы, то для оператора $v_{\beta,\beta'}(z)$ в результате проделанных операций получается представление вида

$$v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta\mathscr{P}^0_\alpha z)=\langle\zeta_{\beta\beta'}\mathscr{P}_\beta\mid G_0(z)\mid\mathscr{P}^0_\alpha\zeta_{\alpha\alpha'}\rangle\times$$
$$\times\Big[\begin{cases}1,\ (\alpha\alpha')\neq(\beta\beta')\\0,\ (\alpha\alpha')=(\beta\beta')\end{cases}+\langle\zeta_{\beta\beta'}\mathscr{P}_\beta\mid G_0(z)\Big[\sum_{\substack{\beta\beta'\neq\gamma\gamma'\\ \alpha,\alpha'\neq\gamma\gamma'}}V_{\gamma\gamma'}+V^{\beta\beta'}G(z)\,V^{\alpha\alpha'}\Big]\times$$
$$\times G_0(z)\mid\zeta_{\alpha\alpha'}\mathscr{P}^0_\alpha\rangle,$$

где $V^{\beta\beta'}=V-V_{\beta\beta'}$. В итоге для $v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta\mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)$ при $(\mathscr{P}^2_\beta-\varkappa^2_\beta-\varkappa^2_{\beta'})=(\tilde{\mathscr{P}}^{02}_\alpha-\varkappa^2_\alpha-\varkappa^2_{\alpha'})$ получаем

$$v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta\mathscr{P}^0_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)=\langle\psi_\beta\psi_{\beta'}\mathscr{P}^0_\beta\mid(E-H_0)\mid\mathscr{P}^0_\alpha\psi_\alpha\psi_{\alpha'}\rangle\times$$
$$\times\begin{bmatrix}1,\ (\alpha,\ \alpha')\neq(\beta,\ \beta')\\0,\ (\alpha,\ \alpha')=(\beta,\ \beta')\end{bmatrix}+\langle\psi_\beta\psi_\beta\mathscr{P}_\beta\mid V^{\beta,\beta'}+$$
$$+V^{\beta\beta'}G(E+\mathrm{i}0)\,V^{\alpha\alpha'}\mid\mathscr{P}^0_\alpha\psi_\alpha\varphi_{\alpha'}\rangle=$$
$$=\langle\psi_\beta\psi_{\beta'}\mathscr{P}_\beta\mid V^{\beta\beta'}+V^{\beta\beta'}G(E+\mathrm{i}0)\,V^{\alpha\alpha'}\mid\mathscr{P}^0_\alpha\psi_\alpha\psi_{\alpha'}\rangle,$$

что совпадает с выражением для амплитуды процесса $(\alpha+\alpha')\to\to(\beta+\beta')$ в [8, 21].

Свойства систем интегральных уравнений (21) и (32). Обсуждение свойств систем интегральных уравнений для вспомогательных операторов (21) и для компонент (32) начнем со случая $\operatorname{Im} z \neq 0$. Методом работ [3, 22, 38] может быть доказан следующий результат.

Ядро системы интегральных уравнений (21) является оператором Гильберта — Шмидта в пространстве $\mathbf{L}^2_{21}(R^9)$, где $\mathbf{L}^2_r = \underbrace{\mathbf{L}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{L}^2}_{r}$, если $\operatorname{Im} z \neq 0$, либо $z - \Sigma \in \mathbf{R}^-$, где Σ — точка начала непрерывного спектра системы.

Далее однородные системы уравнений, соответствующие системам (21) и (32), не могут иметь нетривиальных решений при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Действительно, легко показать, что обе однородные системы могут иметь нетривиальные решения только одновременно, причем связь между этими решениями дается соотношениями, аналогичными (27), (29), (31). В [14, 20] было показано, что функция $\psi(z)$, построенная по решению однородной системы уравнений

$$\tilde{\mathscr{K}}(z) = A(z)\,\tilde{\mathscr{K}}(z)$$

следующим образом:

$$\psi(z) = G_0(z)\,[\sum_{\alpha} \tilde{\mathscr{K}}_{\alpha}(z) + \sum_{\eta,\,\alpha\in\eta} \tilde{\mathscr{K}}^{\eta}_{\alpha}(z) + \sum_{\alpha,\,\alpha'} \tilde{\mathscr{K}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)],$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(z - H)\,\psi(z) = 0. \tag{36}$$

При этом можно показать, что если $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $(1 + H_0)\,\psi(z) \in \mathbf{L}^2(R^9)$ и, следовательно, $\psi(z)$ принадлежит области самосопряженности гамильтониана H (1). Из (36) тогда получаем $\psi(z) = 0$, откуда легко вывести, что все $\tilde{\mathscr{K}}(z)$ равны нулю [14]. Таким образом, системы интегральных уравнений (21) и (32) не имеют ложных решений (по поводу последних см. [39—41]).

Пусть теперь $z = E + i0$ и $E \in \mathbf{R}^-$. В этом случае система интегральных уравнений для компонент (32) принадлежит классу интегральных уравнений с неподвижной особенностью и, следовательно, является фредгольмовой [42]. В частности, в данном интервале энергий система (32) может быть преобразована в систему интегральных уравнений, ядра которой вообще не содержат сингулярностей. Преобразования такого типа описаны в [43—46]. При этом авторы работ [43, 44] исходят из преобразования ядер, в то время как в работах [45, 46], основанных на методе Канторовича [47], преобразуются искомые компоненты. Отметим, что метод работ [45, 46] (после разложения по парциальным волнам) приводит к удобному разделению эффектов на и вне энергетической поверхности.

Вопрос о единственности решения системы уравнений (32) при $z = E + i0$ и $E \in \mathbf{R}^-$ может быть решен с помощью техники, описанной в [22] и использованной в [20] при изучении системы интегральных уравнений для амплитуд рассеяния двух частиц во внешнем поле. При $E < \Sigma$ ситуация полностью аналогична случаю комплексных z. Именно если однородная система уравнений

$$U(z) = W(z)\,U(z) \tag{37}$$

имеет нетривиальное решение, то $z \in \sigma_{\text{disc}}(H)$, так как построенная по $U(z)$ волновая функция системы $\psi(z)$:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, z) &= (z - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha - p^2_{\alpha'} - \widetilde{p}^2_\alpha)^{-1} \times \\
&\times \Bigg\{ \sum_{\alpha\alpha'} \Bigg[u_\alpha(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v_{\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_{\alpha'}, z)}{z + \varkappa^2_\alpha - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha - \widetilde{p}^2_{\alpha'}} + u_{\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, z) + \\
&+ \frac{\zeta_{\alpha\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'})\, v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_\alpha + \varkappa^2_{\alpha'} - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha} + \frac{\varphi_{\alpha'}(p'_\alpha)\, v_\alpha(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha z)}{z + \varkappa^2_{\alpha'} - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha - \widetilde{p}^2_\alpha} + u_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, z) + \\
&+ \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v^{\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_{\alpha'} z)}{z + \varkappa^2_\alpha - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha - p^2_\alpha} + \frac{\varphi_{\alpha'}(p_{\alpha'})\, v^{\alpha}_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_{\alpha'} - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha - \widetilde{p}^2_\alpha} \Bigg] + \\
&+ \sum_{\substack{\alpha,\,\eta \\ \alpha\in\eta}} \Bigg[u^\eta_\alpha(\mathscr{P}_\eta p_\alpha p_{\alpha\eta}, z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v^\eta_\alpha(\mathscr{P}_\eta, p_{\alpha\eta}, z)}{z + \varkappa^2_\alpha - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta - \widetilde{p}^2_{\alpha\eta}} + \\
&+ \frac{\langle p_\alpha p_{\alpha\eta} \mid V_\alpha \mid \Phi_\eta \rangle\, v_\eta(\mathscr{P}_\eta, z)}{z + \varkappa^2_\eta - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{38}$$

удовлетворяет условиям $(1 + H_0)\,\psi(z) \in L^2(R^9)$ и $H\psi(z) = z\psi(z)$. Рассмотрим случай $E \in (\Sigma, 0)$, причем $E \neq -\varkappa^2_\alpha$, $E \neq -\varkappa^2_\alpha - \varkappa^2_\alpha$, $E \neq -\varkappa^2_\eta$ для всех α, (α, α') и η. Как мы увидим в дальнейшем, эти точки и только они могут служить точками накопления для энергий связанных состояний и резонансов в системе.

Следуя [20, 22], поступим следующим образом. По решению однородной системы (37) построим функции $\Psi_{\alpha,\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, E + i\tau)$ и $\Phi_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, E + i\tau)$, такие, что

$$|\Psi_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\rangle = N_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\, G_0(E + i\tau) \sum_{\beta\beta' \neq \alpha\alpha'} |\Phi_{\beta\beta'}(E + i\tau)\rangle, \tag{39}$$

а функция $|\Phi_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\rangle$ имеет вид:

$$\Phi_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}. E + i\tau) = A + \sum_\eta B_\alpha + \sum_{\eta'} B_{\alpha'}, (\alpha \in \eta,\ \alpha' \in \eta). \tag{40}$$

В (40) A обозначена первая квадратная скобка в (38), а B_α — вторая квадратная скобка. При этом энергетический аргумент в функциях типа u и v равен $(E + i0)$, а во всех знаменателях $z = E + i\tau$. Из свойств оператора $N_{\alpha\alpha'}(z)$ вытекает, что функция $|\psi_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\rangle$ (39) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
|\psi_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\rangle &= V_{\alpha\alpha'} G(E + i\tau) \times \\
&\times |\psi_{\alpha\alpha'}(E + i\tau)\rangle + V_{\alpha\alpha'} G_0(E + i\tau) \sum_{(\beta\beta') \neq (\alpha\alpha')} |\Phi_{\beta\beta'}(E + i\tau)\rangle.
\end{aligned} \tag{41}$$

Соотношение (41) умножим скалярно сначала на $\langle\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid\times$ $\times G_0(E-i\tau)$, а затем на $\sum\limits_{\beta\beta'\neq\alpha\alpha'}\langle\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)$. Второе из полученных соотношений преобразуем с помощью (41) и сложим оба результата. В итоге получим

$$\langle\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)-G_0(E+i\tau)\mid\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle+$$
$$+\sum_{\beta\beta'\neq\alpha\alpha'}\langle\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)\mid\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle-\langle\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid\times$$
$$\times G_0(E+i\tau)\mid\sum_{\beta\beta'}\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\rangle=0. \tag{42}$$

Далее, заметим, что разность между однотипными компонентами векторов $\mid\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle$ и $\mid\Phi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle$ есть функция, стремящаяся к нулю при $\tau\to0$. Поскольку в последних двух слагаемых в (42) главные особенности $\psi_{\alpha\alpha'}$ и $\Phi_{\alpha\alpha'}$ пересекаются только при наличии трехчастичных связанных состояний, то при отсутствии последних мы можем заменить $\psi_{\alpha\alpha'}$ на $\Phi_{\alpha\alpha'}$. Итак, если выполнено дополнительное условие: $\sigma_d(h_\eta)=\varnothing$ при любом η, то (42) можно записать в виде

$$\langle\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)-G_0(E+i\tau)\mid\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle+$$
$$+\sum_{\beta\beta'\neq\alpha\alpha'}\langle\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)\mid\Phi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle-$$
$$-\langle\Phi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\,G_0(E+i\tau)\mid\sum_{\beta\beta'\neq\alpha\alpha'}\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\rangle=O(\tau), \tag{43}$$

где $O(\tau)\to0$ при $\tau\to0$. Просуммируем выражения (43) по (α,α'). Тогда

$$\sum_{\alpha\alpha'}\langle\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)-G_0(E+i\tau)\mid\psi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle+$$
$$+\sum_{\alpha\alpha'\neq\beta\beta'}\langle\Phi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\mid G_0(E-i\tau)-G_0(E+i\tau)\mid\Phi_{\beta\beta'}(E+i\tau)\rangle=O(\tau). \tag{44}$$

В (44) совершим предельный переход к $\tau\to0$. Заметим при этом, что второе слагаемое в силу наложенных на $\sigma_d(h_\eta)$ условий равно 0. Первое из слагаемых в (44) равно сумме девяти положительных слагаемых, умноженных на $2\pi i$, каждое из которых, как видно из предыдущего, равно 0. Имеем, таким образом,

$$\left.\begin{aligned}&\int d\mathcal{P}_\alpha\mid v_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha,\ E+i0)\mid^2\delta(E+\varkappa_\alpha^2+\varkappa_{\alpha'}^2-\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha^2)=0,\\&\int d\mathcal{P}_\alpha\int dp_\alpha\mid v_{\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha,\ E+i0)+v_{\alpha\alpha'}^{\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha p_\alpha,\ E+i0)+\\&+\sum_{\eta,\,\alpha\in\eta}v_\alpha^\eta(\mathcal{P}_\eta p_{\alpha\eta},\ E+i0)\mid^2\delta(E+\varkappa_\alpha^2-\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha^2-\widetilde{p}_{\alpha\eta}^2)=0.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

С помощью соотношений (45) легко установить, что волновая функция системы

$$|\psi(E+i\tau)\rangle = G_0(E+i\tau)\sum_{\alpha\alpha'}|\Phi_{\alpha\alpha'}(E+i\tau)\rangle$$

является квадратично интегрируемой при всех $\tau \geqslant 0$. Действительно, при изучении скалярного произведения $\langle\psi(E+i\tau)\,|\,\psi(E+i\tau)\rangle$ достаточно оценить вклад от слагаемых, в которых имеются пересекающиеся главные особенности. Типичный интеграл такого типа имеет вид:

$$\int d\mathcal{P}_\alpha \left|\frac{v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha, E+i0)}{E+i\tau+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'}-\widetilde{\mathcal{P}}^2_\alpha}\right|^2 f(\mathcal{P}_\alpha), \qquad (46)$$

$$f(\mathcal{P}_\alpha) = \int dp_\alpha \int dp_{\alpha'}\left|\frac{\zeta_{\alpha\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'})}{E+i\tau-\widetilde{\mathcal{P}}^2_\alpha-\widetilde{p}^2_\alpha-\widetilde{p}^2_{\alpha'}}\right|^2.$$

Используя (45), запишем $v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha, E+i0)$ в виде

$$v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha, E+i0) - v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}\left(\frac{\vec{\mathcal{P}}_\alpha}{\mathcal{P}_\alpha}\sqrt{2\mu_{\alpha\alpha'}(E+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'})}\right).$$

Поскольку в используемом классе потенциалов функция $v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathcal{P}_\alpha, E+i0)$ дифференцируема по $\mathcal{P}_\alpha$, то, как легко видеть, в подынтегральном выражении в (46) не возникает никаких сингулярностей при всех $\tau \geqslant 0$. Кроме того, можно показать, что $(1+H_0)\,\psi(E+i\tau) \in \mathbf{L}^2(R^9)$ при всех $\tau \geqslant 0$.

Таким образом, мы здесь доказали, что при отсутствии трехчастичных связанных состояний и $E \neq -\varkappa^2_\alpha$, $E \neq -\varkappa^2_\alpha - \varkappa^2_{\alpha'}$, $E \in (\Sigma, 0\rangle$ однородная система уравнений (37) имеет нетривиальные решения только в точках $\sigma_d(H) \cap (\Sigma, 0)$.

Заметим, что если $\Sigma_\eta = \min(-\varkappa^2_\eta)$ удовлетворяет неравенству $\Sigma_\eta > \Sigma$, то полученный результат можно распространить на интервал (Σ, Σ_η).

Перейдем теперь к случаю $z = E + i0$, $E \in \mathbf{R}^+$. При этом в итерациях системы (32) и степенях ее ядра помимо главных особенностей появляются так называемые второстепенные особенности, порождаемые пересечением сингулярностей свободных функций Грина $G_0(E+i0)$. Основная задача здесь заключается в том, чтобы показать, что второстепенные особенности ослабляются, а затем вообще исчезают по мере повышения порядка итерации [22, 48].

Запишем N-ю степень ядра $W(z)$ в виде

$$W^N(z) = X^{(N)}(z)\,G_0(z).$$

Как легко видеть, элементы матрицы ядра $X^{(N)}(z)$ имеют главные особенности импульса в in-состоянии. Следовательно, имеет смысл говорить о компонентах операторов $X^{(N)}_{mn}(z)$. Для примера выпишем один из возможных вариантов разложения $X^{(N)}_{mn}(z)$ на компоненты:

$$X^{(N)}_{mn}(\cdot,\ \mathscr{P}^0_\alpha p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z) = {}^N_{mn}\mathscr{X}_\alpha(\cdot,\ \mathscr{P}^0_\alpha p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z) + {}^N_{mn}\mathscr{Y}_\alpha(\cdot,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ p^0_\alpha,\ z) \times \\ \times \frac{\varphi^*_{\alpha'}(p^0_{\alpha'})}{z+\varkappa^2_{\alpha'}-\widetilde{\mathscr{P}}^{02}_\alpha-\widetilde{p}^{02}_\alpha}, \tag{47}$$

где $(\cdot)$ означает некоторый набор импульсов в out-состоянии, например $(\mathscr{P}_\eta,\ p_{\alpha\eta})$. В [9] было установлено, что при $N \geqslant N_0$, где N_0 — фиксированное число, второстепенные особенности отсутствуют. Хотя в [9] этот результат был доказан для цепочек трехмерных диаграмм, не представляет особого труда перенести его на систему уравнений (32). В итоге на основании результатов работ [9, 48] можно утверждать, что оператор $X^{(N)}(E+\mathrm{i}0)$, полученный из $X^{(N)}_{mn}(E+\mathrm{i}\tau)$ предельным переходом $\tau \to +0$, является компактным оператором при $N \geqslant N_0$ в некотором вспомогательном банаховом пространстве. Структура этого пространства описана в [9, 48]. Применимость альтернативы Фредгольма к ядрам подобного типа была доказана в [48].

