

ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ π -МЕЗОНОВ С ЯДРАМИ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

М. Х. Ханжасаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен проблемам теории рассеяния π -мезонов на ядрах в области низких энергий (ниже 80 МэВ). Обсуждается экспериментальная ситуация. Анализируется современное состояние оптической модели пион-ядерного взаимодействия. Рассмотрена проблема учета канала поглощения пиона, его влияние на упругое рассеяние. Несмотря на значительный прогресс в развитии формальных аспектов оптической модели, в ее практических приложениях имеются существенные недостатки. Подчеркнута важность согласования теории с общими требованиями, вытекающими из условия унитарности. Изложен унитарный подход к описанию низкоэнергетического пион-ядерного рассеяния, в основе которого лежит эволюционный по константе связи метод.

Problems of the theory of pion-nucleus elastic scattering at low energies (below 80 MeV) are reviewed. We consider some recent attempts to describe the low-energy data in the framework of the optical model approach. It is shown that despite the progress in the microscopic optical model essential drawbacks still remain. Particular emphasis is placed on the consistency of the theory with the unitarity condition. The unitary approach of the description of pion-nucleus elastic scattering based on the law of evolution in coupling constant is presented. The effect of pion absorption on elastic scattering is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы на существующих мезонных фабриках (сильноточные протонные ускорители) интенсивно изучается взаимодействие пионов низкой энергии * с ядрами. Пионы низких энергий выгодно отличаются от резонансных большой длиной свободного пробега в ядерном веществе, сравнимой с ядерными размерами. Поэтому они более чувствительны к ядерной структуре и могут использоваться для ее изучения. В частности, одновременное изучение взаимодействия π^+ - и π^- -мезонов с ядрами может дать ценную информацию о протонном и нейтронном распределениях.

Знание динамики взаимодействия π -мезонов с ядрами необходимо для анализа целого ряда реакций, сопровождающихся рождением этих частиц. Например, важную роль в описании данных по фоторождению и электророждению пионов на ядрах играет учет их взаимодействия в конечном состоянии.

Для того чтобы пионы стали действительно эффективным инструментом для получения новой информации о ядрах, необходимо нали-

* Пионами низких энергий называют частицы, кинетическая энергия которых в лабораторной системе $T_{\pi} \leq 70 \div 80$ МэВ.

чие надежной теории пион-ядерного взаимодействия. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в этом направлении и намечились пути создания количественной теории (см., например, обзоры [1—4] и монографии [5—7]). Однако практическая реализация еще далека от совершенства. Главная трудность лежит в корректном описании канала поглощения пиона в ядерном веществе. Этот канал принципиально отличает пионы от других частиц, таких как электроны и нуклоны, обычно используемые для изучения структуры ядер.

При описании взаимодействия частиц с ядрами, как правило, используют в той или иной формулировке теорию многократного рассеяния, являющуюся в основе своей потенциальной теорией [8, 9]. Лишь в последнее время стало ясно, каким образом можно учесть канал поглощения в рамках такой теории. Наиболее полный анализ проведен пока лишь для случая $\pi - d$ -рассеяния [10—12]. Наличие точных интегральных уравнений Фаддеева для системы из трех частиц [13] позволяет корректно рассчитать потенциальную часть задачи, а обобщенные на случай с несохранением числа частиц [10—12], они дают реальное представление о влиянии канала поглощения на другие каналы реакции. Для ядер с $A \geq 3$ интегральные уравнения становятся практически непригодными с точки зрения численных расчетов. В этом случае для суммирования ряда многократного рассеяния применяются равные варианты оптической модели [1—7]. Оптический потенциал является сложным многочастичным оператором и строится приближенно в терминах двухчастичных пион-нуклонных амплитуд рассеяния. Установить, каким неупругим каналам соответствует мнимая часть полученного так потенциала, оказывается возможным лишь в частных случаях (см. [3, 14]). Поэтому феноменологический учет канала поглощения становится неоднозначным: параметры, определяющие поправку на поглощение, зависят от принятой приближенной схемы. Таким образом, возникает проблема согласования теории с общими требованиями, вытекающими из общего принципа унитарности. Лишь в этом случае можно получить правильное представление о роли канала поглощения.

Вопросам, связанным с согласованием теории с условием унитарности, в последнее время уделяется большое внимание (см., например, [3, 5, 15, 16]). Настоящий обзор посвящен анализу различных теоретических схем, используемых для описания пион-ядерного рассеяния при низких энергиях, с этой точки зрения. В частности, подробно изложен унитарный вариант теории рассеяния пионов на ядрах [16—19], в основе которого лежит метод эволюции систем по константе связи [20].

В данном обзоре рассматриваются в основном работы, имеющие конкретные результаты по описанию данных по упругому пион-ядерному рассеянию в области низких энергий. Поэтому большое число работ (см. [5]), развивающих формальные аспекты теории, теоретико-полевые модели, здесь не обсуждается. Раздел 1 посвящен анализу

экспериментальной ситуации в низкоэнергетическом пион-ядерном рассеянии. В разд. 2 и 3 обсуждаются проблемы оптической модели пион-ядерного взаимодействия, предсказательная сила теории. Разделы 4 и 5 посвящены изложению унитарного подхода к описанию упругого рассеяния пионов на ядрах. В заключении (разд. 6) обсуждаются перспективы теории низкоэнергетического пион-ядерного взаимодействия.

1. РАССЕЯНИЕ ПИОНОВ НИЗКОЙ ЭНЕРГИИ НА ЯДРАХ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Рассмотрим экспериментальные данные последних лет по измерению сечения упругого рассеяния пионов на ядрах при низкой энергии. Систематическое изучение здесь ведется в основном тремя группами, работающими на мезонных фабриках TRIUMF (Канада) и LAMPF (США). В TRIUMF получены дифференциальные сечения рассеяния π^+ -мезонов на ядре углерода ^{12}C при 30, 40 и 50 МэВ [21], π^- -мезонов на ядрах $^{12,13}\text{C}$ и $^{16,18}\text{O}$ при 29 МэВ, а также на ядре ^{208}Pb при 50 МэВ [22]. Недавно там было измерено [23] сечение $\pi^+ - ^{12}\text{C}$ -рассеяния при пока рекордно низкой энергии — 13,9 МэВ.

В LAMPF одна из групп [24] провела измерения дифференциальных сечений π^+ -мезонов на целой серии ядер от лития до железа при 50 МэВ. Другая группа в LAMPF измерила дифференциальные сечения рассеяния π^+ -мезонов на ядрах ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{90}Zr и ^{208}Pb при энергиях пионов 30, 40 и 50 МэВ [25], а недавно получены данные на той же серии ядер при 20 МэВ [26]. Эта же группа в [27] представила данные по рассеянию π^+ - и π^- -мезонов на ^{40}Ca при 64,8 МэВ. Детальное обсуждение экспериментальных данных до 1979 г. дано в обзоре [28].

В интересующей нас области низких энергий имеются данные по рассеянию π^\pm -мезонов на изотопах $^3,^4\text{He}$ при 24 [29], 25 [30], 51 [30, 31], 68 и 75 МэВ [31, 32], а также на дейтроне при 47,7 и 65 МэВ [33].

