«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 4

УДК 538.941

ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧИХ СИСТЕМ И МЕТОД КВАЗИСРЕДНИХ

Н. Н. Боголюбов (мл.)

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. И. Тарасов

Харьковский физико-технический институт АН УССР, Харьков

А. М. Курбатов

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

Построена термодинамика и гидродинамика сверхтекучих макроскопических систем с нарушенной фазовой инвариантностью на основе концепции квазисредних и метода сокращенного описания. Рассматривается случай нарушенной галилеевой инвариантности. Развит метод нахождения низкочастотной асимптотики функций Грина для произвольных квазилокальных операторов. Обсуждается распространение данного подхода на системы, в которых нарушена также и трансляционная инвариантность.

The hydrodynamics and the thermodynamics of superfluid macroscopic systems with broken phase invariance is constructed on the basis of the quasiaverages concept and the reduced description method. The broken Galilean invariance case is considered. A method for discovery the low-frequency assymptotics of the arbitrary quasilocal operators' Green functions is developed. The expansion of the approach on the systems with the translation invariance being broken too is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теоретическим фундаментом описания как равновесных, так и неравновесных состояний систем со спонтанно нарушенной симметрией в статистической механике являются метод квазисредних [1] и метод сокращенного описания [2]. Этот подход позволяет получить как термодинамику, так и уравнения движения для таких макроскопических систем.

Однако большинство физических результатов для систем со спонтанно нарушенной симметрией было получено на основе феноменологического подхода. Это в первую очередь относится к явлению сверхтекучести He II, для описания которого эффективной оказалась двухжидкостная модель Тиссы — Ландау. Именно в рамках этой модели Ландау построил уравнения идеальной гидродинамики сверхтекучего He II, а в работе Ландау — Халатникова были учтены процессы диссипации (см. [3]). В дальнейшем феноменологический подход был применен к другим системам, близким по своим свойствам к сверхтекучим, а именно к системам, для которых генератором нарушенной симметрии являлись либо оператор числа частиц, либо одна из компонент полного спина. К таким системам, в частности, относятся сверхпроводящие ферми-системы, плоские ферро- и антиферромагнетики [4].

В последние годы ведутся интенсивные исследования сверхтекучего ^{3}He. В отличие от He II, в котором нарушена инвариантность состояния относительно фазовых преобразований, в случае ^{3}He нарушение симметрии более сложное: кроме нарушения симметрии относительно фазовых преобразований, происходит также нарушение симметрии относительно трехмерных вращений как в координатном, так и в спиновом пространстве. Следствием этого являются более сложная структура параметра порядка, вихревой характер сверхтекучего течения, появление разнообразных магнитных свойств [5—7].

В настоящей работе на основе метода квазисредних и метода сокращенного описания мы дадим микроскопическое построение термодинамики и гидродинамики макроскопических систем, в которых нарушена только фазовая инвариантность. При этом мы не будем предполагать, что гамильтониан системы обладает галилеевой инвариантностью. Это позволит, в частности, как получить результаты, относящиеся к галилеево инвариантным системам, так и рассмотреть релятивистские системы. Кроме того, выведенные уравнения сверхтекучей гидродинамики в отсутствие галилеевой инвариантности могут быть применены при исследовании сверхтекучести электронов в металле или к явлению сверхтекучести на квазичастицах.

Далее, найдены источники в уравнениях идеальной гидродинамики сверхтекучей жидкости, обусловленные слабым внешним полем, причем операторная структура гамильтониана взаимодействия системы с внешним полем произвольна. Входящие в уравнения гидродинамики плотности аддитивных интегралов движения и соответствующие им плотности потоков выражены в терминах термодинамического потенциала, а источники определяются как термодинамическим потенциалом, так и равновесным средним квазилокального оператора, определяющего взаимодействие системы с внешним полем.

Уравнения гидродинамики при наличии произвольных внешних источников позволяют найти низкочастотную асимптотику функций Грина $G_{\hat{a}\hat{b}}$ для произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$. При этом существенно учитывается анизотропия системы, связанная с тем, что в состоянии статистического равновесия сверхтекучий импульс $\mathbf{p}$ и нормальная скорость $\mathbf{v}_n$ отличны от нуля.

Рассмотренный подход позволил изучить спиральные магнетики, где нарушена симметрия по отношению к спиновым вращениям [8]. При этом наличие в равновесии параметра $\mathbf{p} \neq 0$, аналогичного сверхтекучему импульсу, приводит к возникновению магнитной структуры с шагом спирали $2\pi/|\mathbf{p}|$; случай плоских магнитных структур ($\mathbf{p} = 0$) исследовался в [4]. Кроме того, этот подход позволяет рассмотреть не только системы со спонтанно нарушенной фазовой инвариантностью, но и системы, в которых нарушена трансляционная инвариантность [9].

Представляет интерес также применение этого подхода к сверхтекучим кристаллам [10, 11], в которых одновременно нарушены трансляционная и фазовая инвариантности, а также к изучению сверхтекучести ^{3}He, в котором имеется совместное нарушение фазовой и вращательной инвариантности.

1. СОСТОЯНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ

Для систем со спонтанно нарушенной симметрией состояние статистического равновесия обладает более низкой симметрией, чем симметрия гамильтониана. Удобной концепцией, позволяющей описывать системы со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних.

Согласно Н. Н. Боголюбову [1, 12] средние значения в состоянии статистического равновесия (с нарушенной симметрией) определяются формулой

$$\langle \ldots \rangle = \lim_{\nu\to 0} \lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu \ \ldots, \quad w_\nu = \exp(\Omega_\nu - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha - \nu \hat{f}). \qquad (1)$$

Здесь V — объем системы; $\hat{\gamma}_\alpha$ — операторы аддитивных интегралов движения по отношению к гамильтониану $\mathscr{H} \equiv \hat{\gamma}_0$; Y_α — сопряженные им термодинамические силы; Ω_ν — термодинамический потенциал, определяемый из условия $\operatorname{Sp} w_\nu = 1$. Оператор $\hat{f}$ обладает симметрией исследуемой фазы и снимает вырождение состояния статистического равновесия. Предел

$$\lim_{\nu\to 0} \lim_{V\to\infty} \frac{\Omega_\nu}{V} = \omega$$

определяет плотность термодинамического потенциала. Для квазисредних (в отличие от обычных средних) всегда справедлив принцип пространственного ослабления корреляций, т. е.

$$\langle \hat{a}(\mathbf{x})\, \hat{b}(\mathbf{y}) \rangle \xrightarrow[|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to\infty]{} \langle \hat{a}(\mathbf{x}) \rangle \langle \hat{b}(\mathbf{y}) \rangle, \qquad (2)$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{y})$ — произвольные квазилокальные операторы.

Пусть состояние сверхтекучей жидкости описывается статистическим оператором ρ, удовлетворяющим принципу пространственного ослабления корреляций. Эволюция во времени оператора ρ происходит согласно уравнению фон Неймана

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathscr{H}, \rho(t)]. \qquad (3)$$

Введя оператор вектора полного импульса $\hat{\mathcal{P}}$ сверхтекучей системы, определим условия пространственной однородности равенством

$$[\rho,\ \hat{\mathcal{P}}-\mathbf{p}\hat{N}]=0. \tag{4}$$

Это условие означает, что макроскопически большое число частиц может находиться в состоянии с импульсом $\mathbf{p}$ (образовывает конденсат). Действительно, для оператора $a_{\mathbf{p}'}\equiv V^{-1/2}\int d^3x e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{x}}\ \psi(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathrm{Sp}\,\rho\,[\hat{\mathcal{P}}-\mathbf{p}\hat{N},\ a_{\mathbf{p}'}]=(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\mathrm{Sp}\,\rho a_{\mathbf{p}'}=0.$$

Таким образом, только для состояния с импульсом $\mathbf{p}'=\mathbf{p}$ среднее значение оператора $a_{\mathbf{p}'}$ может быть отлично от нуля. Так как для сверхтекучих систем $[\hat{N},\ \rho]\neq 0$, то для пространственно однородных сверхтекучих систем $[\rho,\ \mathcal{P}]\neq 0$, т. е. пространственно однородное состояние не является трансляционно инвариантным. Пусть, однако, $\hat{a}(\mathbf{x})$ — произвольный квазилокальный трансляционно инвариантный оператор. Тогда

$$i\frac{\partial\hat{a}(\mathbf{x})}{\partial x_k}=[\hat{\mathcal{P}}_k,\ \hat{a}(\mathbf{x})]. \tag{5}$$

Если $[\hat{N},\ \hat{a}]=0$, то согласно (4) $\mathrm{Sp}\ \rho\,[\hat{\mathcal{P}}_k,\ \hat{a}(\mathbf{x})]=0$, и, следовательно, согласно (5) $\mathrm{Sp}\ \rho\hat{a}(\mathbf{x})$ не зависит от $\mathbf{x}$. Таким образом, среднее значение произвольного трансляционно инвариантного оператора, коммутирующего с оператором числа частиц $\hat{N}$, для пространственно однородного состояния [см. (4)] не зависит от $\mathbf{x}$.

Если начальный статистический оператор ρ удовлетворяет условию пространственной однородности (4), то быстро за время релаксации τ_r происходит переход системы в состояние статистического равновесия. Это значит, что должно выполняться равенство

$$\rho(t)\xrightarrow[t\gg\tau_r]{} w(t)\equiv\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} w_\nu(t),$$

$$w_\nu(t)=\exp\left\{\Omega_\nu-Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha-\nu Y_0\int d^3x\left(\psi(\mathbf{x})\,e^{-i\varphi(\mathbf{x},\ t)}+\text{э. с.}\right)\right\}. \tag{6}$$

Здесь $\hat{\gamma}_0\equiv\mathcal{H}$ — гамильтониан, $\hat{\gamma}_k\equiv\hat{\mathcal{P}}_k$ — оператор импульса, $\hat{\gamma}_4\equiv\hat{N}$ — оператор числа частиц; $\psi(\mathbf{x})$ — оператор уничтожения частицы в точке $\mathbf{x}$ и $\varphi(\mathbf{x},\ t)$, как мы увидим далее, является асимптотической фазой величины $\mathrm{Sp}\ \rho\ (t)\,\psi\ (\mathbf{x})$. Таким образом, явление сверхтекучести связывается с нарушением симметрии по отношению к фазовым преобразованиям.

Предельный переход $V\to\infty$, $\nu\to 0$ следует понимать в смысле средних, т. е.

$$\mathrm{Sp}\,w\hat{a}\equiv\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\mathrm{Sp}\,w_\nu\hat{a}. \tag{7}$$

Таким образом, статистический оператор w необходимо рассматривать как обобщенный оператор, т. е. наподобие обобщенных функций он определяется средними значениями произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}(\mathbf{x})$ с достаточно быстро убывающими ядрами.

Предельный переход $t \gg \tau_r$ также следует понимать в смысле средних.

Для нахождения асимптотической фазы $\varphi(\mathbf{x}, t)$ заметим, что условие пространственной однородности (4) выполняется при всех временах t с одним и тем же вектором импульса $\mathbf{p}$, если оно выполняется в начальный момент времени. Поэтому согласно (4), (6)

$$[w(t), \ \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N}] = 0 \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}\mathbf{x} + \varphi(0, t). \tag{9}$$

Мы учли при этом, что

$$e^{-i\hat{\mathcal{P}}\mathbf{y}}\psi(\mathbf{x})\, e^{i\hat{\mathcal{P}}\mathbf{y}} = \psi(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \quad e^{i\hat{N}\alpha}\psi(\mathbf{x})\, e^{-i\hat{N}\alpha} = e^{-i\alpha}\psi(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Метод квазисредних предполагает, что для любого (с достаточно быстро убывающим ядром) квазилокального оператора $\hat{a}(\mathbf{x})$ существуют квазисредние, т. е.

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu \hat{a}(\mathbf{x}) \equiv \operatorname{Sp} w\hat{a}(\mathbf{x}) < \infty. \tag{11}$$

Заметим далее, что

$$[w_\nu(t), \ Y_0\mathcal{H} + \mathbf{Y}\hat{\mathcal{P}} + Y_4\hat{N} + \nu\hat{f}] = 0, \quad \hat{f} = Y_0 \int d^3x\psi(\mathbf{x})\, e^{-i\varphi(\mathbf{x},\, t)} + \text{э. с.}$$

Так как в силу канонических перестановочных соотношений оператор $[\hat{f}, \ \hat{a}(\mathbf{x})]$ также является квазилокальным, то

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \nu \operatorname{Sp} w_\nu(t)\,[\hat{f}, \ \hat{a}(\mathbf{x})] = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp}\,[w_\nu(t), \ Y_0\mathcal{H} + \mathbf{Y}\hat{\mathcal{P}} + Y_4\hat{N}]\,\hat{a}(\mathbf{x}) = 0$$

и, следовательно,

$$[w(t), \ Y_0\mathcal{H} + \mathbf{Y}\hat{\mathcal{P}} + Y_4\hat{N}] = 0.$$

Таким образом, с учетом (8) имеем

$$[w(t), \ \mathcal{H} + p_0\hat{N}] = 0, \quad p_0 = \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0}. \tag{12}$$

Это соотношение будем называть условием стационарности. Статистический оператор $w(t)$ должен удовлетворять уравнению (3). Поэтому

$$w(t+\tau) = e^{-i\mathscr{H}\tau} w(t)\, e^{i\mathscr{H}\tau}. \tag{13}$$

Отсюда, используя (12), имеем

$$w(t+\tau) = e^{ip_0\hat{N}\tau} w(t)\, e^{-ip_0\hat{N}\tau} \tag{14}$$

и, следовательно, согласно (6), (10), (14)

$$\varphi(\mathbf{x},\ t+\tau) = \varphi(\mathbf{x},\ t) + p_0\tau. \tag{15}$$

Таким образом, с учетом (9), (15) имеем

$$\varphi(\mathbf{x},\ t) = \mathbf{px} + p_0 t + \chi,\ \chi \equiv \varphi(0,\ 0). \tag{16}$$

Из формул (6), (16) мы видим, что состояние статистического равновесия характеризуется термодинамическими параметрами Y_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$), p_k, χ (Y_0 — обратная температура, $-Y_k/Y_0 \equiv v_{nk}$ — скорость нормальной компоненты, $-Y_4/Y_0$ — химический потенциал, p_k — импульс конденсатных частиц, χ — фаза). Найдем теперь зависимость этих термодинамических параметров от начального состояния $\rho(0)$.

Пусть $\zeta_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \{\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_i(\mathbf{x}),\ \hat{n}(\mathbf{x})\}$ — операторы плотностей аддитивных интегралов движения, т. е. $\hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$. Тогда справедливы дифференциальные законы сохранения

$$i\,[\mathscr{H},\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = -\frac{\partial\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \tag{17}$$

где $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) \equiv \{\hat{q}_k(\mathbf{x}),\ \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}),\ \hat{j}_k(\mathbf{x})\}$ — соответствующие операторы плотностей потоков, которые согласно [13] можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\hat{q}_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2}\int d^3x'\, x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\xi)\mathbf{x}'),\ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}+\xi\mathbf{x}')];\\
\hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) = -\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\,\delta_{ik} + i\int d^3x'\, x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\xi)\mathbf{x}'),\ \hat{\pi}_i(\mathbf{x}+\xi\mathbf{x}')];\\
\hat{j}_k(\mathbf{x}) = i\int d^3x'\, x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\xi)\mathbf{x}'),\ \hat{n}(\mathbf{x}+\xi\mathbf{x}')].
\end{gathered} \tag{18}$$

Так как $[\hat{N},\ \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})] = 0$ и статистический оператор $\rho(t)$ в (6) удовлетворяет условию (4), то согласно (17) $\operatorname{Sp}\rho(t)\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ не зависит от t (это среднее не зависит и от $\mathbf{x}$). Поэтому

$$\operatorname{Sp} w(t)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \operatorname{Sp}\rho(0)\,\hat{\zeta}_\alpha(0). \tag{19}$$

Это соотношение и определяет зависимость термодинамических параметров Y_α от начального статистического оператора ρ (0).

Введем унитарный оператор

$$U_\varphi(t)=\exp\left\{-\mathrm{i}\int d^3x\varphi(\mathbf{x},\ t)\,\hat{n}(\mathbf{x})\right\}. \tag{20}$$

Так как $\hat{n}(\mathbf{x}) = \psi^+(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})$, то

$$U_\varphi(t)\,\psi(\mathbf{x})\,U_\varphi^+(t)=e^{\mathrm{i}\varphi(\mathbf{x},\ t)}\psi(\mathbf{x}). \tag{21}$$

Выбирая в качестве $\varphi(\mathbf{x}, t)$ функцию (16), легко видеть, что

$$U_\varphi(t)\,w_\nu(t)\,U_\varphi^+(t)\equiv w'_\nu=\exp\left\{\Omega_\nu-Y_0\mathscr{H}_\mathbf{p}-Y_k(\hat{\mathscr{P}}_k+p_k\hat{N})-\right.$$
$$\left.-Y_4\hat{N}-\nu Y_0\int d^3x\,(\psi(\mathbf{x})+\psi^+(\mathbf{x}))\right\}, \tag{22}$$

где

$$\mathscr{H}_\mathbf{p}=U_\mathbf{p}\mathscr{H}U_\mathbf{p}^+,\ \ U_\mathbf{p}=\exp\left\{-\mathrm{i}\mathbf{p}\int d^3x\mathbf{x}\hat{n}(\mathbf{x})\right\}. \tag{23}$$

Мы учли при этом, что $U_\mathbf{p}\hat{\mathscr{P}}_kU_\mathbf{p}^+ = \hat{\mathscr{P}}_k + p_k\hat{N}$, так как $[\hat{\mathscr{P}}_k, \hat{n}(\mathbf{x})] = \mathrm{i}\frac{\partial\hat{n}(x)}{\partial x_k}$. Так как согласно (21), (22)

$$\mathrm{Sp}\,w_\nu(t)\,\psi(\mathbf{x})=e^{\mathrm{i}\varphi(\mathbf{x},\ t)}\,\mathrm{Sp}\,w'_\nu\psi(\mathbf{x}) \tag{24}$$

и $\mathrm{Sp}\,w'_\nu\psi(\mathbf{x}) = (\mathrm{Sp}\,w'_\nu\psi(\mathbf{x}))^*$, то $\varphi(\mathbf{x}, t)$ представляет собой фазу величины $\mathrm{Sp}\,w_\nu(t)\,\psi(\mathbf{x})$.

Вводя точную фазу величины $\psi(\mathbf{x})$,

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x},\ t) = \mathrm{Im}\ln\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi(x) \equiv \mathbf{px} + \bar{\varphi}(t),$$
$$\bar{\varphi}(t) = \mathrm{Im}\ln\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi(0)$$

[мы учли, что $\rho(t)$ — пространственно однородное состояние, см. (4)], нетрудно показать, используя (24), что величина χ в (16) определяется формулой

$$\chi=\bar{\varphi}(0)+\int_0^\infty d\tau\,(\dot{\bar{\varphi}}(\tau)-p_0) \tag{25}$$

(так как $\bar{\varphi}(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} p_0\tau + \chi$, то интеграл сходится при $\tau \to \infty$). Эта формула и решает вопрос о нахождении χ как функционала ρ (0). Формула (6), которую мы перепишем в виде

$$\rho(t) \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} w(Y_\alpha,\ \mathbf{p},\ p_0t+\chi)=$$
$$=\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} w_\nu(Y_\alpha,\ \mathbf{p},\ p_0t+\chi), \tag{26}$$

где

$$w_\nu(Y_\alpha,\ \mathbf{p},\ \chi) = \exp\left\{\Omega_\nu - Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0 \int d^3x\,(\psi(\mathbf{x})\, e^{-i(\mathbf{px}+\chi)} + \text{э. с.})\right\}, \tag{27}$$

вместе с формулами (16), (19), (25) определяет эргодическое соотношение для сверхтекучих бозе-систем.