Если вопрос о применимости альтернативы Фредгольма к системе интегральных уравнений (32) имеет положительное решение независимо от того, существуют или нет трехчастичные связанные состояния, то при изучении вопроса о единственности решения при $z = E+\mathrm{i}0$, $E \in R^+$ мы по-прежнему должны ограничиться случаем, когда $\sigma_d(h_\eta) = \varnothing$ при всех η. При этом решения однородной системы (37) также удовлетворяют соотношениям (45), однако к ним добавляется еще одно. Это соотношение имеет вид:

$$\int d\mathscr{P}_\alpha \int dp_\alpha \int dp_{\alpha'} \Bigg| \sum_{\alpha\alpha'} \Bigg[u_\alpha(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p'_\alpha,\ E+\mathrm{i}0) + u_{\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'}, E+\mathrm{i}0) + \\ + u_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha p_{\alpha'},\ E+\mathrm{i}0) + \\ + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\{v_{\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_{\alpha'},\ E+\mathrm{i}0)+v^{\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_{\alpha'},\ E+\mathrm{i}0)\}}{\varkappa^2_{\alpha'}+\widetilde{p}^2_{\alpha'}} + \\ + \frac{\varphi_{\alpha'}(P_{\alpha'})\{v_\alpha(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)+v^\alpha_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha p_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)\}}{\varkappa^2_{\alpha'}+\widetilde{p}^2_{\alpha'}} + \\ + \frac{\zeta_{\alpha\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'})\, v^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(\mathscr{P}_\alpha,\ E+\mathrm{i}0)}{\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'}+\widetilde{p}^2_\alpha+\widetilde{p}^2_{\alpha'}} \Bigg] + \sum_{\substack{\alpha,\ \eta \\ \alpha\in\eta}} \Bigg[u^\eta_\alpha(\mathscr{P}_\eta p_{\alpha\eta} p_\alpha,\ E+\mathrm{i}0) + \\ + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\, v^\eta_\alpha(\mathscr{P}_\eta p_{\alpha\eta},\ E+\mathrm{i}0)}{\varkappa^2_\alpha+\widetilde{p}^2_\alpha} + \frac{\langle p_\alpha p_{\alpha\eta} \mid V_\alpha \mid \Phi_\eta\rangle\, v_\eta(\mathscr{P}_\eta,\ E+\mathrm{i}0)}{\varkappa^2_\eta+\widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta} \Bigg] \Bigg|^2 \times \\ \times \delta(E-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\alpha-\widetilde{p}^2_\alpha-\widetilde{p}^2_{\alpha'}) = 0. \tag{48}$$

Из (45), (48), так же как и для $E \in \mathbf{R}^-$, можно вывести, что волновая функция $\psi(E+\mathrm{i}0)$ (38) является квадратично-интегрируемой. Необходимая для этого техника была описана выше (см. по этому поводу также [20, 22, 49]). По сравнению с [49] доказательство существенно облегчается сужением класса потенциалов.

Итак, мы установили следующее.

1. К системе интегральных уравнений (32) при всех z, включая действительную ось $z = E + i0$, $E \in \mathbf{R}$, применима альтернатива Фредгольма.

2. Однородная система уравнений (37) не имеет нетривиальных решений при комплексных z (нет ложных решений).

3. Если $\sigma_d(H_\eta) = \varnothing$ для всех η и однородная система имеет нетривиальное решение $v(E + i0)$, где $E \neq -\varkappa_\alpha^2$, $E \neq -\varkappa_\alpha^2 - \varkappa_{\alpha'}^2$, то $E \in \sigma_d(H)$.

К обсуждению вопросов, затронутых в данном разделе, мы вернемся при изучении собственных значений ядра $A^\theta(z)$, полученного из ядра системы интегральных уравнений (21) с помощью комплексного масштабного преобразования. Завершая этот раздел, отметим, что в литературе имеются другие методы изучения уравнений задачи N тел. Ссылки на некоторые из них можно найти в примечаниях к третьему и четвертому томам монографии Рида и Саймона [1, 2].

2. РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМАХ НЕСКОЛЬКИХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Резонансы в системах N частиц с потенциалами, аналитическими относительно масштабных преобразований. Здесь и далее мы будем обсуждать вопрос о резонансах в многочастичных системах и различные методы описания таких резонансов. Поскольку резонансы обычно ассоциируются с полюсами аналитического продолжения матричных элементов функций Грина системы на второй (нефизический) лист, то необходимо располагать математическим аппаратом, позволяющим осуществлять эти аналитические продолжения. В последнее время для этих целей интенсивно развивается метод канонических преобразований гамильтониана системы [2, 4—8], в котором резонансы оказываются собственными значениями несамосопряженного гамильтониана $U(a)HU^{-1}(a)$, где $U(a)$ — оператор канонического преобразования, a — комплексный параметр этого преобразования. Рассмотрим только один частный случай таких преобразований — комплексные масштабные преобразования.

Оператор масштабных преобразований $U(\theta)$ на $L^2(\mathbf{R}^{3N})$ определяется следующим образом:

$$U(\theta) f(r_1 \ldots r_N) = \exp\left\{\frac{3}{2} N\theta\right\} f(e^\theta r_1, \ldots e^\theta r_N). \tag{49}$$

Как легко видеть, оператор $U(\theta)$ является унитарным при вещественных θ, причем $U(\theta_1 + \theta_2) = U(\theta_1) U(\theta_2)$. Оператор кинетической энергии H_0 при этом преобразуется следующим образом:

$$H_0(\theta) = U(\theta) H_0 U^{-1}(\theta) = e^{-2\theta} H_0. \tag{50}$$

Соотношение (50), определенное при вещественных θ, допускает аналитическое продолжение на комплексные θ. Поскольку спектр оператора H_0 есть полупрямая $[0, \infty)$, то из (50) вытекает, что $\sigma(H_0(\theta)) = \{z \mid \arg z = -2\operatorname{Im}\theta\}$, т. е. при $\operatorname{Im}\theta \neq 0$ спектр H_0 определяется от вещественной оси. Оператор взаимодействия V под действием $U(\theta)$ принимает вид:

$$V(\theta) = U(\theta) V U^{-1}(\theta). \tag{51}$$

Соответствующий класс потенциалов был описан в разд. 1. Тогда (см. [2, XIII.10]) можно ввести в рассмотрение оператор

$$\left.\begin{aligned} &H(\theta) = U(\theta) H U^{-1}(\theta), \quad |\operatorname{Im}\theta| < \sigma, \\ &H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

и резольвенту $G^\theta(z) = (z - H(\theta))^{-1}$. Если потенциалы V_α являются аналитическими из класса C_σ, то матричные элементы резольвенты $G(z)$, $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$, допускают аналитическое продолжение на часть нефизического листа энергий D_σ по закону

$$\langle f \mid G(z) \mid f \rangle = \langle f(\theta^*) \mid G^\theta(z) \mid f(\theta) \rangle, \tag{53}$$

где $D_\sigma = \{z \mid -2\sigma < \arg(z - \Sigma) < 0\}$, $f(\theta) = U(\theta) f$. Функции f в (53) принадлежат плотному в $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^{3N})$ множеству аналитических векторов для генератора группы $U(\theta)$ (подробнее по этому поводу см. [2]).

Опишем спектр оператора $H(\theta)$ [2,4—8].

1) $\sigma(H(\theta))$ зависит только от $\operatorname{Im}\theta$ в силу того, что $H(\theta_1)$ и $H(\theta_2)$ унитарно эквивалентны при вещественных $\theta_1 - \theta_2$, $\sigma(H(\theta)) = \sigma_{\text{ess}}(H(\theta)) \cup \sigma_d(H(\theta))$.

2) $\sigma_{\text{ess}}(H(\theta)) = \{e^{-2\theta}\lambda \mid \lambda \in [0, \infty)\} \cup \{\mu_i + e^{-2\theta}\lambda \mid \lambda \in [0, \infty),$ $\mu_i \in \sigma_d(h_i(\theta))\}$. Здесь $h_i(\theta)$ обозначили оператор $U(\theta) h_i U^{-1}(\theta)$, где h_i — гамильтониан движения в i-м канале системы. (В задаче четырех тел существует три типа гамильтонианов внутреннего движения в каналах h_α, h_η и $h_{\alpha,\alpha'} = h_\alpha + h_{\alpha'}$.)

3. $\sigma_d(H(\theta))$ — не более чем счетное множество, предельными точками для которого могут являться лишь 0 и точки из $\sigma_d(h_i(\theta))$. При $|\operatorname{Im}\theta| < \min\left(\sigma, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\sigma_d(H(\theta)) \cap \mathbf{R} = \sigma_d(H)$. Если $0 < \operatorname{Im}\theta_1 < \operatorname{Im}\theta_2 < \pi/2$, то имеет место включение $\sigma_d(H(\theta_1)) \subset \sigma_d(H(\theta_2))$.

Свойство (2) означает, что гамильтониан $H(\theta)$ имеет при $|\operatorname{Im}\theta| < \pi/2$, помимо обычных порогов $-\varkappa_i^2 \in \sigma_d$, еще и комплексные пороги $\mu_i \in \sigma_d(h_i(\theta))$, соответствующие резонансам в каналах.

Для задачи четырех тел комплексные пороги в каналах α и (α, α') удовлетворяют условиям

$$2\operatorname{Im}\theta < \arg\mu_\alpha < 0, \quad \mu_\alpha \in \sigma_d(h_\alpha),$$
$$\mu_{\alpha\alpha'} = \mu_\alpha + \mu_{\alpha'},$$

а трехчастичные комплексные пороги удовлетворяют условиям

$$2\,\mathrm{Im}\,\theta < \arg(\mu_\eta - \Sigma_\eta) < 0,$$

$$\mu_\eta \in \sigma_d(h_\eta),$$

и Σ_η, как обычно, точка начала непрерывного спектра гамильтониана h_η. Спектр гамильтониана $H(\theta)$ для системы четырех тел изображен на рис. 1 [крестики на рисунке обозначают точки из $\sigma(H(\theta))$].

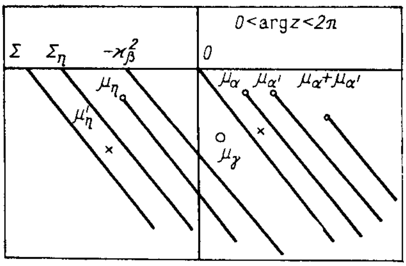


Рис. 1. Спектр гамильтониана $H(\theta)$ в задаче четырех тел. Σ — начало непрерывного спектра оператора H; $-\varkappa_\beta^2$ и Σ_η — вещественные пороги для H; $\mu_\alpha, \mu_\eta, \mu_\alpha + \mu_{\alpha'}$ — комплексные пороги для H (пороги резонансов [2])

Чтобы лучше понять смысл комплексного масштабного преобразования, рассмотрим традиционно используемую в ядерной и атомной физике формальную теорию резонансов [50]. Формальная теория резонансов базируется на следующем разложении резольвенты:

$$G(z) = R(z) + [1 + R(z)H] \times \\ \times \sum_{ij} |\psi_i\rangle \frac{A_{ij}(z)}{\omega(z)} \langle\psi_j|[HR(z) + 1], \tag{54}$$

где оператор $P = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$ является ортогональным проектором, а $R(z)$ — резольвента оператора QHQ, $Q = 1 - P$, $R(z) = (zQ - QHQ)^{-1}$, $\omega(z)$ в (54) определитель с элементами $\omega_{ij}(z) = z\delta_{ij} - \langle\psi_i | H + HR(z)H | \psi_j\rangle$, $A_{ij}(z)$ — соответствующий минор. В формальной теории резонансов задача о нахождении резонансов сводится к нахождению нулей аналитического продолжения определителя $\omega(z)$ на нефизический лист.

Если потенциалы взаимодействия являются аналитическими относительно масштабных преобразований, то аналитическое продолжение определителя $\omega(z)$ (при условии, что $|\psi_i\rangle$ являются аналитическими векторами) можно построить с помощью формулы (53). Заметим, что определитель $\omega(z)$ удовлетворяет условию

$$\omega(z)\,\omega_G(z) = 1, \tag{55}$$

где $\omega_G(z)$ — определитель с элементами $\langle\psi_i | G(z) | \psi_j\rangle$. Поскольку аналитическое продолжение $\omega_G(z)$ осуществляет определитель $\omega_G^\theta(z)$ с элементами $\langle\psi_i(\theta) | G(z) | \psi_j(\theta)\rangle$, то из формулы (55) вытекает, что определитель $\omega(z)$ имеет аналитическое продолжение в область $D(\theta) = \{z \mid -2\,\mathrm{Im}\,\theta < \arg(z - \Sigma) < 0,\ |\mathrm{Im}\,\theta| < \sigma\}$. При этом $\omega_G(z)$ и $\omega(z)$ являются мероморфными функциями в области $D_\theta \setminus \sigma_{ess}(H(\theta))$. Поскольку $\omega(z)$ и $\omega_G(z)$ не зависят от θ в области $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2}$, то область мероморфности этих определителей можно расширить до $D_\theta \setminus U_i\sigma_d(h_i(\theta))$. Отсюда вытекает, что нули $\omega(z)$, являющиеся связанными состояниями и резонансами гамильтониана H, а также полюсами аналитического продолжения $\omega_G(z)$, могут накапливаться только к порогам (как вещественным, так и комплексным) оператора $H(\theta)$. Это обстоятельство уже отмечалось ранее. Далее, определитель $\omega_G(z)$ является определителем Вайнштейна — Аронштайна второго рода, а само разложение — частным случаем теории вырожденных возмущений [51]. Как следствие, связь между нулями аналитического продолжения $\omega(z)$ и кратностью z как собственного значения $H(\theta)$ может быть установлена с помощью второй ($W - A$) формулы. Пусть z_0 — нуль кратности k определителя $\omega(z)$. Тогда ν_1 — кратность z_0 как собственного значения $H(\theta)$, определяется по формуле:

$$\nu_1 = \nu_2 + k,$$

где ν_2 — кратность z_0 как собственного значения $(QHQ)(\theta)$, ($\nu_2 = 0$, если $z_0 \notin \sigma_d\ \{[Q \text{ и } \theta](\theta)\}$. Если же z_0 является полюсом порядка k для $\omega(z)$, то $\nu_1 = \nu_2 - k$.

Некоторые ограничения на положение виртуальных полюсов многочастичной функции Грина *. Одной из важных проблем теории многочастичных резонансов является проблема нахождения областей нефизического листа, свободных от виртуальных полюсов (резонансов). В случае двухчастичной задачи эта проблема была изучена в работах многих авторов (см. [50, гл. 12, § 4, а также [52—54]). Для некоторого класса аналитических потенциалов метод работ [52—54] может быть обобщен на многочастичные системы.

Итак, пусть $V_{ij} \in C_\sigma$ для каждой пары, $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Тогда положения полюсов резольвенты на втором месте могут быть найдены как собственные значения оператора $H(\theta) = e^{-2\theta}H_0 + V(\theta)$. Полагая $\theta = i\rho$, $0 < \rho < \sigma$, запишем уравнение для нахождения резонансных энергий в виде

$$(H_0 + e^{2i\rho}V(\rho))\,|\,\psi\rangle = ze^{2i\rho}\,|\,\psi\rangle. \tag{56}$$

Функцию $|\,\psi\rangle$ в (56) можно считать нормированной на единицу. Из (56) получим

$$\langle\psi\,|\,H_0 + e^{2i\rho}V(\rho)\,|\,\psi\rangle = ze^{2i\rho}$$

или

$$\langle\psi\,|\,H_0\,|\,\psi\rangle + \langle\psi\,|\,\mathrm{Re}\,e^{2i\rho}V(\rho)\,|\,\psi\rangle = \mathrm{Re}\,ze^{2i\rho};$$
$$\langle\psi\,|\,\mathrm{Im}\,e^{2i\rho}V(\rho)\,|\,\psi\rangle = \mathrm{Im}\,ze^{-2i\rho}. \tag{57}$$

Далее, следуя [52—54], домножим первое из уравнений на $\cos\beta$, а второе — на $\sin\beta$, где β — некоторый произвольный вещественный параметр, и сложим полученные соотношения. В результате имеем

$$\cos\beta\,\langle\psi\,|\,H_0\,|\,\psi\rangle + \langle\psi\,|\,\mathrm{Re}\,z\,e^{2i\rho\mp i\beta}V(\rho)\,|\,\psi\rangle = \mathrm{Re}\,z\,e^{2i\rho\mp i\beta}. \tag{58}$$

* Результаты этого раздела были получены авторами совместно с В. Г. Айрапетяном.

Поскольку оператор H_0 является положительно определенным, то при $\cos\beta \geqslant 0$ резонансные энергии должны удовлетворять неравенству

$$-\langle\psi\mid \operatorname{Re} e^{2i\rho\mp i\beta} V(\rho)\mid\psi\rangle \geqslant -\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho\mp i\beta}.$$

Пусть теперь потенциал $V(\rho)$ удовлетворяет оценке $|V(\rho)| = |\sum_{ij} V_{ij}(e^{i\rho} r_{ij})| \leqslant A_\rho$ при $0<\rho<\sigma$. Тогда должно выполняться неравенство

$$A_\rho \geqslant -\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho\mp i\beta} \quad (\cos\beta \geqslant 0). \tag{59}$$

Аналогично при $\cos\beta \leqslant 0$ должно выполняться неравенство

$$A_\rho \geqslant \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho\mp i\beta},$$

которое, как нетрудно видеть, эквивалентно (59). Если $\min A_\rho$ при $\rho\to\sigma$ существует и равен A, то в (59) можно положить $\rho=\sigma$.

В итоге для резонансных энергий получаются ограничения вида

$$A \geqslant -\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta}, \tag{60}$$

где β — произвольный параметр на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, все резонансы должны находиться в области, ограниченной огибающей семейства кривых (60).

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим случай $\sigma=\pi/2$, соответствующий, например, суперпозиции экспоненциальных потенциалов $V(r) = -V_0 e^{-\mu r}$. Поскольку резонансные энергии могут располагаться только в нижней полуплоскости, то достаточно изучить единственное неравенство

$$A \geqslant R\cos(\varphi+\beta), \tag{61}$$

где $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $R = |z|$, $\varphi = \arg z$, $-\pi<\varphi<0$.