Таким образом, в настоящее время накоплен значительный материал по упругому рассеянию пионов низкой энергии на целом ряде ядер от $A = 2$ до $A = 208$. Угловой диапазон измеренных сечений лежит в интервале углов рассеяния от 20 до 160°. Наиболее полным является набор данных по $\pi^+ - ^{12}\text{C}$ -рассеянию, сечение которого измерено в диапазоне энергий от 14 до 50 МэВ. Данных по рассеянию π^+ -мезонов больше, чем для π^- -мезонов, что объясняется большим сечением захвата π^- -мезонов в ядерном веществе. Тем не менее в настоящее время имеются одновременные данные как для π^+ , так и для π^- -мезонов при низких энергиях для ядер дейтерия при 47,7 и 65 МэВ [33], изотопов $^3,^4\text{He}$ в интервале от 25 до 75 МэВ [31, 32], ^{12}C при 30 и 50 МэВ [21, 22], ^{40}Ca при 65 МэВ [27] и ^{208}Pb при 50 МэВ [21, 22]. Такого типа данные представляют особый интерес с точки зрения получения информации о протонном и нейтронном

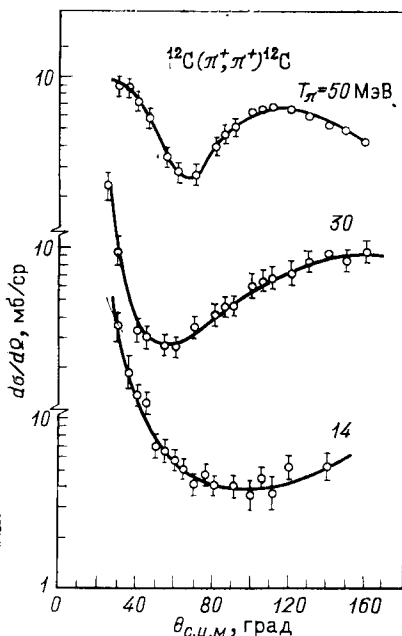


Рис. 1. Зависимость дифференциального сечения упругого $\pi^+ - {}^{12}\text{C}$ -рассеяния от энергии: данные и кривые (подгонка с феноменологическим оптическим потенциалом) взяты из [23, 25]

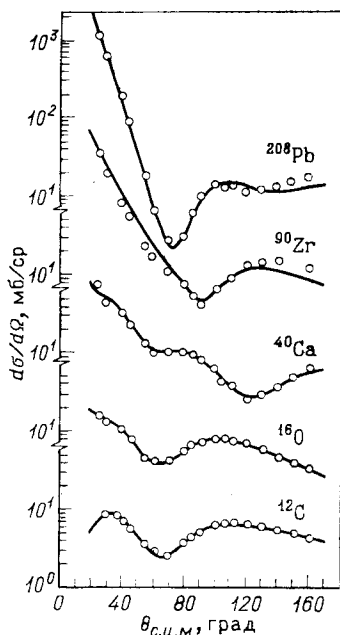


Рис. 2. А-зависимость дифференциального сечения упругого пион-ядерного рассеяния при 50 МэВ. Рисунок взят из [25]

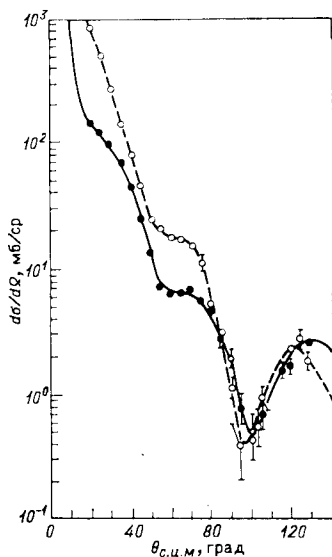
распределениях в ядрах, проверки зарядовой симметрии сильных взаимодействий и др.

На рис. 1 представлены экспериментальные данные для $\pi^+ - {}^{12}\text{C}$ -рассеяния в зависимости от энергии падающего пиона. Видно, что с увеличением энергии характерный минимум при $\theta_{\text{с.ц.м.}} \sim 60^\circ$, обусловленный интерференцией между пион-нуклонными s - и p -волнами, становится более ярко выраженным. В целом же сечение носит достаточно простой характер. Несущественно меняется вид сечения и в зависимости от A (рис. 2). Для ядер с $A \geq 40$ при энергиях пиона около 50 МэВ появляется второй дифракционный минимум, движущийся к малым углам при увеличении энергии в соответствии с законом $qR = \text{const}$, где q — переданный импульс, а R — радиус ядра. Характерное различие дифференциальных сечений для π^+ - и π^- -мезонов показано на рис. 3, для $\pi^\pm - {}^{40}\text{Ca}$ -рассеяния при 65 МэВ [27].

Несмотря на столь простое поведение дифференциального сечения рассеяния пионов на ядрах в области низких энергий, описать их теоретически оказалось сложной проблемой. Поэтому низко-

Рис. 3. Дифференциальные сечения $\pi^\pm - {}^{40}\text{Ca}$ -рассеяния при 65 МэВ:

кривые — подгонка с феноменологическим оптическим потенциалом: сплошная — π^+ , пунктир — π^- .
Рисунок взят из [27]



энергетическое пион-ядерное рассеяние рассматривается как проверка различных моделей пион-ядерного взаимодействия. Оптический потенциал первого порядка (Кисслингер, 1955) [34], полученный в рамках теории многократного рассеяния в терминах свободных πN -амплитуд, оказался недостаточным для описания низкоэнергетического пион-ядерного рассеяния (см., например, [35, 36]). Таким образом, возникла необходимость учета эффектов второго порядка для получения хотя бы качественного описания. Очень важную роль в этой области энергий играет канал поглощения пиона.

Лишь с его учетом можно рассчитывать на количественную теорию.

2. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача рассеяния и пионные атомы. Поскольку эффекты второго порядка оказались существенными, возникла идея описать данные рассеяния при низких энергиях феноменологически с помощью оптических потенциалов, используемых для описания сдвигов и ширин пионных атомов [36—41]. Наиболее полное исследование в этом направлении было проведено в [38, 39]. Предложенный там потенциал для ядер с нулевым спином и изоспином имеет вид:

$$\begin{aligned}
 2\omega U_{\text{опт}}(r) = & -4\pi [b(r) + B(r)] + \\
 & + 4\pi \nabla \{L(r) [c(r) + C(r)]\} \nabla - \\
 & - 4\pi \left\{ \frac{p_1 - 1}{2} \nabla^2 c(r) + \frac{p_2 - 1}{2} \nabla^2 C(r) \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где

$$L(r) = \left\{ 1 + \frac{4\pi}{3} \lambda [c(r) + C(r)] \right\}^{-1} \quad (2)$$

представляет собой известную [42] поправку Лоренца — Лоренца (LL -эффект), $b(r) = p_1 \bar{b}_0 \rho(r)$, $c(r) = c_0 \rho(r)/p_1$ — линейные по ядерной плотности $\rho(r)$ члены (плотность нормирована на число нуклонов); $B(r) = p_2 B_0 \rho^2(r)$ и $C(r) = C_0 \rho^2(r)/p_2$ — квадратичные по ρ

члены; $p_1 = 1 + \omega/M$ и $p_2 = 1 + \omega/2M$ — кинематические факторы; ω — полная энергия пиона, а M — масса нуклона.

Данный потенциал представляет собой кинематическую экстраполяцию известного потенциала Эриксона — Эриксона [42] для пионных атомов. В частности, члены с лапласианом возникают как результат углового преобразования при переходе из с. ц. м. (π, N) - и $(\pi, 2N)$ -подсистем в с. ц. м. пион — ядро. На важность этого преобразования впервые было указано в [43]. Члены, линейные по ρ , $b(r)$ и $c(r)$ отвечают за потенциальную часть взаимодействия, а квадратичные — $B(r)$ и $C(r)$ учитывают канал поглощения пиона в предположении двухнуклонного механизма.

Параметры оптического потенциала (π -атомы). Одночастичные параметры b_0 и c_0 входят в амплитуду πN -рассеяния

$$f_{\pi N} = b_0 + b_1 (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}) + [c_0 + c_1 (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau})] (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \quad (3)$$

и, следовательно, могут быть получены из данных фазового анализа πN -рассеяния. Здесь \mathbf{t} и $\boldsymbol{\tau}/2$ — операторы изоспина пиона и нуклона, а \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы пиона до рассеяния и после него. Известно, что на пороге ($k \rightarrow 0$) изоскалярная длина рассеяния $b_0 \sim 0$. Поэтому в потенциал (1) входит величина [42]:

$$\bar{b}_0 = b_0 + b^{(2)}, \quad b^{(2)} = -(b_0^2 + 2b_1^2) \langle 1/r \rangle, \quad (4)$$

возникающая в s -волновом члене из-за учета перерассеяния пиона на паре нуклонов. Для обратной корреляционной длины двух нуклонов берется [38] ее выражение в модели ферми-газа: $\langle 1/r \rangle = 3k_F/2\pi$, где k_F — импульс Ферми ($k_F = 1,4 \text{ фм}^{-1}$).