Резюмируя, можно сказать, что в рассматриваемых сверхтекучих системах (которые мы будем называть обобщенными сверхтекучими системами, так как мы нигде не использовали требования галилеевой инвариантности) состояние термодинамического равновесия характеризуется термодинамическими силами Y_α, связанными с аддитивными интегралами движения, а также сверхтекучим импульсом $\mathbf{p}$ и фазой $\chi \equiv \varphi(0,\ 0)$, наличие которых обусловлено нарушением симметрии состояния статистического равновесия. Подчеркнем, что зависимость от термодинамических переменных $\mathbf{p}$ и χ вводится через бесконечно малые источники, и в состоянии с нарушенной симметрией эта зависимость сохраняется при $\nu \to 0$.

2. ТЕРМОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧИХ СИСТЕМ

Введем в рассмотрение плотность термодинамического потенциала ω:

$$\begin{aligned}\omega = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{\Omega_\nu}{V} = \omega(Y_0,\ \mathbf{Y}^2,\ Y_4,\ \mathbf{p}^2,\ \mathbf{Yp}) = \\ = -\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln \operatorname{Sp}\exp\Big\{-Y_0\mathcal{H}_{\mathbf{p}} - Y_k(\hat{\mathcal{P}}_k + p_k\hat{N}) - \\ - Y_4\hat{N} - \nu Y_0\int d^3x\,(\psi(\mathbf{x}) + \psi^+(\mathbf{x}))\Big\},\end{aligned} \tag{28}$$

являющуюся функцией термодинамических параметров Y_0, $\mathbf{Y}^2$, Y_4, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{Yp}$. Дифференцируя ω по термодинамическим силам Y_α и сверхтекучему импульсу $\mathbf{p}$, получаем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\omega}{\partial Y_0} = \operatorname{Sp} w'\hat{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(0) = \operatorname{Sp} w\hat{\varepsilon}(0) \equiv \hat{\varepsilon}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial Y_l} = \operatorname{Sp} w'(\hat{\pi}_l(0) + p_l\hat{n}(0)) = \operatorname{Sp} w\hat{\pi}_l(0) \equiv \pi_l, \\ \frac{\partial\omega}{\partial Y_4} = \operatorname{Sp} w\hat{n}(0) \equiv n, \quad \frac{\partial\omega}{\partial p_l} = \\ = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\left\{\frac{Y_0}{V}\operatorname{Sp} w'_\nu\frac{\partial\mathcal{H}_{\mathbf{p}}}{\partial p_l} + \frac{Y_l}{V}\operatorname{Sp} w'_\nu\hat{N}\right\}.\end{gathered} \tag{29}$$

Здесь $w \equiv w(Y,\ \mathbf{p},\ \chi)$ (так как $[\hat{N},\ \hat{\zeta}_\alpha] = 0$, то входящие в эти формулы шпуры не зависят от χ). Замечая далее, что $\dfrac{\partial\mathcal{H}_{\mathbf{p}}}{\partial p_l} = -i\int d^3x x_l\ \times$

$\times\ [\hat{n}(\mathbf{x}),\ \mathcal{H}_\mathbf{p}]$, найдем

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\operatorname{Sp} w'_\nu \frac{\partial \mathcal{H}_\mathbf{p}}{\partial p_l} = -\mathrm{i}\int d^3x x_l \operatorname{Sp} w' [\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(\mathbf{x}),\ \hat{n}(0)],\quad \hat{\varepsilon}_\mathbf{p} = U_\mathbf{p}\hat{\varepsilon}U_\mathbf{p}^+.$$

С другой стороны, усредняя выражение (18) для оператора плотности потока числа частиц $\hat{j}_l(\mathbf{x})$ со статистическим оператором w и учитывая, что $[U_\mathbf{p},\ \hat{n}(0)] = 0,\ [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}),\ \hat{N}] = 0$, имеем

$$j_l = \operatorname{Sp} w\hat{j}_l(0) = -\mathrm{i}\int d^3x x_l \operatorname{Sp} w' [\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(\mathbf{x}),\ \hat{n}(0)] \tag{30}$$

(мы учли, что $[w',\ \hat{\mathcal{P}}] = 0$). Поэтому

$$j_l = \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_l} - \frac{Y_l}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4}. \tag{30'}$$

Таким образом, мы нашли выражение для плотности потока числа частиц через плотность термодинамического потенциала ω. Используя формулы (29), (30), найдем следующее основное термодинамическое равенство:

$$d\omega = \varepsilon\, dY_0 + \pi_k\, dY_k + n\, dY_4 + (Y_0 j_l + Y_l n)\, dp_l, \tag{31}$$

которое имеет смысл второго начала термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей жидкости.

При построении гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости, а также при исследовании низкочастотной асимптотики функций Грина необходимо выразить средние значения в состоянии w операторов плотностей потоков импульса $\hat{t}_{ik}$ и энергии $\hat{q}_k$ через плотность термодинамического потенциала ω. Переходя к нахождению этих величин, заметим, что согласно (18)

$$\left.\begin{aligned} t_{ik} &= \operatorname{Sp} w\hat{t}_{ik}(0) = -\langle\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(0)\rangle\delta_{ik} - \\ &\quad -\mathrm{i}\int d^3x x_k \langle[\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_i(0)]\rangle + p_i j_k, \\ q_k &= \operatorname{Sp} w\hat{q}_k(0) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^3x x_k \langle[\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(\mathbf{x}),\ \hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(0)]\rangle, \\ \langle\ldots\rangle &\equiv \operatorname{Sp} w'_\nu \ldots \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(мы учли, что $[w'_\nu,\ \hat{\mathcal{P}}_k] = 0$; подчеркнем, что усреднение $\langle\ldots\rangle$ происходит по состоянию w'_ν). Из соображений удобства вычислим предварительно величины

$$\left.\begin{aligned} t'_{ik} &= -\langle\hat{\varepsilon}'_\mathbf{p}(0)\rangle\delta_{ik} - \mathrm{i}\langle[\Gamma_{ki},\ \hat{\varepsilon}'_\mathbf{p}(0)]\rangle + p_i j_k, \\ q'_k &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^3x x_k \langle[\hat{\varepsilon}'_\mathbf{p}(\mathbf{x}),\ \hat{\varepsilon}'_\mathbf{p}(0)]\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где $\hat{\varepsilon}'_p(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varepsilon}_p(\mathbf{x}) + \hat{n}(\mathbf{x})\dfrac{Y_4 + Y\mathrm{p}}{Y_0} + \nu(\psi^+(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}))$ и $\Gamma_{ki} = \int d^3x x_k \hat{\pi}_i(\mathbf{x})$ — генератор группы произвольных линейных преобразований $x_i \to x'_i = a_{ik}x_k$. Последнее утверждение следует из того, что операторы $\psi(x)$ и $\psi'(\mathbf{x}) = \psi(a\mathbf{x}) \mid \det a \mid^{1/2}$ удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям и, следовательно, связаны между собой унитарным преобразованием U_a

$$U_a \psi(\mathbf{x}) U_a^+ = \psi'(\mathbf{x}) = \mid \det a \mid^{1/2} \psi(a\mathbf{x}).$$

Рассматривая бесконечно малые преобразования $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$, $|\xi| \ll 1$, легко найти, что $U_a = 1 - \mathrm{i}\xi_{kl}\Gamma_{lk}$. Из условия $\mathrm{Sp}\, w'_\nu = 1$ получим [см. (22)]

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp} \exp\left\{-\int_V d^3x \hat{h}(\mathbf{x})\right\}, \quad \hat{h}(\mathbf{x}) = Y_0 \hat{\varepsilon}'_p(\mathbf{x}) + Y_l \hat{\pi}_l(\mathbf{x}).$$

Тогда, определяя оператор $\hat{h}_a(\mathbf{x})$ формулой

$$U_a \hat{h}(\mathbf{x}) U_a^+ \equiv \hat{h}_a(a\mathbf{x}) |\det a|, \tag{34}$$

находим, что

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp}\, U_a \exp\left\{-\int_V d^3x \hat{h}(\mathbf{x})\right\} U_a^+ = \mathrm{Sp} \exp\left\{-\int_{V_a} d^3x \hat{h}_a(\mathbf{x})\right\},$$

$V_a \equiv V |\det a|$. Так как потенциал Ω пропорционален V, то

$$\exp(-\Omega/|\det a|) = \mathrm{Sp} \exp\left\{-\int_V d^3x \hat{h}_a(\mathbf{x})\right\}.$$

Отсюда, учитывая, что для бесконечно малых преобразований $\det a = 1 + \delta_{kl}\xi_{kl}$, и замечая, что $\hat{h}(\mathbf{x}) = e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{P}}\mathbf{x}} \hat{h}(0) e^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{P}}\mathbf{x}}$, $[w'_\nu, \hat{\mathcal{P}}] = 0$, получаем

$$\mathrm{Sp}\, w\left(\frac{\partial \hat{h}_a(0)}{\partial \xi_{kl}}\right)_{\xi=0} = -\overset{\vee}{\omega}\delta_{kl}, \quad \overset{\vee}{\omega} = \lim_{V\to\infty} \Omega_\nu / V.$$

Однако поскольку для малых ξ_{kl}

$$U_a = 1 - \mathrm{i}\xi_{kl}\Gamma_{lk},$$

то из (34) следует

$$-\mathrm{i}[\Gamma_{lk}, \hat{h}(0)] = \left(\frac{\partial h_a(0)}{\partial \xi_{kl}}\right)_{\xi=0} + \delta_{kl}\hat{h}(0),$$

и поэтому

$$\mathrm{i}\langle[\Gamma_{lk}, \hat{h}(0)]\rangle + \delta_{kl}\langle\hat{h}(0)\rangle = \overset{\vee}{\omega}\delta_{kl}. \tag{35}$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\hat{h}(\mathbf{x})$ и учитывая легко проверяемое равенство

$$\mathrm{i}[\Gamma_{ki}, \hat{\pi}_l(0)] = -\delta_{lk}\hat{\pi}_l(0) - \delta_{lk}\hat{\pi}_i(0),$$

имеем согласно (30), (31), (33), (35)

$$t'_{ik}=p_ij_k-\delta_{ki}\frac{\overset{\nu}{\omega}}{Y_0}-\frac{Y_k}{Y_0}\langle\hat{\pi}_i(0)\rangle=\frac{p_i}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}-\frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0}. \quad (36)$$

Вспоминая определение $\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(0)$ и замечая, что

$$\mathrm{i}\,[\Gamma_{ki},\ \hat{n}(0)]=-\delta_{ik}\hat{n}(0),$$

из (32), (33) и (36) найдем следующее выражение для плотности потока импульса в состоянии w:

$$t_{ik}=t'_{ik}=\frac{p_i}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}-\frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0}. \quad (37)$$

Приступим теперь к вычислению плотности потока энергии q_k, которая согласно (32), (33) связана с величиной q'_k следующим образом:

$$q'_k=q_k-\mathrm{i}p_0\langle[\Gamma_k,\ \hat{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(0)]\rangle-\frac{\mathrm{i}}{2}p_0^2\langle[\Gamma_k,\ \hat{n}(0)]\rangle,$$

$$p_0=\frac{Y_4+\mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0},$$

где $\Gamma_k\equiv\int d^3x x_k\hat{n}(\mathbf{x})$ — генератор группы преобразований Галилея. (Напомним, что мы не предполагаем инвариантности гамильтониана относительно преобразований Галилея.) При выводе этой формулы мы воспользовались тем, что согласно методу квазисредних, как уже отмечалось выше, предел средних от квазилокальных операторов при $\nu\to 0$ конечен.

Замечая, что

$$[\Gamma_k,\ \hat{n}(0)]=0,\quad \mathrm{i}\langle[\Gamma_k,\ \hat{\pi}_i(0)]\rangle=-\delta_{ik}n,\quad \mathrm{i}\langle[\Gamma_k,\ \hat{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(0)]\rangle=-j_k,$$

получаем

$$q'_k=q_k+p_0j_k. \quad (38)$$

Для нахождения q'_k используем следующую очевидную формулу:

$$[w'_\nu,\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})]=w'_\nu\int_0^1 d\lambda\,\{-Y_0[\mathscr{H}'_{\mathbf{p}},\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x};\ \lambda)]-Y_k[\mathscr{P}_k,\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x};\ \lambda)]\}, \quad (39)$$

где $\mathscr{H}'_{\mathbf{p}}\equiv\int d^3x\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$, $\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x};\ \lambda)\equiv w^{-\lambda}\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,w^{\lambda}$, причем оператор плотности потока энергии $\hat{q}'_k(\mathbf{x})$, соответствующий гамильтониану $\mathscr{H}'_{\mathbf{p}}$

$$\mathrm{i}\,[\mathscr{H}'_{\mathbf{p}},\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})]=-\frac{\partial\hat{q}'_k(\mathbf{x})}{\partial x_k},$$

имеет вид [см. (18)]

$$\hat{q}'_k(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - (1-\xi)\mathbf{x}'),\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')].$$

Так как $[w'_\nu, \hat{\mathcal{P}}] = 0$, то согласно (33) $q'_k = \mathrm{Sp}\, w'_\nu \hat{q}'_k(\mathbf{x})$. Учитывая, что

$$[\hat{\mathcal{P}}_k,\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})] = \mathrm{i}\,\frac{\partial \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\partial x_k},$$

из (39) находим

$$[w'_\nu,\ \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})] = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\, w'_\nu \int_0^1 d\lambda\, \{Y_0(q'_k(\mathbf{x};\ \lambda) - \langle \hat{q}'_k\rangle) + Y_k(\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x};\ \lambda) - \langle \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}\rangle)\}.$$

Используя это выражение, а также принцип пространственного ослабления корреляций, легко видеть, что

$$\begin{aligned}\mathrm{i} \int d^3x x_k\, \mathrm{Sp}\, w'_\nu [\hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)] &= \\ = Y_0\, \mathrm{Sp}\, \frac{\partial w'_\nu}{\partial Y_\alpha}\, \hat{q}'_k(0) + Y_k\, \mathrm{Sp}\, \frac{\partial w'_\nu}{\partial Y_\alpha}\, \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(0) &= \\ = Y_0 \frac{\partial q'_k}{\partial Y_\alpha} + Y_k \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_\alpha} - (Y_0 j_k + Y_k n)\, \frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\, \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0}&, \\ \varepsilon' \equiv \langle \hat{\varepsilon}'_{\mathbf{p}}(0)\rangle&,\end{aligned} \tag{40}$$

где $\hat{\zeta}'_\alpha \equiv (\hat{\varepsilon}_{\mathbf{p}},\ \hat{\pi}_k + p_k\hat{n},\ \hat{n})$. Мы при этом учли, что

$$\frac{\partial w'_\nu}{\partial Y_\alpha} = -w'_\nu \int_0^1 d\lambda \int d^3x\, (\hat{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x};\ \lambda) - \langle \hat{\zeta}'_\alpha\rangle).$$

Обратим внимание на то, что при получении формулы (40) мы производили интегрирование по частям и отбросили интегралы по бесконечно удаленной поверхности, что всегда можно сделать при $\nu \neq 0$ (при $\nu \neq 0$ равновесные корреляции убывают достаточно быстро, чего нельзя сказать, в силу теоремы Боголюбова об особенностях типа $1/q^2$, о корреляциях при $\nu = 0$; в конце вычислений мы должны перейти к пределу $\nu \to 0$).

При $\alpha = 0$ из (40) следует

$$-2q'_k = Y_0 \frac{\partial q'_k}{\partial Y_0} + Y_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_0} + p_0 \frac{\partial n}{\partial Y_0}\right). \tag{41}$$

При $\alpha = i$ с учетом (37) и (30) имеем

$$Y_0 \frac{\partial q'_k}{\partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{\partial}{\partial Y_i} \left\{ Y_k \left(\varepsilon + \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0}\, n\right)\right\}. \tag{42}$$

При $\alpha = 4$ из (40) получим

$$Y_0 \frac{\partial q'_k}{\partial Y_4} = -Y_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_4} + p_0 \frac{\partial n}{\partial Y_4} \right). \tag{43}$$

Из второго уравнения следует, что

$$q'_k = -\frac{Y_k}{Y_0} \left(\frac{\partial \omega}{\partial Y_0} - \frac{\omega}{Y_0} + p_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y_4} \right) + C_k(Y_0, Y_4, \mathbf{p}), \tag{44}$$

где C_k — постоянная интегрирования, которая не зависит от $\mathbf{Y}$. Подстановка этого результата в третье уравнение показывает, что $\partial C_k / \partial Y_4 = 0$. В свою очередь из первого уравнения найдем, что $C_k = C_k(\mathbf{p})/Y_0^2$.

Таким образом, из (30), (38) и (44) следует, что плотность потока энергии q_k в состоянии термодинамического равновесия w определяется формулой

$$q_k = \operatorname{Sp} w \hat{q}_k(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{p_0}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_k} + \frac{C_k(\mathbf{p})}{Y_0^2}, \tag{45}$$

где $C_k(\mathbf{p})$ — некоторая неизвестная функция, которая зависит только от сверхтекучего импульса $\mathbf{p}$ и не зависит от Y_0, $\mathbf{Y}$, Y_4.

Формулы (30), (37), (45) для плотностей и плотностей потоков $\zeta_{\alpha k}$ можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$\zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0} + \frac{\delta_{\alpha 0}}{Y_0^2} C_k(\mathbf{p}), \tag{46}$$
$$\zeta_\alpha = \partial \omega / \partial Y_\alpha.$$

Представим теперь выражения для плотностей потоков в форме, соответствующей двухжидкостной гидродинамике. Термодинамический потенциал ω является функцией Y_0, $\mathbf{Y}^2$, Y_4, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{Yp}$. Введем величины ρ_n, ρ_s, $\overset{*}{m}$, являющиеся функциями этих термодинамических переменных:

$$\rho_n \equiv -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Y}^2}, \quad \rho_s \equiv \frac{2}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}^2} \overset{*}{m}{}^2, \quad \frac{\rho_n}{\overset{*}{m}} = n - \frac{\partial \omega}{\partial (\mathbf{Yp})}. \tag{47}$$

Тогда с учетом (47) потоки j_k, t_{ik}, q_k приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} j_k &= \frac{\rho_n}{\overset{*}{m}} v_{nk} + \frac{\rho_s p_k}{\overset{*}{m}{}^2}, \quad t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s \frac{p_i p_k}{\overset{*}{m}{}^2}, \\ q_k &= v_{nk}\left[-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \left(n - \frac{\rho_n}{\overset{*}{m}}\right) p_0\right] - \frac{\rho_s p_k}{\overset{*}{m}{}^2} p_0 + \frac{C_k(\mathbf{p})}{Y_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Отсюда видно, что ρ_n имеет смысл плотности «массы» нормальной компоненты, ρ_s — плотности «массы» сверхтекучей компоненты. Если величину $\overset{*}{m}$ интерпретировать как эффективную «массу частицы», то $\mathbf{p}/\overset{*}{m}$ нужно интерпретировать как сверхтекучую скорость. Заметим, что полная плотность $\rho = \overset{*}{m} n = \overset{*}{m}\, \partial \omega / \partial Y_4$, вообще говоря, не совпадает с суммой нормальной ρ_n и сверхтекучей ρ_s плотностей $\rho \neq \neq \rho_n + \rho_s$. Поэтому можно ввести в рассмотрение некоторую плотность ρ_c согласно формуле

$$\rho_c \equiv \rho - \rho_n - \rho_s, \tag{49}$$

появление которой связано, как мы увидим далее с отсутствием галилеевой (или релятивистской) инвариантности теории.

3. ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Перейдем к выводу уравнений гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости. Согласно (17) средние значения плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ в состоянии, описываемом статистическим оператором $\rho(t)$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}, \tag{50}$$

где $\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$. При временах $t \gg \tau_r$ (τ_r — время релаксации) статистический оператор $\rho(t)$ становится функционалом параметров сокращенного описания $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}', t)\} \tag{51}$$

(это утверждение носит название функциональной гипотезы). Функциональные аргументы ζ_α и φ представляют собой асимптотические ($t \gg \tau_r$) значения $\operatorname{Sp}\rho(t)\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ и $\operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\rho(t)\,\psi(\mathbf{x})$.