Как известно (см., например, [55]), огибающую однопараметрического семейства кривых $u(x, y, \beta)=0$ можно получить исключением параметра β из системы уравнений

$$\begin{cases} u(x, y, \beta)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi(x, y, \beta)}{\partial\beta}=0. \end{cases}$$

Из (61) получаем $\sin(\beta+\varphi)=0$, что (с учетом ограничений на область параметров φ и β) эквивалентно условию $\varphi+\beta=0$, причем $-\pi/2<\varphi<0$. Следовательно, в области $-\pi/2<\varphi<0$ огибающая представляет собой дугу окружности радиуса A. Отметим попутно, что этот результат согласуется с [53]. В области $-\pi<\varphi<\pi/2$ условие $\sin(\beta+\varphi)=0$, $\beta\in(0, \pi/2)$ выполняться не может, поэтому для решения неравенства (61) поступим следующим образом. Заметим, что функция $\cos(\varphi+\beta)$ монотонно возрастает по β при $-\pi<$

$< \varphi < \pi/2$. Это означает, что в области $-\pi < \varphi < \pi/2$ резонансы лежат над кривой $A = R \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -R \sin \varphi$, что эквивалентно условию $|\operatorname{Im} z| \leqslant A$. Полученный результат приведен на рис. 2.

Аналогичным образом могут быть построены огибающие при любом произвольном $\sigma < \pi/2$. Эти огибающие изображены на рис. 3.

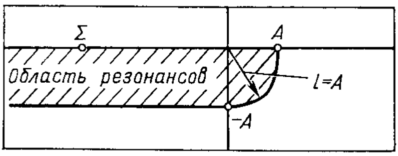
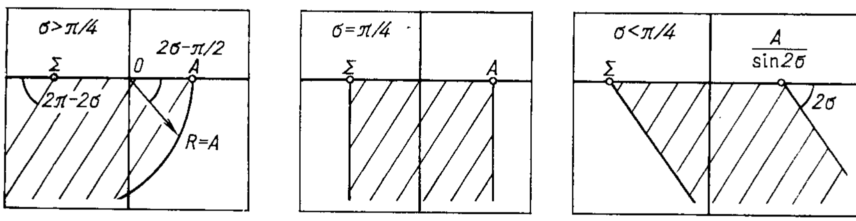


Рис. 2. Область местоположения виртуальных полюсов функции Грина для систем с потенциалами экспоненциального типа

Рис. 3. Область местоположения резонансов для систем с потенциалами из класса C_σ для трех значений σ



Все сказанное выше относится к случаю, когда потенциалы удовлетворяют оценке $\lim\limits_{\rho\to\sigma} |V(\rho)| = A < \infty$. Эта оценка и, следовательно, ограничения вида (60) не выполняются для потенциалов типа потенциалов Кулона и Юкавы. При этом для построения огибающей области расположение резонансных полюсов используется метод Редже [52, 53] (см. также [50, гл. 12, § 4]. Этот метод заключается в следующем.

Пусть потенциал $V(r)$ взаимодействия в системе двух частиц принадлежит классу σ, причем при всех r выполняется оценка $|V(e^{i\sigma}r)| \leqslant V_0/r$. Для потенциалов Кулона * и Юкавы параметр $\sigma = \pi/2$. Далее, для любой функции $\psi(r)$ из области самосопряженности гамильтониана $H_0 = -\frac{1}{2\mu}\nabla^2$ имеет место неравенство

$$\int dr \frac{|\psi(r)|^2}{r^2} \leqslant 4 \int dr\, |\nabla\psi(r)|^2. \tag{62}$$

(По поводу неравенства (62) см. [56, гл. 11, с. 279], а также [57, с. 192, 352]). Заметим, что выражение в правой части (62) равно $8\mu \langle\psi | H_0 | \psi\rangle$, вследствие чего неравенство (62) можно переписать

* Заметим, что ранее мы исключили из рассмотрения дальнодействующий кулоновский потенциал. Однако при изучении проблемы резонансов этот потенциал может быть включен в схему метода комплексных масштабных преобразований [2,4—8].

в виде

$$\int dr \frac{|\psi(r)|^2}{r^2} \leqslant 8\mu \langle \psi | H_0 | \psi \rangle . \tag{63}$$

Поскольку резонансные энергии удовлетворяют соотношению (58), которое на данном этапе удобно записать следующим образом:

$$\cos\beta \langle \psi | H_0 | \psi \rangle + \cos\beta \langle \psi | \operatorname{Re} e^{2i\rho} \times \\ \times V(e^{i\rho} r) | \psi \rangle - \sin\beta \langle \psi | \operatorname{Im} e^{2i\rho} V(e^{i\rho} r) | \psi \rangle = \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho + i\beta}, \tag{64}$$

то, в силу (63) и условия на поведение модуля $V(e^{i\rho} r)$, должно выполняться неравенство

$$\langle \psi | \frac{\cos\beta}{8\mu} \frac{1}{r^2} - \frac{\sqrt{2}\, V_0}{r} - \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho + i\beta} | \psi \rangle \leqslant 0. \tag{65}$$

Это неравенство может выполняться только в том случае, когда существуют значения r, при которых подынтегральное выражение в (65) является неположительным. Если же при любом r (и любом $\beta \in [0, \pi/2]$) имеет место

$$\frac{\cos\beta}{8\mu} \frac{1}{r^2} - \frac{\sqrt{2}\, V_0}{r} - \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho + i\beta} \geqslant 0, \tag{66}$$

то неравенство (66) описывает область значений z, свободную от резонансов. Записывая неравенство (66) в виде

$$\frac{\cos\beta}{8\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{4\sqrt{2}\,\mu V_0}{\cos\beta} \right)^2 - \frac{4\mu V_0^2}{\cos\beta} - \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho + i\beta} \geqslant 0,$$

приходим к следующему уравнению для огибающей:

$$-\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho + i\beta} = \frac{4\mu V_0^2}{\cos\beta}. \tag{67}$$

В (67) можно положить $\rho = \sigma$. Для определенности будем считать, что $\sigma = \pi/2$ (интересующий нас случай потенциалов Кулона и Юкавы). Записывая z в виде $z = x - iy$, $y \geqslant 0$, получаем из (67)

$$x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{4\mu V_0^2}{\cos\beta} = \frac{a_0}{\cos\beta},$$

или, что эквивалентно,

$$x(\cos 2\beta + 1) + y\sin 2\beta = 2a_0. \tag{68}$$

Дифференцируя (68) по β, получаем $\operatorname{tg} 2\beta = y/x$, что после подстановки в (68) дает уравнение для огибающей в виде параболы

$$y^2 = 4a_0(a_0 - x). \tag{69}$$

Следовательно, в системе двух частиц, взаимодействующих посредством потенциала типа Юкавы, все резонансы располагаются при энергиях, удовлетворяющих условию

$$x = E_R < a_0 = 4\mu V_0^2. \tag{70}$$

Заметим, что оценки (67) — (70) могут быть несколько улучшены. С этой целью соотношение (64) превратим в неравенство

$$\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta} \geqslant \left\langle \psi \left| \cos\beta h_0 - \frac{\sqrt{2}\, V_0}{r} \right| \psi \right\rangle. \tag{71}$$

Поскольку основное состояние гамильтониана $\frac{-\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{ze^2}{r}$ имеет энергию $\left(-\frac{(ze^2)^2\mu}{2\hbar^2}\right)$, то гамильтониан $\left(\cos\beta H_0 - \frac{\sqrt{2}\, V_0}{r}\right)$ является ограниченным снизу постоянной $A = (-\mu V_0^2/\cos\beta)$.

Следовательно,

$$\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta} \geqslant -\frac{\mu V_0^2}{\cos\beta}$$

и величину a_0 во всех соотношениях (67) — (70) можно заменить на (μV_0^2), т. е. уменьшить в 4 раза.

Описанные методы легко переносятся на многоканальные задачи. Действительно, в случае системы нескольких частиц неравенство (71) запишется в виде

$$\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta} \geqslant \left\langle \psi \left| \cos\beta H_0 - \sum_{i<j}^{N} \frac{\sqrt{2}\, V_{0ij}}{r_{ij}} \right| \psi \right\rangle. \tag{72}$$

Далее, разобьем H_0 на $\frac{N(N-1)}{2}$ части:

$$H_0 = \sum_{i<j}^{N} \rho_{ij} H_0 = \sum_{i<j}^{N} \rho_{ij} (h_{0ij} + H_{0ij}),$$

где h_{0ij} — оператор кинетической энергии внутреннего движения в паре (ij). Тогда из (72) вытекает следующее неравенство:

$$\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta} \geqslant \sum_{i<j}^{N} \left\langle \psi \left| \rho_{ij} \cos\beta h_{0ij} - \frac{\sqrt{2}\, V_{0ij}}{r_{ij}} \right| \psi \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{i<j}^{N} \frac{\mu_{ij} V_{0ij}^2}{\cos\beta \rho_{ij}} = -\frac{A}{\cos\beta}, \tag{73}$$

при условии $\sum_{i<j}^{N} \rho_{ij} = 1$. Огибающая семейства кривых при $\rho = \sigma = \pi/2$ вида (73) по-прежнему есть парабола (69), причем в качестве a_0 следует выбрать наименьшее значение суммы $\sum_{i<j}^{N} \frac{\mu_{ij} V_{0ij}}{\rho_{ij}}$.

Если $\sigma < \pi/2$, что соответствует, например, парным потенциалам вида

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} (\cos\lambda_1 r + \gamma \sin\lambda_2 r), \tag{74}$$

то огибающая области расположения резонансов получается из (69) поворотом на угол $(\pi - 2\sigma)$ против часовой стрелки. В частности, для потенциалов (74) величина σ определяется из условия $\arg e^{i\sigma}(\mu + i\lambda) = \pi/2$, где $\lambda = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$.

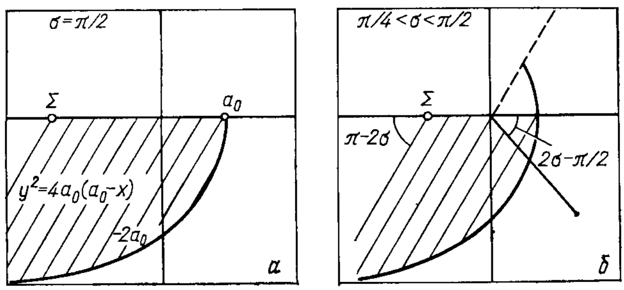


Рис. 4. Огибающие для области местоположения резонансов для систем с потенциалами типа потенциала Юкавы (*а*) и потенциалов типа

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}(\cos\lambda_1 r + \gamma \sin\lambda_2 r) \quad (б)$$

Полученные результаты приведены на рис. 4.

В качестве примера рассмотрим вопрос о резонансах в системе H^-, состоящей из протона и двух электронов. Гамильтониан системы H^- имеет вид:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_2 - \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} = H_0 + V.$$

Устремив параметр масштабного преобразования к $(\pi/2)$, получим, в полной аналогии с (57),

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\rho\to\pi/2}\langle\psi(\rho)\,|\,H_0\,|\,\psi(\rho)\rangle = \operatorname{Re} z\, e^{2i\frac{\pi}{2}} = -\operatorname{Re} \mathbf{z} \geqslant 0, \\ &\lim_{\rho\to\pi/2}\langle\psi(\rho)\,|\,V\,|\,\psi(\rho)\rangle = \operatorname{Im} z\, e^{2i\pi/2} = -\operatorname{Im} z. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Первое из соотношений показывает, что в системах с чисто кулоновским взаимодействием все резонансы располагаются при отрицательных энергиях [7]. Поскольку $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, то, записывая z в виде $z = -x - iy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, сведем (75) к виду

$$\lim_{\rho\to\frac{\pi}{2}}\langle\psi(\rho)\,|\,H_0 - \beta V\,|\,\psi(\rho)\rangle = x - \beta y, \quad (76)$$

где β — некоторый произвольный положительный параметр. Из (76) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$x-\beta y \geqslant \lim_{\rho\to\pi/2} \left\langle \psi(\rho) \left| H_0 - \frac{\beta e^2}{r_{12}} \right| \psi(\rho) \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\rho\to\pi/2} \left\langle \psi(\rho) \left| h_{0\,12} - \frac{\beta e^2}{r_{12}} \right| \psi(\rho) \right\rangle \geqslant -\frac{R\beta^2}{4}, \tag{77}$$

где $\mathrm{Ry} = e^4 m_e/\hbar^2 = 27{,}12$ эВ — атомная единица энергии (Ридберг). Как легко установить, огибающая семейства кривых

$$x-\beta y = -\frac{\mathrm{Ry}}{4}\beta^2$$

есть парабола

$$y^2 = \mathrm{Ry}\, x. \tag{78}$$

Поскольку $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \left[-\frac{R}{2}, \infty\right)$, то полуширины всех резонансов в H^- удовлетворяют оценке $\Gamma/2 \leqslant \mathrm{Ry}/\sqrt{2}$. При выводе этой оценки мы пренебрегли тождественностью электронов. Нетрудно установить, что в состоянии со спином ($S = 0$) полуширины по-прежнему удовлетворяют оценке $\Gamma_0/2 \leqslant R/\sqrt{2}$, а в состоянии с полным спином ($S = 1$) оценка уменьшается в 2 раза: $\Gamma_1/2 \leqslant R/2\sqrt{2}$.

Отметим, что в формулах (75) — (77) нельзя сразу положить $\rho = \pi/2$. Это обстоятельство связано с тем, что при $\operatorname{Im}\theta = \pi/2$ открываются виртуальные состояния отрицательного кулоновского потенциала, нарушающие условия, при которых работает теория комплексных масштабных преобразований. Следовательно, резонансы в H^- нельзя искать как собственные значения гамильтониана $(H_0 + \mathrm{i}V)$. Действительно, из свойств масштабного преобразования вытекает, что $\sigma_d(H(\theta^*)) = \overline{\sigma_d(H(\theta))}$. Если бы можно было положить непосредственно $\theta = \mathrm{i}\pi/2$, то, заменив V на $(-V)$, мы получили бы, что спектр оператора $(H_0 + \mathrm{i}V)$ может располагаться лишь на действительной оси, т. е. никаких резонансов не возникает. Полученное противоречие показывает, что ограничение ($\rho < \pi/2$) является существенным и что соотношения (75) — (77) выполняются только в смысле предельных переходов.

Отметим далее, что огибающая (78) определяется исключительно силой потенциала межэлектронного взаимодействия. Если бы этот потенциал был чисто притягивательным кулоновским потенциалом, то в системе существовали бы только виртуальные и связанные состояния.

Третий класс потенциалов, для которых можно построить огибающую области местоположения резонансов, составляют потенциалы конечного ранга (сепарабельные). Для определенности мы ограничимся потенциалами единичного ранга, т. е. будем считать, что каждый из парных потенциалов представляется в виде $V = \lambda\,|g\rangle\langle g|$, где $|g\rangle$ — аналитический вектор для группы масштабных преобразований на $L^2(R^3)$. Тогда $V(\theta) = U(\theta)VU(\theta)^{-1} = \lambda \mid g(\theta)\rangle \times \langle g(\theta) \mid$ и резонансные энергии удовлетворяют соотношению

$$\langle\psi \mid H_0 \mid \psi\rangle + \langle\psi \mid e^{2\theta} \sum_{i<j}^{N} V_{ij}(\theta) \mid \psi\rangle = ze^{2\theta}. \tag{79}$$

Как и ранее, сведем (79) к виду

$$\cos\beta \langle\psi \mid H_0 \mid \psi\rangle + \operatorname{Re}\langle\psi \mid e^{2i\rho\pm i\beta} \times \sum_{i<j}^{N} V_{ij}(e^{i\rho}) \mid \psi\rangle = \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho\pm i\beta}.$$

В силу определения потенциалов V_{ij} функции $g(\theta) \in L^2(R^3)$ при $0 < \rho < \sigma$. Следовательно, операторы $V_{ij}(e^{i\rho})$ являются операторами Гильберта — Шмидта с нормой

$$\| V(e^{i\rho}) \|_2 = \mid\lambda\mid \int dr \mid g(e^{i\rho} r)\mid^2$$

и все резонансные полюсы должны удовлетворять неравенству

$$\operatorname{Re} z\, e^{2i\rho\pm i\beta} \geqslant -\sum_{i<j}^{N} A_{ij}^{\rho}, \tag{80}$$

где $A_{ij}^{\rho} = \| V_{ij}(e^{i\rho}) \|$. При каждом фиксированном ρ огибающие однопараметрического семейства (80) изображены на рис. 3. Варьируя параметр ρ, $\rho < \sigma$, можно построить кривую, являющуюся границей области местоположения резонансов.

В качестве примера рассмотрим потенциал Ямагучи вида $g(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\gamma r}}{2}$. В этом случае

$$A^{\rho} = \mid\lambda\mid \frac{\pi}{2} \int dr \left| \frac{e^{-2\gamma r e^{i\rho}}}{r^2} \right| = 2\pi^2 \mid\lambda\mid \int_0^{\infty} dr \exp\{-2\gamma r\cos\rho\} = \frac{\pi^2 \mid\lambda\mid}{\gamma\cos\rho}.$$

Таким образом, для потенциала Ямагучи огибающая области расположения резонансов определяется из уравнения

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} z\, e^{2i\rho+i\beta} \geqslant -\frac{A}{\cos\rho}, \\ A = \pi^2 \sum_{i<j}^{N} \frac{\mid\lambda_{ij}\mid}{\gamma_{ij}}, \quad \beta \in (0, \pi/2), \ \rho \in (0, \pi/2). \end{gathered} \tag{81}$$

Огибающую двухпараметрического семейства кривых (81) в общем виде построить трудно. Поэтому в качестве ориентира вычислим две характерные точки, расположенные на пересечении этой огибающей с координатными осями. На рис. 3 видно, что пересечение огибающей по β с осью x расположено в точке $\frac{A}{\sin 2\alpha \cos\alpha}$ при $0 < \alpha < \pi/2$ и в точке $A/\cos\alpha$ при $\pi/4 \leqslant \alpha < \pi/2$. Максимум выражения $\sin 2\alpha \cos\alpha$ определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{2}$ и равен $4/3\sqrt{3}$. Далее, имеем $\min\limits_{\alpha\in\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sin 2\alpha\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4} < \sqrt{2} = \min\limits_{\alpha\in(\pi/4,\,\pi/2)} (\cos\alpha)^{-1}$. Таким образом, точка пересечения огибающей с осью x определяется выражением $3\sqrt{3}A/4$. Если $\pi/2 > \alpha > \pi/4$, то огибающая по β пересекает ось y в точке $\frac{-A}{\sin(2\alpha-\pi/2)\cos\alpha} = \frac{A}{\cos 2\alpha\cos\alpha}$. Максимум выражения $-\cos 2\alpha\cos\alpha = -2x^3 + x$, $x = \cos\alpha$, достигается при $x = 1/\sqrt{6}$ и равен $2/3\sqrt{6}$. Следовательно, точка пересечения огибающей с осью y есть $-\frac{A3\sqrt{6}}{2}$. Примерный вид огибающей области расположения резонансов для суммы потенциалов Ямагучи показан на рис. 5.