Параметры поправки на поглощение B_0 и C_0 , а также параметр λ , определяющий силу LL -эффекта, обычно считают свободными и получают подгонкой по π -атомным данным (см. обзоры [1, 44—46]). Реально к подгоночным параметрам относят также и величину \bar{b}_0 , поскольку лучшее описание данных получается при ее значениях значительно больших, чем это следует из (4). Один из наборов параметров оптического потенциала (1), полученный в [38] для описания сдвигов и ширин π -атомов, приведен в табл. 1 (set 1). Он лишь незначительно отличается от стандартного набора (см. [2]) из-за наличия в (1) членов, пропорциональных $\nabla^2 \rho$.

Таблица 1. Параметры оптического потенциала для π -атомов

Параметры	set 1 [38]	set A [39]
b_0, μ^{-1}	-0,028	-0,033
B_0, μ^{-4}	$-0,043 \pm i0,043$	$0,002 \pm i0,048$
c_0, μ^{-3}	0,266	0,234
C_0, μ^{-6}	$-0,10 + i0,10$	$0,036 + i0,117$
λ	1	1,4

К сожалению, однозначно определить параметры оптического потенциала непосредственно из π -атомных данных нельзя. Имеется корреляция между s -волновыми ($\text{Re } \bar{b}_0$, $\text{Re } B_0$) и p -волновыми ($\text{Re } c_0$, $\text{Re } C_0$) параметрами [38—40]. Приблизительно постоянными являются лишь их линейные комбинации [40]: $\text{Re } b_{eff} = \text{Re } \bar{b}_0 + \rho_{av}^s \text{Re } B_0$ и $\text{Re } c_{eff} = \text{Re } c_0 + \rho_{av}^p \text{Re } C_0$, где $\rho_{av}^s = \rho_0/2$ и $\rho_{av}^p = 3\rho_0/4$, $\rho_0 = 0,15 \mu^{-3}$ — плотность ядерной материи ($\mu^{-1} = 1,4$ фм — обратная масса пиона). Для p -волновых параметров ситуация осложняется еще тем, что имеется также их корреляция с параметром λ LL -эффекта, значение которого весьма неопределенно [1, 3, 4]. В частности, в [1, 40] отмечается, что π -атомные данные не дают никаких указаний на существование LL -эффекта, т. е. совместимы с $\lambda = 0$. Напомним, что классическое значение этого параметра [42] равно 1. Таким образом, имеется целый набор феноменологических оптических потенциалов, одинаково хорошо описывающих пионные атомы.

Оптический потенциал и теория (π -атомы). Существует ряд микроскопических расчетов [47—50] параметров B_0 и C_0 оптического потенциала в предположении двухнуклонного механизма поглощения, где эти параметры выражаются через диаграммы, дающие основной вклад в процесс $\pi d \leftrightarrow NN$. Их обзор дан в [4] (см. там же, разд. 4.2). Нуклон-нуклонные корреляции вычисляются с учетом обменов π - и ρ -мезонами. Обмен более тяжелыми мезонами имитируется введением отталкивательного кора (радиус кора r_c). Соответствующие матричные элементы вычисляются, как правило, в модели ферми-газа для бесконечной ядерной материи. Результаты расчетов очень чувствительны к параметру обрезания r_c и к параметрам вершинных функций. Следует отметить, что в таком подходе предсказывается усиление LL -эффекта, давая для параметра λ интервал значений от 1 до 2 [4, 50]. Что касается числовых результатов для B_0 и C_0 , то более или менее стабильное значение получается лишь для $\text{Im } C_0$: $(0,12—0,16) \mu^{-6}$, что довольно близко к эмпирическому (см. табл. 1). Значение $\text{Re } C_0$ сильно зависит от схемы расчета: в [47] для нее получено значение $0,036 \mu^{-6}$, а в [48] — $0,12 \mu^{-6}$. Интересно, что $\text{Re } C_0$ и $\text{Im } C_0$ в данной модели имеют одинаковый знак. Напомним, что стандартному выбору соответствует [1, 44—46] $\text{Re } C_0 = -\text{Im } C_0$. Это подчеркивает сильную корреляцию между параметрами λ и $\text{Re } C_0$.

На s -волновые параметры оптического потенциала \bar{b}_0 и B_0 могут существенно влиять поправки, связанные с влиянием среды на распространение пиона [49]. Их значение существенно зависит от параметра $\bar{\lambda}$. Таким образом, теоретическая ситуация в отношении параметров \bar{b}_0 , B_0 и C_0 в рассматриваемой модели [4] пока неопределенна.

В [39] была проведена подгонка π -атомных данных с потенциалом (1), в котором часть параметров выбиралась в соответствии с теорией [47, 48]. В табл. 1 приведен один из наборов (set A), в котором свободными полагались параметры λ , \bar{b}_0 , $\text{Im } B_0$ и $\text{Im } C_0$, а $\text{Re } B_0$ и $\text{Re } C_0$

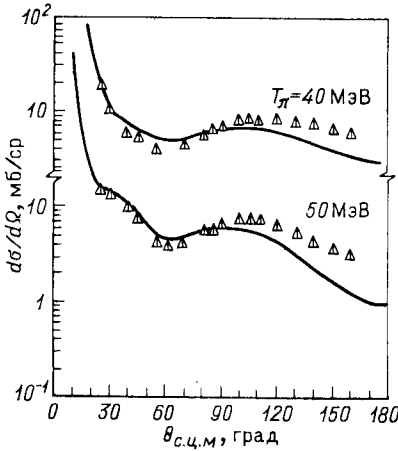


Рис. 4. Дифференциальные сечения π^+ — ^{16}O -рассеяния:

сплошные кривые — расчет с оптическим потенциалом (1) с параметрами set 1 из табл. 2. Данные — из [25]. Рисунок взят из [38]

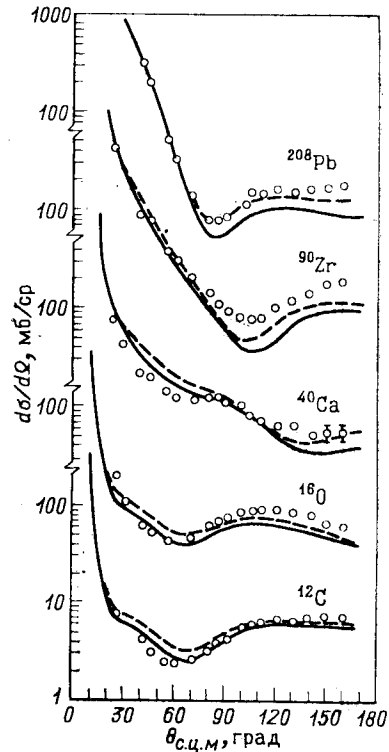


Рис. 5. Дифференциальные сечения упругого пион-ядерного рассеяния при 40 МэВ:

данные — из [25], кривые — расчет с оптическим потенциалом (1): сплошные — параметры set A из табл. 1; пунктирные — set A из табл. 2. Рисунок взят из [39]

были взяты из [47]. Оба набора (set 1 и set A) одинаково хорошо описывают сдвиги и ширины π -атомов.

Низкоэнергетическое пион-ядерное рассеяние. Могут ли данные по рассеянию несколько сузить класс эквивалентных с точки зрения π -атомов оптических потенциалов? Это исследовалось в [38—40] с разными наборами параметров (два из них приведены в табл. 1). Оказалось, что особой чувствительности нет: дифференциальные сечения практически не отличаются (см. рис. 3 в [39]). Таким образом, в задаче рассеяния также имеется корреляция между параметрами b_0 и B_0 , а также c_0 , C_0 и λ (см. детальное обсуждение в [40]). Вместе с тем описать данные при $T_\pi \sim 50$ МэВ с параметрами оптического потенциала, определенными из π -атомных данных, удовлетворительно не удается (рис. 4, 5), нужно учитывать их зависимость от энергии.