Функционал σ согласно определению должен удовлетворять условиям

$$\operatorname{Sp}\sigma\hat{\zeta}_\alpha = \zeta_\alpha, \quad \operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\sigma\psi = \varphi. \tag{52}$$

Так как $[\mathcal{H}, \hat{\mathcal{P}}] = [\mathcal{H}, \hat{N}] = 0$, то следствием равенств (51), (52) являются формулы

$$\left.\begin{aligned}
&e^{-i\mathcal{H}\tau}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}', t)\}\, e^{i\mathcal{H}\tau} = \\
&\quad = \sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t+\tau),\ \varphi(\mathbf{x}', t+\tau)\},\\
&e^{i\hat{\mathcal{P}}\mathbf{x}}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}', t)\}\, e^{-i\hat{\mathcal{P}}\mathbf{x}} = \\
&\quad = \sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{x}', t)\},\\
&e^{i\hat{N}\varphi'}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}', t)\}\, e^{-i\hat{N}\varphi'} = \\
&\quad = \sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t),\ \varphi(\mathbf{x}', t)+\varphi'\}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Пусть начальный статистический оператор $\rho(0)$ соответствует пространственно однородному состоянию, т. е. удовлетворяет условиям, когда справедливо эргодическое соотношение (26). Тогда асимптотические значения параметров сокращенного описания, входящих в (51), имеют вид $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) = \zeta_\alpha$, $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{px} + p_0 t + \chi$, где ζ_α, $\mathbf{p}$, χ — постоянные величины, не зависящие от $\mathbf{x}$ и t. Поэтому, сравнивая (26) и (51), имеем

$$\sigma(\zeta_\alpha, \mathbf{px}' + p_0 t + \chi) = w(Y_\alpha, \mathbf{p}, p_0 t + \chi) \tag{54}$$

или

$$\sigma(\zeta_\alpha, \mathbf{px}' + \chi) = w(Y_\alpha, \mathbf{p}, \chi), \tag{55}$$

причем параметры Y_α как функции ζ и $\mathbf{p}$ определяются из соотношения

$$\mathrm{Sp}\, w(Y_\beta, \mathbf{p}, p_0 t + \chi)\, \hat{\zeta}_\alpha = \zeta_\alpha. \tag{56}$$

Среднее $\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta, \varphi)\,\hat{a}(\mathbf{x})$ ($\hat{a}(\mathbf{x})$ — некоторый квазилокальный оператор) должно, очевидно, определяться значениями функций $\zeta_\alpha(\mathbf{x}')$, $\varphi(\mathbf{x}')$ в окрестности точки $\mathbf{x}$. Поэтому согласно (55) в главном приближении по градиентам параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathrm{Sp}\,\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}'), \varphi(\mathbf{x}')\}\,\hat{a}(\mathbf{x}) \approx \mathrm{Sp}\,\sigma\left\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right\}\hat{a}(\mathbf{x}) =$$
$$= \mathrm{Sp}\, w\left\{Y_\alpha(\mathbf{x}), \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right\}\hat{a}(\mathbf{x}),$$

где величины $Y_\alpha(\mathbf{x})$ определяются из уравнений

$$\mathrm{Sp}\, w\{Y_\beta, \mathbf{p}, \chi\}\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}). \tag{57}$$

Легко видеть, таким образом, что

$$\mathrm{Sp}\,\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}'), \varphi(\mathbf{x}')\}\,\hat{a}(\mathbf{x}) \approx \mathrm{Sp}\, w\left\{Y_\alpha(\mathbf{x}), \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x})\right\}\hat{a}(0) =$$
$$= \mathrm{Sp}\, w\{Y_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{p}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\}\,\hat{a}(0), \tag{58}$$

где сверхтекучий импульс $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ пространственно неоднородной системы определяется формулой

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \partial\varphi(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}. \tag{59}$$

В пренебрежении градиентами параметров сокращенного описания потоки $\zeta_{\alpha k}$ можно поэтому вычислять по формулам $\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\, w(Y_\beta, \mathbf{p}, \varphi)\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$. Таким образом, для потоков $\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ в главном приближении по градиентам справедливы формулы (46), причем величины Y_α и ζ_α связаны между собой соотношением (46) $\zeta_\alpha = \partial\omega/\partial Y_\alpha$. Кроме того, следует иметь в виду, что теперь как Y_α, p_k, так и ζ_α, p_k являются медленно меняющимися функциями координат $\mathbf{x}$ и времени t.

Перейдем к нахождению уравнения для асимптотической фазы $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Используя определение точной фазы $\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t) =$

$= \operatorname{Im} \ln \operatorname{Sp} \rho(t) \psi(\mathbf{x})$ величины $\psi(\mathbf{x})$, имеем

$$\frac{\partial \overline{\varphi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{Re} \frac{\operatorname{Sp} \rho(t) [\mathscr{H}, \psi(\mathbf{x})]}{\operatorname{Sp} \rho(t) \psi(\mathbf{x})},$$

откуда, переходя в асимптотическую область $t \gg \tau_r$ [см. (51)] и заменяя $\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ на $\varphi(\mathbf{x}, t)$, получаем

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{Re} \frac{\operatorname{Sp} \sigma [\mathscr{H}, \psi(\mathbf{x})]}{\operatorname{Sp} \sigma \psi(\mathbf{x})}.$$

Поэтому в главном приближении по градиентам величин $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$ имеем

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \operatorname{Re} \frac{1}{\operatorname{Sp} w \psi(0)} \operatorname{Sp} w \left\{ Y(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x}) \right\} [\mathscr{H}, \psi(0)]$$

или, замечая, что $[w, \mathscr{H} + p_0 \hat{N}] = 0$,

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = p_0(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{Y_4(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)}{Y_0(\mathbf{x}, t)}. \qquad (60)$$

При этом сверхтекучий импульс $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ связан с фазой $\varphi(\mathbf{x}, t)$ соотношением (59).

Уравнения (50), (60), а также формула (46) показывают, что фаза $\varphi(\mathbf{x}, t)$ в правые части этих уравнений входит только через $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, но не явно. Поэтому уравнение (60) обычно записывают в виде

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \left(\frac{Y_4(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)}{Y_0(\mathbf{x}, t)} \right), \quad \operatorname{rot} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = 0. \qquad (61)$$

Получим теперь уравнение для плотности энтропии. Плотность энтропии определяется формулой

$$s = -\frac{1}{V} \operatorname{Sp} w(t) \ln w(t) = -\omega + Y_\alpha \zeta_\alpha. \qquad (62)$$

Поэтому, замечая, что $\zeta_\alpha = \partial \omega / \partial Y_\alpha$, имеем

$$\dot{s} = Y_\alpha \dot{\zeta}_\alpha - \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \dot{p}_k$$

или, используя уравнения (50), (61) и формулу (46), получаем

$$\dot{s} = -\frac{\partial \omega}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0} - Y_\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0} + \frac{\delta_{\alpha 0}}{Y_0^2} C_k(\mathbf{p}) \right\}. \qquad (63)$$

Замечая, что $Y_\alpha \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \left(\frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0} \right) = 0$, имеем

$$\dot{s} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{Y_k}{Y_0} (Y_\alpha \zeta_\alpha - \omega) \right\} - Y_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{C_k(\mathbf{p})}{Y_0^2}.$$

Таким образом,

$$\dot{s} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{Y_k}{Y_0} s\right) - Y_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{C_k(\mathbf{p})}{Y_0^2}. \qquad (64)$$

Если использовать феноменологический принцип адиабатичности течений идеальной сверхтекучей жидкости, то мы должны положить функцию $C_k(\mathbf{p})$ равной нулю. При этом из уравнения (64) можно сделать заключение, что энтропией обладает только нормальная компонента жидкости, которая движется со скоростью $-\mathbf{Y}/Y_0 = \mathbf{v}_n$.

4. ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть уравнения квантовой механики инвариантны по отношению к преобразованию Галилея, которое задается унитарным оператором $U_{\mathbf{p}} = \exp\left\{-i\mathbf{p}\int d^3x\mathbf{x}\hat{n}(\mathbf{x})\right\}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (m — масса частицы). Это означает, что операторы плотностей $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ при унитарном преобразовании $U_{\mathbf{p}}$ обладают следующими трансформационными свойствами:

$$U_{\mathbf{p}}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}\hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\frac{mv^2}{2},$$
$$U_{\mathbf{p}}\hat{\pi}_i(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + mv_i\hat{n}(\mathbf{x}), \quad U_{\mathbf{p}}\hat{n}(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{n}(\mathbf{x}). \qquad (65)$$

Используя первую из этих формул, имеем [см. (23)]

$$\mathscr{H}_{\mathbf{p}} = \mathscr{H} + \mathbf{v}\hat{\mathscr{P}} + \frac{mv^2}{2}\hat{N}. \qquad (66)$$

Поэтому согласно (28)

$$\omega(Y_\alpha, \mathbf{p}) = \omega(Y'_\alpha, 0) \equiv \omega(Y'_\alpha), \qquad (67)$$

где

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0 v_k, \quad Y'_4 = Y_4 + Y_k m v_k + Y_0\frac{mv^2}{2}. \qquad (68)$$

Мы видим таким образом, что с учетом вращательной инвариантности термодинамический потенциал ω галилеево-инвариантных систем является функцией трех независимых переменных Y'_0, $\mathbf{Y}'^2$, Y'_4. Преобразование (22) статистического оператора соответствует переходу в систему отсчета, где конденсат покоится, а параметр $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m \equiv \equiv \mathbf{v}_s$ имеет смысл сверхтекучей скорости. В силу (31), (68) второе начало термодинамики для галилеево-инвариантных сверхтекучих систем имеет вид

$$d\omega = \zeta'_\alpha\, dY'_\alpha, \qquad (69)$$

где ζ'_α — плотности аддитивных интегралов движения в системе отсчета, где $\mathbf{v}_s = 0$,

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\pi}}{m} + \frac{p^2}{2m}n, \quad \pi'_k = \pi_k - p_k n, \quad n' = n. \qquad (70)$$

Формула (67) показывает, что для галилеево-инвариантных систем согласно (47), (49) имеют место соотношения

$$\overset{*}{m} = m, \quad \rho_s = \rho - \rho_n,$$

и поэтому формулы (48) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} &j_k = \frac{\rho_n}{m} v_{nk} + \frac{\rho_s}{m} v_{sk}, \quad t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk}, \\ &q_k = v_{nk}\left(-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \frac{\rho_s}{m}\frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0}\right) - v_{sk}\frac{\rho_s}{m}\frac{Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p}}{Y_0} + \frac{C_k(\mathbf{p})}{Y_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Покажем, что требование галилеевой инвариантности приводит к обращению в нуль функции $C_k(\mathbf{p})$. С этой целью заметим, что в силу формул (22), (27)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p_k}\right)_Y = \mathrm{i}\,[\Gamma_k,\ w] + U_{\mathbf{p}}^+\left(\frac{\partial w'}{\partial p_k}\right)_Y U_{\mathbf{p}}. \tag{72}$$

Из определения (22) статистического оператора w' и формулы (66) следует, что

$$\left(\frac{\partial w'}{\partial p_l}\right)_Y = -w' \int_0^1 d\lambda \left\{\frac{Y_0}{m}\left(\hat{\mathcal{P}}_l(\lambda) - \langle\hat{\mathcal{P}}_l\rangle\right) + \right.$$

$$\left. + \left(Y_l + \frac{Y_0}{m} p_l\right)\left(\hat{N}(\lambda) - \langle\hat{N}\rangle\right)\right\},$$

$$\hat{N}(\lambda) \equiv w'^{-\lambda}\hat{N}w'^{\lambda}, \quad \langle\ldots\rangle \equiv \operatorname{Sp} w' \ldots$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p_l}\right)_Y = \mathrm{i}\,[\Gamma_l,\ w] + \frac{Y_0}{m}\left(\frac{\partial w}{\partial Y_l}\right)_{\mathbf{p}} + Y_l\left(\frac{\partial w}{\partial Y_4}\right)_{\mathbf{p}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = \frac{\partial}{\partial p_l}\operatorname{Sp} w\hat{q}_k(0) = -\mathrm{i}\operatorname{Sp} w\,[\Gamma_l,\ \hat{q}_k(0)] + \frac{Y_0}{m}\frac{\partial q_k}{\partial Y_l} + Y_l\frac{\partial q_k}{\partial Y_4}. \tag{73}$$

Используя трансформационные свойства (65) операторов плотностей $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ и формулы (18), найдем трансформационные свойства операторов плотностей потоков при преобразовании Галилея

$$\left.\begin{aligned} &U_{\mathbf{p}}\hat{\pi}_k(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + mv_k\hat{n}(\mathbf{x}), \\ &U_{\mathbf{p}}\hat{t}_{kl}(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{t}_{kl}(\mathbf{x}) + mv_k\hat{\pi}_l(\mathbf{x}) + mv_l\hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + v_k v_l m\hat{n}(\mathbf{x}), \\ &U_{\mathbf{p}}\hat{q}_k(\mathbf{x})U_{\mathbf{p}}^+ = \hat{q}_k(\mathbf{x}) + v_l\hat{t}_{lk}(\mathbf{x}) + v_k\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \frac{v^2}{2}\left(\hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + v_k m\hat{n}(\mathbf{x})\right) + \\ &+ v_k v_l\hat{\pi}_l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Дифференцируя последнее соотношение по $\mathbf{v}$ и полагая затем $\mathbf{v}=0$, найдем

$$-i[\Gamma_l, \hat{q}_k(\mathbf{x})]=\frac{1}{m}\{\hat{t}_{lk}(\mathbf{x})+\delta_{lk}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\}.$$

Подставляя это выражение в (73), получаем

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_l}=\frac{1}{m}\left(t_{lk}+\delta_{lk}\varepsilon+Y_0\frac{\partial q_k}{\partial Y_l}\right)+Y_l\frac{\partial q_k}{\partial Y_4}. \tag{75}$$

Так как согласно (68)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Y_0}\bigg|_{\mathbf{p}}=\frac{\partial}{\partial Y_0'}+\frac{p_k}{m}\frac{\partial}{\partial Y_k'}+\frac{p^2}{2m}\frac{\partial}{\partial Y_4'}, \quad \frac{\partial}{\partial Y_k}\bigg|_{\mathbf{p}}=\frac{\partial}{\partial Y_k'}+p_k\frac{\partial}{\partial Y_4'},\\
&\frac{\partial}{\partial Y_4}\bigg|_{\mathbf{p}}=\frac{\partial}{\partial Y_4'}, \quad \frac{\partial}{\partial p_k}\bigg|_{Y_\alpha}=\frac{\partial}{\partial p_k}\bigg|_{Y_\alpha'}+\frac{Y_0'}{m}\frac{\partial}{\partial Y_k'}+Y_k'\frac{\partial}{\partial Y_4'},
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

то, подставляя выражения (46) для ε, t_{lk} и q_k в (75) и используя формулы (76), получаем

$$\frac{\partial C_k(\mathbf{p})}{\partial p_l}=0.$$

Мы учли при этом, что потенциал ω зависит только от Y_α', но не зависит от $\mathbf{p}$ [см. (67)]. Отсюда и из требования вращательной инвариантности следует, что $C_k(\mathbf{p})=0$. Используя формулы (71), (67), легко убедиться, что полученные нами уравнения переходят в уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау.

Рассмотрим теперь случай, когда система инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца. В этом случае операторы импульса $\hat{\mathscr{P}}_k$ и энергии $\mathscr{H}$ образуют 4-вектор $\hat{\mathscr{P}}^\mu\equiv(\hat{\mathscr{P}}_k, \mathscr{H})$, который при преобразовании Лоренца

$$x^\mu\to x'^\mu=a_\nu^\mu x^\nu, \quad (x^k\equiv x_k, \quad x^0\equiv t) \tag{77}$$

преобразуется согласно формуле

$$\hat{\mathscr{P}}^\mu\to\hat{\mathscr{P}}'^\mu\equiv U_a\hat{\mathscr{P}}^\mu U_a^+=a_\nu^\mu\hat{\mathscr{P}}^\nu, \tag{78}$$

где U_a — унитарное преобразование в гильбертовом пространстве, соответствующее преобразованию (77), явный вид которого мы здесь не выписываем.

Роль оператора числа частиц $\hat{N}$ играет оператор заряда $\hat{Q}$, который является инвариантом;

$$\hat{Q}\to\hat{Q}'\equiv U_a\hat{Q}U_a^+=\hat{Q}. \tag{79}$$

Равновесный статистический оператор релятивистской сверхтекучей жидкости мы можем, таким образом, представить в виде

$$\begin{aligned}
w(Y_\mu, p_\mu)=\exp\Big\{&V\omega-Y_\mu\hat{\mathscr{P}}^\mu-Y_4\hat{Q}-\\
&-\nu p_\mu\int_\sigma d\sigma^\mu\left(\hat{\varphi}(x)e^{-ip_\nu x^\nu}+\text{э. с.}\right)\Big\},
\end{aligned} \tag{80}$$

где $Y_\mu \equiv (Y_k,\ Y_0)$, $p_\mu = (p_k,\ p_0)$, $p_0 \equiv (Y_4 + \mathbf{Yp})/Y_0$ (гиперплоскость σ, по которой происходит интегрирование в (80), ортогональна 4-вектору p_μ; для простоты мы рассматриваем сверхтекучесть скалярных частиц, описываемых скалярным полем $\hat{\varphi}(x) \equiv \equiv e^{i\hat{\mathcal{P}}_\mu x^\mu}\hat{\varphi}(0)\,e^{-i\hat{\mathcal{P}}_\nu x^\nu}$). Из формул (78) — (80) следует, что

$$U_a w(Y_\mu,\ p_\mu)\,U_a^+ = w(Y'_\mu,\ p'_\mu), \tag{81}$$

где

$$Y'_\mu = Y_\nu a^\nu_\mu, \quad p'_\mu = p_\nu a^\nu_\mu. \tag{82}$$

Таким образом, величины Y_μ и p_μ образуют два 4-вектора, причем величина

$$Y_4 = -Y_\mu p^\mu \tag{83}$$

представляет собой инвариант (связь между ковариантными и контрвариантными компонентами 4-векторов осуществляется с помощью диагонального метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с компонентами $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$).

Условие пространственной однородности (8) и условие стационарности (12) объединяются в единое релятивистски-инвариантное соотношение

$$[w,\ \hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu\hat{Q}] = 0. \tag{84}$$

Так как объем V не является релятивистским инвариантом, то вместо плотности термодинамического потенциала ω целесообразно ввести величину $\omega' = \omega/Y_0 = \Omega/VY_0$, которая является релятивистским инвариантом и имеет физический смысл давления [из формулы (81) следует, что $\Omega = \omega V$ является инвариантом; инвариантом, очевидно, является и $Y_0 V$]. Таким образом, $\omega' = \omega/Y_0$ является функцией инвариантов Y^2, p^2, $Y_\mu p^\mu$

$$\omega' = \omega'(Y^2,\ p^2,\ Y_\mu p^\mu). \tag{85}$$

Согласно формулам (46) плотности ζ_α и потоки $\zeta_{\alpha k}$ в состоянии термодинамического равновесия были выражены в терминах плотности термодинамического потенциала ω, который являлся функцией переменных Y_0, Y_k, Y_4, p_k. Такая запись формул была, в частности, удобна для галилеево-инвариантных систем. Для релятивистски инвариантных систем целесообразно выразить плотности ζ_α и потоки $\zeta_{\alpha k}$ в терминах потенциала ω', выбирая в качестве независимых переменных четырехмерные векторы Y_μ и p_μ ($Y_4 = -p_\mu Y^\mu$). Нетрудно видеть согласно (46), что плотность заряда $n \equiv j^0$ и плотность потока заряда j^k образуют 4-вектор, причем

$$j^\mu = \partial\omega'/\partial p_\mu. \tag{86}$$

Аналогично плотности энергии ε и импульса $\pi^k \equiv \pi_k$, а также плотности потоков энергии $q^k \equiv q_k$ и импульса $t^{kl} \equiv t_{kl}$ согласно

(46) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial\omega' Y_0}{\partial Y_0} - p_0\frac{\partial\omega'}{\partial p_0}, & q^k &= -\frac{\partial\omega' Y_k}{\partial Y_0} - p_0\frac{\partial\omega'}{\partial p_k} + \frac{C_k}{Y_0^2}, \\ \pi^k &= Y_0\frac{\partial\omega'}{\partial Y_k} + p_k\frac{\partial\omega'}{\partial p_0}, & t^{kl} &= -\frac{\partial\omega' Y_l}{\partial Y_k} + p_k\frac{\partial\omega'}{\partial p_l}. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Отсюда видно, что величины $t^{00} = \varepsilon$, $t^{k0} = \pi^k$, $t^{kl} = t^{kl}$, $t^{0k} = q^k$ образуют тензор второго ранга $t^{\mu\nu}$ (тензор энергии — импульса), причем

$$t^{\mu\nu} = -\frac{\partial\omega' Y^\nu}{\partial Y_\mu} + p^\mu\frac{\partial\omega'}{\partial p_\nu} \tag{88}$$

(постоянная C_k для релятивистски-инвариантных систем также равна нулю, так как величины $t^{\mu\nu}$ должны образовывать тензор второго ранга, и правая часть (88) также представляет собой тензор второго ранга). Отметим, что в силу (85) тензор $t^{\mu\nu}$ является симметричным, $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$.