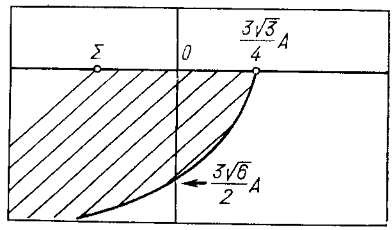


Рис. 5. Область расположения резонансов для систем с парными потенциалами Ямагучи

Интегральные уравнения для резольвенты гамильтониана $H(\theta)$ в задаче четырех тел. Пусть параметр z из резольвентного множества $H(\theta)$ лежит в области

$$D_0 = \{z \mid -2\operatorname{Im}\theta < \arg z < 0,\quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta < \sigma\}.$$

Резольвенту $G^\theta(z)$, $z \in D_0$ представим в виде

$$G^\theta(z) = e^{2\theta}R^\theta(z(\theta)), \tag{82}$$

где $R^\theta(\zeta)$ есть резольвента оператора $\widetilde{H}(\theta) = H_0 + e^{2\theta}V(\theta)$, $R^\theta(\zeta) = (\zeta - \widetilde{H}(\theta))^{-1}$, а параметр $z(\theta)$ равен $ze^{2\theta}$ и, следовательно, лежит на физическом листе. Учитывая это обстоятельство и используя преобразование (82), можно построить интегральные уравнения для резольвент $G^\theta(z)$ и $R^\theta(z)$, аналогичные системе (21). Как легко видеть, ядро $A^\theta(z)$ системы интегральных уравнений для нахождения оператора $T^\theta(z)$

$$T^\theta(z) = V(\theta) + V(\theta)\,G^\theta(z)\,V(\theta)$$

при значениях z, лежащих на физическом листе, получается из ядра системы (21) с помощью преобразования $U(\theta)$:

$$A^\theta(z) = U(\theta)\,A(z)\,U^{-1}(\theta). \tag{83}$$

При этом элементами матрицы $B^\theta(z)$

$$A^\theta(z)=B^\theta(z)\,G_0^\theta(z)$$

являются операторы $t_\alpha^\theta(z)$, $(M_{\alpha,\beta}^\eta)^\theta(z)$ и $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}^\theta(z)$. Имеем, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} t_\alpha^\theta(z) &= V_\alpha(\theta)+V_\alpha(\theta)\,g_\alpha^\theta(z)\,V_\alpha(\theta)=V_\alpha(\theta)+e^{2\theta}V_\alpha(\theta)\times\\ &\qquad\times r_\alpha(z(\theta))\,V_\alpha(\theta),\\ (M_{\alpha,\beta}^\eta)^\theta(z) &= V_\alpha(\theta)\,\delta_{\alpha,\beta}+V_\alpha(\theta)\,g_\eta^\theta(z)\,V_\beta(z)=\\ &= V_\alpha(\theta)\,\delta_{\alpha,\beta}+e^{2\theta}V_\alpha(\theta)\,r_\eta^\theta(z(\theta))\,V_\beta(\theta), \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

где $r_\alpha(\zeta)=(\zeta-\tilde{h}_\alpha(\theta))^{-1}$, $r_\eta(\zeta)-(\zeta-\tilde{h}_\eta(\theta))^{-1}$. Оператор $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}^\theta(z)$, получаемый из $\mathscr{F}_{\alpha\otimes\alpha'}^\theta(z)$ отделением относительного движения центров масс пар α и α', выражается через резольвенту $r_{\alpha,\alpha'}(z)=(z-\tilde{h}_\alpha^{(\theta)}-\tilde{h}_{\alpha'}^{(\theta)})^{-1}$.

Для резольвенты $r_{\alpha,\alpha'}(t)$ можно записать представление вида

$$r_{\alpha,\alpha'}(z)=\int_\Gamma \frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\,r_\alpha(\varepsilon)\otimes r_{\alpha'}(z-\varepsilon), \qquad (85)$$

где контур Γ, проходимый в направлении против часовой стрелки, обладает следующим свойством. Все точки контура Γ лежат в резольвентном множестве гамильтониана h_α, причем контур $\Gamma_1=\{\zeta \mid z-\zeta_1,\ \zeta_1\in\Gamma\}$ содержит внутри себя спектр $h_{\alpha'}$.

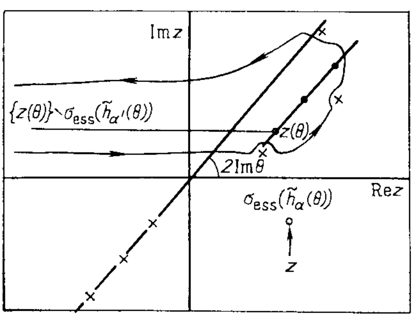


Рис. 6. Контур интегрирования в формуле (85)

Формула (85) доказывается непосредственным вычислением на основании спектральных свойств оператора $h_\alpha(\theta)$.

С помощью формул (84) и (85) можно аналитически продолжить ядро $A^\theta(z)$ на область D_0 нефизического листа. При этом, как указывалось выше, все элементы матрицы $B^\theta(z)$ будут вычисляться на физическом листе энергий. В случае двух- и трехчастичных ядер этот факт является очевидным в силу (84), а для ядра $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}^\theta(z)$ контур Γ достаточно выбрать в виде, изображенном на рис. 6. Крестиками на рис. 6 обозначены из $\sigma_\alpha(\tilde{h}_\alpha(\theta))$, точками — элементы множества $\{z(\theta)\}\setminus\sigma_d(\tilde{h}_{\alpha'}(\theta))$. Как нетрудно видеть, необходимый выбор контура Γ всегда возможен, исключая случай, когда $z(\theta)\in\sigma_d(h_{\alpha,\alpha'}(\theta))$.

Итак, мы построили систему интегральных уравнений вида

$$\mathscr{K}^\theta(z)=\mathscr{K}_0^\theta(z)+A^\theta(z)\,\mathscr{K}^\theta(z), \qquad (86)$$

которая имеет смысл при всех z, удовлетворяющих условию $-2\operatorname{Im}\theta < \arg z < 2\pi - 2\operatorname{Im}\theta$. Рассмотрим теперь свойства этой системы.

Элементы матрицы $B^\theta(z)$ стандартным образом разложены на компоненты, при этом, очевидно, за появление этих компонент будут ответственны точки дискретных спектров операторов $\tilde{h}_\alpha(\theta)$, $\tilde{h}_\eta(\theta)$ и $\tilde{h}_{\alpha,\alpha'}(\theta)$. Поскольку $G_0^\theta(z)$ в рассматриваемой области несингулярна, то оказывается справедливым следующее утверждение: оператор $A^\theta(z)$ является оператором Гильберта — Шмидта при $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H(\theta))$, а оператор $U^\theta(z)$ — ядро системы интегральных уравнений для компонент, компактен при всех z, $-2\operatorname{Im}\theta < \arg z < 2\pi - 2\operatorname{Im}\theta$. Далее, очевидно, что нетривиальные решения однородного уравнения

$$\mathcal{K}^\theta(z) = A^\theta(z)\,\mathcal{K}^\theta(z), \quad z \in \sigma_{\text{ess}}(H(\theta)),$$

описывают дискретный спектр $H(\theta)$, т. е. точки из $\sigma_d(H)$ при $\operatorname{Im}\theta < \pi/2$ и резонансы, лежащие в области D_0.

Об изменении параметров двухчастичных резонансов в трехчастичных реакциях. В качестве примера применения техники комплексных масштабных преобразований рассмотрим вопрос о параметрах двухчастичных резонансов, образующихся в трехчастичных реакциях, при условии, что энергия системы совпадает с энергией одного из трехчастичных резонансов. В такой постановке задача соответствует условиям модели Мигдала — Ватсона (см., например, [58]). Однако, как будет показано ниже, анализ трехчастичной динамики задачи предсказывает, в отличие от приближения Мигдала — Ватсона, изменение параметров двухчастичных резонансов. В частности, оказывается, что двухчастичные резонансы, фоновый фазовый сдвиг которых удовлетворяет условию $\pi/2 \leqslant \delta_{\text{фон}} \leqslant \pi$, сдвигаются вперед, а резонансы с $\delta_{\text{фон}}$ между 0 и $\pi/2$ могут сдвигаться как вперед, так и назад. (При этом мы придерживаемся определения фазового сдвига, используемого в [21, с. 287, рис. 13.3].) О величине сдвига можно судить по изменению формы резонанса. Этот вывод подтверждается анализом экспериментальных данных [см., например, [59]).

Для выделения трехчастичного резонанса наиболее подходящей является формальная теория резонансов. Предполагая для простоты, что трехчастичный резонанс соответствует полному орбитальному моменту $L = 0$, получаем, что вершина распада резонанса $|\Phi(z)\rangle$ пропорциональна $[1 + R(z)H]\,|\psi\rangle$, где $|\psi\rangle$ — аналитический вектор для $U(\theta)$ на $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^6)$ и $\langle\Phi(\theta^*)\,|\,\psi(\theta)\rangle \neq 0$. Здесь $|\Phi(\theta)\rangle$ обозначает волновую функцию резонанса трех частиц. Тогда амплитуду трехчастичного развала (при условии, что реакция протекает через достаточно узкий изолированный уровень составного ядра) можно приближенно записать в виде

$$T(p_{12}, q, z) = C\,\langle p_{12}q_3\,[t_{12}(z)\,G_0(z) + 1]\,(V_{13} + V_{23})\mid \Phi(z)\rangle, \quad (87)$$

$$z = \tilde{p}_{12}^2 + \tilde{q}_3^2 + i0.$$

В (87) мы предположили, что в подсистеме 12 имеется достаточно узкий резонанс, и отбросили члены с $t_{13}(z)$ и $t_{23}(z)$, не содержащие резонансов.

Выделим резонансную часть в $t_{12}(z)$. Согласно теории комплексных масштабных преобразований, резонансный вклад в $t^{\theta}(z)$ можно выразить слагаемым:

$$\sum_{m=-l}^{l} \frac{V(\theta)\mid\psi_m(\theta)\rangle\langle\psi_m(\bar\theta)\mid V(\theta)}{z-z_0} = \sum_{m=-l}^{l} \frac{\mid\varphi_m(\theta)\rangle\langle\varphi_m(\bar\theta)\mid}{z-z_0}. \quad (88)$$

В (88) $\Sigma\mid\psi_m(\theta)\rangle\langle\psi_m(\bar\theta)\mid$ есть проектор на собственное значение z_0 оператора $h(\theta)$, соответствующее орбитальному моменту l, и $\mid\varphi_m(\theta)\rangle = V(\theta)\mid\psi_m(\theta)\rangle$. Поскольку $\langle p\mid\varphi(\bar\theta)\rangle = \langle -p\mid\varphi(\theta)\rangle^*$, то интересующее нас разложение можно записать в виде [3]:

$$t^{\theta}(p, \bar p', z) = (-1)^l\,(2l+1)\,p_l(p\cdot p')\,\frac{\chi^{\theta}(p)\,\chi^{\theta}(p')}{z-z_0} + \tilde t^{\theta}(p, p', z), \quad (89)$$

где $\tilde t(z)$ — нерезонансная часть амплитуды. Полагая $\theta = 0$, получаем вклад резонанса в амплитуду $t(p, p', z)$ при условии, что $\chi^0(p)$ существует. В частности, это условие выполняется для суперпозиции гауссовых потенциалов, если $-\pi/2 < \arg z_0$, а также для обобщенных потенциалов Юкавы типа μ_0 (см. [1]):

$$V(r) = \frac{1}{r}\int_{\mu_0}^{\infty} d\zeta\,\sigma(\zeta)\,e^{-\zeta r},$$

если только $\mu_0 + \mathrm{Im}\,(2\mu_{12}z_0)^{1/2} > 0$.

Результат, аналогичный (89), можно получить из метода квазичастиц Вайнберга. Пусть α_j — резонансное собственное значение ядра $VG_0(z)$, т. е. α_j достаточно близко к единице. Тогда вклад этого собственного значения в амплитуду $t(p, p', z)$ описывается следующим образом [50]:

$$\frac{\langle p\mid\Phi_j(z)\rangle\langle -p'\mid\Phi_j(z)\rangle}{1-\alpha_j(z)}, \quad (90)$$

где $\alpha_j(z)\,\Phi_j(z) = VG_0(z)\,\Phi_j(z)$, причем $\langle\Phi_j(\bar z)\,\Phi_j(z)\rangle = 1$. Полагая, что $\alpha_j(z_0) = 1$ и раскладывая $\Phi_j(z)$ и $\alpha_j(z)$ по степеням $(z-z_0)$, получаем результат, аналогичный (89), причем в качестве $\chi^0(p)$ можно взять

$$\left(\frac{d\alpha_j(z)}{dz}\bigg|_{z=z_0}\right)^{-1/2}\langle p\mid\Phi_j(\mathrm{Re}\,z_0 + i0)\rangle.$$

Преобразуем теперь выражение (27), для чего запишем $G_0\,(E+\mathrm{i}0)$ в виде $\mathscr{P}\dfrac{1}{E-H_0}-\mathrm{i}\pi\delta\,(E-H_0)$ и учтем, что $E=\tilde{p}_{12}^2+\tilde{q}_3^2$. Кроме того, при вычислении интеграла с главным значением исключим из рассмотрения нерезонансные слагаемые. В результате получим, что амплитуда $T\,(p_{12},\ q_3,\ z)$ пропорциональна величине:

$$p_{12}t_{12}^l\,(p_{12})\,\Phi_1\,(p_{12},\ q_3)+\frac{\chi^0\,(p_{12})}{p_{12}^2-z_0}\,\Phi_2\,(p_{12},\ q_3), \tag{91}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1\,(p_{12},\ z_3)&=\mu_{12}\int d\Omega\,p'_{12}P_l\,(p_{12},\ p'_{12})\times\\ &\times\langle p_{12}\frac{p'_{12}}{p'_{12}}q\mid(V_{13}+V_{23})\mid\Phi\,(E+\mathrm{i}0)\rangle;\\ \Phi_2\,(p_{12},\ q_3)&=\mathscr{P}\int dp'_{12}\,\frac{\chi^0\,(p'_{12})\,P_l\,(p_{12}\cdot p'_{12})}{\tilde{p}_{12}^2-\tilde{p}_{12}'^2}\times\\ &\times\langle p'_{12}q_3\mid(V_{13}+V_{23})\mid\Phi\,(E+\mathrm{i}0)\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Далее, можно предположить, что функции Φ_1 и Φ_2 слабо зависят от p_{12} в окрестностях резонанса при фиксированных углах вылета частиц. Это предположение оправдано по крайней мере для достаточно узкого двухчастичного резонанса. Тогда для $T\,(p_{12},\ q_3,\ E+\mathrm{i}\theta)$ можно получить параметризацию вида

$$p_{12}t_{12}^l\,(p_{12})+\left[\frac{t_{12}^l\,(p_{12})}{\tilde{p}_{12}^2-z_0}\right]^{1/2}\rho. \tag{93}$$

В (91) и (93) $t^l\,(p)=t^l\,(p,\ p,\ \tilde{p}^2+\mathrm{i}0)$, а параметр ρ в (93) — некоторая постоянная, зависящая от углов вылета. При выводе формулы (93) было использовано равенство $t^l\,(p)=(\tilde{p}^2-z_0)^{-1}\,\chi^{02}\,(p)$. Отметим, что при вычислении квадратного корня из знаменателя во втором слагаемом в (93) необходимо учитывать, что $-\pi<\arg z_0<0$.

Следует иметь в виду, что параметризация (93) возможна лишь для рассматриваемого типа реакций, т. е. идущих через трехчастичный резонанс. В противном случае эффект изменения параметров двухчастичного резонанса будет в сильной степени зависеть от внемассовых эффектов в трехчастичных амплитудах, в рассматриваемом случае внемассовые эффекты в значительной степени ослаблены.