Энергетическая зависимость параметров оптического потенциала. Зависимость от энергии потенциальных параметров $b_{0,1}$ и $c_{0,1}$ учи-

тывалась в [38, 39] введением вместо длин πN -рассеяния пион-нуклонных амплитуд (3). В [38] было показано, что $\text{Re } b_{0,1}$ и $\text{Re } c_{0,1}$ практически не меняются в интервале энергий $T_\pi \leq 50$ МэВ. Возникают, однако, мнимые части у параметров $b_{0,1}$ и $c_{0,1}$, отвечающие квазиупругому рассеянию пиона. Для учета влияния среды на этот процесс мнимые части фаз умножались на фактор подавления Паули $Q_p(k)$, рассчитанный в [51] для бесконечной ядерной материи. Мнимая часть параметра \bar{b}_0 (4) формируется не только πN -фазами, но и корреляционной величиной $\langle 1/r \rangle$, которая для пионов низкой энергии в модели ферми-газа имеет вид [36]:

$$\langle 1/r \rangle = \frac{3k_F}{2\pi} + ik + O(k^2),$$

где k_F — импульс Ферми, а k — импульс пиона в с. ц. м. пион-ядро. Заметим, что при таком определении мнимых частей параметров \bar{b}_0 и c_0 в (1) не учитывается спектр возбуждений реальных конечных ядер. Нет правильного квазидвухчастичного предела теории, заключающегося в обращении мнимых частей в ноль при энергиях пиона ниже порога возбуждения ядерной системы.

Параметр λ возникает [42] из-за короткодействующих двухнуклонных корреляций. При $T_\pi \sim 50$ МэВ импульс пиона $k \sim 0,6$ фм⁻¹. Поэтому параметр $kr_c \approx 0,3$ при значении радиуса кора $r_c \sim 0,5$ фм, т. е. достаточно мал в интервале энергий до 50 МэВ, и зависимостью λ от энергии можно пренебречь. По этой же причине должны слабо зависеть от энергии и параметры B_0 и C_0 . Более точно их энергетическую зависимость можно оценить (см. [52]), рассматривая зависимость от энергии сечения процесса $\pi^+d \leftrightarrow pp$:

$$\sigma(\pi^+d \rightarrow pp) = \frac{2}{3} \left(\frac{p_p}{\mu} \right)^2 \left[\frac{\alpha_0}{\eta_\pi} + \alpha_1 + \alpha_2 \eta_\pi + O(\eta_\pi^2) \right], \quad (5)$$

где $\eta_\pi = p_\pi/\mu$, p_π и p_p — импульсы пиона и протона в с. ц. м. πd , а $\alpha_{0,1,2}$ — постоянные, не зависящие от энергии. Отсюда получается, что B_0 и C_0 меняются лишь соответственно на 33 и 21% в интервале энергии $T_\pi = 0 \div 100$ МэВ. В [47] рассчитывалась энергетическая зависимость $\text{Im } B_0$ и $\text{Im } C_0$ в модели однобозонного обмена и получена сильная вариация этих параметров: в интервале от 0 до 50 МэВ эти параметры увеличиваются почти в 2 раза.

В табл. 2 представлены два разных способа экстраполяции параметров B_0 и C_0 (см. табл. 1) в область $T_\pi \sim 50$ МэВ. В первом случае (set 1) они полагаются постоянными [38], а второй набор (set A) получен с учетом их энергетической зависимости в соответствии с [47]. Соответствующие дифференциальные сечения показаны на рис. 4, 5. Видно, что описание существенно не улучшилось. При более низких энергиях ($T_\pi \leq 40$ МэВ) дифференциальное сечение воспроизводится лучше с параметрами оптического потенциала, соответствующими π -атомам. Это также отмечается в [23, 26], где представлены данные

Таблица 2. Параметры оптического потенциала для задачи рассеяния:
 $T_\pi = 50$ МэВ

Параметры	set 1 [38]	set A [39]
b_0, μ^{-1}	$-0,028 + i0,004$	$-0,040 + i0,004$
B_0, μ^{-4}	$-0,043 + i0,043$	$-0,005 + i0,063$
c_0, μ^{-3}	$0,266 + i0,011$	$0,266 + i0,011$
C_0, μ^{-6}	$-0,10 + i0,10$	$0,045 + i0,150$
λ	1	1,4

по π — A -рассеянию при $T_\pi = 14$ и 20 МэВ. Однако с ростом A описание дифференциальных сечений при данной энергии ухудшается (рис. 5).

К мнимой части потенциала чрезвычайно чувствительны полные сечения рассеяния ($\sigma_{\text{полн}}$), полное сечение реакции (σ_p), квазиупругого рассеяния ($\sigma_{\text{КУ}}$) и сечение поглощения ($\sigma_{\text{погл}}$). Расчет этих величин методом искаженных волн был сделан в [38]. В частности, для ($\pi^\pm, {}^{12}\text{C}$) было получено, что $\sigma_{\text{погл}}(\pi^+) = 126$ мб, а $\sigma_{\text{полн}}(\pi^-) = 159$ мб при 50 МэВ. Недавно проведенные измерения [53] полного сечения поглощения π -мезонов на ряде ядер при $T_\pi = 50$ МэВ для ($\pi^\pm, {}^{12}\text{C}$) дали следующие значения: $\sigma_{\text{погл}}(\pi^+) = (88 \pm 27)$ мб и $\sigma_{\text{погл}}(\pi^-) = (220 \pm 30)$ мб.

Неудовлетворительная ситуация при $T_\pi = 50$ МэВ, а также ухудшение описания с ростом A при данной энергии может заключаться не только в процедуре экстраполяции параметров B_0 и C_0 , ответственных за поглощение, в эту область энергии. Необходимо также правильно учитывать энергетическую зависимость потенциальных параметров \bar{b}_0 , c_0 и др., что в [38, 39] делалось довольно грубо. Действительно, аналогично корреляциям между вещественными частями пар параметров \bar{b}_0 , B_0 и c_0 , C_0 должны коррелировать и их мнимые части [40], поскольку дифференциальные сечения чувствительны лишь к общему значению мнимой части оптического потенциала.

Таким образом, в области низких энергий нужно более корректно рассчитывать потенциальную часть пион-ядерного взаимодействия. В этой связи следует обратить внимание на важную роль внеэнергетических эффектов при построении оптического потенциала (см. [3, 54]). Потенциалы кисслингерского типа ($\sim \nabla \rho \nabla$) отвечают предположению о нулевом радиусе πN -взаимодействия, т. е. с самого начала здесь закладывается неправильное представление о внеэнергетическом поведении πN -амплитуды рассеяния. Учет конечности радиуса πN -взаимодействия ($r_{\pi N} \sim 0,3 \div 0,5$ фм) приводит, в частности, к существенному ослаблению LL -эффекта в ядрах [55]. Необходимо также учесть эффекты связи нуклонов в ядрах, чтобы обеспечить правильное пороговое поведение амплитуды пион-ядерного рассея-

ния. Все это весьма непросто сделать, оставаясь в координатном пространстве [56], поскольку исчезает характерная простота (локальность) потенциалов кисслингеровского типа.

3. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В последние годы много усилий было направлено (см. [1, 3, 5, 6]) на построение теории пион-ядерного взаимодействия непосредственно в импульсном представлении. В таком формализме, избегая дополнительных приближений, необходимых для получения локального оптического потенциала в r -пространстве, можно последовательно учесть внеэнергетические эффекты; эффекты многократного рассеяния (с использованием более реалистических ядерных моделей, чем модель ферми-газа); релятивистские аспекты проблемы, а также обобщить теорию на случай с несохранением числа частиц, т. е. учесть канал поглощения пиона. В качестве основного динамического уравнения здесь выступает уравнение Липпмана — Швингера для многочастичной T -матрицы рассеяния *, на основе которого строится ряд многократного рассеяния [8] пиона на нуклонах ядра. Оптическая модель возникает как эффективный метод суммирования данного ряда при вычислении амплитуды упругого рассеяния. Детальный обзор различных вариантов оптической модели и ее приложений дан в [3]. Поэтому здесь мы ограничимся анализом проблем, возникающих при описании рассеяния пионов низких энергий на ядрах.