Подчеркнем в заключение, что формулы (86), (88) формально справедливы для общих сверхтекучих систем [если пренебречь функцией C_k (**p**)]. Действительно, при получении формул (86), (88) из формул (46) мы просто перешли от независимых переменных Y_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$), p_k к независимым переменным Y_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), p_μ, где $p_0 = (Y_4 + \mathbf{Yp})/Y_0$.

Введение тензора $t^{\mu\nu}$ и вектора тока j^μ позволяет записать уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости в виде

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0. \tag{89}$$

Уравнение движения для сверхтекучего импульса **p** (61) с условием потенциальности сверхтекучего течения объединяются в уравнение

$$\frac{\partial p^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^\nu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{90}$$

причем 4-импульс p_ν связан с фазой φ соотношением $p_\nu = \partial\varphi/\partial x^\nu$. Плотность энтропии $s = -\frac{1}{V}\operatorname{Sp} w \ln w$, равная согласно (87)

$$s^0 = -\omega + Y_\mu\pi^\mu + Y_4 j^0 = Y_0 Y_\mu\frac{\partial\omega'}{\partial Y_\mu}, \tag{91}$$

и плотность потока энтропии s^k

$$s^k = -\frac{Y_k}{Y_0}s^0 \tag{92}$$

объединяются в четырехмерный вектор

$$s^\mu = -Y^\mu Y_\nu\frac{\partial\omega'}{\partial Y_\nu}, \tag{93}$$

который представляет собой 4-ток энтропии.

Следствием законов сохранения (89) и уравнения движения для сверхтекучего импульса p_μ (90) является условие адиабатичности течения сверхтекучей жидкости

$$\partial s^\mu / \partial x^\mu = 0. \tag{94}$$

Полученная нами в микроскопическом подходе система уравнений (89), (90), (94) полностью эквивалентна уравнениям работы [14], в основе которой лежит феноменологический подход к гидродинамике сверхтекучей жидкости. (Уравнения гидродинамики релятивистской сверхтекучей жидкости в микроскопическом подходе были получены ранее в [15].)

В заключение этого раздела отметим, что уравнения (89), (90), (94) справедливы не только для релятивистских систем, но и для обобщенных сверхтекучих систем, гамильтониан которых не обладает свойствами галилеевой или релятивистской инвариантности. В отличие от релятивистских систем, для которых давление ω' является функцией инвариантов p^2, Y^2, $p_\mu Y^\mu$ [см. (85)], в общем случае ω' будет являться произвольной функцией Y_μ и p_μ. В последующих разделах нам будет удобно пользоваться при рассмотрении обобщенных сверхтекучих систем уравнениями (89), (90) и использовать в соответствии с этим релятивистские обозначения.

5. ФУНКЦИИ ГРИНА СВЕРХТЕКУЧИХ СИСТЕМ

В теории нормальных систем вводятся запаздывающие (+) и опережающие (—) функции Грина для пары трансляционно-инвариантных квазилокальных операторов $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{x}')$

$$G^{\pm}_{ab}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \\ = \mp i\theta(\pm(t-t'))\,\mathrm{Sp}\, w\,[\hat{a}(\mathbf{x}, t), \hat{b}(\mathbf{x}', t')]. \tag{95}$$

Здесь w — равновесный статистический оператор и $\hat{a}(\mathbf{x}, t) = \exp[i(\mathcal{H}t - \hat{\mathcal{P}}\mathbf{x})]\,\hat{a}(0)\exp[-i(\mathcal{H}t - \hat{\mathcal{P}}\mathbf{x})]$. Так как для нормальных систем $[w, \mathcal{H}] = [w, \hat{\mathcal{P}}] = 0$, то функции Грина являются трансляционно-инвариантными по координатам и времени, т. е. зависят от $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $t - t'$. В случае сверхтекучих систем так определенные функции Грина не будут трансляционно-инвариантными, так как равновесный статистический оператор не коммутирует с $\mathcal{H}$ и $\hat{\mathcal{P}}$. Однако если в формуле (95) под $\hat{a}(\mathbf{x}, t)$ мы будем понимать оператор

$$\hat{a}(\mathbf{x}, t) = \exp\{i(Ht - \hat{P}_k x_k)\}\,\hat{a}(0)\exp\{-i(Ht - \hat{P}_k x_k)\}, \tag{96}$$

где

$$H \equiv \mathcal{H} + p_0\hat{N}, \quad \hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N},$$

то функции Грина, определяемые формулой (95), будут трансляционно-инвариантными, так как $[w, H] = [w, \mathbf{P}] = 0$. (В этой связи для сверхтекучих систем операторы $\hat{\mathbf{P}}$ и H удобно интерпретировать как операторы пространственной и временной трансляции соответственно.) Поэтому мы приходим к следующему определению двухвременных запаздывающих (+) и опережающих (—) функций Грина сверхтекучих систем:

$$G_{ab}^{\pm}(\mathbf{x}, t) = \mp i\theta(\pm t)\,\mathrm{Sp}\, w\,[\hat{a}(\mathbf{x}, t), \hat{b}(0)], \tag{97}$$

где $w = \lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{V\to\infty} \exp\left\{\Omega_\nu - Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0 \int d^3x\,(\psi(\mathbf{x})\,e^{-i(\mathbf{px}+\chi)} + \text{э. с.})\right\}$ — равновесный статистический оператор [см. (27)] и $\hat{a}(\mathbf{x}, t)$ определяется формулой (96).

Так как усреднение в (97) ведется по состоянию статистического равновесия, определяемого оператором w, то функции Грина $G_{ab}^{\pm}(\mathbf{x}, t)$ являются также функциями термодинамических сил Y_α и сверхтекучего импульса $\mathbf{p}$:

$$G_{ab}^{\pm}(\mathbf{x}, t) = G_{ab}^{\pm}(\mathbf{x}, t;\, Y_\alpha, \mathbf{p}).$$

Фурье-компоненты функций Грина $G_{ab}^{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$ определяются равенством

$$G_{ab}^{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega t - \mathbf{kx})} G_{ab}^{\pm}(\mathbf{x}, t). \tag{98}$$

Введенные функции Грина определяют отклик системы на внешнее возмущение. Действительно, пусть при $t \to -\infty$ система находится в состоянии статистического равновесия, которое описывается статистическим оператором (26). В некоторый момент времени t_0 включается внешнее поле, так что гамильтонианом системы становится оператор $\mathscr{H}(t) = \mathscr{H} + V(t)$ и соответственно уравнение фон Неймана (3) приобретает вид

$$i\,\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [\mathscr{H} + V(t),\ \rho(t)].$$

Введя вместо $\rho(t)$ оператор

$$\tilde{\rho}(t) = e^{-ip_0\hat{N}t}\rho(t)\, e^{ip_0\hat{N}t}, \tag{99}$$

получим для него уравнение

$$i\,\frac{\partial\tilde{\rho}(t)}{\partial t} = [\mathscr{H} + \tilde{V}(t),\ \tilde{\rho}(t)], \tag{100}$$

где

$$\tilde{V}(t) = e^{-ip_0\hat{N}t}V(t)\,e^{ip_0\hat{N}t} \equiv \int d^3x\,\xi(\mathbf{x}, t)\,\hat{b}(\mathbf{x}) \tag{101}$$

[$\xi(\mathbf{x}, t)$ — c-числовое внешнее поле и $\hat{b}(\mathbf{x})$ — квазилокальный оператор, определяющий взаимодействие частиц с внешним полем]. Так как при $t \to -\infty$ внешнее поле отсутствовало и система находилась в равновесии, то

$$\tilde{\rho}(-\infty) = e^{-ip_0\hat{N}t} w(t) e^{ip_0\hat{N}t}\Big|_{t\to-\infty} = w. \tag{102}$$

Считая взаимодействие системы с внешним полем слабым, можно разложить $\tilde{\rho}(t)$ в ряд по степеням $\tilde{V}(t)$:

$$\tilde{\rho}(t) = w + \rho'(t) + \ldots, \tag{103}$$

где $[w, H] = 0$ и $\rho'(t) \sim \xi(t)$. В линейном по ξ приближении уравнение для статистического оператора $\rho'(t)$ имеет вид

$$i\frac{\partial\rho'(t)}{\partial t} = [H, \rho'(t)] + \int d^3x\,\xi(\mathbf{x}, t)\,[\hat{b}(\mathbf{x}), w].$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $\rho'(-\infty) = 0$ имеет вид

$$\rho'(t) = -i\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^3\mathbf{x}'\,\xi(\mathbf{x}', t')\,[\hat{b}(\mathbf{x}', t'-t), w].$$

Среднее значение оператора $\hat{a}(\mathbf{x})$ с точностью до членов, линейных по взаимодействию $\tilde{V}(t)$, определяется формулой

$$a(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Sp}\tilde{\rho}(t)\,\hat{a}(\mathbf{x}) = \operatorname{Sp} w\hat{a}(\mathbf{x}) + a_\xi(\mathbf{x}, t) + \ldots, \tag{104}$$

где

$$a_\xi(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x'\,\xi(\mathbf{x}', t')\,G^{+}_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') \tag{105}$$

и функция Грина $G^{+}_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t')$ определяется формулой (97).

Инвариантность уравнений квантовой механики относительно непрерывных преобразований приводит к некоторым ограничениям на структуру функций Грина.

Рассмотрим сначала случай, когда уравнения квантовой механики инвариантны относительно преобразований Галилея. В этом случае согласно (26) имеем

$$U_{\mathbf{p}} w(Y_\alpha, \mathbf{p})\,U^{+}_{\mathbf{p}} = w(Y'_\alpha, 0),$$

где термодинамические силы Y'_α связаны с термодинамическими силами Y_α формулами (68). Далее, замечая, что

$$U_{\mathbf{p}}(\mathcal{H} + p_0\hat{N})\,U^{+}_{\mathbf{p}} = \mathcal{H} + \frac{\mathbf{p}}{m}\hat{\mathcal{P}} + \frac{Y'_4}{Y'}\hat{N},$$

$$U_{\mathbf{p}}(\hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N})\,U^{+}_{\mathbf{p}} = \hat{\mathcal{P}}_k,$$

и совершая унитарное преобразование под знаком Sp в формуле (97), получаем

$$G^{\pm}_{ab}(\mathbf{x},\ t;\ Y_\alpha,\ \mathbf{p}) = G^{\pm}_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m}t,\ t;\ Y'_\alpha,\ 0\right), \tag{106}$$

где $\tilde{\hat{a}}(0) \equiv U_{\mathbf{p}}\hat{a}(0)U^+_{\mathbf{p}}$, $\tilde{\hat{b}}(0) = U_{\mathbf{p}}\hat{b}(0)U^+_{\mathbf{p}}$.

Такое ограничение на структуру функций Грина, разумеется, невозможно получить для систем, не обладающих свойством галилеевой инвариантности.

Рассмотрим теперь случай, когда система обладает свойством релятивистской инвариантности. Функции Грина по-прежнему определяются формулой (97)

$$G^{\pm}_{ab}(x) = \mp \mathrm{i}\theta(\pm x_0)\,\mathrm{Sp}\, w(Y_\mu,\ p_\mu)\,[\hat{a}(x),\ \hat{b}(0)], \tag{107}$$

где

$$\hat{a}(x) = \exp\{\mathrm{i}(\hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu\hat{Q})x_\mu\}\,\hat{a}(0)\exp\{-\mathrm{i}(\hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu\hat{Q})x_\mu\}$$

и статистический оператор $w(Y_\mu,\ p_\mu)$ определяется формулой (80)

$$w(Y_\mu,\ p_\mu) = \exp\Big\{V\omega - Y_\mu(\hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu\hat{Q}) - \\ - \nu p_\mu \int\limits_\sigma d\sigma^\mu(\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\nu x^\nu} + \text{э. с.})\Big\}.$$

Так как согласно (80) $\hat{\varphi}$ — скалярное поле, то

$$U_a\hat{\varphi}(0)U^+_a = \hat{\varphi}(0). \tag{108}$$

Поэтому, учитывая, что

$$U_a\hat{\mathcal{P}}^\mu U^+_a = a^\mu_\nu\hat{\mathcal{P}}^\nu, \quad U_a\hat{Q}U^+_a = \hat{Q},$$

находим согласно (77), (82), (105)

$$G^{\pm}_{ab}(x_\mu,\ Y_\mu,\ p_\mu) = G^{\pm}_{\tilde{a}\tilde{b}}(x'_\mu,\ Y'_\mu,\ p'_\mu), \tag{109}$$

где $\tilde{\hat{a}}(0) \equiv U_a\hat{a}(0)U^+_a$, $\tilde{\hat{b}}(0) \equiv U_a\hat{b}(0)U^+_a$ и штрихованные величины связаны с нештрихованными формулами $x'_\mu = a^\nu_\mu x_\nu$, $Y'_\mu = Y_\nu a^\nu_\mu$, $p'_\mu = p_\nu a^\nu_\mu$. Если в качестве операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ выбрать, например, оператор тока $\hat{j}_\mu$, то легко видеть, что

$$G^{\pm}_{j_\mu,\,j_\nu}(x,\ Y,\ p) = a^{\mu'}_\mu a^{\nu'}_\nu G^{\pm}_{j_{\mu'},\,j_{\nu'}}(x',\ Y',\ p'). \tag{110}$$

Мы учли при этом, что

$$U_a\hat{j}_\mu(0)U^+_a = a^{\mu'}_\mu\hat{j}_{\mu'}(0). \tag{111}$$

Аналогичным образом, учитывая (108), находим

$$G^{\pm}_{\varphi,\,\varphi}(x,\ Y,\ p) = G^{\pm}_{\varphi,\,\varphi}(x',\ Y'\ \ p').$$

6. СТРУКТУРА ЛИНЕАРИЗОВАННОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И УРАВНЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В настоящем разделе мы рассмотрим такие состояния обобщенных сверхтекучих систем, которые близки к состоянию статистического равновесия, получим уравнения линеаризованной сверхтекучей гидродинамики и найдем собственные колебания в системе.

Итак, обратимся к уравнению движения для статистического оператора $\rho(t)$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[\mathcal{H},\ \rho(t)]. \tag{112}$$

Согласно (26) равновесное состояние описывается статистическим оператором

$$w(t)=\exp\left\{\Omega-Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha-\nu Y_0\int d^3x\,(\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{px}+p_0t)}+\text{э. с.})\right\},$$
$$p_0=(Y_4+\mathbf{Y}\mathbf{p})/Y_0. \tag{113}$$

(Для простоты рассмотрим такие состояния равновесия, для которых $\chi=0$; напомним, что $[w(t),\ \hat{\mathcal{P}}-\mathbf{p}\hat{N}]=0$.) Однако линеаризация около равновесного состояния, зависящего от времени t, неудобна. Перейдем к статистическому оператору

$$\tilde{\rho}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0\hat{N}t}\rho(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0\hat{N}t}. \tag{114}$$

В этом случае равновесный статистический оператор, около которого мы будем проводить линеаризацию, определяется формулой

$$w\equiv w(0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0\hat{N}t}w(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0\hat{N}t}=$$
$$=\exp\left\{\Omega-Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha-\nu Y_0\int d^3x\,(\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{px}}+\text{э. с.})\right\}. \tag{115}$$

Уравнение движения для статистического оператора $\hat{\rho}(t)$ согласно (112), (114) примет вид

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\tilde{\rho}(t)}{\partial t}=[H,\ \tilde{\rho}(t)],\quad H=\mathcal{H}+p_0\hat{N}. \tag{116}$$

Положим теперь $\tilde{\rho}(t)=w+\tilde{\rho}'(t)$, где $\tilde{\rho}'(t)$ — статистический оператор, описывающий отклонение состояния системы от равновесного. При временах $t\gg\tau_r$ состояние системы, как мы уже говорили, описывается параметрами $\zeta_\alpha(\mathbf{x},t)$ и $\varphi(\mathbf{x},t)$. Поэтому

$$\tilde{\rho}'(t)\xrightarrow[t\gg\tau_r]{}\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)), \tag{117}$$

где

$$\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))=\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)+\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\varphi'(\mathbf{x},\ t)\}, \tag{118}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\equiv\left.\frac{\delta\sigma(\zeta,\ \varphi)}{\delta\zeta_\alpha(\mathbf{x})}\right|_{\zeta=\bar{\zeta},\ \varphi=\mathbf{px}},\quad \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\equiv\left.\frac{\delta\sigma(\zeta,\ \varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{x})}\right|_{\zeta=\bar{\zeta},\ \varphi=\mathbf{px}},$$

и $\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\varphi'(\mathbf{x}, t)$ — отклонения параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t)$ от равновесных значений, т. е. от $\bar\zeta_\alpha = \mathrm{Sp}\, w\hat\zeta_\alpha$ и $\bar\varphi = \mathrm{Im}\ln \mathrm{Sp}\, w\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{px}$ соответственно ($\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) - \bar\zeta_\alpha$, $\varphi'(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) - \bar\varphi$). Замечая, что согласно (53)

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\sigma(\zeta(\mathbf{x}'), \varphi(\mathbf{x}'))\, e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}'+\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x}'+\mathbf{y})-\mathbf{py}), \quad \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathcal{P}} - \mathbf{p}\hat{N}$$

имеем

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\hat\sigma_\alpha(\mathbf{x})\, e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \hat\sigma_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\hat\sigma_\varphi(\mathbf{x})\, e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \hat\sigma_\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Эти формулы еще раз подтверждают, что при $\mathbf{p} \neq 0$ оператор $\hat{\mathbf{P}}$ (а не оператор $\hat{\mathcal{P}}$) целесообразно интерпретировать как оператор трансляций.