Перейдем к анализу формулы (93). Первое слагаемое в (93) сдвигает двухчастичный резонанс по оси энергий, независимо от фонового сдвига. Второе слагаемое уже зависит от $\delta_{\text{фон}}$, причем при $0<\delta_{\text{фон}}<\pi/2$ это слагаемое сдвигает резонанс назад или вперед. В итоге резонансы с $\delta_{\text{фон}}$ могут сдвигаться как вперед, так и назад. Аналогичным образом можно проследить изменение формы резонанса в зависимости от $\delta_{\text{фон}}$. Изменение положения и формы резонанса легко установить для конкретных процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ОПЕРАТОРА $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$

На основании результатов работ [12, 13, 27] выражения для компонент оператора $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ [операторов $L^{\rho}_{\beta}(z)$, β, $\rho=\alpha;\ \alpha';\ (\alpha,\ \alpha')$] можно привести к виду

$$L^{\alpha}_{\alpha}(p_\alpha,\ p^0_\alpha,\ z)=\hat{t}_\alpha(p_\alpha p^0_\alpha;\ z+\varkappa^2_{\alpha'})+(z+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'})^{-1}\psi_\alpha(p_\alpha)\psi^*_\alpha(p^0_\alpha),$$

$$L^{\alpha'}_{\alpha}(p_\alpha,\ p^0_{\alpha'},\ z)=\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\varphi^*_{\alpha'}(p_{\alpha'})}{z-\tilde{p}^2_\alpha-\tilde{p}^{02}_{\alpha'}}+(z+\varkappa^2_\alpha+\varkappa^2_{\alpha'})^{-1}\psi_\alpha(p_\alpha)\psi^*_{\alpha'}(p^0_{\alpha'}),$$

$$L^{\alpha\alpha'}_{\alpha}(p_\alpha,\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z)=[\tau_\alpha(p_\alpha p^0_\alpha,\ z+\varkappa^2_{\alpha'})-\tau_\alpha(p_\alpha p^0_\alpha,\ z-\tilde{p}^2_{\alpha'})]\psi^*_{\alpha'}(p^0_{\alpha'})+$$
$$+\frac{\hat{t}_\alpha(p_\alpha p^0_\alpha,\ z-p^{02}_{\alpha'})\varphi^*_{\alpha'}(p^0_{\alpha'})}{z-\tilde{p}^2_\alpha-\tilde{p}^{02}_{\alpha'}}-\psi_\alpha(p_\alpha)\zeta^*_{\alpha\alpha'}(p^0_\alpha p^0_{\alpha'}). \tag{A.1}$$

Функция $\tau(p,\ p^0,\ z)$ в (А.1) определена следующим образом:

$$\tau(p,\ p^0,\ z)=\hat{t}(p,\ p^0,\ z)-V(p-p^0)=$$
$$=\int dq\,\frac{t(p,\ q,\ \tilde{q}^2+i0)\,t(q,\ p^0,\ \tilde{q}^2-i0)}{z-\tilde{q}^2}. \tag{A.2}$$

В силу симметричности выражения (14) для $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(p_\alpha p_{\alpha'},\ p^0_\alpha p^0_{\alpha'},\ z)$ относительно перестановки in- и out-состояний формулы для $L^{\beta}_{\alpha'}(z)$, $\beta=\alpha;\ \alpha';\ (\alpha,\ \alpha')$ получаются из (А.1) заменой индекса α на α', и наоборот. Выражения для оператора $L^{\alpha}_{\alpha\alpha'}(z)$ получаются из $L^{\alpha\alpha'}_{\alpha}(z)$ с помощью соотношения

$$[L^{\alpha}_{\alpha\alpha'}(z)]^+=L^{\alpha\alpha'}_{\alpha}(z^*),$$

т.е.

$$L^{\alpha}_{\alpha,\,\alpha'}(p_\alpha p_\alpha,\ p^0_\alpha,\ z)=[L^{\alpha,\,\alpha'}_{\alpha}(p^0_\alpha,\ p_\alpha p'_\alpha,\ z^*)]^*.$$

Аналогично получается выражение для $L^{\alpha'}_{\alpha,\,\alpha'}(z)$.

Выражение для $L^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(z)$ имеет вид:

$$L^{\alpha\alpha'}_{\alpha\alpha'}(z)=A_1(z)+A_2(z)+A_3(z). \tag{A.3}$$

Первое слагаемое в (А.3) равно

$$A_1(z)=\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\varphi^*_\alpha(p^0_\alpha)}{\tilde{p}^2_\alpha-\tilde{p}^{02}_\alpha}\ [\Phi_{\alpha'}(p_{\alpha'}p^0_{\alpha'},\ \tilde{p}^2_\alpha)-\Phi_{\alpha'}(p_{\alpha'}p^0_{\alpha'},\ \tilde{p}^{02}_\alpha)], \tag{A.4}$$

где

$$\Phi_{\alpha'}(p,\ p^0,\ a^2)=\frac{1}{-\varkappa^2_\alpha-a^2}\ [\tau_{\alpha'}(p,\ p^0,\ z+\varkappa^2_\alpha)-\tau_{\alpha'}(p,\ p^0,\ z-a^2)].$$

Выражение для второго слагаемого в (A.3) получается из (A.4) заменой индексов. Последнее слагаемое в (A.3)

$$A_3(z)=\sum_{i=1}^{4} B_i(z), \tag{A.5}$$

где

$$B_1(z)=V_\alpha(p_\alpha-p_\alpha^0)\,V_{\alpha'}(p_{\alpha'}-p_{\alpha'}^0)\left(\frac{1}{z-\tilde p_\alpha^2-\tilde p_\alpha^{02}}+\frac{1}{z-\tilde p_{\alpha'}^2-\tilde p_\alpha^{02}}\right),$$

$$B_2(z)=V_\alpha(p_\alpha-p_\alpha^0)\left[\frac{\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'}p_{\alpha'}^0,\ z-\tilde p_\alpha^2)-\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'}p_{\alpha'}^0,\ z-\tilde p_\alpha^{02})}{\tilde p_\alpha^2-p_\alpha^{02}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'}p_{\alpha'}^0,\ z-\tilde p_\alpha^2)}{z-\tilde p_\alpha^2-\tilde p_{\alpha'}^{02}}+\frac{\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'},\ p_{\alpha'}^0,\ z-\tilde p_\alpha^{02})}{z-\tilde p_\alpha^{02}-\tilde p_{\alpha'}^2}\right]. \tag{A.6}$$

Выражение для $B_3(z)$ получается из выражения для $B_2(z)$ переменой индексов. Наконец, $B_4(z)$ есть интеграл вида

$$B_4(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\left(\frac{1}{\varepsilon-\tilde p_\alpha^2+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-\tilde p_{\alpha'}^2+i\tau_2}\right)\times$$
$$\times\tau_\alpha(p_\alpha p_\alpha^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'}p_{\alpha'}^0,\ E-\varepsilon+i\tau_2)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon-\tilde p_\alpha^{02}+i\tau_1}+\frac{1}{E-\varepsilon-p_{\alpha'}^{02}+i\tau_2}\right). \tag{A.7}$$

Преобразованием сингулярных знаменателей (A.7) приводится к виду

$$B_4(z)=\frac{1}{\tilde p_\alpha^2-\tilde p_\alpha^{02}}[\mathscr{D}(\tilde p_\alpha^2-i\tau_1)-\mathscr{D}(\tilde p_\alpha^{02}-i\tau_1)]+$$
$$+\frac{1}{z-\tilde p_\alpha^2-\tilde p_{\alpha'}^2}[\mathscr{D}(\tilde p_\alpha^2-i\tau_2)-\mathscr{D}(E-\tilde p_{\alpha'}^{02}+i\tau_2)]+$$
$$+\frac{1}{z-\tilde p_{\alpha'}^2-\tilde p_\alpha^{02}}[\mathscr{D}(\tilde p_\alpha^{02}-i\tau_1)-\mathscr{D}(E-\tilde p_{\alpha'}^2+i\tau_2)]+$$
$$+\frac{1}{\tilde p_{\alpha'}^{02}-\tilde p_{\alpha'}^2}[\mathscr{D}(E-\tilde p_{\alpha'}^2+i\tau_2)-\mathscr{D}(E-\tilde p_{\alpha'}^{02}+i\tau_2)], \tag{A.8}$$

где

$$\mathscr{D}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi i}\,\frac{\tau_\alpha(p_\alpha p_\alpha^0,\ \varepsilon+i\tau_1)\,\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'}p_{\alpha'}^0;\ E-\varepsilon+i\tau_2)}{\varepsilon-\zeta}. \tag{A.9}$$

Заметим, что в некоторых случаях, например для сепарабельного потенциала Ямагучи, интеграл (A.9) вычисляется в явном виде. Если в разложении $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ на компоненты пренебречь слагаемым $B_4(z)$, то такое приближение [задаваемое явными выражениями (А.1)—(А.6)] будет иметь тот же смысл, что и приближение Амадо — Лавлейса в задаче трех частиц [3,29]. Отметим также, что связь свойств оператора $\widetilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ и его компонент $L_\beta(z)$ с кластерными свойствами меллеровских операторов и S-матриц рассеяния в системе двух невзаимодействующих подсистем частиц была изучена в работах [11—13,27].

Как легко видеть, члены вида $\frac{1}{\widetilde{p}_\alpha^2 - \widetilde{p}_\alpha^{02}} [\mathscr{Z}(\widetilde{p}_\alpha^2 - i\tau_1) - \mathscr{Z}(\widetilde{p}_\alpha^{02} - i\tau_1)]$ возникают при преобразовании интеграла, аналогичного

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \frac{\tau_\alpha(p_\alpha p_\alpha^0, \varepsilon + i\tau_1)\,\tau_2(E - \varepsilon + i\tau_2)}{(\varepsilon - \widetilde{p}_\alpha^2 + i\tau_1)(\varepsilon - \widetilde{p}_\alpha^{02} + i\tau_1)}. \tag{А.10}$$

Подставляя в (А.10) выражение для $\tau_{\alpha'}(z)$ в виде (А.2) и учитывая, что при $\tau_1 \neq 0$ и $\tau_2 \neq 0$ можно интегрировать в любом порядке, получаем для (А.10) представление вида

$$\int dq_{\alpha'} \frac{\tau_\alpha(p_\alpha p_\alpha^0, z - \widetilde{q}_{\alpha'}^2)\,\tau_{\alpha'}(p_{\alpha'} q_{\alpha'}, \widetilde{q}_{\alpha'}^2 + i0)\,\tau_{\alpha'}(q_{\alpha'} p_{\alpha'}^0, \widetilde{q}_{\alpha'}^2 - i0)}{(z - \widetilde{p}_\alpha^2 - \widetilde{q}_{\alpha'}^2)(z - \widetilde{p}_\alpha^{02} - \widetilde{q}_{\alpha'}^2)}. \tag{А.11}$$

Из (А.11) видно, что интегралы типа (А.10) не имеют никаких особенностей при $z \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$, поскольку знаменатели в (А.11) в этом случае несингулярны. Из этого результата, свойств функций $\tau(p, p^0, z)$ [3,22] и явных выражений для компонент $L_\alpha^\rho(z)$ заключаем, что при $z \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ эти компоненты не имеют особенностей ни по энергии, ни по импульсам.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
РАЗЛОЖЕНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ АМПЛИТУДЫ $M_{\alpha,\beta}^\eta(z)$

Ниже будет получено разложение (25) для трехчастичной амплитуды $M_{\alpha,\beta}^\eta(z)$. В целях сокращения записи мы будем использовать вместо $p_{\alpha\eta}$ обозначения q_α и всюду опускать индекс η, исключая обозначения для энергии трехчастичного связанного состояния. Основой для дальнейшего рассмотрения будет являться доказанное в [22] соотношение для меллеровских операторов Ω_μ, $\mu = 0, \alpha$:

$$\sum_\mu \Omega_\mu \Omega_\mu^+ = I - P_\alpha, \tag{Б.1}$$

где I — единичный оператор в гильбертовом пространстве функций, зависящих от переменных p_α и q_α; P_α проектор на дискретный спектр гамильтониана h_η. Из (Б.1) вытекает следующее представление для оператора $T_{\alpha\,\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} + V_\alpha (z - h_\eta)^{-1} V_\beta$:

$$T_{\alpha,\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha,\beta} + \frac{V_\alpha |\psi\rangle\langle\psi| V_\beta}{z + \varkappa_\eta^2} + \sum_\mu \int d(\cdot)_\mu \frac{V_\alpha \Omega_\mu |\cdot\rangle_\mu\, {}_\mu\langle\cdot| \Omega_\mu^+ V_\beta}{z - E_\mu},$$

$$|\cdot\rangle_\alpha = |q_\alpha^0\rangle, \quad d(\cdot)_\alpha = dq_\alpha^0, \quad E_\alpha = -\varkappa_\alpha^2 + q_\alpha^{02}/2n_\alpha = -\varkappa_\alpha^2 + \widetilde{q}_\alpha^{02},$$

$$|\cdot\rangle_0 + |p^0, q^0\rangle, \quad d(\cdot)_0 = dp^0\, dq^0, \quad E_0 = p_0^2/2\mu + q^{02}/2n = \widetilde{p}^{02} + \widetilde{q}^{02}. \tag{Б.2}$$

Согласно сделанным выше предположениям $\langle p_\alpha q_\alpha | V_\alpha \Omega_\mu | p^0_\mu \rangle$ и $\langle p_\alpha q_\alpha | V_\alpha -$ $- \Omega_0 | p^0_\alpha q^0_\alpha \rangle$ однозначно выражаются через амплитуды $\mu_{\alpha\beta}$ $(E + i0)$, $E \in \sigma_c$ (h_η) и компоненты этих амплитуд. Имеем

$$\langle p_\alpha q_\alpha \mid V_\alpha \Omega_0 \mid p^0_\alpha q^0_\alpha \rangle = t_\alpha (p_\alpha p^0_\alpha,\ \widetilde{p}^{02}_\alpha)\,\delta(q_\alpha - q^0_\alpha) + \sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ E_0 + i0),$$

$$\langle p_\alpha q_\alpha \mid V_\alpha \Omega_\gamma \mid q^0_\gamma \rangle = \varphi_\alpha(p_\alpha)\,\delta(q_\alpha - q^0_\alpha)\,\delta_{\alpha,\gamma} + \zeta_{\alpha,\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma + i0). \qquad (Б.3)$$

В (Б.3) мы ввели в рассмотрение in-компоненты операторов $M_{\alpha,\gamma}(z)$:

$$M_{\alpha,\gamma}(p_\gamma q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ z) = \tau_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ z) + \frac{\zeta_{\alpha\gamma}(p^0_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ z)\,\varphi^*_\gamma(p^0_\gamma)}{z + \varkappa^2_\gamma - \widetilde{q}^{02}_\gamma}. \qquad (Б.4)$$

Помимо разложения (Б.4) в дальнейшем нам также понадобятся out-компоненты операторов $M_{\alpha\gamma}(z)$ и $\zeta_{\alpha\gamma}(z)$:

$$\left.\begin{aligned} M_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ z) &= u_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ z) + \frac{\varphi(p_\alpha)\,v_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0_\gamma q^0_\gamma,\ z)}{z + \varkappa^2_\alpha - \widetilde{q}^{12}_\alpha};\\ \zeta_{\alpha,\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ z) &= \rho_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ z)}{z + \varkappa^2_\alpha - \widetilde{q}^2_\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (Б.5)$$

Еще раз напомним, что при $z = E + i0$ и $E \in \sigma_c$ (h_η) компоненты операторов $M_{\alpha\gamma}$ (z), т. е. функции типа u, v, ζ, ρ, ω и т. д., однозначно определяются из решения трехчастичных интегральных уравнений.

Подставляя (Б.3) в (Б.2), получаем в результате несложных алгебраических преобразований:

$$\begin{aligned} &M_{\alpha,\beta}(p_\alpha q_\alpha,\ p'_\beta q'_\beta,\ z) = \\ &= \int dp^0\, dq^0 \frac{\langle p_\alpha q_\alpha \mid t_\alpha(E_0 + i0) \mid p^0 q^0\rangle}{z - E_0} \langle p^0 q^0 \mid t_\beta(E_0 - i0) \mid p'_\beta q'_\beta\rangle [1 - \delta_{\alpha\beta}] + \\ &+ \frac{\zeta_{\alpha\beta}(p_\alpha q_\alpha,\ p'_\beta,\ E'_\beta + i0)\,\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{z - E'_\beta} + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\zeta^*_{\beta,\alpha}(p'_\beta q'_\beta,\ q_\alpha,\ E_\alpha + i0)}{z - E_\alpha} + \\ &+ \sum_{\gamma \neq 0} \int dq^0_\gamma \frac{\zeta_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma + i0)\,\zeta^*_{\beta\gamma}(p'_\beta q'_\beta,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma + i0)}{z - E_\gamma} + \\ &+ \sum_{\gamma \neq 0} \int dp^0\, dq^0 \frac{M_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\, t_\beta(p^0_\beta p'_\beta,\ \widetilde{p}^{02}_\beta - i0)\,\delta(q_\alpha - q^0_\alpha)}{z - E_0} + \\ &+ \sum_{\gamma \neq 0} \int dp^0\, dq^0 \frac{t_\alpha(p_\alpha p^0_\alpha,\ \widetilde{p}^{02}_\alpha + i0)\, M^*_{\beta\gamma}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\,\delta(q_\alpha - q^0_\alpha)}{z - E_0} + \\ &+ \sum_{\mu,\ \gamma \neq 0} \int dp^0\, dq^0 \frac{M_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\, M^*_{\beta,\mu}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)}{z - E_0}, \end{aligned} \qquad (Б.6)$$

$$E_\alpha = -\varkappa^2_\alpha + \widetilde{q}^2_\alpha, \qquad E'_\beta = -\varkappa^2_\beta + \widetilde{q}'^2_\beta.$$

Следующий шаг заключается в разложении (Б.6) на компоненты. Для этого необходимо подставить в (Б.6) разложения (Б.5) и преобразовать сингулярные знаменатели. Один из возможных вариантов заключается в использовании тождеств:

$$\frac{1}{a}\frac{1}{A}=\frac{1}{A+a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{A}\right); \qquad \frac{1}{B}\frac{1}{a}=\frac{1}{B+a}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{a}\right);$$
$$\frac{1}{A}\frac{1}{a}\frac{1}{B}=\frac{1}{A+a}\frac{1}{A}\frac{1}{B}+\frac{1}{A+a}\frac{1}{B+a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{B}\right),$$

где $A^{-1}=(E+\mathrm{i}0-E_\alpha)^{-1}$; $B^{-1}=(E-\mathrm{i}0+E'_\beta)^{-1}$; $a^{-1}=(z-E)^{-1}$; так что $(A+a)^{-1}=(z-E_a)^{-1}$ и $(B+a)^{-1}=(z-E'_\beta)^{-1}$. Совершая указанные операции, получаем

$$M_{\alpha\beta}(p_\alpha q_\alpha,\ p'_\alpha q'_\alpha,\ z)=\Phi(p_\alpha q_\alpha,\ p'_\beta q'_\beta,\ z)+$$
$$+\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\varphi^*_\beta(p'_\beta)\left[\frac{I_1(q_\alpha q'_\beta)}{z-E_\alpha}+\frac{I_2(q_\alpha q'_\beta)}{(E'_\beta+\mathrm{i}0-E_\alpha)(z-E'_\beta)}+\frac{I_3(q_\alpha,\ q'_\beta)}{(z-E_\alpha)(E_\alpha-\mathrm{i}0-E'_\beta)}\right], \tag{Б.7}$$