Потенциальное пион-ядерное взаимодействие. Теория многократного рассеяния является потенциальной теорией, в основе которой лежит гамильтониан:

$$H = K_\pi + H_A + V, \quad V = \sum_{i=1}^A v^i, \quad (6)$$

где K_π — оператор кинетической энергии пиона; H_A — гамильтониан ядра, а v^i — потенциал взаимодействия пиона с i -м нуклоном ядра. Эффектами многочастичных сил, возникающих в любой релятивистской теории π — A -взаимодействия (см., например, [5]), здесь пренебрегается.

Многочастичная T -матрица пион-ядерного рассеяния определяется с помощью уравнения Липпмана — Швингера:

$$T = \Sigma v^i + \Sigma v^i G T, \quad (7)$$

где G — функция Грина:

$$G(E) = (E + i\delta - K_\pi - H_A)^{-1}. \quad (8)$$

Введем вспомогательный оператор τ :

$$\tau_i = v_i + v_i G A \tau_i, \quad (9)$$

* В релятивистском случае теорию можно строить [64], основываясь на уравнении Бете — Солпитера.

имеющий физический смысл t -матрицы рассеяния пиона на связанном нуклоне ядра. Оператор \hat{A} в (9) отвечает за антисимметризацию волновых функций ядра в промежуточных состояниях. Исключая потенциалы v_i из уравнений (7) и (9), можно получить следующее разложение T -матрицы по степеням (кратностям столкновений) t -матрицы:

$$T(E) = \sum_i \tau_i(E) + \sum_{i \neq j} \tau_i(E) G \hat{A} \tau_j(E) + \dots, \quad (10)$$

известное как ряд Ватсона [8].

Оптическая модель. Существуют два эквивалентных при точном решении задачи варианта метода оптического потенциала: формулировка Ватсона (W) [8] и формулировка Кермана — Макмануса — Талера (КМТ) [9]. Подробное обсуждение разницы данных подходов можно найти в [1, 5, 14, 57].

Уравнение для T -матрицы упругого пион-ядерного рассеяния в W - и КМТ-методах можно записать [58] следующим образом:

$$T'(E) = U(E) + U(E) \hat{P} G(E) T'(E), \quad (11)$$

где $T' = (A - S) T/A$; $\hat{P} = |0\rangle \langle 0|$ — оператор проектирования на основное состояние ядра; $G(E)$ — функция Грина (8), а параметр $S = 0$ отвечает формулировке W , а $S = 1$ — КМТ.

Оптический потенциал $U(E)$ подчиняется уравнению:

$$U(E) = (A - S) \tau(E) + (A - 1) \tau(E) G(E) \hat{Q} U(E). \quad (12)$$

Здесь $\hat{Q} = \hat{A} - \hat{P}$ — оператор проектирования на возбужденные состояния ядра, оператор τ определяется уравнением (9), где для $S = 0$ (W -формулировка) следует заменить \hat{A} оператор \hat{Q} . При записи уравнений (11) и (12) предполагается, что все операторы определены на пространстве антисимметричных ядерных состояний.

Оптический потенциал первого порядка. Оптическим потенциалом первого порядка называют линейное по t -матрице приближение:

$$U^{(1)}(E) = (A - S) \tau(E). \quad (13)$$

Оба подхода (W и КМТ) в этом приближении, как видно из (11) и (12), эквивалентны, если t -матрица является точным решением уравнения (9). При обычно используемом импульсном приближении:

$$\tau(E) \simeq t(\omega), \quad (14)$$

где $t(\omega)$ — свободная πN -матрица рассеяния, эквивалентность теряется и различие между W и КМТ можно рассматривать как указание на важность эффектов второго порядка.

Более точно τ -матрица выражается через парную t -матрицу рассеяния следующим образом:

$$\tau(E) = t(\omega) + t(\omega) [\hat{Q}G(E) - g(\omega)] \tau(E) + St(\omega) \hat{P}G(E) \tau(E). \quad (15)$$

Здесь $g(\omega)$ — двухчастичная функция Грина, S различает W - и КМТ-подходы, а ω — энергия пион-нуклонного столкновения, которую обычно считают параметром теории, выбирая ее из тех или иных физических или математических соображений.

Существуют разные возможности выбора величины ω . Наиболее естественным по самому смыслу импульсного приближения является так называемый двухчастичный вариант:

$$\omega = \omega_\pi(k) + E_N(p_i), \quad (16)$$

где k — импульс налетающего пиона, а p_i — импульс нуклона ядра. В этом случае матрица становится наполовину энергетической, а уравнение (15) приобретает следующий вид [59] ($S = 1$):

$$\tau(E) = \sum_s \hat{p}_s [t(\omega_s) + t(\omega_s) (G(E) - g(\omega_s)) \tau(E)], \quad (17)$$

где $\hat{p}_s = |\chi_s\rangle \langle \chi_s|$ — оператор проектирования на определенное состояние свободного гамильтониана $H_0 = K_\pi + K_A$, K_A — оператор кинетической энергии нуклонов.

В импульсном приближении потенциал первого порядка имеет вид [52]

$$\langle \mathbf{k}' | U^{(1)}(E) | \mathbf{k} \rangle = (A - S) \rho_{00}(\mathbf{q}) \int d\mathbf{p} F_{00}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \times \\ \times \langle \mathbf{k}', \mathbf{p} + \mathbf{p}_0 - \mathbf{q} | t(\omega_0) | \mathbf{k}, \mathbf{p} + \mathbf{p}_0 \rangle, \quad (18)$$

где $\mathbf{p}_0 = -\mathbf{k}/A + \mathbf{q}(A-1)/2A$; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$; \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы пиона до и после рассеяния; ρ_{00} — формфактор ядра, параметры которого берутся из данных по рассеянию электронов; F_{00} — одночастичная плотность $\sum_\alpha \varphi_\alpha^2(p)$; φ_α — одночастичная волновая функция,

ω_0 — энергия столкновения пиона с импульсом \mathbf{k} и нуклона с импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{p}_0$. Это выражение получено в приближении факторизации и достаточно строго обосновано лишь для волновой функции гауссова вида $\varphi_\alpha \sim \exp(-\alpha p^2)$. Усреднением парной t -матрицы πN -рассеяния в (18) с помощью одночастичной плотности учитывается ферми-движение нуклонов ядра.

Угловое преобразование. Конечная цель состоит в выражении оптического потенциала через фазы πN -рассеяния. Для этого нужно парную t -матрицу рассеяния в (18), определенную в с. ц. м. пион-ядро выразить через парную t -матрицу в с. ц. м. пион-нуклон. В достаточно общем виде данное преобразование можно записать в виде

$$\langle \mathbf{k}', \mathbf{p}' | t(\omega) | \mathbf{k}, \mathbf{p} \rangle = \gamma \langle \mathbf{k}' | \tilde{t}(\tilde{\omega}) | \mathbf{k} \rangle. \quad (19)$$

В нерелятивистском случае фактор $\gamma = 1$, а импульсы κ и κ' пиона в с. ц. м. пион-нуклон выражаются через соответствующие в с. ц. м. пион-ядро известным образом:

$$\kappa = \bar{\mu} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu} - \frac{\mathbf{p}}{M} \right), \quad \kappa' = \bar{\mu} \left(\frac{\mathbf{k}'}{\mu} - \frac{\mathbf{p}'}{M} \right),$$

где μ и M — массы пиона и нуклона, а $\bar{\mu}$ — их приведенная масса. Угол рассеяния в с. ц. м. пион-нуклон выражается через угол рассеяния в с. ц. м. пион-ядро из условия инвариантности переданного импульса $q^2 = (\mathbf{k}' - \mathbf{k})^2 = (\kappa - \kappa')^2$.