Так как фаза $\bar\varphi$ в состоянии w равна $\mathbf{px}$, то фазу в состоянии $w + \sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))$ согласно (117) можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat\varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{px}, \tag{119}$$

где

$$\hat\varphi(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\eta}(\psi^+(\mathbf{x})\, e^{i\mathbf{px}} - \psi(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{px}}), \quad \eta = |\mathrm{Sp}\, w\psi|. \tag{120}$$

Оператор $\hat\varphi(\mathbf{x})$ мы будем называть оператором фазы. Обратим внимание на то, что оператор фазы можно записать в виде [см. (10)]

$$\hat\varphi(\mathbf{x}) = e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat\varphi(0)\, e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}.$$

Отметим, что согласно определению $\sigma'(\zeta', \varphi')$

$$\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat\zeta_\alpha(\mathbf{x}), \quad \varphi'(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat\varphi(x). \tag{121}$$

Из уравнения (116) с учетом (117) получим

$$i\int d^3x\,\{\hat\sigma_\alpha(\mathbf{x})\, L_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \hat\sigma_\varphi(\mathbf{x})\, L_\varphi(\mathbf{x};\ t)\} = [H, \sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))], \tag{122}$$

где величины

$$\left.\begin{aligned} L_\alpha(\mathbf{x};\ t) &= i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,[H, \hat\zeta_\alpha(\mathbf{x})], \\ L_\varphi(\mathbf{x};\ t) &= i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,[H, \hat\varphi(\mathbf{x})] \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

определяют линеаризованные уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

$$\dot\zeta'_\alpha(\mathbf{x};\ t) = L_\alpha(\mathbf{x};\ t), \quad \dot\varphi'(\mathbf{x};\ t) = L_\varphi(\mathbf{x};\ t). \tag{124}$$

В принципе нетрудно развить итерационную процедуру для нахождения статистического оператора $\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))$ во всех порядках теории возмущений по градиентам гидродинамических параметров [13]. Однако мы ограничимся главным приближением по градиентам параметров $\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi'(\mathbf{x}, t)$. Для этого достаточно привлечь эргодическое соотношение (26), которое мы для удобства представим в виде

$$e^{-iHt}\rho e^{iHt} \underset{t \gg \tau_r}{\rightarrow} w(Y_\alpha, \mathbf{p}+\mathbf{p}', (p_0+p'_0)t+\chi), \tag{125}$$

где начальный статистический оператор ρ удовлетворяет равенству $[\rho, \hat{\mathscr{P}}_k - (p_k + p'_k)\hat{N}] = 0$. Величины $\mathbf{p}$, p_0, χ являются функционалами начального статистического оператора ρ. Пусть статистический оператор ρ мало отличается от равновесного статистического оператора w, $\rho = w + \rho'$. Тогда, так как $[w, \hat{P}_k] = 0$, то

$$[\rho', \hat{P}_k] = p'_k[w, \hat{N}]. \tag{126}$$

В нулевом приближении имеем, очевидно, $\chi = 0$ (величина $\mathbf{p}'$ первого порядка малости по отклонению от состояния равновесия), и, следовательно, соотношение (125) в линейном приближении приобретает вид

$$e^{-iHt}\rho' e^{iHt} \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} \left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} \zeta'_\alpha + \left.\frac{\partial w}{\partial p_k}\right|_{\zeta} p'_k + \left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\mathbf{p},\zeta}(\chi' + p'_0 t), \tag{127}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\zeta'_\alpha = \operatorname{Sp}\rho'\hat{\zeta}_\alpha, \quad p'_0 = \zeta'_\alpha \left.\frac{\partial p_0}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} + \mathbf{p}' \left.\frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}\right|_{\zeta}, \\ &\chi' = \operatorname{Sp}\rho'\hat{\varphi}(0) + \int_0^\infty d\tau \{\operatorname{Sp}\dot{\rho}'(\tau)\hat{\varphi}(0) - p'_0\}. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

При варьировании соотношения (125) в качестве независимых переменных мы выбрали не величины Y_α, $\mathbf{p}$, χ, являющиеся функционалами ρ, а величины $\zeta_\alpha = \operatorname{Sp} w\hat{\zeta}_\alpha \equiv \zeta_\alpha(Y_\beta, \mathbf{p})$, $\mathbf{p}$, χ, так как $\operatorname{Sp}\rho\hat{\zeta}_\alpha = \operatorname{Sp} w\hat{\zeta}_\alpha$ в силу того, что ζ_α — плотности аддитивных интегралов движения. Кроме того, мы учли, что $p_0 = (Y_4 + \mathbf{Yp})/Y_0$, и использовали выражение (25) для фазы χ. Подчеркнем, что соотношение (127) справедливо для начальных статистических операторов, удовлетворяющих условию (126).

Обратимся теперь к формуле (117). Выбирая начальный статистический оператор $\tilde{\rho}'(0)$ совпадающим со статистическим оператором ρ' в (127) и замечая, что в этом случае $\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t) = \zeta'_\alpha$ в силу законов сохранения не зависят от $\mathbf{x}$ и t, а фаза $\varphi'(\mathbf{x}, t)$ согласно (125) равна $\mathbf{p}'\mathbf{x} + p'_0 t + \chi'$, получаем

$$e^{-iHt}\rho' e^{iHt} \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} \int d^3x \{\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\zeta'_\alpha + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{p}'\mathbf{x} + p_0 t + \chi')\}.$$

Сравнивая это выражение с (127), найдем, что

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} = \int d^3x \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\zeta,\,\mathbf{p}} = \int d^3x \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial p_k}\right|_{\zeta} = \int d^3x x_k \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}). \tag{129}$$

Легко видеть, что эти соотношения находятся в соответствии с (96), так как

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} \left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}}; \quad e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} \left.\frac{\partial w}{\partial p_k}\right|_{\zeta} e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \left.\frac{\partial w}{\partial p_k}\right|_{\zeta} + y_k \left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\zeta,\,\mathbf{p}}.$$

Пусть теперь ρ' — достаточно произвольный статистический оператор. Тогда пренебрегая градиентами $\zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t)$, но учитывая градиенты фазы $\varphi'(\mathbf{x}, t)$, среднее $\operatorname{Sp} e^{-iHt}\rho' e^{iHt}\hat{a}(\mathbf{x})$ при $t \gg \tau_r$ можно представить в виде

$$\operatorname{Sp} e^{-iHt}\rho' e^{iHt}\hat{a}(\mathbf{x}) \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} \operatorname{Sp} \sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\, \hat{a}(\mathbf{x}) \approx$$

$$\approx \zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t) \int d^3x' \operatorname{Sp} \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}')\, \hat{a}(\mathbf{x}) + \varphi'(\mathbf{x}, t) \int d^3x' \operatorname{Sp} \sigma_\varphi(\mathbf{x}') \times$$

$$\times \hat{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \int d^3x' (x'_k - x_k) \operatorname{Sp} \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}')\, \hat{a}(\mathbf{x})$$

(напомним, что $\hat{a}(\mathbf{x}) = e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{a}(0) e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}$) или, учитывая (129), в виде

$$\operatorname{Sp} e^{-iHt}\rho' e^{iHt} a(\hat{\mathbf{x}}) \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} \zeta'_\alpha(\mathbf{x}, t) \left.\frac{\partial \langle a\rangle}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} +$$

$$+ \varphi'(\mathbf{x}, t) \left.\frac{\partial \langle a\rangle}{\partial \varphi}\right|_{\mathbf{p},\,\zeta} + \frac{\partial \varphi'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \left.\frac{\partial \langle a\rangle}{\partial p_k}\right|_{\zeta},$$

где $\langle \hat{a}\rangle \equiv \operatorname{Sp} w\hat{a}(0)$. Как показано в разд. 4, уравнения сверхтекучей гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial p^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^\nu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{130}$$

причем фаза $\varphi(\mathbf{x}, t)$ связана со сверхтекучим 4-импульсом соотношением $p_\nu = \partial\varphi/\partial x^\nu$. Линеаризуем уравнения (130) около состояния равновесия, выбирая в качестве параметров, описывающих отклонение от равновесного состояния, величины $\delta Y_\mu(\mathbf{x}, t) = Y_\mu(\mathbf{x}, t) - \bar{Y}_\mu$ и $\delta p_\mu(\mathbf{x}, t) = p_\mu(\mathbf{x}, t) - \bar{p}_\mu$ ($\bar{Y}_\mu$, $\bar{p}_\mu$ — равновесные значения величин Y_μ, p_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$). Тогда линеаризованные около состояния равновесия гидродинамические уравнения (130) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &k_\nu\left(\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(k)+\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(k)\right)=0,\\ &k_\nu\left(\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(k)+\frac{\partial j^\nu}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(k)\right)=0,\\ &k_\nu\delta p_\mu(k)-k_\mu\delta p_\nu(k)=0,\end{aligned}\right\} \tag{131}$$

где $\delta Y_\nu(k)$, $\delta p_\nu(k)$ — фурье-компоненты соответствующих величин. Используя формулы (86), (88), легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda}=-\frac{\partial^2 Y^\nu\omega'}{\partial Y_\mu\,\partial Y_\lambda}+p^\mu\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda},\\ &\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}=g^{\mu\lambda}j^\nu-g^{\mu\nu}j^\lambda-Y^\nu\frac{\partial j^\lambda}{\partial Y_\mu}+p^\mu\frac{\partial j^\nu}{\partial p_\lambda}.\end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Подставив эти выражения в первое из уравнений (131) и учитывая, что $\delta p_\lambda(k)=\mathrm{i}k_\lambda\delta\varphi(k)$, получим

$$\delta Y_\lambda(k)\,(a^\lambda p^\mu-D^{\mu\lambda})+\mathrm{i}\delta\varphi(k)\,(bp^\mu-(kY)\,a^\mu)=0, \tag{133}$$

где

$$D^{\mu\nu}\equiv\frac{\partial^2(kY)\,\omega'}{\partial Y_\mu\,\partial Y_\nu},\quad a^\lambda\equiv k_\nu\frac{\partial^2\omega'}{\partial Y_\lambda\,\partial p_\nu},\quad b\equiv k_\nu k_\mu\frac{\partial^2\omega'}{\partial p_\nu\,\partial p_\mu}. \tag{134}$$

Второе из уравнений (131) с учетом введенных обозначений (134) принимает вид

$$a^\lambda\delta Y_\lambda(k)+\mathrm{i}\delta\varphi(k)\,b=0. \tag{135}$$

Уравнения (133), (135) имеют нетривиальное решение, если

$$\Delta(k)\equiv b-a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}a^\mu(kY)=0. \tag{136}$$

Мы видим, что для определения собственных мод в системе необходимо найти матрицу D^{-1}. Согласно определению (134) эту матрицу можно представить в виде

$$D^{\mu\nu}=(kY)\,B^{\mu\nu}+k^\nu A^\mu+k^\mu A^\nu, \tag{137}$$

где

$$B^{\mu\nu}\equiv\frac{\partial^2\omega'}{\partial Y_\mu\,\partial Y_\nu},\quad A^\nu\equiv\frac{\partial\omega'}{\partial Y_\nu}. \tag{138}$$

Структура матрицы $B^{\mu\nu}$ является более простой (так как она не зависит от волнового вектора) по сравнению с матрицей $D^{\mu\nu}$. Легко показать, используя (137), что

$$\begin{aligned}(kY)\,D^{-1}_{\nu\mu}&=B^{-1}_{\nu\mu}+\frac{(kB^{-1}k)}{D}(B^{-1}A)_\nu(B^{-1}A)_\mu+\\ &+\frac{(AB^{-1}A)}{D}(B^{-1}k)_\nu(B^{-1}k)_\mu-\frac{(kY)+(AB^{-1}k)}{D}\times\\ &\times[(B^{-1}A)_\nu(B^{-1}k)_\mu+(B^{-1}A)_\mu(B^{-1}k)_\nu],\end{aligned} \tag{139}$$

где

$$D = [(kY) + (AB^{-1}k)]^2 - (kB^{-1}k)(AB^{-1}A). \tag{140}$$

Заметим, что так как правая сторона равенства (139) конечна при $(kY) = 0$, то матрица $D^{-1}_{\mu\nu}$ имеет особенность при $(kY) = 0$.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение (136) при $\mathbf{Y} = \mathbf{p} = 0$ с учетом определений (46), (47), (48) принимает следующий вид:

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^4 - \omega^2 k^2 (B + \rho_c C) - k^4 \frac{s\rho_s}{Y_0 \rho_n} \frac{A}{\overset{*}{m}{}^2} = 0, \tag{141}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \frac{\partial P}{\partial \zeta_0}\frac{\partial}{\partial \zeta_4}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right) - \frac{\partial P}{\partial \zeta_4}\frac{\partial}{\partial \zeta_0}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right), \\ B &\equiv \frac{1}{\overset{*}{m}}\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta_4} - \frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial P}{\partial \zeta_0}\right) + \frac{s}{Y_0\rho_n}\left[\frac{\partial P}{\partial \zeta_0} + \frac{\rho_s}{\overset{*}{m}}\frac{\partial}{\partial \zeta_0}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)\right], \\ C &\equiv \frac{1}{\overset{*}{m}{}^2}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta_4}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right) - \frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial}{\partial \zeta_0}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \overset{*}{m}\frac{s}{Y_0\rho_n}\frac{\partial}{\partial \zeta_0}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{141'}$$

Для галилеево-инвариантных систем согласно (67), (47), (49) $\rho_c = 0$, $\overset{*}{m} = m$, а величины A, B принимают вид

$$A = -m^2 \frac{\sigma}{\rho c_V}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T, \quad B = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma + \frac{\rho_s T \sigma^2}{\rho_n c_V} \tag{142}$$

($P = -\omega/Y_0 \equiv -\omega'$ — давление; $\sigma = s/\rho = Y_0\left(P + \zeta_0 + \zeta_4 \frac{Y_4}{Y_0}\right)/\rho$ — энтропия единицы массы; c_V — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме; $Y_0^{-1} \equiv T$ — температура). В этом случае дисперсионное уравнение $\Delta(\mathbf{k}, \omega) = 0$ приводит к хорошо известным выражениям для скоростей $u_{1,2}$ первого и второго звука

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma + \frac{T\sigma^2\rho_s}{c_V\rho_n}\right] \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\sigma + \frac{T\sigma^2\rho_s}{c_V\rho_n}\right]^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \frac{T\sigma^2\rho_s}{c_V\rho_n}}$$

(индексу 1 соответствует верхний знак «+», а индексу 2 — нижний знак «—»). Эта формула относится к случаю, когда $\mathbf{Y} = \mathbf{p} = 0$.

Если мы рассмотрим теперь сверхтекучую жидкость, в которой $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_s = 0$, $\mathbf{Y} = -Y_0\mathbf{v}_n \neq 0$, то в этом случае снимается двукратное вырождение и вместо двух ветвей колебаний возникают четыре ветви колебаний. При малых $\mathbf{Y}$ ($v_n/u_{1,2} \ll 1$) фазовые скорости четырех ветвей колебаний определяются формулами

$$u_1^{\pm} = \pm u_1 + \delta u_1, \quad u_2^{\pm} = \pm u_2 + \delta u_2,$$

где

$$k\delta u_{1,2} = -\left(\frac{\mathbf{kY}}{Y_0}\right)(1+Z) \mp \frac{1}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{\mathbf{kY}}{Y_0}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{\sigma}{Y_0}\left(\frac{\partial P}{\partial\zeta_0}\right)_{\zeta_4}\left(1+\frac{2\rho_s}{\rho}\right)-\frac{\sigma}{\rho_n}\left[\frac{Y_0}{c_V}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial Y_0}\right)_{P,\,\mathbf{Y}=0}-\frac{\sigma\rho_s^2}{Y_0 c_V\rho}\right]-\frac{\rho_s}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\sigma+\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\sigma+\frac{\sigma^2\rho_s}{Y_0 c_V\rho_n}\right]Z\right\}, \quad (143)$$
$$Z\equiv\frac{\sigma}{2\rho_n}\left[\frac{Y_0}{c_V}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial Y_0}\right)_{P,\,\mathbf{Y}=0}+\left(\frac{\partial P}{\partial\zeta_0}\right)_{\zeta_4}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial Y_4}\right)_{Y_0,\,\mathbf{Y}=0}\right].$$

Заметим, что в предположении $c_P = c_V$ (это соотношение с хорошей точностью выполняется в сверхтекучем гелии) эти формулы переходят в формулы Халатникова [16], которые в используемых нами обозначениях имеют вид

$$k\delta u_{1,2} = -\left(\frac{\mathbf{kY}}{Y_0}\right)\left\{1-\frac{T\sigma}{2c_V\rho_n}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right)_{P,\,\mathbf{Y}=0}\mp\right.$$
$$\left.\mp\left[\frac{\rho_s}{\rho}-\frac{T\sigma}{2c_V\rho_n}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right)_{P,\,\mathbf{Y}=0}\right]\right\}.$$

7. ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

В предыдущих разделах мы построили термодинамику сверхтекучих систем и нашли потоки для плотностей аддитивных интегралов движения в состоянии статистического равновесия. Важную роль при выводе уравнений идеальной гидродинамики играло эргодическое соотношение (6), справедливое для пространственно-однородных состояний.

В этом разделе мы изучим влияние достаточно произвольных слабых медленно меняющихся внешних полей на эволюцию системы. Для решения этой задачи обратимся к уравнению движения для статистического оператора $\rho(t)$

$$i\,\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[\mathscr{H}+V(t),\,\rho(t)], \quad (144)$$

где $V(t)$ — гамильтониан взаимодействия частиц с внешним полем. Так как мы будем производить линеаризацию этого уравнения около состояния w [см. (115)], то нам удобно будет (так же как и в разд. 6) перейти к новому представлению $\tilde\rho(t) = e^{-ip_0\hat N t}\rho(t)\,e^{ip_0\hat N t}$. В этом представлении уравнение движения для статистического оператора $\tilde\rho(t)$ будет иметь вид

$$i\,\frac{\partial\tilde\rho(t)}{\partial t}=[H+\tilde V(t),\,\tilde\rho(t)],\quad H\equiv\mathscr{H}+p_0\hat N, \quad (145)$$

где гамильтониан взаимодействия частиц с внешним полем $\xi(\mathbf{x}, t)$ определяется формулой

$$\widetilde{V}(\xi(t)) = e^{-ip_0\hat{N}t}\, V(t)\, e^{ip_0\hat{N}t} = \int d^3x\, \xi(\mathbf{x}, t)\, \hat{b}(\mathbf{x}) \tag{146}$$

[$\hat{b}(\mathbf{x})$ — некоторый квазилокальный оператор].

Будем считать, что и при наличии слабого внешнего поля, если только частота его мала по сравнению с τ_r^{-1}, состояние системы можно по-прежнему описывать параметрами $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t)$. В этом случае статистический оператор $\widetilde{\rho}(t)$ при $t \gg \tau_r$ будет зависеть от времени не только через $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t)$, но и через внешнее поле $\xi(\mathbf{x}, t)$ и все его временные производные $\dot{\xi}(\mathbf{x}, t)$, $\ddot{\xi}(\mathbf{x}, t)$...

$$\widetilde{\rho}(t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \widetilde{\rho}(\zeta_\alpha(t), \varphi(t); \xi(t), \dot{\xi}(t) \ldots) \equiv \widetilde{\rho}(\zeta_\alpha(t), \varphi(t); t), \tag{147}$$

причем

$$\begin{gathered} \operatorname{Sp} \widetilde{\rho}(\zeta_\beta(t), \varphi(t); t)\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{Im} \ln \operatorname{Sp} \widetilde{\rho}(\zeta_\beta(t), \varphi(t); t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \end{gathered} \tag{148}$$

($\varphi(\mathbf{x}, t)$ — фаза $\psi(\mathbf{x})$ в состоянии $\widetilde{\rho}(\zeta, \varphi; t)$). Подчеркнем, что в этой формуле функциональные аргументы ζ_β, φ, ξ, $\dot{\xi}$ ..., рассматриваемые как функции $\mathbf{x}$, должны считаться независимыми.

Сравнивая формулу (147) с (51), при $\xi = \dot{\xi} = \ldots = 0$ имеем

$$\widetilde{\rho}(\zeta_\alpha(t), \varphi(t); 0, 0 \ldots) = \sigma(\zeta_\alpha(t), \varphi(t)). \tag{149}$$

Линеаризуем асимптотическое соотношение (147) около состояния (115), полагая $\widetilde{\rho}(t) = w + \widetilde{\rho}'(t)$. Учитывая соотношение (149), получаем

$$\widetilde{\rho}'(t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \sigma'(\zeta'_\alpha(t), \varphi'(t)) + \rho(\xi(t)) + \ldots, \tag{150}$$

где статистический оператор $\sigma'(\zeta'_\alpha(t), \varphi'(t))$ определяется формулой (118), причем параметры ζ'_α, φ', входящие в эту формулу, являются неизвестными линейными функционалами поля $\xi(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\xi}(\mathbf{x}, t)$ ... В формуле (150) $\rho(\xi(t)) \equiv \rho(\xi(t), \dot{\xi}(t)\ldots)$ представляет собой линейное по ξ отклонение статистического оператора $\widetilde{\rho}(\zeta_\alpha, \varphi; t)$ от w, связанное с явной зависимостью $\widetilde{\rho}(\zeta_\alpha, \varphi; t)$ от поля $\xi(\mathbf{x}, t)$.