где

$$I_1(q_\alpha,\ q'_\beta)=\int dp^0\,dq^0\,\frac{\langle\varphi_\alpha q_\alpha\mid p^0q^0\rangle\langle p^0q^0\mid\varphi_\beta q'_\beta\rangle(1-\delta_{\alpha\beta})}{(E_0+\mathrm{i}0-E_\alpha)(E_0-\mathrm{i}0-E'_\beta)}+$$
$$+\sum_{\gamma\neq0}\int dq^0_\gamma\,\frac{\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha q^0_\gamma;\ E_\gamma+\mathrm{i}0)\,\omega^*_{\beta\gamma}(q'_\beta q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)}{(E_\gamma+\mathrm{i}0-E_\alpha)(E_\gamma-\mathrm{i}0-E'_\beta)}+$$
$$+\sum_{\gamma,\ \mu\neq0}\int dp^0\,dq^0\,\frac{v_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\,v^*_{\beta,\,\mu}(q'_\beta,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)}{(E_0+i0-E_\alpha)(E_\gamma-\mathrm{i}0-E'_\beta)};$$
$$I_2(q_\alpha q'_\beta)=\omega_{\alpha\beta}(q_\alpha q'_\beta,\ E'_\beta+\mathrm{i}0);$$
$$I_3(q_\alpha q'_\beta)=\omega^*_{\beta\alpha}(q'_\beta,\ q_\alpha,\ E_\alpha+\mathrm{i}0);$$

$$\Phi(q_\alpha p_\alpha,\ p'_\beta,\ q'_\beta,\ z)=\Phi_1(p_\alpha q_\alpha p'_\beta q'_\beta,\ z)+\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\Phi_2(q_\alpha p'_\beta q'_\beta,\ z)}{z-E_\alpha}+$$
$$+\frac{\Phi_3(p_\alpha q_\alpha,\ q'_\beta,\ z)\,\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{z-E'_\beta}+\frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\,\Phi_4(q_\alpha,\ q'_\beta,\ z)\,\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{(z-E_\alpha)(z-E'_\beta)}. \tag{Б.8}$$

В свою очередь, функции $\Phi_i(z)$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, имеют вид:

$$\Phi_1(p_2q_\alpha,\ p'_\beta q'_\beta,\ z)=\int dp^0\,dq^0\,\frac{\langle p_\alpha q_\alpha\mid t_\alpha(E_0+\mathrm{i}0)\mid p^0q^0\rangle}{z-E_0}\times$$
$$\times\langle p^0q^0\mid t_\beta(E_0-\mathrm{i}0)\mid p'_\beta q'_\beta\rangle(1-\delta_{\alpha\beta})+$$
$$+\sum_{\gamma\neq0}\int dq^0_\gamma\,\frac{\rho_{\alpha,\,\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)\,\rho^*_{\beta,\,\gamma}(p'_\beta q'_\beta,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)}{z-E_\gamma}+$$
$$+\int dp^0\,dq^0\left[\sum_{\gamma\neq0}u_{\gamma\alpha}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\langle p^0q^0\mid t_\beta(E_0-\mathrm{i}0)\mid p'_\beta q'_\beta\rangle+\right.$$

$$+\sum_{\gamma\neq 0}\langle p_\alpha q_\alpha \mid t_\alpha(E_0+\mathrm{i}0)\mid p^0q^0\rangle\, u^*_{\beta\gamma}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)+$$

$$+\sum_{\gamma,\,\mu\neq 0} u_{\alpha,\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\, u^*_{\beta\mu}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\Big]\frac{1}{z-E_0};$$

$$\Phi_2(q_\alpha,\ p'_\beta q'_\beta,\ z)=\int dp^0\,dq^0\left(\frac{1}{z-E_0}+\frac{1}{E_0+\mathrm{i}0-E_\alpha}\right)\langle\varphi_\alpha q_\alpha\mid p^0q^0\rangle\langle p^0q^0\mid t_\beta(E_0+$$

$$+\mathrm{i}0)\mid p'_\beta q'_\beta\rangle(1-\delta_{\alpha\beta})+\rho^*_{\beta\alpha}(p'_\beta q'_\beta,\ q_\alpha,\ E_\alpha+\mathrm{i}0)+$$

$$+\sum_{\gamma\neq 0}\int dq^0_\gamma\left(\frac{1}{z-E_\gamma}+\frac{1}{E_\gamma+\mathrm{i}0-E_\alpha}\right)\times$$

$$\times\,\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)\,\rho^*_{\beta\gamma}(p'_\beta q'_\beta,\ q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)+$$

$$+\sum_{\gamma\neq 0}\int dp^0\,dq^0\left(\frac{1}{z-E_0}+\frac{1}{E_0+\mathrm{i}0-E_\alpha}\right)\times$$

$$\times\,v_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\langle p^0q^0\mid t_\beta(E_0-\mathrm{i}0)\mid p'_\beta q'_\beta\rangle+$$

$$+\sum_{\gamma,\,\mu\neq 0}\int dp^0\,dq^0\left(\frac{1}{z-E_0}+\frac{1}{E_0+i0-E_\alpha}\right)v_{\alpha\gamma}(p_\alpha p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\times$$

$$\times\,u^*_{\beta\mu}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0). \qquad (\text{Б}.9)$$

Выражения для функций $\Phi_2(q_\alpha,\ p'_\beta q'_\beta,\ z)$ и $\Phi_3(q_\alpha p_\alpha,\ q'_\beta,\ z)$ связаны следующим соотношением:

$$\Phi_2(q,\ p,\ k,\ z^*)=\Phi^*_3(p,\ k,\ q,\ z),$$

в котором функцию $\Phi_2(z)$ следует брать не для оператора $M_{\alpha,\beta}(z)$, как это имеет место в (Б.9), а для оператора $M_{\beta,\alpha}(z)$. Наконец, выпишем выражение для $\Phi_4(z)$:

$$\Phi_4(q_\alpha,\ q'_\beta,\ z)=\int dp^0\,dq^0\left(\frac{1}{z-E_0}+\frac{1}{E_0-\mathrm{i}0-E'_\beta}\right)\langle\varphi_\alpha q_\alpha\mid p^0q^0\rangle\times$$

$$\langle p^0q^0\mid\varphi_\beta q'_\beta\rangle(1-\delta_{\alpha\beta})+\sum_{\gamma\neq 0}\int dq^0_\gamma\left(\frac{1}{z-E_\gamma}+\frac{1}{E_\gamma-\mathrm{i}0-E'_\beta}\right)\times$$

$$\times\,\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha q^0_\gamma,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)\,\omega^*_{\beta\gamma}(q'_\beta,\ q^0_\beta,\ E_\gamma+\mathrm{i}0)+$$

$$+\sum_{\gamma,\,\mu\neq 0}\int dp^0\,dq^0\left(\frac{1}{z-E_0}+\frac{1}{E_0-\mathrm{i}0-E'_\beta}\right)v_{\alpha\gamma}(p_\alpha q_\alpha,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0)\times$$

$$\times\,v^*_{\beta\mu}(p'_\beta q'_\beta,\ p^0q^0,\ E_0+\mathrm{i}0).$$

Преобразуем теперь последнее слагаемое в (Б.7), для чего докажем тождество, связывающее I_1, I_2 и I_3:

$$I_1(q_\alpha,\ q'_\beta)+\frac{I_2(q_\alpha,\ q'_\beta)}{E'_\beta+\mathrm{i}0-E_\alpha}+\frac{I_3(q_\alpha,\ q'_\beta)}{E_\alpha-\mathrm{i}0-E'_\beta}=\Phi_5(q_\alpha,\ q'_\beta) \qquad (\text{Б}.10)$$

с функцией $\Phi_5(q_\alpha,\ q'_\beta)$, непрерывной по своим переменным. С этой целью рассмотрим тождество

$$\langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \sum_\mu \Omega_\mu\Omega_\mu^+ \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid I - P_d \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle. \tag{Б.11}$$

Согласно свойствам компоненты $v_{\alpha\beta}(q_\alpha,\ q'_\beta,\ p'_\beta,\ z)$ и $\omega_{\alpha\beta}(q_\alpha,\ q'_\beta,\ z)$ выполняются следующие соотношения (см. [22, формулы (5.25), (5.26), (9.13), (9.14) и т. д.]):

$$\left.\begin{aligned}\langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \Omega_\gamma \mid \cdot\rangle_\gamma &= \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \cdot\rangle_\gamma + \frac{\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ q_\gamma^0 E_\gamma^0 + i0)}{E_\gamma + i0 - E_\alpha} + \\ &\quad + \lambda_{\alpha\gamma}(q_\alpha q_\gamma^0 E_\gamma + i0),\\ \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \Omega_0 \mid \cdot\rangle_0 &= \sum_\gamma \left[\frac{v_{\alpha,\gamma}(q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)}{E_0 + i0 - E_\alpha} + \right.\\ &\quad \left. + \eta_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\right.\Big).\end{aligned}\right\} \tag{Б.12}$$

Функции $\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)$ и $\lambda_{\alpha,\gamma}(q_\alpha,\ q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)$ в (Б.12) являются непрерывными функциями своих переменных (смотри лемму 9.1 из [22]), а функции $v_{\alpha\cdot\gamma}(q_\alpha,\ p^0,\ q^0,\ E + i0)$ и $\eta_{\alpha\gamma}(q_\alpha p^0 q^0,\ E_0 + i0)$ могут иметь разве лишь второстепенные особенности, причем в окрестности точек $\widetilde{q_\alpha^2} = E_0 + \varkappa_\alpha^2$ второстепенные особенности отсутствуют. Подставляя разложение (Б.12) в (Б.11), приходим к тождеству (Б.10) с функцией Φ_5 вида

$$\begin{aligned}\Phi_5(q_\alpha q'_\beta) &= \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid P_d \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle + \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle(1 - \delta_{\alpha\beta}) + \\ &+ \sum_{\alpha\neq\gamma\neq\beta} \int dq_\gamma^0 \langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \psi_\gamma q_\gamma^0\rangle\langle\psi_\gamma q_\gamma^0 \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle + \\ &+ \sum_{\gamma\neq\beta} \int d\gamma_\gamma^0 \frac{\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)\langle\psi_\gamma q_\gamma^0 \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle}{E_\gamma + i0 - E_\alpha} + \\ &+ \sum_{\gamma\neq\alpha} \int dq_\gamma^0 \frac{\langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \varphi_\gamma q_\gamma^0\rangle\,\omega_{\beta\gamma}^*(q'_\beta q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)}{E_\gamma - i0 - E'_\beta} + \\ &+ \sum_\gamma \int dq_\gamma^0 \Big\{\lambda_{\alpha,\gamma}(q_\alpha,\ q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)\Big[\langle\psi_\gamma q_\gamma^0 \mid \psi_\beta q'_\beta\rangle + \frac{\omega_{\beta\gamma}^*(q'_\beta q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)}{E_\gamma - i0 - E'_\beta} + \\ &\quad + \lambda_{\beta\gamma}^*(q'_\beta q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)\Big] + \Big[\langle\psi_\alpha q_\alpha \mid \psi_\gamma q_\gamma^0\rangle + \\ &\quad + \frac{\omega_{\alpha\gamma}(q_\alpha q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)}{E_\gamma + i0 - E_\alpha}\Big]\lambda_{\beta\gamma}^*(q'_\beta,\ q_\gamma^0,\ E_\gamma + i0)\Big\} + \\ &+ \sum_{\gamma,\ \mu\neq 0} \int dp^0\,dq^0 \Big[\frac{v_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)}{E_0 + i0 - E_\alpha}\eta_{\beta\mu}^*(q'_\beta,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0) + \\ &\quad + \eta_{\alpha\gamma}(q_\alpha p^0 q^0,\ E_0 + i0)\frac{v_{\beta\mu}^*(q'_\beta,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)}{E_0 - i0 - E'_\beta} + \\ &\quad + \eta_{\alpha\gamma}(q_\alpha,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\,\eta_{\beta\mu}^*(p'_\beta,\ p^0 q^0,\ E_0 + i0)\Big].\end{aligned} \tag{Б.13}$$

Можно показать, что функция $\Phi_5(q_\alpha, q'_\beta)$ является непрерывной (гельдеровской) функцией своих переменных. Комбинируя (Б.7) и (Б.10), получаем следующий результат:

$$M_{\alpha\beta}(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta, z) = \Phi(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta, z) +$$
$$+ \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\Phi_5(q_\alpha q'_\beta)\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{z - E_\alpha} + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{E'_\beta + i0 - E_\alpha}\left(\frac{1}{z - E'_\beta} - \frac{1}{z - E_\alpha}\right) I_2(q_\alpha q'_\beta) =$$
$$= \Phi(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta, z) + \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha)\Phi_5(q_\alpha q'_\beta)\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{z - E_\alpha} +$$
$$+ \frac{\varphi_\alpha(p_\alpha) I_2(q_\alpha q'_\beta)\varphi^*_\beta(p'_\beta)}{(z - E_\alpha)(z - E_{\beta'})}. \tag{Б.14}$$

Последнее равенство выполняется в смысле обобщенных функций (подробности см. в [12]). Из (Б.14) легко получить интересующее нас разложение (25). При этом

$$\mathcal{J}^{(1)}_{\alpha\beta}(q_\alpha p'_\beta q'_\beta, z) = \Phi_2(q_\alpha p'_\beta q'_\beta, z) + \Phi_5(q_\alpha q'_\beta)\varphi^*_\beta(p'_\beta);$$
$$\mathcal{J}^{(2)}_{\alpha,\beta}(p_\alpha q_\alpha, q'_\beta, z) = \Phi_3(p_\alpha q_\alpha, q'_\beta, z);$$
$$\mathcal{J}^{(3)}_{\alpha,\beta}(q_\alpha, q'_\beta, z) = \Phi_4(q_\alpha, q'_\beta, z) + \omega_{\alpha\beta}(q_\alpha, q'_\beta, E'_\beta + i0);$$
$$\mathcal{J}^{0}_{\alpha,\beta}(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q_\beta, z) = \Phi_1(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta, z). \tag{Б.15}$$

Возникшая в (Б.15) асимметрия относительно перестановки in- и out-состояний связана, как легко видеть, с несимметричной формой преобразования трех сингулярных знаменателей. Эта асимметрия в каком-то смысле неизбежна, однако она не имеет принципиального значения. На основе явных выражений для функций типа Φ можно показать, что при $z \to E_\alpha + i0$ или $z \to E'_\beta + i0$ функции Φ_i, $i = 2,3,4$, сводятся к компонентам типа v, ζ, ω. В частности, из (Б.15) легко установить, что

$$\lim_{z \to E'_\beta + i0} \mathcal{J}_{\alpha\beta}(q_\alpha q'_\beta, z) = \omega_{\alpha\beta}(q_\alpha q'_\beta\ E'_\beta + i0).$$

Подведем некоторые итоги проведенного рассмотрения. Для выделения в явном виде особенности по z в окрестности точки $-\varkappa^2_\eta \in \sigma_d(h_\eta)$ мы использовали спектральное разложение для амплитуды рассеяния (Б.2), в котором преобразовали сингулярные знаменатели и избавились от появляющихся при таком подходе сингулярных знаменателей $(E_\alpha + i0 - E'_\beta)^{-1}$ с помощью тождества (Б.10). В результате компоненты трехчастичной амплитуды оказались выраженными через решения трехчастичных интегральных уравнений при $z = E + i0$, $E \in \sigma_c(h_\eta) = (\Sigma_\eta, \infty)$, причем, в силу сделанных предположений, эти решения являются единственными. Заметим попутно, что описанный подход может быть использован для изучения свойств компонент типа u, v, ζ, ω и получения для этих компонент согласующихся с унитарностью приближений.

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ОПЕРАТОР $\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ И АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Данное приложение посвящено исключению вопроса о координатных асимптотиках волновых функций системы двух частиц во внешнем поле и четырех частиц с конечными массами в той его части, которая связана с ядрами типа $\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$. Это значит, что мы будем изучать асимптотики выражения вида

$$G_0(z)\,\mathcal{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)\,G_0(z)\,S(z)|\psi_{\text{in}}\rangle.$$

Начнем со случая системы двух частиц во внешнем поле. Нас будет интересовать поведение матричного элемента $\langle r_1 r_2|\psi_{1\otimes2}(E+\text{i}0)\rangle$ при $r_1\to\infty$, $r_2\to\infty$, где

$$|\psi_{1\otimes2}(z)\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{-2\pi\text{i}}\,[g_{01}(\varepsilon+\text{i}\tau_1)t_1(\varepsilon+\text{i}\tau_1)g_{01}(\varepsilon+\text{i}\tau_1)]\otimes$$
$$\otimes[g_{02}(E-\varepsilon+\text{i}\tau_2)\,t_2(E-\varepsilon+\text{i}\tau_2)\,g_{02}(E-\varepsilon+\text{i}\tau_2)]\,S(z)\,|\,\varphi_{\text{in}}\rangle. \qquad (\text{B}.1)$$

Поскольку

$$\langle r\,|\,g_0(E+\text{i}0)\,|\,r'\rangle=-\frac{\mu}{2\pi}\,\frac{e^{\text{i}\sqrt{2\mu E}\,|r-r'|}}{|\,r-r'\,|},$$

то выражение для $\langle r_1r_2|\psi_{1\otimes2}(E+\text{i}0)\rangle$ при r_1 и r_2, стремящихся к бесконечности, приводится к виду

$$\langle r_1r_2\,|\,\psi_{1\otimes2}(E+\text{i}0)\,|_{r_1\to\infty,\ r_2\to\infty}\sim\frac{\mu_1\mu_2}{(2\pi)^2}\int\limits_0^E\frac{d\varepsilon}{-2\pi\text{i}}\times$$
$$\times\exp\left\{\text{i}\sqrt{2\mu_1\varepsilon}\,r_1+\text{i}\sqrt{2\mu_2(E-\varepsilon)}\,r_2\right\}(r_1r_2)^{-1}\times$$
$$\times\langle k_1(\varepsilon),\ k_2(\varepsilon)\,|\,R(\varepsilon)\,S(E+\text{i}0)\,|\,\psi_{\text{in}}\rangle. \qquad (\text{B}.2)$$

В (В.2) $\mathbf{k}_1(\varepsilon)=\sqrt{2\mu_1\varepsilon}\,\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1}$, $\quad\mathbf{k}_2(\varepsilon)=\sqrt{2\mu_2(E-\varepsilon)}\,\dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2}$

и

$R(\varepsilon)=[t_1(\varepsilon+\text{i}0)\,g_{01}(\varepsilon+\text{i}0)]\otimes[t_2(E-\varepsilon+\text{i}0)\,q_{02}(E+\text{i}0-\varepsilon)]$.