В случае пион-ядерного рассеяния даже в области низких энергий пион нельзя рассматривать как нерелятивистский, поскольку его кинетическая энергия сравнима с массой при $T_\pi \sim 50$ МэВ. Для этого в [52] было предложено простое обобщение преобразования Лоренца для t -матрицы рассеяния (см. [8]) на внеэнергетический случай, где фактор γ брали в виде

$$\gamma = [\omega_\pi(\kappa)(\omega_\pi(\kappa')E_N(\kappa)E_N(\kappa')) / (\omega_\pi(k)\omega_\pi(k')E_N(p)E_N(p'))], \quad (20)$$

где ω_π и E_N — полные энергии пиона и нуклона, а связь углов рассеяния определялась из условия инвариантности четырехмерного переданного импульса $t = (k' - k)^2 = (\kappa' - \kappa)^2$, т. е.

$$\kappa\kappa' = \omega_\pi(\kappa)\omega_\pi(\kappa') - \omega_\pi(k)\omega_\pi(k') + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'. \quad (21)$$

Следует иметь в виду приближенный характер данного преобразования. Во-первых, передача t является инвариантом лишь в случае, если в процессе рассеяния сохраняется полный 4-импульс πN -подсистемы. Более корректно нужно проводить преобразование Лоренца [61, 63]

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= Q - [(Q \cdot K) / (K_0 (K_0 + \sqrt{s}))] K; \\ 2Q &= K - P - [(\mu^2 - M^2) / s] K; \\ K &= (K_0, \mathbf{K}) = (\omega_\pi(\mathbf{k}) + E_N(p), \mathbf{k} + \mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

отдельно для начального и конечного состояний. Здесь $s = (k + p)^2$; k и p — 4-импульсы: $k = (\omega_\pi, \mathbf{k})$, $p = (E_N, \mathbf{p})$. Выражение для конечного импульса κ' получается простой заменой: $k \rightarrow k'$, $p \rightarrow p'$ и s на $s' = (k' + p')^2$. Однако, как показано в [3], в реальных расчетах преобразования (21) и (22) приводят к одинаковым численным результатам. Во-вторых, преобразование (19) для t -матрицы рассеяния вне энергетической поверхности не сводится просто к фактору γ (см. [63], а также разд. 2.3 в [5]). Оно имеет более сложную форму, отличаясь как дополнительным кинематическим фактором, так и дополнительным интегральным членом, имеющим динамическое происхождение (для внеэнергетического продолжения нужно использовать уравнение для t -матрицы). Таким образом, формулы (19) — (21) следует рассматривать лишь как некоторое приближение, достаточно корректное в нерелятивистском по нуклону пределе. Учет

углового преобразования очень важен даже в области низких энергий. Оно существенно увеличивает s -волновое отталкивание за счет вклада от P_{33} -волны.

Резюмируя, можно сказать, что техника расчета потенциала первого порядка достаточно хорошо отработана в оптической модели в p -пространстве.

В области низких энергий потенциал первого порядка, как и потенциал Кисслингера (см. разд. 2), не описывает удовлетворительно данные рассеяния. Возникает проблема учета эффектов второго порядка, таких как поправки к импульсному приближению (поправка на энергию связи нуклона в ядре), поправки к когерентному рассеянию [учет второго члена в уравнении (12) для оптического потенциала] и др.

Трехчастичная модель π - A -взаимодействия. В [52] для более корректного учета энергии связи нуклона в ядре была рассмотрена трехчастичная модель, где столкновение пиона с нуклоном ядра происходит в некотором среднем поле, образуемом остальными ($A-1$)-нуклонами (кор.). Такое обобщение теории многократного рассеяния было предложено впервые в [60]. Как в любой задаче трех тел, здесь возникает проблема отделения несвязных диаграмм, которым соответствуют свободная t_j^π -матрица πN -рассеяния и t_j^c -матрица рассеяния j -нуклона на одночастичном потенциале U_j^c .

Для оптического потенциала первого порядка в данной схеме получается выражение вида:

$$U^{(1)} = (A - i1) \frac{1}{A} \sum_j \tau_c^j. \quad (23)$$

Здесь τ_c — решение уравнений Фаддеева:

$$\left. \begin{aligned} \tau_c^j &= t_j^\pi + t_j^\pi G_0^j \hat{\tau}_c^j; \\ \hat{\tau}_c^j &= t_j^c G_0^j \tau_c^j, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $G_0^j = (E + id - K_\pi - K_j - K_c - H_c)^{-1}$ — функция Грина; K_π , K_j и K_c — операторы кинетической энергии соответственно пиона, нуклона и кора, описываемого гамильтонианом H_c , а $\hat{\tau}_c^j$ — вспомогательный оператор.

Конечно, решит уравнения Фаддеева, рассчитать с ними потенциал, с которым потом решить уравнение Липпмана — Швингера для получения искомой амплитуды рассеяния — задача технически чрезвычайно сложная.

Поэтому в [52] был взят лишь первый член в (24), но сделан выбор энергии столкновения свободной πN -амплитуды в соответствии с трехчастичной природой модели, т. е.

$$\omega_3 = \omega_\pi(k) + k^2/2M_A - |B| - (p + p_0 + k)^2/2\bar{M} + M, \quad (25)$$

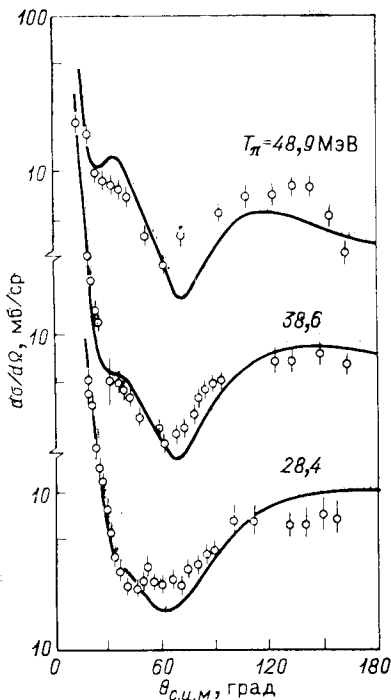


Рис. 6. Дифференциальные сечения упругого $\pi^+ - {}^{12}\text{C}$ -рассеяния:

данные — из [21]; сплошные кривые — расчет по оптической модели с трехчастичным выбором энергий πN -подсистемы (25) и с учетом канала поглощения. Рисунок взят из [21]

где импульс p_0 определен в (18). Здесь нуклоны рассматриваются нерелятивистскими: M_A — масса ядра, а \bar{M} — приведенная масса πN -системы и кора. Член $|B|$ соответствует энергии связи нуклона. Более ясно разница между ω_3 и ω_2 (16) видна, если сравнить их в пределе $A \gg 1$ и $k \sim 0$:

$$\omega_3 = \omega_2 - |B| - p^2/2M,$$

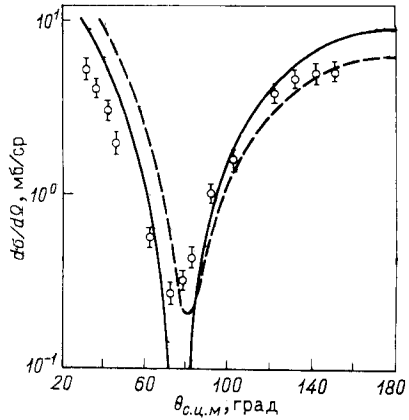
т. е. энергия столкновения парной πN -системы сдвигается по сравнению с ω_2 на энергию связи и кинетическую энергию нуклона, т. е. почти на 25 МэВ для легких ядер, где $\langle p^2 | 2M \rangle \sim 20$ МэВ, а $|B| \sim 5$ МэВ. Это приводит к очень сильному уменьшению сечения при

энергиях $T_\pi \leq 70$ МэВ. Поэтому, ссылаясь на важную роль эффектов перерассеяния пиона, которые в данной работе не учитываются, авторы рассматривают $|B|$ как свободный параметр теории. Это неудовлетворительно с точки зрения условия унитарности, поскольку величина $|B|$ определяет правильное пороговое поведение оптического потенциала, задавая верхний предел области изменения энергии $\omega_3 = (-\infty, T_\pi - |B|)$, т. е. при $T_\pi < |B|$ потенциал эрмитов. Даже при $|B| \sim 0$ сдвиг энергии остается большим, около 20 МэВ. Компенсация его проводится введением коррекций, возникающих из-за паули-блокировки и поглощения (см. ниже). В результате авторы получают весьма хорошее описание данных по рассеянию при низких энергиях (см., например, рис. 6). Следует, однако, отметить крайнюю чувствительность данных расчетов к балансу различных коррекций, а также наличие свободного параметра $|B|$ в теории.