Замечая, что фаза в состоянии $\widetilde{\rho}'(\zeta', \varphi'; t)$ согласно (150) имеет вид

$$\varphi'(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Sp} \{\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t)) + \rho(\xi(t))\}\, \hat{\varphi}(\mathbf{x}), \tag{151}$$

и учитывая (121), найдем, что

$$\operatorname{Sp} \rho(\xi(t))\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{Sp} \rho(\xi(t))\, \hat{\varphi}(\mathbf{x}) = 0. \tag{152}$$

Мы учли при этом, что $\mathrm{Sp}\,\{\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)) + \rho(\xi(t))\}\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)$.

Из уравнения (145) с учетом разложения (150) получим

$$\mathrm{i}\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha \mathbf{x}\,(L_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)) + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,(L_\varphi(\mathbf{x};\ t) + \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t))\} + \\ + \mathrm{i}\,\frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t} = [H,\ \sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))] + [H,\ \rho(\xi(t))] + [\widetilde{V}(\xi(t)),\ w], \tag{153}$$

где величины $L_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $L_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ [см. (123)] и

$$\left.\begin{aligned} \eta_\alpha(\mathbf{x};\ t) &= \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,w\,[\widetilde{V}(\xi(t)),\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] + \\ &+ \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,[H,\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})]; \\ \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t) &= \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,w\,[\widetilde{V}(\xi(t)),\ \hat{\varphi}(\mathbf{x})] + \\ &+ \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,[H,\ \hat{\varphi}(\mathbf{x})]; \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

$$\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t) \equiv \eta_\alpha(\mathbf{x};\ \xi(t),\ \dot{\xi}(t)\ \ldots),\quad \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t) \equiv \\ \equiv \eta_\varphi(\mathbf{x};\ \xi(t),\ \dot{\xi}(t)\ \ldots) -$$

неизвестные линейные функционалы $\dot{\xi}(t)$, $\xi(t)\ \ldots$, которые определяют линеаризованные уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

$$\dot{\zeta}_\alpha(\mathbf{x},\ t) - L_\alpha(\mathbf{x},\ t) = \eta_\alpha(\mathbf{x},\ t);\quad \dot{\varphi}(\mathbf{x},\ t) - \\ - L_\varphi(\mathbf{x};\ t) = \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t) \tag{155}$$

при наличии «источников» $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)$, связанных с внешним полем $\xi(\mathbf{x},\ t)$. Поэтому

$$\mathrm{i}\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)\} + \\ + \mathrm{i}\,\frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t} = [H,\ \rho(\xi(t))] + [\widetilde{V}(\xi(t)),\ w]. \tag{156}$$

Приступим теперь к нахождению источников $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)$. С этой целью преобразуем систему уравнений (156), (154) к виду, удобному для нахождения $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ в теории возмущений по пространственным и временным производным $\xi(\mathbf{x},\ t)$. Нетрудно видеть, что уравнение (156) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$e^{-\mathrm{i}H\tau}\rho(\xi(t))\,e^{\mathrm{i}H\tau} = \rho(\xi(t)) - \mathrm{i}\int_0^\tau d\tau' e^{-\mathrm{i}H\tau'} \times \\ \times \left\{\mathrm{i}\,\frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t} + \mathrm{i}\int d^3x\,(\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \right. \\ \left. + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)) - [\widetilde{V}(\xi(t)),\ w]\right\} e^{\mathrm{i}H\tau'}.$$

Так как при $\tau \to \infty$ согласно (51)

$$e^{-iH\tau}\rho(\xi(t))\,e^{iH\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \sigma'(\zeta'(\tau;\ t),\ \varphi'(\tau;\ t)) = e^{-iH\tau}\sigma'(\zeta'(0;\ t),\ \varphi'(0;\ t))\,e^{iH\tau},$$

$$\sigma'(\zeta'(0,\ t),\ \varphi'(0;\ t)) = \int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ 0;\ t) + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\varphi'(\mathbf{x},\ 0;\ t)\}$$

[параметры $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ \tau;\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ \tau;\ t)$ удовлетворяют по переменным $\mathbf{x}$, τ уравнениям линеаризованной гидродинамики с начальными условиями $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ 0;\ t) \equiv \zeta'_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ 0;\ t) \equiv \varphi'(\mathbf{x};\ t)$, которые являются линейными функционалами $\xi(\mathbf{x},\ t)$, $\dot{\xi}(\mathbf{x},\ t)$, $\ddot{\xi}(\mathbf{x},\ t)\ldots$, т. е. $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t) = \zeta'_\alpha(\mathbf{x};\ \xi(t),\ \dot{\xi}(t)\ldots)$, $\varphi'(\mathbf{x};\ t) = \varphi'(\mathbf{x};\ \xi(t),\ \dot{\xi}(t)\ldots)$, t — параметр], то с учетом этого предельного соотношения получим окончательно

$$\rho(\xi(t)) = \sigma'(\zeta'(\mathbf{x}';\ t),\ \varphi'(\mathbf{x}';\ t)) - \int_0^\infty d\tau e^{-iH\tau} \times$$
$$\times \Big\{ i[H,\ \sigma'(\zeta'(\mathbf{x}';\ t),\ \varphi'(\mathbf{x}';\ t))] + i[\widetilde{V}(\xi(t)),\ w] +$$
$$+ \frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t} + \int d^3x\,(\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t))\Big\}\,e^{iH\tau}. \qquad (157)$$

Параметры $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t)$ определяются согласно (152) из уравнений

$$\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = 0,\quad \mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = 0.$$

К уравнению (157) может быть применена стандартная итерационная процедура по пространственным и временным производным поля $\xi(\mathbf{x},\ t)$. Нас интересуют средние $\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{a}(\mathbf{x})$, зависящие от точки $\mathbf{x}$. Эти средние определяются значениями c-числовых функций $\zeta'_\alpha(\mathbf{x}',\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x}',\ t)$ в окрестности точки $\mathbf{x}$. Имея в виду вычисление этих средних, мы будем представлять статистический оператор $\rho(\xi(t))$ в виде разложения по степеням градиентов этих функций в точке $\mathbf{x}$.

В нулевом приближении по градиентам имеем согласно (118), (119), (129), (146)

$$\overset{(0)}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)) = \overset{(0)}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x},\ t)\int d^3x'\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}') +$$
$$+ \overset{(0)}{\varphi}{}'(\mathbf{x},t)\int d^3x'\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}') = \overset{(0)}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x},\ t)\left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} + \overset{(0)}{\varphi}{}'(\mathbf{x},\ t)\left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\zeta,\ \mathbf{p}}, \qquad (158)$$
$$\overset{(0)}{V}(\xi(t)) = \xi(\mathbf{x},\ t)\int d^3x'\hat{b}(\mathbf{x}'),$$

где $\overset{(0)}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x},\ t) \sim \xi(\mathbf{x},\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t) \sim \xi(\mathbf{x},\ t)$. Здесь и в дальнейшем мы должны иметь в виду, что параметры $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t)$ определяются значениями внешнего поля $\xi(\mathbf{x}',\ t)$ в окрестности точки $\mathbf{x}$.

Таким образом, если учитывать (158), статистический оператор в нулевом приближении $\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))$ (пропорциональный $\xi(\mathbf{x}, t)$) имеет следующую структуру:

$$\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)) = \overset{(0)}{\zeta'_\alpha}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} + \overset{(0)}{\varphi'}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi} -$$

$$- \int_0^\infty d\tau e^{-iH\tau}\left\{i[\overset{(0)}{V}(\xi(t)), w] + i\left[H, \overset{(0)}{\zeta'_\alpha}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \overset{(0)}{\varphi'}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta_\alpha}(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{x}; t)\right\} e^{iH\tau}. \quad (159)$$

Отсюда следует, что $[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)), \hat{P}_k] = 0$. Тогда из соотношения (154), определяющего $\overset{(0)}{\eta_\alpha}(\mathbf{x}; t)$, $\overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{x}; t)$ в нулевом приближении по неоднородностям поля

$$\left.\begin{aligned} \overset{(0)}{\eta_\alpha}(\mathbf{x}; t) &= i\,\mathrm{Sp}\, w\,[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] + \\ &+ i\,\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\,[H, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})], \\ \overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{x}; t) &= i\,\mathrm{Sp}\, w\,[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\varphi}(\mathbf{x})] + \\ &+ i\,\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\,[H, \hat{\varphi}(\mathbf{x})], \end{aligned}\right\} \quad (160)$$

и того, что $[H, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = [\hat{P}_k, \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})]$, вытекает

$$\overset{(0)}{\eta_\alpha}(\mathbf{x}; t) = i\,\mathrm{Sp}\, w\,[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})]. \quad (161)$$

Так как $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ является операторами плотностей аддитивных интегралов движения и $\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$, то, используя (161), получаем $\overset{(0)}{\zeta'_\alpha}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\sigma'}(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому статистический оператор $\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))$ имеет вид

$$\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)) = \overset{(0)}{\varphi'}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \int_0^\infty d\tau e^{-iH\tau} \times$$

$$\times \left\{i[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w] + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta_\alpha}(\mathbf{x}; t)\right\} e^{iH\tau} \quad (162)$$

(мы учли, что $\left[H, \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] = 0$). Параметр $\hat{\varphi}'(\mathbf{x}, t)$ определяется из условия

$$\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = 0.$$

Учитывая, что $[w, \hat{P}_k] = [w, H] = 0$, найдем согласно (161), (146)

$$\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) = -\mathrm{i}\xi(\mathbf{x},\ t)\,\mathrm{Sp}\,w\,[\hat{N},\ \hat{b}(0)]\,Y_0 \frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}. \tag{163}$$

Для определения $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ необходимо найти $[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)),\ H]$. Из (162) получим

$$\begin{gathered}[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)),\ H] = \mathrm{i}\lim_{\tau\to\infty} e^{-\mathrm{i}H\tau}\left\{\mathrm{i}\,[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w] + \frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t) + \right.\\ \left. + \frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)\right\} e^{\mathrm{i}H\tau} - \mathrm{i}\left\{\mathrm{i}\,[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w] + \right.\\ \left. + \frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t) + \frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)\right\}.\end{gathered} \tag{164}$$

Так как $H = \mathscr{H} + p_0\hat{N}$ зависит от ζ_α, $\mathbf{p}$ и $[w,\ H] = 0$, то

$$e^{-\mathrm{i}H\tau}\frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}e^{\mathrm{i}H\tau} = \frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha} + \tau\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\frac{dw}{\partial\varphi}. \tag{165}$$

Поэтому, замечая, что $\left[H,\ \dfrac{\partial w}{\partial\varphi}\right] = 0$, соотношение (164) перепишем в виде

$$\begin{gathered}[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)),\ H] = -\lim_{\tau\to\infty}\left\{e^{-\mathrm{i}H\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w]\,e^{\mathrm{i}H\tau} - \right.\\ \left. - \mathrm{i}\tau\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right\} + [\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w].\end{gathered}$$

Отсюда следует, что вторая из формул (160) принимает вид

$$\begin{gathered}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t) = -\mathrm{i}\lim_{\tau\to\infty}\left\{\mathrm{Sp}\,e^{-\mathrm{i}H\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w]\times\right.\\ \left.\times\, e^{\mathrm{i}H\tau}\hat{\varphi}(\mathbf{x}) - \mathrm{i}\tau\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\right\}.\end{gathered} \tag{166}$$

Используя эргодическое соотношение (127), легко видеть, что

$$\begin{gathered}\lim_{\tau\to\infty}\left\{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}H\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)),\ w]\,e^{\mathrm{i}H\tau} + \tau\frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\right\} = \\ = -\frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) - \frac{\partial w}{\partial\varphi}\chi',\end{gathered}$$

где χ' определяется формулой (128), в которой в качестве начального оператора ρ' выбран оператор $\mathrm{i}\,[w,\ \overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t))]$. Таким образом, имеем

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t) = -\chi'(\mathbf{x},\ t). \tag{167}$$

Если $[N, \hat{b}] = 0$, то $\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t) = 0$ [см. (163)]. В этом случае выражение (166) для $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ можно упростить. С этой целью снова воспользуемся эргодическим соотношением, в котором в качестве начального статистического оператора ρ' выбран $[w, \int d^3x\, (\psi(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \psi^+(\mathbf{x})\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}})]$. Так как этот статистический оператор коммутирует с $\hat{P}_k$, то согласно (166), (128), (127), получим

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\, t) = \frac{1}{2\eta}\, \xi(\mathbf{x},\, t)\, \frac{\partial b}{\partial \zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}} \times \int d^3x'\, \mathrm{Sp}\, [w,\, \psi^+(\mathbf{x}')\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}'} - \psi(\mathbf{x}')\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}'}]\, \hat{\zeta}_\alpha(0).$$

Учитывая, что $[w,\, H] = 0$, $[w,\, \hat{P}_k] = 0$, нетрудно преобразовать $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\, t)$ к виду

$$\overset{(0)}{\eta}_\downarrow(\mathbf{x};\, t) = -\xi(\mathbf{x},\, t)\left(\frac{\partial b}{\partial \zeta^\mu}\, p^\mu + \frac{\partial b}{\partial \zeta_4}\right),\quad [\hat{N},\, \hat{b}] = 0 \tag{168}$$

(здесь использованы релятивистские обозначения).

Так как в рассматриваемом случае ($[\hat{N},\, \hat{b}] = 0$) главное приближение для $\eta_\alpha(\mathbf{x};\, t)$ исчезает, то нам необходимо для дальнейшего найти величины $\eta_\alpha(\mathbf{x};\, t)$ в первом приближении по градиентам внешнего поля [см. (154)]

$$\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\, t) = i\, \mathrm{Sp}\, w\, [\overset{(1)}{\tilde{V}}(\xi(t)),\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] + i\, \mathrm{Sp}\, \overset{(1)}{\rho}(\xi(t))\, [H,\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})]. \tag{169}$$

Согласно (118), (129), (146) операторы $\overset{(1)}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\, \varphi'(t))$ и $\overset{(1)}{\tilde{V}}(\xi(t))$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(1)}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\, \varphi'(t)) = \overset{(1)}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x};\, t)\, \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} + \overset{(1)}{\varphi}{}'(\mathbf{x};\, t)\, \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ &\qquad + \frac{\partial \overset{(0)}{\varphi}(\mathbf{x};\, t)}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial w}{\partial p_k} - x_k\, \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right\}, \\ &\overset{(1)}{\tilde{V}}(\xi(t)) = \frac{\partial \xi(\mathbf{x},\, t)}{\partial x_k}\int d^3x'\, (x'_k - x_k)\, \hat{b}(\mathbf{x}'), \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

где $\overset{(1)}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x};\, t) \sim \partial\xi(\mathbf{x},\, t)/\partial x_k$; $\overset{(1)}{\varphi}{}'(\mathbf{x};\, t) \sim \partial\xi(\mathbf{x},\, t)/\partial x_k$. Поэтому оператор $\overset{(1)}{\rho}(\xi(t))$ имеет следующую общую структуру [см. (157)]:

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\rho}(\xi(t)) = \overset{(1)}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\, \varphi'(t)) - \int_0^\infty d\tau\, e^{-iH\tau}\Big\{ &i\, [H,\, \overset{(1)}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\, \varphi'(t))] + \\ &+ i\, [\overset{(1)}{\tilde{V}}(\xi(t)),\, w] + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\, \overset{(1)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\, t) + \\ + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\, \overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\, t) + \frac{\partial \overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\, t)}{\partial x_k} &\left(\frac{\partial w}{\partial p_k}\bigg|_\zeta - x_k\, \frac{\partial w}{\partial \varphi}\bigg|_{\zeta,\, \mathbf{p}}\right)\Big\}\, e^{iH\tau}. \end{aligned} \tag{171}$$

Замечая, что для $H = \mathscr{H} + p_0 \hat{N}$ справедливо соотношение $\mathrm{i}\left[H, \left.\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}}\right] = -\left.\frac{\partial p_0}{\partial \zeta_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} \left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\zeta, \mathbf{p}}$, и учитывая вид (170) $\overset{(1)}{\sigma'}(\zeta'(t), \varphi'(t))$ и $\left[H, \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] = 0$, $\left[\hat{P}_l, \left.\frac{\partial w}{\partial p_k}\right|_{\zeta}\right] = -\mathrm{i}\delta_{kl} \left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\zeta, \mathbf{p}}$, имеем

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,\overset{(1)}{\rho}(\xi(t))\,[H, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = -\mathrm{i}\lim_{\tau \to \infty} \mathrm{Sp}\,e^{-\mathrm{i}H\tau} \times$$

$$\times [\overset{(1)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]\, e^{\mathrm{i}H\tau} \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Sp}\,[\overset{(1)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}).$$

Поэтому [см. (169) и $\overset{(1)}{\widetilde{V}}(\xi(t))$ из (170)]

$$\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) = \mathrm{i}\,\frac{\partial \xi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_k} \lim_{\tau \to \infty} \mathrm{Sp}\,e^{\mathrm{i}H\tau} \times$$

$$\times \left[w, \int d^3x' x'_k \hat{\zeta}_\alpha(x')\right] e^{-\mathrm{i}H\tau} \hat{b}(0). \tag{172}$$

Чтобы упростить полученное выражение, введем в рассмотрение величины

$$\overset{(1)}{\eta'_\alpha}(\mathbf{x};\ t) = \mathrm{i}\,\frac{\partial \xi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_k} \lim_{\tau \to \infty} \mathrm{Sp}\,e^{\mathrm{i}H\tau} \times$$

$$\times \left[w, \int d^3x' x'_k \hat{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x}')\right] e^{-\mathrm{i}H\tau} \hat{b}(0), \tag{173}$$

где

$$\hat{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) - \hat{\zeta}_4(\mathbf{x})\, Y_0 \left.\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}\right|_{\mathbf{p}}.$$

Величины $\overset{(1)}{\eta}_\alpha$ и $\overset{(1)}{\eta'_\alpha}$ связаны, очевидно, равенствами

$$\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) = \overset{(1)}{\eta'_\alpha}(\mathbf{x};\ t) + Y_0 \left.\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}\right|_{\mathbf{p}} \overset{(1)}{\eta}_4(\mathbf{x};\ t). \tag{174}$$

Учитывая, что

$$\left[\hat{P}_k, \left[w, \int d^3x' x'_l \hat{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x}')\right]\right] = 0,$$

и используя эргодическое соотношение (127), найдем при $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\overset{(1)}{\eta'_\alpha}(\mathbf{x};\ t) = \mathrm{i}\,\frac{\partial \xi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_l}\, \frac{\partial \langle \hat{b}(0) \rangle}{\partial \zeta_\beta}\, \mathrm{Sp}\, w \int d^3x' x'_l \times$$

$$\times [\hat{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x}'), \hat{\zeta}_\beta(0)],\quad [\hat{N}, \hat{b}] = 0, \tag{175}$$

где $\langle \hat{b}(0) \rangle \equiv \mathrm{Sp} w \hat{b}(0)$.