Далее, будем считать, что имеет место соотношение $r_1=r_2\alpha$, которое означает, что отношение скоростей частиц после рассеяния равно α. Аналогичный прием был использован в [35] при вычислении координатных асимптотик трехчастичной волновой функции. Для удобства положим $\alpha=v_1/v_2$, причем $\mu_1v_1^2/2+\mu_2v_2^2/2=E$. Асимптотику интеграла (В.2) при условии, что $\langle\bar{k}_1(\varepsilon)\,\bar{k}_2(\varepsilon)\,|R(\varepsilon)\,S(E+\text{i}0)\,|\,\psi_{\text{in}}\rangle$ на интервале интегрирования есть непрерывная функция ε, можно вычислить методом стационарной фазы (по поводу метода стационарной фазы см., например, [34]). Функция $\sqrt{2\mu_1\varepsilon}+\sqrt{2\mu_2(E-\varepsilon)}\,v_2/v_1$ на интервале $(0,E)$ имеет единственную, причем невырожденную, стационарную точку $\varepsilon = \mu_1 v_1^2/2$. В итоге имеем

$$\langle r_1 r_2 \mid \psi_{1\otimes 2}(E+\mathrm{i}0) \mid \psi_{\mathrm{in}}\rangle \mid_{r_1\to\infty,\ r_2\to\infty,\ r_1/r_2=v_1/v_2} \sim$$
$$\sim A \exp\{\mathrm{i}k_1 r_1 + \mathrm{i}k_2 r_2\} (r_1 r_2)^{-1} T(k_1 k_2), \tag{B.3}$$

где

$$k_1 = \mu_1 v_1; \quad k_2 = \mu_2 v_2; \quad T(k_1 k_2) = \langle k_1 k_2 \mid R(\widetilde{k}_1^2) S(E+\mathrm{i}0) \mid \psi_{\mathrm{in}}\rangle,$$

а коэффициент A определяется «радиусом действия» точки стационарной фазы. Хотя в (B.3) мы выделим независимое рассеяние частицы на центре, в дальнейшем этот эффект будет замаскирован тем обстоятельством, что коэффициент A зависит от r_1:

$$A = \frac{(\mu_1\mu_2)^{3/2} e^{\mathrm{i}\pi/4} v_1 v_2}{8\pi^2 \sqrt{\pi} \sqrt{\dfrac{r_1}{v_1}} E}. \tag{B.4}$$

Если ввести в рассмотренный параметр ρ с помощью соотношения $\rho^2 = 2\mu_1 r_1^2 + 2\mu_2 r_2^2$, то выражения (B.3), (B.4) можно привести к виду

$$\langle r_1 r_2 \mid \psi_{1\otimes 2}(E+\mathrm{i}0)\rangle \mid_{r_1\to\infty,\ r_2\to\infty,\ r_1/r_2=v_1/v_2} \sim$$
$$\sim \frac{E^{3/4}(\mu_1\mu_2)^{3/2} e^{\mathrm{i}\pi/4}}{\pi^2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\mathrm{i}\sqrt{E}\rho}}{\rho^{5/2}} T(k_1 k_2). \tag{B.5}$$

Результат (B.5) совпадает с выражением для координатной асимптотики трехчастичной волновой функции, приведенным в [35].

Формулы (B.3) и (B.5) описывают асимптотику волновой функции системы двух частиц во внешнем поле в координатном представлении при условии, что $\langle k_1(\varepsilon) k_2(\varepsilon) \mid R(\varepsilon) S(E+\mathrm{i}0) \mid \psi_{\mathrm{in}}\rangle$ есть непрерывная функция ε при $\varepsilon \in (0, E)$. Это всегда так, если начальный канал в системе содержит связанное состояние. Если же асимптотическим гамильтонианом в in-состоянии является H_0, то это уже не так. Как мы сейчас увидим, именно при нулевом начальном канале в чистом виде выделяется эффект одновременного независимого расслоения частиц на силовом центре.

Зададим начальное состояние в системе в виде $\mid p_1^0 p_2^0\rangle$, причем будем считать, что $E = \widetilde{p}_1^{02} + \widetilde{p}_2^{02}$ и $p_1^0 + p_2^0 = 0$. Выделим в $S(E+\mathrm{i}0)$ амплитуду $t_{12}(E+\mathrm{i}0)$ и рассмотрим вклад этой амплитуды в (B.2). В итоге получим:

$$I = \langle r_1 r_2 \mid G_0(E+\mathrm{i}0) \mathscr{F}_{1\otimes 2}(E+\mathrm{i}0) G_0(E+\mathrm{i}0) t_{12}(E+\mathrm{i}0) \mid p_1^0 p_2^0\rangle \underset{\substack{r_1\to\infty \\ r_2\to\infty}}{\sim}$$
$$\sim \frac{\mu_1\mu_2}{(2\pi)^2} \int dq_1 \int_0^E \frac{d\varepsilon}{-2\pi\mathrm{i}} \frac{\exp\{\mathrm{i}\sqrt{2\mu_1\varepsilon}\, r_1 + \mathrm{i}\sqrt{2\mu_2(E-\varepsilon)}\, r_2\}}{r_1 r_2} \times$$
$$\times \langle k_1(\varepsilon) \mid t_1(\varepsilon+\mathrm{i}0) \mid q_1\rangle \langle k_2(\varepsilon) \mid t_2(E-\varepsilon+\mathrm{i}0 \mid -q_1\rangle \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\varepsilon - q_1^2 + \mathrm{i}0} + \frac{1}{E - \varepsilon - q_1^2/2\mu_2 + \mathrm{i}0}\right) \frac{t_{12}(q_1, p_{12}^0, \widetilde{p}_{12}^{02} + \mathrm{i}0)}{E - \widetilde{q}_1^2 - \dfrac{q_1^2}{2\mu_2} + \mathrm{i}0}. \tag{B.6}$$

В силу леммы о сингулярных интегралах [22] интеграл по ε в (B.6) приводит к гельдеровской функции по аргументу q_1. Тогда свободную функцию Грина

$G_0(E+\mathrm{i}0)$ в (В.6) можно записать в виде формулы Сохоцкого $G_0(E+\mathrm{i}0) = -\mathrm{i}\pi\delta(E+H_0)+\mathscr{P}\frac{1}{E-H_0}$.

Запишем I в виде $I = I_1+I_2$, где I_1 определяется вкладом в (В.6) от $-\mathrm{i}\pi\delta(E-H_0)$. Ниже нас будет интересовать только I_1. Подынтегральное выражение для I_1 содержит множитель вида $\frac{1}{\varepsilon-\tilde{q}_1^2+\mathrm{i}0}+\frac{1}{\tilde{q}_1^2-\varepsilon+\mathrm{i}0}$, равный, очевидно, $-2\pi\mathrm{i}\delta(\varepsilon-\tilde{q}_1^2)$. В итоге получаем

$$I_1\Big|_{\substack{r_1\to\infty\\ r_2\to\infty}} \sim \frac{e^{\mathrm{i}p_{12}^0 r_1}}{r_1}\frac{e^{\mathrm{i}p_{12}^0 r_2}}{r_2}\int d\Omega_{q_1}\langle p_{12}^0\mid t_1\left(\frac{p_{12}^{02}}{2\mu_1}+\mathrm{i}0\right)\mid p_{12}^0\rangle\times$$
$$\times\langle p_{12}^0\mid t_2\left(\frac{p_{12}^{02}}{2\mu_2}+\mathrm{i}0\right)\mid -p_{12}^0\rangle\langle p_{12}^0\mid t_{12}(\tilde{p}_{12}^{02}+\mathrm{i}0)\mid p_{12}^0\rangle. \qquad (\text{B}.7)$$

Формула (В.7), как легко видеть, описывает эффект одновременного независимого рассеяния частиц на силовом центре при включенном взаимодействии V_{12}. В случае уравнений [22] и [33] этот эффект в явном виде не выделяется в силу используемой классификации амплитуд по первому взаимодействию. Проведенное рассмотрение является доказательством сформулированного во введении утверждения о наличии нефизического разделения асимптотик в уравнениях с классификацией амплитуд по выделенному первому взаимодействию. Заметим что обсуждаемый эффект связан с рассеянием реальных частиц [все амплитуды в (В.7) находятся на поверхности энергии]. В этой связи отметим работы [36, 37], где ситуации подобного типа изучались на примере системы трех частиц (с конечными массами) при нулевом начальном канале реакции.

Обратимся теперь к вопросу о нахождении координатных асимптотик четырехчастичной волновой функции на примере волновой функции $\psi_{\alpha\otimes\alpha'}(E+\mathrm{i}0)$ вида

$$|\psi_{\alpha\otimes\alpha'}(z)\rangle = G_0(z)\mathscr{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)S(z)\mid\psi_{\mathrm{in}}\rangle.$$

Как и в предыдущем случае, мы будем изучать асимптотику $\langle r_\alpha r_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'}|\psi_{\alpha\otimes\alpha'}\times$ $\times(E+\mathrm{i}0)\rangle$ ($r_\alpha r_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'}$ — координаты, сопряженные к импульсам p_α, $p_{\alpha'}$ и $\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}$) при условии, что $r_\alpha/v_\alpha = r_{\alpha'}/v_{\alpha'} = R_{\alpha\alpha'}/v_{\alpha\alpha'}$ ($v_\alpha = p_\alpha/\mu_\alpha$, $v_{\alpha\alpha'} = \mathscr{P}_{\alpha\alpha'}/M_{\alpha\alpha'}$). Поскольку оператор $\mathscr{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ фактически зависит от $z-\tilde{\mathscr{P}}_\alpha^2$ (13), то его можно представить в виде

$$\mathscr{F}_{\alpha\otimes\alpha'}(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon_1}{-2\pi\mathrm{i}}G_{0\alpha\alpha'}(\varepsilon+\mathrm{i}\tau_1)\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(E-\varepsilon+\mathrm{i}\tau_2), \qquad (\text{B}.8)$$

где

$$\langle\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}\mid G_{0\alpha\alpha'}(z)\mid\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}^0\rangle = \left(z-\frac{\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}^2}{2M_{\alpha\alpha'}}\right)^{-1}\delta(\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}-\mathscr{P}_{\alpha\alpha'}^0).$$

Подставляя в (В.8) выражение (14) для $\tilde{\mathscr{F}}_{\alpha\otimes\alpha'}(z)$ и используя выражения для свободных функций Грина в координатном представлении, получаем, в полной аналогии с (B.2):

$$\langle r_\alpha r_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'} \mid \psi_{\alpha\otimes\alpha'}(E+\mathrm{i}0)\rangle \Big|_{r_\alpha\to\infty,\ \frac{r_\alpha}{v_\alpha}=\frac{r'_\alpha}{v_{\alpha'}}=\frac{R_{\alpha\alpha'}}{v_{\alpha\alpha'}}} \sim$$

$$\sim \frac{\mu_\alpha\mu_{\alpha'}M_{\alpha\alpha'}}{(2\pi)^3}\int_0^E \frac{d\varepsilon_1}{-2\pi\mathrm{i}}\int_0^E \frac{d\varepsilon_2}{-2\pi\mathrm{i}}\,\frac{e^{\mathrm{i}\varphi(\varepsilon_1\varepsilon_2)r_\alpha}}{r_\alpha r_{\alpha'}R_{\alpha\alpha'}}\,\theta(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\times$$

$$\times\langle k_\alpha(\varepsilon)\,k_{\alpha'}(\varepsilon)\,\mathcal{K}_{\alpha\alpha'}(\varepsilon) \mid R_{\alpha\otimes\alpha'}(\varepsilon)\,S(E+\mathrm{i}0)\mid\psi_{\mathrm{in}}\rangle, \qquad (B.9)$$

$$E=\frac{\mu_\alpha v_\alpha^2}{2}+\frac{\mu_{\alpha'}v_{\alpha'}^2}{2}+\frac{M_{\alpha\alpha'}v_{\alpha\alpha'}^2}{2}.$$

В (B.9) использованы следующие обозначения: $\theta(x)$ — функция Хэвисайда:

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

$$\varphi(\varepsilon_1\varepsilon_2)=\sqrt{2\mu_\alpha\varepsilon_2}+\sqrt{2\mu_{\alpha'}(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\,\frac{v'_\alpha}{v_\alpha}+\sqrt{2M_{\alpha\alpha'}\varepsilon_1}\,\frac{v_{\alpha\alpha'}}{v_\alpha}, \qquad (B.10)$$

$$\mathbf{k}_\alpha(\varepsilon)=\sqrt{2\mu_\alpha\varepsilon_2}\,\frac{\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha},\qquad \mathbf{k}_{\alpha'}(\varepsilon)=\sqrt{2\mu_{\alpha'}(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\,\frac{\mathbf{r}_{\alpha'}}{r_{\alpha'}},$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\alpha'}(\varepsilon)=\sqrt{2M_{\alpha\alpha'}\varepsilon_1}\,\frac{\mathbf{R}_{\alpha\alpha'}}{R_{\alpha\alpha'}}.$$

Наконец, оператор $R_{\alpha\otimes\alpha'}(\varepsilon)$ имеет вид:

$$R_{\alpha\otimes\alpha'}(\varepsilon)=[t_\alpha(\varepsilon_2+\mathrm{i}0)\,g_{0\alpha}(\varepsilon_2+\mathrm{i}0)]\otimes[t_{\alpha'}(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\mathrm{i}0)\,g_{02}(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\mathrm{i}0)].$$

Предполагая, что матричный элемент в (B.9) есть непрерывная функция ε_1 и ε_2 [т. е. начальный канал реакции есть либо канал $(2+2)$, либо $(3+1)$], для вычисления асимптотики в (B.9) опять воспользуемся методом стационарной фазы. Функция $\varphi(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ имеет в области интегрирования единственную, причем невырожденную, стационарную точку (т. е. точку, где $\partial\varphi/\partial\varepsilon_1=0$ и $\partial\varphi/\partial\varepsilon_2=0$). Эта точка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ определяется естественными соотношениями $\varepsilon_1=(M_{\alpha\alpha'}, v_{\alpha\alpha'}^2)/2$, $\varepsilon_2=\mu_\alpha v_\alpha^2/2$.

В итоге асимптотика выражения (B.9) записывается следующим образом:

$$\langle r_\alpha r_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'} \mid \psi_{\alpha\otimes\alpha'}(E+\mathrm{i}0)\rangle \Big|_{r_\alpha\to\infty\ \frac{r_\alpha}{v_\alpha}=\frac{r_{\alpha'}}{v_{\alpha'}}=\frac{R_{\alpha\alpha'}}{v_{\alpha\alpha'}}} \sim$$

$$\sim A_0\exp\{\mathrm{i}p_\alpha r_\alpha+\mathrm{i}p_{\alpha'}r_{\alpha'}+\mathrm{i}\mathcal{P}_{\alpha\alpha'}R_{\alpha\alpha'}\}\,(r_\alpha r_{\alpha'}R_{\alpha\alpha'})^{-1}\times$$

$$\times\langle p_\alpha p'_\alpha \mathcal{P}_{\alpha\alpha'} \mid R_{\alpha\otimes\alpha'}(\widetilde{p}_\alpha^2,\ \widetilde{\mathcal{P}}_{\alpha\alpha'}^2)\,S(E+\mathrm{i}0)\mid\psi_{\mathrm{in}}\rangle, \qquad (B.11)$$

где p_α, $p_{\alpha'}$, $\mathcal{P}_{\alpha\alpha'}$ — импульсы после рассеяния и

$$A_0=\frac{\mu_\alpha\mu_{\alpha'}\mu_{\alpha\alpha'}}{(2\pi)^3(-2\pi\mathrm{i})^2}\times\exp\left\{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,[\lambda_+(A)-\lambda_-(A)]\right\}2\pi/r_\alpha\sqrt{|\det A|}. \qquad (B.12)$$

В (B.12) есть матрица с элементами $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j}$, $\lambda_+(A)$ и $\lambda_-(A)$ — число ее положительных и отрицательных собственных значений. После несложных вычислений получаем:

$$|\det A| = \frac{2E}{v_\alpha^2}(\mu_\alpha v_\alpha^2 \mu_{\alpha'} v_{\alpha'}^2 M_{\alpha\alpha'} v_{\alpha\alpha'}^2)^{-1},$$

$$\lambda_+(A) = 2, \quad \lambda_-(A) = 0,$$

$$A_0 = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}(\mu_\alpha \mu_{\alpha'} M_{\alpha\alpha'})^{3/2} v_\alpha^2 v_{\alpha'} v_{\alpha\alpha'}}{(2\pi)^4 r_\alpha \sqrt{2E}}.$$

Далее, введем в рассмотрение параметр ρ вида $\rho^2 = 2\mu_\alpha r_\alpha^2 + 2\mu_{\alpha'} r_{\alpha'}^2 + 2M_{\alpha\alpha'} R_{\alpha\alpha'}^2$. Тогда $r_\alpha/v_\alpha = r_{\alpha'}/v_{\alpha'} = R_{\alpha\alpha'}/v_{\alpha\alpha'} = \rho/2\sqrt{E}$, и интересующую нас асимптотику можно представить в виде

$$\langle r_\alpha r_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'} \mid \psi_{\alpha\otimes\alpha'}(E+i0)\rangle \Big|_{r_\alpha\to\infty,\ \frac{r_\alpha}{v_\alpha} = \frac{r_{\alpha'}}{v_{\alpha'}} = \frac{R_{\alpha\alpha'}}{v_{\alpha\alpha'}}} \sim$$

$$\sim -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(\mu_\alpha \mu_{\alpha'} M_{\alpha\alpha'})^{3/2} E^{3/2}}{\pi^4\sqrt{2}} \frac{e^{i\sqrt{E}\rho}}{\rho^4} \times$$

$$\times \langle p_\alpha p_{\alpha'} \mathscr{P}_{\alpha\alpha'} \mid R_{\alpha\otimes\alpha'}(\tilde{p}_\alpha^2, \tilde{\mathscr{P}}_{\alpha\alpha'}^2) S(E+i0) \mid \psi_{\text{in}}\rangle. \tag{В.13}$$