В серии работ [64] развивается ковариантная оптическая модель для описания упругого пион-ядерного рассеяния, основанная на релятивистском варианте теории многократного рассеяния. В данном подходе достаточно детально изучен лишь первый порядок теории (треугольная диаграмма) для оптического потенциала. Учет эффектов

Рис. 7. Дифференциальное сечение $\pi^- - {}^4\text{He}$ -рассеяния при 51 МэВ:

данные — из [31]; кривые — расчеты по оптической модели (без учета поглощения): сплошная — потенциал первого порядка; пунктир — потенциал второго порядка ($U^{(1)} + U^{(2)}$). Рисунок взят из [58]



второго порядка проводится феноменологически введением поправки к потенциалу, параметры которой определяются подгонкой данных. В своей практической реализации этот подход весьма близок к трехчастичной модели, изложенной выше.

Потенциал второго порядка.

Микроскопических расчетов поправок второго порядка очень мало [58, 65], что объясняется трудоемкостью таких расчетов. В основном эффекты второго порядка иллюстрируются на примере $\pi^- - {}^3,4\text{He}$ -рассеяния. Общая структура потенциала второго порядка в импульсном приближении и приближении полноты имеет вид

$$\begin{aligned} & (2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | U^{(11)}(E) | \mathbf{k} \rangle = \\ & = \int \frac{d\mathbf{k}''}{E - E(\mathbf{k}'') + i\delta} \langle \mathbf{x}' | t^1 | \mathbf{x}'' \rangle \langle \mathbf{x}'' | t^2 | \mathbf{x} \rangle \times \\ & \times [(A - 1)(A - S) C_{00}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) - \\ & - (A - S)^2 \rho_{00}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \rho_{00}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k})], \end{aligned} \tag{26}$$

где индексы 1 и 2 t -матриц относятся к спин-изоспиновым частям этих операторов, усреднение которых по ядерным волновым функциям подразумевается в данном выражении; \mathbf{k}, \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' — импульсы пиона в с. ц. м. пион-ядро, а \mathbf{x}, \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' — в с. ц. м. пион-нуклон. Величина $C_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ — двухчастичная корреляционная функция, а $\rho_{00}(\mathbf{q})$ — формфактор ядра.

Выражение (26) для потенциала второго порядка получается в результате учета поправки к импульсному приближению [второй член в уравнении (15)] и к приближению когерентности [второй член в уравнении (12)]. В [58] показано, что обе поправки в значительной степени сокращают друг друга. Эффект потенциала второго порядка на дифференциальное сечение $\pi^- - {}^4\text{He}$ -рассеяния при 51 МэВ показан на рис. 7, т. е. является большим. Показано, что разница во вкладе потенциала второго порядка в W - и КМТ-формулировках растёт с уменьшением энергии, уменьшая вместе с тем довольно сильное различие данных формулировок в первом порядке теории. Результаты, полученные в работах [58, 65], согласуются качественно между собой. В количественном отношении их расхождение во вкладе потен-

циала второго порядка обусловлено в основном выбором энергии пион-нуклонной t -матрицы рассеяния. В [65] использовался двухчастичный вариант (16), а в [58] — выражение вида

$$\omega = E - \frac{1}{8M} \frac{\bar{\mu}}{M} \frac{A-1}{A} (\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2, \quad (27)$$

где E — полная энергия столкновения, а $\bar{\mu}$ и M — приведенные массы πN - и πA -систем. Оно является галилеево-инвариантным и эффективно понижает двухчастичную энергию на 3—10 МэВ по сравнению с двухчастичным выбором. Заметим, что выражение (27) не обеспечивает правильного порогового поведения оптического потенциала.

Об учете канала поглощения пиона. Основной трудностью теории пион-ядерного взаимодействия является описание канала поглощения пиона в ядерной среде. Лишь в последнее время достигнуты

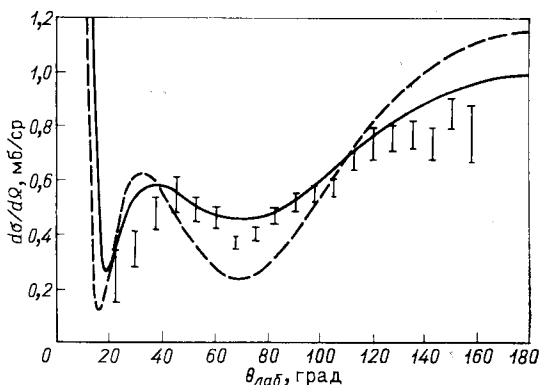


Рис. 8. Дифференциальное сечение π^+ — d -рассеяния при 47,7 МэВ:

данные из [33]; расчет по уравнению Фаддеева: пунктир — без учета канала поглощения, сплошная кривая — полный расчет. Рисунок взят из [11]

определенные результаты в этом направлении. Наиболее полный анализ проведен пока лишь для π — d -рассеяния, с использованием обобщенных уравнений Фаддеева на случай с несохраняющимся числом частиц [10—12]. Влияние канала поглощения на упругое π — d -рассеяние при $T = 47,7$ МэВ иллюстрирует рис. 8. Обобщение формализма [10] на общий случай пион-ядерного рассеяния было проведено в [66]. Систематическое изложение метода оптического потенциала с учетом канала поглощения дано в [5].

Выражение для T -матрицы пион-ядерного рассеяния в этом случае имеет вид

$$T_{\pi A} = T_{\pi A}^{\text{пот}} + T_{\pi A}^{\text{погл}}, \quad T_{\pi A}^{\text{погл}} = \Omega_{\pi A}^{(-)} \Gamma_{10} g_A \Gamma_{01} \Omega_{\pi A}^{(+)} \quad (28)$$

где Γ_{10} и Γ_{01} — многочастичные вершинные операторы, определяющие поглощение и рождение пиона в ядерной системе; g_A — полная функция Грина системы взаимодействующих нуклонов. Диаграммное представление данных операторов можно найти в [5, 66]; $T_{\pi A}^{\text{пот}}$ — матрица рассеяния, описывающая чисто потенциальное взаимодей-

ствие, т. е. все процессы, сохраняющие пион в промежуточных состояниях, а $\Omega_{\pi A}^{(-)}$ и $\Omega_{\pi A}^{(+)}$ — операторы Меллера (см. [8]), описывающие искажение пионной волны потенциальным взаимодействием. При расчете потенциальных величин $T_{\pi A}^{\text{пот}}$, $\Omega_{\pi A}^{(+)}$ следует во избежание двойного счета провести вычитание полусотой части в p_{11} -волне πN -взаимодействия, поскольку именно этот член формируется элементарной (πN , N)-вершинной функцией, уже включенной в определение вершинных операторов Γ_{10} и Γ_{01} .

Оптический потенциал при наличии канала поглощения имеет [5, 66] вид

$$\left. \begin{aligned} U_0(E) &= U_0^{\text{пот}}(E) + U_0^{\text{погл}}(E); \\ U_0^{\text{погл}}(E) &= \hat{P}K(E)(1 + g(E)K(E))^{-1}\hat{P}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$K(E) = \Omega_{\pi A}^{(-)}\hat{Q}\Gamma_{10}g_A(E)\Delta_{01}\hat{Q}\Omega_{\pi A}^{(+)};$$

операторы \hat{P} и \hat{Q} осуществляют проектирование соответственно на основное и возбужденные состояния ядра, а $g(E)$ и $g_A(E)$ — полные функции Грина для пион-ядерной и нуклонной систем.

В настоящее время отсутствуют микроскопические расчеты оптического потенциала, реализующие приведенную выше строгую формулировку. Учет канала поглощения проводится обычно феноменологически с помощью дополнительного члена к оптическому потенциалу, рассчитанному в рамках теории многократного рассеяния, как это было описано выше. Параметры поправки на поглощение для описания низкоэнергетического пион-ядерного рассеяния берутся из подгонки по π -атомным данным. Выражение для поправки на поглощение в предположении двухчастичного механизма поглощения имеет вид

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 U_0^{\text{погл}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; E) &= -\frac{2\pi}{M} A(A-1) \left\{ B_0(E) \frac{g_0(k)g_0(k')}{g_0^2(k_0)} + \right. \\ &\left. + C_0(E) \frac{g_1(k)g_1(k')}{g_1^2(k)} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \right\} \hat{\rho}^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (30)$$

где B_0 и C_0 — подгоночные параметры, имеющие тот же смысл, что и в оптическом потенциале (1); $\hat{\rho}^2(q)$ — фурье-компонента квадрата ядерной плотности $\rho^2(r)$, а $g_{0,1}$ — формфакторы, отвечающие за сход с энергетической поверхности, импульс k_0 отвечает рассеянию на энергетической поверхности, параметры данных формфакторов берутся теми же, что и для случая внеэнергетической t -матрицы пион-нуклонного рассеяния в модели с сепарабельным взаимодействием [см. (31)].