Чтобы найти величину $\overset{(1)}{\eta}_4(\mathbf{x};\ t)$, необходимо вычислить предел выражения, стоящего в формуле (172) при $\alpha = 4$. Эргодическое соотношение (127) приводит к

$$\overset{(1)}{\eta}_4(\mathbf{x};\ t)=\frac{\partial\xi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_l}\left\{\mathrm{i}\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\int d^3x'x'_l\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{Sp}w\left[\hat{\zeta}_4(\mathbf{x}'),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)\right]-\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_k}\bigg|_\zeta\right\}. \tag{176}$$

Таким образом, согласно (174)—(176), «источники» $\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)$ имеют вид

$$\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)=-\frac{\partial\xi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_l}\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}K_{l;\ \alpha\beta}+\right.$$

$$\left.+Y_0\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}\bigg|_p\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right\}, \tag{177}$$

где

$$K_{l,\ \alpha\beta}\equiv-\mathrm{i}\int d^3x\,x_l\operatorname{Sp}w\,[\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}),\ \hat{\zeta}_\beta(0)]=K_{l;\ \beta\alpha}.$$

Используя формулы (32), найдем в явном виде значение элементов матрицы $K_{l;\alpha\beta}$. При $\alpha=4$, $\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$$K_{l;\ 4\beta}=\delta_{\beta0}\zeta_{4l}+\delta_{\beta l}\zeta_4. \tag{178}$$

При $\alpha=\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\quad \beta=\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$K_{l;\ \mu\nu}=\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}2\zeta_{0l}+\delta_{\mu0}\delta_{\nu k}(\zeta_{kl}+\delta_{kl}\zeta_0)+\delta_{\mu i}\delta_{\nu k}(\delta_{li}\zeta_k+\delta_{lk}\zeta_i).$$

Нетрудно показать, что из последнего равенства с учетом (178), (46) можно представить элементы матрицы $K_{l;\beta\alpha}$ в следующем компактном виде ($\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$):

$$K_{l;\ \beta\alpha}=-Y_0\frac{\partial\zeta_{\beta l}}{\partial Y_\alpha}\bigg|_p-Y_l\frac{\partial\zeta_\beta}{\partial Y_\alpha}\bigg|_p+$$

$$+p^\beta\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial p_l}\bigg|_Y,\quad p^\beta=(p^\nu,\ 1),\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{179}$$

Мы нашли источники $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$ в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости, которые пропорциональны $\partial\xi(\mathbf{x},\ t)/\partial x_k$. Перейдем теперь к нахождению источников $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, пропорциональных временным производным $\partial\xi(\mathbf{x},\ t)/dt$ внешнего поля. Согласно (154) имеем

$$\overset{1}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t)=\mathrm{i}\operatorname{Sp}\overset{1}{\rho}(\xi(t))\,[H,\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})],$$

где $\overset{1}{\rho}(\xi(t))$ — член разложения статистического оператора $\rho(\xi(t))$, пропорциональный $\partial\xi(\mathbf{x},\ t)/\partial t$. В соответствии с уравнением (157) имеем

$$\overset{1}{\rho}(\xi(t)) = \overset{1}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)) - \int\limits_0^\infty d\tau\, e^{-iH\tau} \times$$

$$\times \left\{ i\,[H,\ \overset{1}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))] + \frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{1}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};\ t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\overset{1}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \frac{\partial \overset{(0)}{\rho}(\xi(t))}{\partial t} \right\} e^{iH\tau}, \tag{180}$$

где согласно (118), (129)

$$\overset{1}{\sigma}{}'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)) = \frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\overset{1}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x};\ t) + \frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{1}{\varphi}{}'(\mathbf{x};\ t)$$

и величины $\overset{1}{\zeta}{}'_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\overset{1}{\varphi}{}'(\mathbf{x};\ t)$ пропорциональны $\partial\xi(\mathbf{x},\ t)/\partial t$. Так как коммутатор $[H,\ \overset{1}{\sigma}{}'(\zeta',\ \varphi')] \sim \left.\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right|_{\zeta,\mathbf{p}}$, то, учитывая, что $\left[H, \frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] = 0$, из формулы (180) найдем

$$\overset{1}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) = -\lim_{\tau\to\infty} \mathrm{Sp}\, e^{-iH\tau}\dot{\rho}^{(0)}(\xi(t))\, e^{iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathrm{Sp}\,\dot{\rho}^{(0)}(\xi(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}). \tag{181}$$

Замечая, что статистический оператор $\rho^{(0)}(\xi(t))$ соответствует пространственно-однородному состоянию $[\rho^{(0)}(\xi(t)),\ \hat{P}_k] = 0$, и так как $[H,\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = [\hat{P}_k,\ \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})]$, имеем

$$\mathrm{Sp}\, e^{-iH\tau}\dot{\rho}^{(0)}(\xi(t))\, e^{iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathrm{Sp}\,\dot{\rho}^{(0)}(\xi(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}),$$

и, следовательно,

$$\overset{1}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};\ t) = 0. \tag{182}$$

Таким образом, формулы (163), (167), (168), (177), (182) дают в главном приближении выражения для источников $\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости в случае медленно изменяющегося в пространстве и времени внешнего поля $\xi(\mathbf{x},\ t)$.

8. НИЗКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ГРИНА

В этом разделе мы найдем конкретную структуру функций Грина $G^{\pm}_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)$ в области малых волновых векторов $\mathbf{k}$ ($kl \ll 1$; l — длина свободного пробега) и частот ω ($\omega\tau_r \ll 1$; τ_r — время релаксации). Будем использовать для этого уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости в форме (89), (90). При наличии внешних источников

$\eta_\alpha(\mathbf{x};\ t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)$ [см. (154)] эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}(\mathbf{x},\ t)}{\partial x^\nu} = \eta^\mu(\mathbf{x};\ t);\quad \frac{\partial j^\nu(\mathbf{x},\ t)}{\partial x^\nu} = \\ = \eta^4(\mathbf{x};\ t);\quad \frac{\partial p^\mu(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^\nu(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_\mu} = \eta^{\mu\nu}(\mathbf{x};\ t). \tag{183}$$

Последнее уравнение в (183) есть следствие равенств

$$\dot\varphi(\mathbf{x},\ t) = p_0(\mathbf{x},\ t) + \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t),\quad p_k(\mathbf{x},\ t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_k},$$

откуда видно, что

$$\eta_{\mu\nu}(\mathbf{x};\ t) = \frac{\partial\eta_\varphi(\mathbf{x};\ t)}{\partial x_l}(g_{\mu l}g_{\nu 0} - g_{\mu 0}g_{\nu l}). \tag{184}$$

Считая «источники малыми», линеаризуем уравнение (183) около состояния равновесия, причем в качестве параметров, описывающих отклонение от равновесного состояния, выберем (так же как и в разд. 6) величины $\delta Y_\lambda(\mathbf{x},\ t) = Y_\lambda(\mathbf{x},\ t) - \overline{Y}_\lambda$ ($\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) (отклонения термодинамических сил $Y_\lambda(\mathbf{x},\ t)$ от равновесных значений $\overline{Y}_\lambda$), величину $\delta p_0(\mathbf{x},\ t) = p_0(\mathbf{x},\ t) - \overline{p}_0$ и фазу $\delta\varphi(\mathbf{x},\ t)$ (фаза $\overline{\varphi}$ в состоянии равновесия предполагается равной нулю). Тогда линеаризованные около состояния равновесия с $\overline{\varphi} = 0$ уравнения гидродинамики (183) имеют вид [ср. с (131)]

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}k_\nu\left\{\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\ \omega) + \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(\mathbf{k},\ \omega)\right\} = \eta^\mu(\mathbf{k},\ \omega);\\ &\mathrm{i}k_\nu\left\{\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\ \omega) + \frac{\partial j^\nu}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(\mathbf{k},\ \omega)\right\} = \eta^4(\mathbf{k},\ \omega);\\ &k_\nu\delta p_\mu(\mathbf{k},\ \omega) - k_\mu\delta p_\nu(\mathbf{k},\ \omega) = \eta_\varphi(\mathbf{k},\ \omega)(k_\mu g_{\nu 0} - g_{\mu 0}k_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Фигурирующие здесь величины $\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta p_\lambda(\mathbf{k},\ \omega)$, $\eta^\mu(\mathbf{k},\ \omega)$, $\eta^4(\mathbf{k},\ \omega)$, $\eta_\varphi(\mathbf{k},\ \omega)$ представляют собой фурье-компоненты соответствующих величин. Решение последнего уравнения запишем в виде

$$\delta p_\nu(\mathbf{k},\ \omega) = \mathrm{i}k_\nu\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega) - g_{\nu 0}\eta_\varphi(\mathbf{k},\ \omega). \tag{186}$$

Подставляя полученное выражение для $\delta p_\nu(\mathbf{k},\ \omega)$ в остальные уравнения (185), получаем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}k_\nu\left\{\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\ \omega) + \mathrm{i}k_\lambda\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)\right\} = \\ &= \eta^\mu(\mathbf{k},\ \omega) + \mathrm{i}k_\nu\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_0}\eta_\varphi(\mathbf{k},\ \omega) \equiv \overline{\eta}^\mu(\mathbf{k},\ \omega),\\ &\mathrm{i}k_\nu\left\{\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\ \omega) + \mathrm{i}k_\lambda\frac{\partial j^\nu}{\partial p_\lambda}\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)\right\} = \\ &= \eta^4(\mathbf{k},\ \omega) + \mathrm{i}k_\nu\frac{\partial j^\nu}{\partial p_0}\eta_\varphi(\mathbf{k},\ \omega) \equiv \overline{\eta}^4(\mathbf{k},\ \omega), \end{aligned}\right\} \tag{187}$$

или, используя определения (134),

$$\left.\begin{aligned}&(p^\mu a^\lambda - D^{\mu\lambda})\,\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\omega) + \mathrm{i}\,(bp^\mu - (kY)\,a^\mu)\times\\&\times\delta\varphi(\mathbf{k},\omega) = -\mathrm{i}\bar{\eta}^\mu(\mathbf{k},\omega),\\&a^\lambda\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\omega) + \mathrm{i}b\delta\varphi(\mathbf{k},\omega) = -\mathrm{i}\bar{\eta}^4(\mathbf{k},\omega).\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

Исключая из первого уравнения величину $a^\lambda\delta Y_\lambda(\mathbf{k},\omega)$ с помощью второго уравнения, найдем

$$\delta Y_\nu(\mathbf{k},\omega) = \mathrm{i}D^{-1}_{\nu\mu}\{\bar{\eta}^\mu(\mathbf{k},\omega) - p^\mu\bar{\eta}^4(\mathbf{k},\omega) - (kY)\,a^\mu\delta\varphi(\mathbf{k},\omega)\} \tag{189}$$

и, следовательно, учитывая второе из уравнений (188),

$$\delta\varphi(\mathbf{k},\omega) = -\frac{1}{\Delta}\{\bar{\eta}^4(\mathbf{k},\omega)(1 - a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}p^\mu) + a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}\bar{\eta}^\mu(\mathbf{k},\omega)\}. \tag{190}$$

Рассмотрим теперь вопрос о конкретной структуре источников η^μ и η^4, $\eta^{\mu\nu}$, входящих в правую часть уравнений (183). Их явный вид, как мы видели в разд. 7, существенно зависит от того, коммутирует ли оператор $\hat{b}(\mathbf{x})$, входящий в формулу (146), с оператором числа частиц $\hat{N}$ или нет. Рассмотрим сначала случай, когда $[\hat{N},\ \hat{b}] \neq 0$. Фурье-компоненты источников $\eta^\mu(\mathbf{k},\omega)$, входящих в уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса, определяются согласно (163) формулой

$$\overset{(0)}{\eta}{}^\mu(\mathbf{k},\omega) = \xi(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\varphi}p^\mu. \tag{191}$$

Фурье-компонента источника $\eta^4(\mathbf{k},\omega)$, входящего в уравнение непрерывности для тока, определяется формулой

$$\overset{(0)}{\eta}{}^4(\mathbf{k},\omega) = \xi(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\varphi}. \tag{192}$$

Так как в источниках $\bar{\eta}^\mu(\mathbf{k},\omega)$, $\bar{\eta}^4(\mathbf{k},\omega)$ величина $\eta_\varphi(\mathbf{k},\omega)$ входит вместе с множителем k_ν, то в главном приближении по k имеем

$$\overline{\overset{(0)}{\eta}}{}^\mu(\mathbf{k},\omega) = \overset{(0)}{\eta}{}^\mu(\mathbf{k},\omega),\quad \overline{\overset{(0)}{\eta}}{}^4(\mathbf{k},\omega) = \overset{(0)}{\eta}{}^4(\mathbf{k},\omega). \tag{193}$$

Если $[\hat{N},\ \hat{b}] = 0$, то источники η^μ и η^4 обращаются в нуль в главном приближении по k [см. (163)], и мы поэтому должны найти источники в следующем приближении по волновому вектору и частоте внешнего поля $\xi(\mathbf{k},\omega)$. Согласно формулам (177), (182) источник

$\eta^\mu(\mathbf{k}, \omega)$ определяется формулой

$$\overset{(1)}{\eta^\mu}(\mathbf{k}, \omega) = -ik_l\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} K_{l;\,\mu\beta} + p^\mu\frac{\partial\langle b(0)\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right\}.$$

Для источника $\overset{(1)}{\eta^4}(\mathbf{k}, \omega)$ имеем согласно (177)

$$\overset{(1)}{\eta^4}(\mathbf{k}, \omega) = -ik_l\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} K_{l;\,4\beta} + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right\}.$$

И, наконец, источник $\overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется формулой [см. (168)]

$$\overset{(0)}{\eta_\varphi}(\mathbf{k}, \omega) = -\xi(\mathbf{k}, \omega)\left(\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta^\nu}p^\nu + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta^4}\right) =$$

$$= -\xi(\mathbf{k}, \omega)\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta^\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}} p^\alpha. \tag{194}$$

Для компактности записи формул мы ввели вектор $p^\alpha \equiv (p^\mu, 1)$, $\alpha = \mu, 4$. Поэтому, используя (187), (194), получаем следующие выражения для источников $\overset{(1)}{\eta^\mu}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\overset{(1)}{\eta^4}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$\left.\begin{aligned}\overset{(1)}{\eta^\mu}(\mathbf{k}, \omega) &= -i\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{k_l\left[\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} K_{l;\,\mu\beta} + \right.\right.\\ &\left.\left.+ p^\mu\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right] + k_\nu\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_0}\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} p^\beta\right\};\\ \overset{(1)}{\eta^4}(\mathbf{k}, \omega) &= -i\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{k_l\left[\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} K_{l;\,4\beta} + \right.\right.\\ &\left.\left.+ \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right] + k_\nu\frac{\partial j^\nu}{\partial p_0}\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\beta}\bigg|_{\mathbf{p}} p^\beta\right\},\end{aligned}\right\} \tag{195}$$

входящих в выражения для $\delta Y_\mu(\mathbf{k}, \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega)$. Учитывая (178), (179) и переходя от производных $(\partial\langle\hat{b}(0)\rangle/\partial\zeta_\beta)_{\mathbf{p}}$, $(\partial\langle\hat{b}(0)\rangle/\partial\mathbf{p})_\zeta$ к производным $(\partial\langle\hat{b}(0)\rangle/\partial Y_\mu)_{p_\nu}$, $(\partial\langle\hat{b}(0)\rangle/\partial p_\mu)_Y$ по формулам

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\right)_{\mathbf{p}} &= \frac{\partial\langle b(0)\rangle}{\partial Y_\mu}\left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta_\alpha}\right)_{\mathbf{p}} + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_\mu}\frac{1}{Y_0}\delta_{\mu0}\left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta_\beta}\right)_{\mathbf{p}} p^\beta;\\ \left(\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_l}\right)_\zeta &= -\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial Y_\mu}\left(\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial p_l}\right)_Y\left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta_\alpha}\right)_{\mathbf{p}} + \\ &+ \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_\mu}\left[\delta_{\mu0}\left(\frac{Y_l}{Y} - \frac{p^\beta}{Y_0}\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial p_l}\bigg|_Y\frac{\partial Y_\beta}{\partial\zeta_\alpha}\bigg|_{\mathbf{p}}\right) + \delta_{\mu l}\right],\end{aligned}\right\} \tag{196}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(1)}{\eta^{\mu}}(\mathbf{k}, \omega) = i\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial Y_{\nu}} A_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_{\nu}} B_{\nu}^{\mu}\right\};\\
&\overset{(1)}{\eta^{4}}(\mathbf{k}, \omega) = i\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial Y_{\nu}} A_{\nu} + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_{\nu}} B_{\nu}\right\};\\
&\overset{(0)}{\eta_{\varphi}}(\mathbf{k}, \omega) = -\xi(\mathbf{k}, \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial Y_{\nu}}\left(\frac{\partial Y_{\nu}}{\partial\zeta_{\beta}}\right)_{\mathrm{p}} p^{\beta} + \right.\\
&\left.\qquad + \frac{\partial\langle\hat{b}(0)\rangle}{\partial p_{\nu}}\delta_{\nu 0}\frac{p^{\alpha}}{Y_0}\left(\frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial\zeta_{\beta}}\right)_{\mathrm{p}} p^{\beta}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (197)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&A_{\mu} = Y_0 a^{\lambda}\left(\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta^{\mu}}\right)_{\mathrm{p}}, \quad B_{\mu} = -k_{\mu} + \delta_{\mu 0} a^{\lambda}\left(\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta^{\alpha}}\right)_{\mathrm{p}} p^{\alpha},\\
&\qquad\qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4),\\
&A_{\nu}^{\mu} = (kY) g_{\nu}^{\mu} + Y_0\left(\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta^{\nu}}\right)_{\mathrm{p}}(p^{\mu}a^{\lambda} - D^{\mu\lambda}), \quad (\nu, \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3),\\
&B_{\nu}^{\mu} = -p^{\mu}k_{\nu} + \delta_{\nu 0}\left(\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta^{\alpha}}\right)_{\mathrm{p}} p^{\alpha}(p^{\mu}a^{\lambda} - D^{\mu\lambda}).
\end{aligned}\right\} \quad (198)$$

При выводе (197) мы учли, что согласно (132), (134)

$$k_{\lambda}\frac{\partial t^{\mu\lambda}}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}} = \frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}}(p^{\mu}a^{\lambda} - D^{\mu\lambda}) + k_{\lambda}\frac{\partial t^{\mu\lambda}}{\partial p_0}\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}},$$

$$k_{\lambda}\frac{\partial j^{\lambda}}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}} = a^{\lambda}\frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}} + k_{\lambda}\frac{\partial j^{\lambda}}{\partial p_0}\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_{\beta}}\bigg|_{\mathrm{p}}.$$

Опишем схему нахождения низкочастотных асимптотик функций Грина $G_{ab}^{+}(\mathbf{k}, \omega)$. Согласно формуле (105) фурье-компонента величины $a_{\xi}(\mathbf{x}, t)$ связана с функцией Грина соотношением

$$a_{\xi}(\mathbf{k}, \omega) = \xi(\mathbf{k}, \omega)\, G_{ab}^{+}(\mathbf{k}, \omega). \quad (199)$$

С другой стороны величину $a_{\xi}(\mathbf{x}, t)$ в области больших t $(t \gg \tau_r)$ можно, учитывая (104), (150), представить в виде

$$a_{\xi}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Sp}\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat{a}(\mathbf{x}) + \operatorname{Sp}\rho(\xi(t))\,\hat{a}(\mathbf{x}), \quad (200)$$

где оператор $\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))$ определяется формулой (118)

$$\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t)) = \int d^3x\,\{\hat{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{x})\,\zeta_{\alpha}'(\mathbf{x}, t) + \hat{\sigma}_{\varphi}(\mathbf{x})\,\varphi'(\mathbf{x}, t)\}.$$

Так как $\operatorname{Sp}\hat{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{x}')\,\hat{a}(\mathbf{x})$, $\operatorname{Sp}\hat{\sigma}_{\varphi}(\mathbf{x}')\,\hat{a}(\mathbf{x})$ зависят от разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, то фурье-компонента $a_{\xi}(\mathbf{k}, \omega)$ величины $a_{\xi}(\mathbf{x}, t)$ содержит члены, происходящие из первого слагаемого в (200), пропорциональные

$\delta\zeta_\alpha(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)$. Из уравнений сверхтекучей гидродинамики с источниками $\eta(\mathbf{k},\ \omega)$ [которые пропорциональны $\xi(\mathbf{k},\ \omega)$] следует, что величины $\delta\zeta_\alpha(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)$ сингулярны в области малых $\mathbf{k}$ и ω. Фурье-компонента второго слагаемого в формуле (200) согласно предыдущему разд. 7 является регулярной в области малых $\mathbf{k}$ и ω. Учитывая сказанное, фурье-компонента величины $a_\xi(\mathbf{x},\ t)$ в области малых $\mathbf{k}$ и ω согласно (200) может быть представлена в главном приближении в виде

$$a_\xi(\mathbf{k},\ \omega) = \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\delta\zeta_\alpha(\mathbf{k},\ \omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_l}\mathrm{i}k_l\delta\varphi(\mathbf{k},\omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi}\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega) \qquad (201)$$