Если начальный канал системы определяется столкновением не двух, а трех и четырех частиц, то при $E > 0$ в асимптотике $|\psi_{\alpha\otimes\alpha'}(E+i0)\rangle$ наряду с выражениями типа (В.9) и (В.13) появляются выражения типа (В.7), т. е. эффект одновременного рассеяния независимых подсистем частиц α и α' по-прежнему может быть выделен в чистом виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОМПОНЕНТ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ НАЧАЛЬНОМУ КАНАЛУ $\alpha+\alpha'$

Система интегральных уравнений для компонент типа u и v, получающихся из (27), (29) и (31) после выделения в in-состоянии главной особенности вида $(z + \varkappa_\alpha^2 + \varkappa_{\alpha'}^2 - \mathscr{P}_{\alpha,\alpha'}^{02})^{-1}$, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} u_\beta(\mathscr{P}_\beta p_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}_\alpha^0,\ z) \\ v_{\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_{\beta'},\ \mathscr{P}_\alpha^0 z) \end{bmatrix} = \int \prod_{i=1}^{4} dk_i \delta(\mathscr{K})\,\delta(\mathscr{P}_\beta - \mathscr{K}_\beta)\,\delta(p_\beta - k_\beta) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \hat{t}_\beta(p_\beta,\ k_\beta,\ z - \tilde{\mathscr{P}}_\beta^2 - \tilde{p}_{\beta'}^2) \\ \varphi_\beta^*(k_\beta) \end{bmatrix} \frac{1}{z - \tilde{\mathscr{P}}_\beta^2 - \tilde{p}_{\beta'}^2 - \tilde{k}_\beta^2} \Big\{ \zeta_{\alpha,\alpha'}(k_\alpha k_{\alpha'}) \times$$

$$\times \delta(\mathscr{K}_\alpha - \mathscr{P}_\alpha^0)[1 - \delta(\alpha,\beta)][1 - \delta(\alpha',\beta)] +$$

$$+ \sum_{(\gamma,\gamma') \neq (\beta\beta')} \Bigg[u_{\gamma,\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}_\alpha^0,\ z) + \frac{\varphi_\gamma(k_\gamma) v_{\gamma,\gamma'}^{\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}_\alpha^0,\ z)}{z + \varkappa_\gamma^2 - \tilde{\mathscr{K}}_\gamma^2 - \tilde{k}_{\gamma'}^2} +$$

$$+ \frac{\varphi_{\gamma'}(k_{\gamma'}) v_{\gamma,\gamma'}^{\gamma}(\mathscr{K}_\gamma k_\gamma,\ \mathscr{P}_\alpha^0,\ z)}{z + \varkappa_{\gamma'}^2 - \tilde{\mathscr{K}}_\gamma^2 - \tilde{k}_\gamma^2} + \frac{\zeta_{\gamma,\gamma'}(k_\gamma k_{\gamma'}) v_{\gamma\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma,\ \mathscr{P}_\alpha^0,\ z)}{z + \varkappa_\gamma^2 + \varkappa_{\gamma'}^2 - \tilde{\mathscr{K}}_\gamma^2} \Bigg] \Big\}; \tag{Г.1}$$

$$\begin{bmatrix} u_\beta^\eta(\mathscr{P}_\eta p_\beta p_{\beta\eta}, \mathscr{P}_\alpha^0, z) \\ v_\beta^\eta(\mathscr{P}_\eta p_{\beta\eta}, \mathscr{P}_\alpha^0, z) \\ v_\eta(\mathscr{P}_\eta, \mathscr{P}_\alpha^0, z) \end{bmatrix} = \int \prod_{i=1}^4 dk_i \delta(\mathscr{K})\,\delta(\mathscr{P}_\eta - \mathscr{K}_\eta) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum\limits_{\gamma\in\eta} \left[\mathscr{I}^{\eta^0}_{\beta,\gamma}(p_\beta \widetilde{p}_{\beta\eta}, k_\gamma k_{\gamma\eta}, z - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta) + \dfrac{\mathscr{I}^{\eta^2}_{\beta\gamma}(\overline{p}_\beta p_{\beta\eta}, k_{\gamma\eta}, z - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta)\varphi^*_\gamma(k_\gamma)}{z + \varkappa^2_\gamma - \mathscr{P}^2_\eta - \widetilde{k}^2_{\gamma\eta}} \right] \\ \sum\limits_{\gamma\in\eta} \left[\mathscr{I}^{\eta^1}_{\beta,\gamma}(p_{\beta\eta}, k_\gamma k_{\gamma\eta}, z - \mathscr{P}^2_\eta) + \dfrac{\mathscr{I}^{\eta^3}_{\beta\gamma}(\overline{p}_{\beta\eta}, k_{\nu\eta}, z - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta)\varphi^*_\gamma(k_\gamma)}{z + \varkappa^2_\gamma - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta - \widetilde{k}^2_{\gamma\eta}} \right] \\ \sum\limits_{\gamma\in\eta} \langle \Phi_\eta \mid V_\gamma \mid k_\gamma k_{\gamma\eta} \rangle \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{z - \widetilde{\mathscr{P}}^2_\eta - \widetilde{k}^2_\gamma - \widetilde{k}^2_{\gamma\eta}} \Big\{ \zeta_{\alpha,\alpha'}(k_\alpha k_{\alpha'})\,\delta(\widetilde{\mathscr{K}}_\alpha - \widetilde{\mathscr{P}}^0_\alpha)\,\delta\,[1 - \delta(\alpha,\gamma)]\,[1 - \delta(\alpha'\gamma)] +$$

$$+ \sum_{\substack{(\gamma\gamma')\neq(\rho\rho') \\ \rho\notin\eta}} \left[u_\rho(\mathscr{K}_\rho k_\rho k_{\rho'}, \widetilde{\mathscr{P}}^0_\alpha, z) + \frac{\varphi_\rho(k_\rho)\, v_{\rho'}(\mathscr{K}_\rho k_\rho, \overline{\mathscr{P}}^0_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_\rho - \mathscr{K}^2_\rho - k^2_\rho} \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{(\gamma\gamma')\neq(\rho\rho') \\ \rho\notin\eta,\ \rho\in\mu}} \left[u_{\rho\mu}(\mathscr{K}_\mu k_\rho k_{\rho\mu}, \mathscr{P}^0_\alpha, z)\ \frac{\varphi_\rho(k_\rho)\, v^\mu_\rho(\mathscr{K}_\mu k_{\rho\mu}, \overline{\mathscr{P}}^0_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_\rho - \widetilde{\mathscr{K}}^2 - \widetilde{k}^2_{\rho\mu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle k_\rho k_{\rho\mu} \mid V_\rho \mid \Phi_\mu \rangle (\mathscr{K}_\mu, \mathscr{P}^0_\alpha, z)\, v_\mu}{z + \varkappa^2_\mu - \widetilde{\mathscr{K}}^2_\mu} \right] + \sum_{(\gamma\gamma')\neq(\rho\rho')} \Big[u_{\rho\rho'}(\mathscr{K}_\rho k_\rho k_{\rho'}, \mathscr{P}^0_\alpha, z) +$$

$$+ \frac{\varphi_\rho(k_\rho)\, v^{\rho'}_{\rho\rho'}(\mathscr{K}_\rho k_{\rho'}, \mathscr{P}^0_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_\rho - \widetilde{\mathscr{K}}^2_\rho - k^2_{\rho'}} + \frac{\varphi_{\rho'}(k_{\rho'})\, v^\rho_{\rho\rho'}(\mathscr{K}_\rho k_\rho, \mathscr{P}^0_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_{\rho'} - \widetilde{\mathscr{K}}^2_\rho - \widetilde{k}^2_\rho} +$$

$$+ \frac{\zeta_{\rho\rho'}(k_\rho k_{\rho'})\, v_{\rho\rho'}(\mathscr{K}_\rho, \mathscr{P}^0_\alpha, z)}{z + \varkappa^2_\rho + \varkappa^2_{\rho'} - \widetilde{\mathscr{K}}^2_\rho} \Big] \Big\}; \qquad (\Gamma.2)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_\beta p_{\beta'}, \mathscr{P}^0_\alpha, z) \\ v^\beta_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta p_\beta, \mathscr{P}^0_\alpha, z) \\ v_{\beta\beta'}(\mathscr{P}_\beta, \mathscr{P}^0_\alpha, z) \end{bmatrix} = \int \prod_{i=1}^4 dk_i \delta(\mathscr{K})\,\delta(\mathscr{P}_\beta - \mathscr{K}_\beta) \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} L^{\beta\beta'}_{\beta\beta'}(p_\beta p_{\beta'},\ k_\beta k_{\beta'},\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)+\dfrac{L^{\beta}_{\beta\beta'}(p_\beta p_{\beta'},\ k_\beta,\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)\,\varphi^*_{\beta'}(k_{\beta'})}{z-\varkappa^2_{\beta'}-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta-\widetilde{k}^2_\beta}+\\ \qquad+\dfrac{L^{\beta'}_{\beta\beta'}(p_\beta p'_\beta,\ k'_\beta,\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)\,\varphi^*_\beta(k_\beta)}{z+\varkappa^2_\beta-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta-\widetilde{k}^2_{\beta'}}\\ L^{\beta\beta'}_{\beta}(p_\beta,\ k_\beta k_{\beta'},\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)+\dfrac{L^{\beta}_{\beta}(p_\beta,\ k_\beta,\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)\,\varphi^*_{\beta'}(k_{\beta'})}{z+\varkappa^2_{\beta'}-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta-\widetilde{k}^2_\beta}+\\ \qquad+\dfrac{L^{\beta}_{\beta}(p_\beta,\ k_\beta,\ z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta)\,\varphi^*_\beta(k_\beta)}{z+\varkappa^2_\beta-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta-\widetilde{k}^2_{\beta'}}\\ \zeta^*_{\beta,\,\beta'}(k_\beta k_{\beta'}) \end{array}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{z-\widetilde{\mathscr{P}}^2_\beta-\widetilde{k}^2_\beta-\widetilde{k}^2_{\beta'}}\Big\{\zeta_{\alpha\alpha'}(k_\alpha k_{\alpha'})\,\delta(\mathscr{P}^0_\alpha-\mathscr{K}_\alpha)\,[1-\delta(\alpha,\ \beta)]\,[1-\delta(\alpha'\beta)]+$$

$$+\sum_{(\gamma\gamma')\neq(\beta\beta')}\left[u_\gamma(\mathscr{K}_\gamma k_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)+\frac{v_{\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)\,\varphi_\gamma(k_\gamma)}{z+\varkappa^2_\gamma-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\gamma-\widetilde{k}^2_{\gamma'}}\right]+$$

$$+\sum_{\substack{(\gamma\gamma')\neq(\beta\beta')\\ \gamma\notin\mu}}\left[u^\mu_\gamma(\mathscr{K}_\mu k_\gamma k_{\gamma\mu},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)+\frac{\varphi_\gamma(k_\gamma)\,v^\mu_\gamma(\mathscr{K}_\mu k_{\gamma\mu}\,\mathscr{P}^0_\alpha,\ z)}{z+\varkappa^2_\gamma-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\mu-\widetilde{k}^2_{\gamma\mu}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\langle k_\gamma k_{\gamma\mu}\mid V_\gamma\mid\Phi_\mu\rangle\,v_\mu(\mathscr{K}_\mu,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)}{z+\varkappa^2_\mu-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\mu}\right]+\sum_{(\gamma\gamma')\neq(\beta\beta')}\Big[u_{\gamma\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)+$$

$$+\frac{\varphi_\gamma(k_\gamma)\,v^{\gamma'}_{\gamma\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_{\gamma'},\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)}{z+\varkappa^2_\gamma-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\gamma-k^2_\gamma}+\frac{\varphi_{\gamma'}(k_{\gamma'})\,v^{\gamma}_{\gamma\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma k_\gamma,\ \widetilde{\mathscr{P}}^0_\alpha,\ z)}{z+\varkappa^2_{\gamma'}-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\gamma-\widetilde{k}^2_\gamma}+$$

$$\left.\left.+\frac{\zeta_{\gamma\gamma'}(k_\gamma k_{\gamma'})\,v_{\gamma\gamma'}(\mathscr{K}_\gamma,\ \mathscr{P}^0_\alpha,\ z)}{z+\varkappa^2_\gamma+\varkappa^2_{\gamma'}-\widetilde{\mathscr{K}}^2_\gamma}\right]\right\}. \tag{Г.3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
2. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
3. **Lovelace C.** Strong Interaction and High Energy Physics. Lond.: Oliver and Boyd, 1964.
4. **Aguilar J., Combes J. M.**— Comment. Math. Phys., 1971, v. 22, p. 269.
5. **Balslev E., Combes J. M.**— Ibid., p. 280.
6. **Simon B.**— Ann. Math., 1973, v. 97, p. 247.
7. **Int.** J. Quantum Chem., 1978, v. 14.
8. **Hunziker W.** Mathematical Theory of Multiparticle Quantum Systems. Lectures in Theor. Phys./Ed. A. Barut, W. Britten, N. Y.: Gordon and Breach, 1968.

9. **Hepp K.**— Helv. phys. acta, 1969, v. 42, p. 425.
10. **Iorio R., O'Carrol M.**— Comment. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 137.
11. **Komarov V. V., Popova A. M., Shablov V. L.**— Preprint HU-TFT-88-55, University of Helsinki, 1982.
12. **Komarov V. V., Popova A. M., Shablov V. L., Osborn T. A.**— Phys. Rev., 1980, v. C22, p. 976.
13. **Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л.**— ЭЧАЯ, 1983, т. 14, вып. 2, с. 329.
14. **Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л.**— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1979, т. 43, с. 981.
15. **Sandhas W.**— In: Few Body Dynamics/Ed. A. Mitra e.a. Amsterdam: North-Holland, 1976, p. 540.
16. **Kowalski K. L.**— Proc. Intern. Conf., Graz, 1978. Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, 1978, v. 87, p. 393.
17. **Levin F.**— Proc. Intern. Conf., Eugene, Oregon, USA.— Nucl. Phys., 1981, v. A353, p. 1430.
18. **Комаров В. В., Попова А. М.**— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 2112.
19. **Комаров В. В., Попова А. М.**— ЭЧАЯ, 1974, т. 5, вып. 4, с. 1075.
20. **Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л.** Вторичное квантование в теории рассеяния нескольких нерелятивистских частиц. М.: Изд-во МГУ, ч. 1; 1978; ч. 2, 1979; ч. 3, 1981.
21. **Тейлор Дж.** Теория рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
22. **Фаддеев Л. Д.**— Тр. МИ АН СССР, 1963, т. 63, с. 1.
23. **Osborn T. A., Bollé D.**— Phys. Rev., 1973, v. C8, p. 1198.
24. **Яфаев Д. Р.**— Мат. сб., 1974, т. 94, с. 567.
25. **Йоргенс К., Вайдман И.** Спектральные свойства гамильтоновых операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
26. **Komarov V. V., Popova A. M., Shablov V. L.**— Progr. Theoret. Phys., Japan, 1981, v. 66, p. 940.
27. **Шаблов В. Л.** Взаимодействие двух квантовомеханических нерелятивистских частиц во внешнем поле. Автореф. дис.на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. МГУ, М., 1983.
28. **Яфаев Д. Р.**— Докл. АН СССР, 1972, т. 206, с. 68.
29. **Amado R. D.**— Phys. Rev., 1963, v. 132, p. 485.
30. **Simon B.**— Helv. phys. acta, 1970, v. 43, p. 607.
31. **Яфаев Д. Р.**— Функциональный анализ, 1972, т. 6, с. 102.
32. **Жислин Г. М.**— Теорет. мат. физ., 1974, т. 21, с. 60.
33. **Якубовский О. А.**— ЯФ, 1967, т. 5, с. 1312.
34. **Вайнберг Б. Р.** Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982.
35. **Ситенко А. Г.** Теория рассеяния. Киев, Вища школа, 1975.
36. **Newton R. G., Schtokhamer R.**— Phys. Rev., 1976, v. A14, p. 642.
37. **Potapov V. S., Taylor J. R.**— Ibid., 1977, v. A16, p. 2264.
38. **Weinberg S.**— Ibid., 1960, v. 118, p. 838.
39. **Federbush P.**— Ibid., 1966, v. 148, p. 1551.
40. **Newton R.**— Ibid., 1967, v. 153, p. 1502.
41. **Chandler C.**— Nucl. Phys., 1978, v. A301, p. 1.
42. **Магамедов Д. Р.**— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, с. 353.
43. **Noyes N. P., Kowalski K. L.**— Phys. Rev., 1969, v. 170, p. 200.
44. **Fuda K.**— Ibid., 1974, v. C20, p. 1415.
45. **Васкин А. И.**— Методы вычисл. мат. и мат. физ., 1976, т. 16, с. 169.
46. **Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л.**— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1980, т. 44, с. 972.
47. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962.
48. **Albeverio S., Schneider W., Schreder R., Hunziker W.**— Helv. phys. acta, 1967, v. 40, p. 745.
49. **Яфаев Д. Р.**— Мат. сб. 1978, т. 106, с. 622.
50. **Ньютон Р.** Теория рассеяния волн и частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1969.

51. **Като Т.** Теория возмущения линейных операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
52. **Regge T.**— Nuovo cimento, 1958, v. 9, p. 295.
53. **Редже Т.**— В сб.: Теория сильных взаимодействий при больших энергиях: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит, 1963, с. 55.
54. **Bottino A., Longoni A. M.**— Nuovo cimento, 1962, v. 24, p. 353.
55. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
56. **Рихтмайер Д.** Принципы современной математической физики: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
57. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
58. **Ситенко А. Г.** Теория ядерных реакций. М.: Энергоатомиздат, 1983.
59. **Komarov V. V.**— In: Proc. Intern. Conf. Few Particle Problems in the Nucl. Interaction, Los Angeles, North-Holland, 1972, p. 551.