или

$$a_\xi(\mathbf{k},\ \omega) = \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\delta Y_\mu(\mathbf{k},\ \omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\delta p_\mu(\mathbf{k},\ \omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi}\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega). \qquad (201')$$

Исходя из уравнений линеаризованной гидродинамики при наличии источников, найдем величины $\delta Y_\mu(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta p_\mu(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)$ [они будут пропорциональны величине $\xi(\mathbf{k},\ \omega)$] и, сравнивая формулы (199) с (201′), найдем фурье-компоненты функций Грина $G^+_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)$ в области малых $\mathbf{k}$ и ω.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда $[\hat{N},\ \hat{b}] \neq 0$. Из формул (189)—(192) следует, что в главном приближении

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega) &= -\frac{1}{\Delta}\xi(\mathbf{k},\ \omega)\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi}, \\ \delta Y_\nu(\mathbf{k},\ \omega) &= \frac{\mathrm{i}}{\Delta}\xi(\mathbf{k},\ \omega)(kY)D^{-1}_{\nu\mu}a^\mu\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (202)$$

Подставляя эти формулы в (201′) и сравнивая полученное выражение для $\alpha_\xi(\mathbf{k},\ \omega)$ с (199), найдем

$$G^+_{ab}(\mathbf{k},\ \omega) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi}\left\{-\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi} - \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\mathrm{i}k_\mu + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\mathrm{i}(kY)D^{-1}_{\mu\nu}a^\nu\right\}. \qquad (203)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $[\hat{N},\ \hat{b}] = 0$. Как видно из формулы (201′), для определения величины $a_\xi(\mathbf{k},\ \omega)$ необходимо предварительно найти $\delta Y_\mu(\mathbf{k},\ \omega)$ и $\delta p_\mu(\mathbf{k},\ \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega)$. Из (190), (197) получаем, учитывая (198),

$$\delta\varphi(\mathbf{k},\ \omega) = \frac{\mathrm{i}}{\Delta}\xi(\mathbf{k},\ \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}k_\nu - \frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}(kY)\,a^\lambda D^{-1}_{\lambda\nu}\right\}, \qquad (204)$$

откуда согласно (186), (189), (197) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\delta p_\mu(\mathbf{k},\ \omega)=\xi(\mathbf{k},\ \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\left[\frac{k_\mu}{\Delta}(kY)\,a^\lambda D^{-1}_{\lambda\nu}+\delta_{\mu 0}\frac{\partial Y_\nu}{\partial\zeta^\beta}p^\beta\right]+\right.\\
&\left.+\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\left[-\frac{k_\nu k_\mu}{\Delta}+\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\frac{p^\alpha p^\beta}{Y_0}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta^\beta}\right]\right\},\\
&\delta Y_\mu(\mathbf{k},\ \omega)=\xi(\mathbf{k},\ \omega)\left\{\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\left[-(kY)\,D^{-1}_{\nu\mu}+\right.\right.\\
&\left.+Y_0\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta^\nu}-\frac{(kY)^2}{\Delta}a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}a^{\lambda'}D^{-1}_{\lambda'\nu}\right]+\\
&\left.+\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\left[\delta_{\nu 0}\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta^\alpha}p^\alpha+\frac{(kY)}{\Delta}k_\nu a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(205)$$

Подставляя полученные выражения (204), (205) в формулу (201′) и учитывая (199), найдем асимптотику функции Грина $G^+_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)$ в случае $[\hat{N},\ \hat{b}]=0$. Мы, однако, выпишем сразу низкочастотную асимптотику функции Грина для произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$, т. е. учтем еще формулу (203):

$$G^+_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{1}{\Delta}\left\{\left(-\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi}-\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\mathrm{i}k_\mu+\right.\right.$$
$$\left.+\mathrm{i}\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}(kY)\,a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}\right)\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi}-\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\mathrm{i}k_\nu+\mathrm{i}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}(kY)\,a^{\lambda'}D^{-1}_{\lambda'\nu}\right)-$$
$$\left.-\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\Delta\,(kY)\,D^{-1}_{\mu\nu}\right\}.\qquad(206)$$

Мы при этом пренебрегли вкладом $G'_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)$ неполюсного слагаемого в $G^+_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)$, имеющего вид

$$G'_{ab}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\delta_{\mu 0}\frac{\partial Y_\nu}{\partial\zeta^\beta}p^\beta+$$
$$+\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\delta_{\nu 0}\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta^\beta}p^\beta+$$
$$+\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}Y_0\frac{\partial Y_\mu}{\partial\zeta^\nu}+\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\frac{p^\alpha p^\beta}{Y_0}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta^\beta},$$

так как слагаемыми такого типа мы уже пренебрегли, отбросив в $a_\xi(k,\ \omega)$ члены типа $\mathrm{Sp}\,\rho\,(\xi)\,\hat{a}$. Напомним, что величина

$$\Delta=b-(kY)\,a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}a^\mu$$

определяет полюса функций Грина (ветви колебаний) сверхтекучей жидкости. Подчеркнем, что полюсов, связанных с $\det D=0$, нет.

Это связано с тем, что вблизи особенности $\det D = 0$ величина $1/\Delta$ ведет себя как $\det D$, $1/\Delta \sim \det D$. Поэтому структура асимптотики функции Грина (206) не имеет полюсов, связанных с особенностями матрицы D. Можно показать, что особенности, связанные с обращением в нуль $\det D$, сокращаются.

Если потенциал ω соответствует релятивистски инвариантной системе, то p_ν, Y_ν представляют собой 4-векторы, а $D_{\mu\nu}$ — 4-тензор. В этом случае формула (206) дает релятивистски ковариантное представление низкочастотной асимптотики функции Грина [см. (107)].

В некоторых случаях удобно низкочастотную асимптотику функций Грина представить в виде билинейной комбинации производных $\partial \langle \hat{a} \rangle / \partial \zeta_\alpha$, $\partial \langle \hat{a} \rangle / \partial p_l$, $\partial \langle \hat{a} \rangle / \partial \varphi$ и производных $\partial \langle \hat{b} \rangle / \partial \zeta_\alpha$, $\partial \langle \hat{b} \rangle / \partial p_l$, $\partial \langle \hat{b} \rangle / \partial \varphi$. Такое представление удобно для нерелятивистских и обобщенных сверхтекучих систем.

Так как

$$\left. \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial p_\mu} \right|_{Y_\nu} = \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial p_\mu} \right)_{Y_\nu} + \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial p_l} \delta_{\mu l}, \quad \left. \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial Y_\mu} \right|_{p_\nu} = \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\mu} \right)_{p_\nu},$$

то, исходя из формулы (206), представим полюсную часть низкочастотной асимптотики функции Грина $G^+_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$ в виде [17]

$$\begin{aligned} G^+_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = {} & \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial \zeta_\beta} G^+_{\zeta_\alpha \zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & - \frac{\mathrm{i}}{\eta} \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \left(\frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial \varphi} - \mathrm{i} k_l \frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial p_l} \right) G^+_{\zeta_\alpha \psi}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & - \frac{\mathrm{i}}{\eta} \frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial \zeta_\beta} \left(\frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \varphi} + \mathrm{i} k_l \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial p_l} \right) G^+_{\psi \zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & - \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \varphi} + \mathrm{i} k_l \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial p_l} \right) \left(\frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial \varphi} - \mathrm{i} k_l \frac{\partial \langle \hat{b} \rangle}{\partial p_l} \right) G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \tag{207}$$

Фигурирующие здесь функции Грина $G^+_{\zeta_\alpha \zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\zeta_\alpha \psi}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\psi \zeta_\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ (мы будем называть их базисными) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} & G^+_{\zeta_\alpha \zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{Z_\alpha Z_\beta}{\Delta} - (kY) \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\mu} D^{-1}_{\mu\nu} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial Y_\nu}; \\ & G^+_{\zeta_\alpha \psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\eta}{\Delta} Z_\alpha, \quad G^+_{\psi \zeta_\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\eta}{\Delta} Z_\alpha; \\ & G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\eta^2}{\Delta}, \quad \eta = |\operatorname{Sp} w\psi|, \end{aligned} \right\} \tag{208}$$

где

$$Z_\alpha = \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial p_\lambda} k_\lambda - \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\lambda} (kY) a^\mu D^{-1}_{\mu\lambda}.$$

Исследуем теперь детальнее структуру величины Δ как функции 4-вектора k_ν. Рассмотрим случай, когда 4-вектор k_ν удовлетворяет условиям

$$k_\nu Y^\nu = k_\nu p^\nu = 0$$

(в частности, если $\mathbf{Y} = \mathbf{p} = 0$, то $\omega = 0$). Из определений матрицы $B_{\nu\mu}$ и величины A_ν (138) при $k_\nu Y^\nu = k_\nu p^\nu = 0$ следует, что $A^\nu B^{-1}_{\nu\mu} k^\mu \equiv (AB^{-1}k) = 0$. Отсюда видно, что выражение для D (140) имеет вид

$$D = -(kB^{-1}k)\,(AB^{-1}A). \tag{209}$$

Далее согласно (139) в рассматриваем ситуации

$$(kY)\,D^{-1}_{\nu\mu} = B^{-1}_{\nu\mu} - \frac{(B^{-1}A)_\nu\,(B^{-1}A)_\mu}{(AB^{-1}A)} - \frac{(B^{-1}k)_\nu\,(B^{-1}k)_\mu}{(kB^{-1}k)}. \tag{210}$$

Из формулы (134), определяющей величину a^μ, следует, что $a^\mu \sim \sim k^\mu$. Поэтому

$$(kY)\,a^\nu D^{-1}_{\nu\mu} a^\mu = 0, \quad (kY) = (kp) = 0.$$

Таким образом, величина $\Delta\,(k)$ [см. (136)] имеет вид

$$\Delta\,(k) = k^2 e, \quad e = 2\,\frac{\partial\omega'}{\partial p^2}. \tag{211}$$

Следовательно, для асимптотики функции Грина $G^+_{\psi\psi}\,(k)$ получим формулу [см. (208)]

$$G^+_{\psi\psi}\,(k) = \frac{\eta^2}{k^2 e}. \tag{212}$$

Если $\mathbf{Y} = \mathbf{p} = 0$ и $\omega = 0$, то это выражение для случая галилеево-инвариантной сверхтекучей системы совпадает с учетом (47) с результатом Н. Н. Боголюбова [18].

Пусть теперь

$$(kY) = 0, \ (kp) \neq 0. \tag{213}$$

В этом случае если $Y = 0$, то $\omega = 0$ и $kp = \mathbf{kp} \equiv |\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{p}\,|\cos\theta$, где θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$. Из формулы (139) легко видеть, что в силу условия (213)

$$(kY)\,D^{-1}_{\nu\mu} A^\mu = (kY)\,D^{-1}_{\nu\mu} k^\mu = 0.$$

Поэтому выражение $(kY)\,a^\nu D^{-1}_{\nu\mu} a^\mu$ имеет следующую структуру:

$$(kY)\,a^\nu D^{-1}_{\nu\mu} a^\mu = (kp)^2\,\frac{ak^2 + b\,(kp)^2}{k^2 + d\,(kp)^2},$$

где согласно (139) величины a, b, d можно выразить в терминах термодинамического потенциала ω' (давления). Используя формулы (208) и (136), видим, что общая структура асимптотики функции Грина

$G^{+}_{\psi\psi}(k)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$G^{+}_{\psi\psi}(k)=\frac{\eta^2\left[k^2+(kp)^2 d\right]}{(kp)^4(b-fd)+k^2(kp)^2(a-f-ed)-ek^4}, \tag{214}$$

где в соответствии с (211) величина f определяется из равенства

$$k_\mu k_\nu \frac{\partial^2\omega'}{\partial p_\mu\,\partial p_\nu}=ek^2+f(kp)^2.$$

[Формула (214) определяет явную зависимость функции Грина $G^{+}_{\psi\psi}(k)$ от угла θ.]

В заключение этого раздела выпишем асимптотики «базисных» функций Грина $G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k},\ \omega)$, $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k},\ \omega)$, $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k},\ \omega)$ при $\omega\tau_r\ll 1$, $kl\ll 1$ в случае, когда $\mathbf{Y}=0$, $\mathbf{p}=0$ (мы при этом не будем предполагать, что сверхтекучая система обладает свойством галилеевой или релятивистской инвариантности). Принимая во внимание формулы (208), получаем

$$G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k},\ \omega)=-\frac{\eta^2}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left\{\omega^2\left[\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial}{\partial\zeta_0}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\zeta_4}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)\right]+k^2\frac{s}{Y_0\rho_n}A\right\};$$

$$G^{\pm}_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k},\ \omega)=\delta_{\alpha j}\frac{k_j\eta}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left[\omega^2\left(\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial P}{\partial\zeta_0}-\frac{\partial P}{\partial\zeta_4}\right)-\right.$$
$$\left.-k^2\frac{s}{Y_0\rho_n}\frac{\rho_s+\rho_c}{\overset{*}{m}}A\right]-\frac{Y_0\eta\omega}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left\{\omega^2\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)+\right.$$
$$\left.+k^2\left[\frac{1}{\overset{*}{m}}\left(\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_0}+\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_4}\right)-\frac{s}{Y_0\rho_n}\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_4}\right]A\right\};$$

$$G^{+}_{\zeta_0\zeta_0}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{\omega^2k^2}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left\{\frac{\rho_c}{\overset{*}{m}{}^2}\left[\left(\frac{s}{Y_0}\right)^2\frac{\overset{*}{m}}{\zeta_4\rho_n}-\left(\frac{Y_4}{Y_0}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\overset{*}{m}\zeta_4}\left[\frac{\rho_s}{\rho_n}\left(\frac{s}{Y_0}\right)^2+(P+\zeta_0)^2\right]\right\}-\frac{k^4}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\frac{\rho_s s}{\rho_n\overset{*}{m}{}^2}\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_0}A;$$

$$G^{\pm}_{\zeta_0\zeta_j}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{\omega k_j}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left\{\omega^2(P+\zeta_0)+k^2\left[\frac{Y_0\rho_c}{\overset{*}{m}{}^2}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_0}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_4}-\frac{s\overset{*}{m}}{Y_0\rho_n}\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_4}\right)-\frac{\rho_s s}{\rho_n\overset{*}{m}}\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_4}\right]A\right\};$$

$$G^{\pm}_{\zeta_0\zeta_4}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{k^2}{\overset{*}{m}\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left[\omega^2\left(P+\zeta_0+\frac{\rho_c}{\overset{*}{m}}\frac{Y_4}{Y_0}\right)-k^2\frac{\rho_s s}{\rho_n\overset{*}{m}}\frac{\partial\zeta_0}{\partial Y_4}A\right];$$

$$G^{\pm}_{\zeta_i\zeta_j}(\mathbf{k},\ \omega)=\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)G^t(\mathbf{k},\ \omega)+\frac{k_ik_j}{k^2}G^l(\mathbf{k},\ \omega);$$

$$G^l(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{k^2}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left\{\omega^2\left[(P+\zeta_0)\frac{\partial P}{\partial\zeta_0}+\zeta_4\frac{\partial P}{\partial\zeta_4}\right]+\right.$$

$$+k^2 \frac{s}{Y_0}\left[\frac{(\rho_s+\rho_c)^2}{\rho_n}+\rho_s\right]\frac{A}{\overset{*}{m}{}^2}\Big\} ;$$

$$G^t(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{k^2}{\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\Big\{\omega^2\rho_n\Big[\rho_c C+B+$$

$$+\frac{\rho_s}{\overset{*}{m}{}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_4}\frac{Y_4}{Y_0}-\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial}{\partial\zeta_0}\frac{Y_4}{Y_0}\right)\Big]+k^2\frac{\rho_s}{\overset{*}{m}{}^2}\frac{s}{Y_0}A\Big\} ;$$

$$G^{\pm}_{\zeta_i\zeta_4}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{k_i\omega}{\overset{*}{m}\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\Big\{\omega^2\overset{*}{m}\zeta_4+$$

$$+k^2\left[\frac{Y_0\rho_c}{\overset{*}{m}{}^2}\left(\frac{\partial\zeta_4}{\partial Y_0}+\frac{Y_4}{Y_0}\frac{\partial\zeta_4}{\partial Y_4}\right)-\frac{(\rho_s+\rho_c)}{\rho_n}s\frac{\partial\zeta_4}{\partial Y_4}\right]A\Big\} ;$$

$$G^{\pm}_{\zeta_4\zeta_4}(\mathbf{k},\ \omega)=\frac{k^2}{\overset{*}{m}{}^2\Delta(\mathbf{k},\ \omega)}\left[\omega^2(\overset{*}{m}\zeta_4-\rho_c)-k^2\frac{\rho_s}{\rho_n}s\frac{\partial\zeta_4}{\partial Y_4}A\right]$$

[величины A, B, C, $\Delta(\mathbf{k},\ \omega)$ определяются формулами (141′), (141)].

Если сверхтекучая система обладает свойством галилеевой инвариантности, то найденные нами асимптотики функций Грина $G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k},\ \omega)$, $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k},\ \omega)$ с учетом (142) переходят соответственно в результаты Н. Н. Боголюбова [18] и Галасевича [19], а $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k},\ \omega)$ переходят в результаты Хоэнберга и Мартина [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н.** Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.
2. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
3. **Халатников И. М.** Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
4. **Halperin B. I., Hohenberg P. C.**— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 898.
5. **Минеев В. П.** Сверхтекучий ^{3}He: введение в предмет.— УФН, 1983, т. 139, вып. 2, с. 303—332.
6. **Воловик Г. Е.** Сверхтекучие свойства А-фазы ^{3}He.— УФН, 1984, т. 143, вып. 1, с. 73—110.
7. **Сверхтекучесть** гелия-3. Сб. статей: Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
8. **Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Слюсаренко Ю. В.** К гидродинамике магнетика со спиральной структурой. Докл. на III Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984.
9. **Лавриненко Н. М., Пелетминский С. В., Слюсаренко Ю. В.** К кинетике систем с кристаллической структурой.— ТМФ, 1982, т. 53, № 3, с. 456—468. **Пелетминский С. В., Слюсаренко Ю. В.** Термодинамика и кинетика систем с кристаллической структурой. Препринт ИТФ-84-9Р, Киев, 1984.
10. **Андреев А. Ф., Лифшиц И. М.** Квантовая теория дефектов в кристаллах. — ЖЭТФ, 1969, т. 56, № 6, с. 2057—2068.
11. **Saslow W. M.**— Phys. Rev. B, 1977, v. 15, № 1, p. 173—186.
12. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И.** Некоторые вопросы статистической механики. М.: Высшая школа, 1975.
13. **Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.** Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.

14. **Лебедев В. В., Халатников И. М.** Релятивисткая гидродинамика сверхтекучей жидкости.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, вып. 5(11), с. 1601—1614.

15. **Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н., Фомин П. И.** Метод квазисредних и релятивистская гидродинамика сверхтекучей жидкости. Препринт ИТФ-83-151Р, Киев, 1983.

16. **Халатников И. М.** О распространении звука в движущемся гелии II и влиянии теплового потока на распространение второго звука.— ЖЭТФ, 1956, т. 30, вып. 3, с. 617—619.

17. **Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н.** Низкочастотная асимптотика функций Грина сверхтекучих бозе-систем. Препринт ХФТИ 83-18, Харьков, 1983.

18. **Боголюбов Н. Н.** К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ Р-1395, Дубна, 1963.

19. **Galasiewicz Z.** Three-legs Green's functions for the superfluid Bose-systems.— Bull. Acad. polon. sci. CI. III, 1967, v. 15, № 3, p. 191—196.

20. **Hohenberg P. C., Martin P. C.** Microscopic theory of superfluid helium.— Ann. Phys., 1965, v. 34, p. 291—359.