Канал поглощения сильно влияет на упругое пион-ядерное рассеяние, и его учет с помощью (30) существенно улучшает описание экспериментальных данных (см. [52, 58, 83], а также рис. 6 и 11). Следует, однако, иметь в виду определенную непоследовательность

существующих расчетов. Например в работах [52, 58] потенциальная часть пион-ядерного взаимодействия рассчитывалась с разными формами оптического потенциала. Поэтому для определения параметров поправки на поглощение следует вначале рассчитать длины и объемы пион-ядерного рассеяния, а затем, используя полученные значения, провести подгонку по π -атомным данным. Используемые в [52, 58] значения параметров B_0 и C_0 таким образом не согласованы.

Внеэнергетические эффекты. Как уже отмечалось выше (разд. 2), оптические потенциалы кислингеровского типа (1) отвечают предположению о нулевом радиусе πN -взаимодействия. В [54] с помощью сепарабельной модели πN -взаимодействия было показано, что такое предположение является весьма грубым и учет конечности радиуса πN -взаимодействия существенно влияет на результаты расчетов.

Радиус πN -взаимодействия ($r_{\pi N}$) определяет внеэнергетическое поведение матрицы рассеяния. Наиболее ясно это видно в модели с сепарабельным взаимодействием, где внеэнергетическая t -матрица выражается через t -матрицу рассеяния следующим простым соотношением:

$$t_{\alpha}(k', k; E(k_0)) = t_{\alpha}(k_0, k_0; E(k_0)) g_{\alpha}(k) g_{\alpha}(k') / g_{\alpha}^2(k_0). \quad (31)$$

Величина $\alpha \equiv (l, j, I)$ определяет парциальную волну πN -системы; l — орбитальный момент, j — полный, а I — изоспин. Формфакторы g_{α} задают πN -потенциал

$$v_{\alpha}(k', k) = \sigma_{\alpha} g_{\alpha}(k') g_{\alpha}(k)$$

и определяются подгонкой по данным фазового анализа πN -рассеяния. Их спадание в r -или p -пространствах дает нам оценку радиуса πN -взаимодействия. Обзор конкретных выражений для формфакторов $g_{\alpha}(k)$, ссылки на отдельные работы можно найти в [3]. В таких потенциальных моделях для $r_{\pi N}$ получено значение $r_{\pi N} \approx 0,6 \div 0,8$ фм, т. е. сравнимое со средним межнуклонным расстоянием и радиусом короткодействующих двухнуклонных корреляций ($r_c \sim 0,5$ фм). Более детальный анализ радиуса πN -взаимодействия дает [55]: $0,25 \leq r_{\pi N} \leq 0,5$ фм.

Учет конечности радиуса πN -взаимодействия приводит (подробное обсуждение см. в [1]) к существенному подавлению LL -эффекта, делая его практически ненаблюдаемым при анализе π -атомных данных. Поэтому в расчетах пион-ядерных наблюдаемых с использованием реалистических моделей для внеэнергетической πN -амплитуды короткодействующими корреляциями, приводящими к эффектам типа Лоренца — Лоренца, пренебрегают. Поскольку радиус πN -взаимодействия сравним с радиусом короткодействующих корреляций r_c , в области низких энергий ($T \leq 80$ МэВ) следует ожидать слабую чувствительность к определенному значению $r_{\pi N}$, что подтверждается численными расчетами [54].

В данном разделе мы рассмотрели работы, имеющие конкретные результаты по описанию экспериментальных данных по упругому

пион-ядерному рассеянию. Из изложенного видно, что, несмотря на значительный прогресс в понимании динамики пион-ядерного взаимодействия, в конкретных приложениях теории имеются трудности. В описании взаимодействия пионов низкой энергии с ядрами оказываются существенными эффекты второго порядка по отношению к низшему, достаточно хорошо изученному оптическому потенциалу первого порядка. Многие из них в значительной мере компенсируют друг друга, что приводит к большой чувствительности расчетов к различным приближениям, используемым в расчетах. Не решена также проблема согласования оптического потенциала с условием унитарности, т. е. с требованием, чтобы оптический потенциал имел правильное пороговое поведение в пределе низких энергий.

Большая часть расчетов в оптической модели проведена в КМТ-формализме [9]. Анализ общего условия унитарности показывает [5, 14, 57], что в этой формулировке, в отличие от формулировки Ватсона [8], вклад упругого канала в соотношении унитарности не отделен от вклада неупругих процессов. Поэтому в КМТ-подходе при приближенном решении задачи трудно определить, какие каналы отвечают за формирование мнимой части оптического потенциала. Таким образом, для описания пион-ядерного взаимодействия формулировка Ватсона предпочтительна. Это важно для последовательного учета канала с истинным поглощением пиона. Проблема микроскопического расчета поправки на поглощение в соответствии с программой, определяемой уравнениями (28) и (29), еще ждет своего решения.

4. УНИТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПИОН-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

В случаях, когда низшее приближение теории оказывается недостаточным и в полной мере встает проблема учета высших поправок, весьма полезными с практической точки зрения оказываются методы, с самого начала согласованные с условием унитарности. Метод унитаризации с успехом применяется для описания нуклон-ядерного рассеяния при низких энергиях (см. обзор [67].) На рис. 9 на примере nd -рассеяния при 14 МэВ показан результат [68] унитаризации импульсного приближения (ИП) в рамках R -матричного подхода. Таким образом, в унитарной схеме уже в низшем порядке теории можно получить количественное описание. Механизм унитаризации состоит в эффективном учете высших поправок — так называемых фоновых диаграмм, особенности которых лежат существенно дальше ближайших особенностей (по энергии и углу рассеяния) низших основных диаграмм.

Аналогичная ситуация имеет место и в задаче пион-ядерного рассеяния при низких энергиях, правда, в более слабом варианте из-за относительной слабости πN -взаимодействия. Действительно, тот факт, что оптический потенциал первого порядка (см., например, рис. 7), несмотря на сильное количественное расхождение, качественно пра-

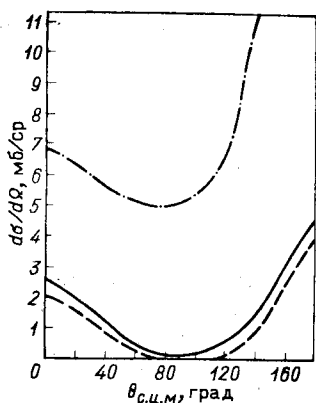


Рис. 9. Дифференциальное сечение nd -рассеяния при 14 МэВ:

сплошная кривая — точный расчет по уравнениям Фаддеева, штрихпунктир — импульсное приближение (ИП); пунктир — унитаризованное ИП. Рисунок взят из [68]

переменным. Эффекты перерассеяния пиона отвечают более сложным диаграммам, особенности которых лежат существенно дальше. Поэтому можно ожидать, что применение метода унитаризации существенно улучшит сходимость теории.

Согласование теории с условием унитарности приобретает особое значение в случае пион-ядерного взаимодействия из-за наличия канала поглощения пиона. Лишь в рамках такой схемы можно получить правильное представление о его влиянии на другие каналы реакции.

Метод эволюции по константе связи (ЭКС-метод). Возможность построения простой и изящной унитарной теории многократного рассеяния дает нам ЭКС-метод, в основе которого лежит закон эволюции системы с изменением константы связи. Характерной особенностью этого метода является то, что здесь итерационная схема строится непосредственно для расчета парциальных фазовых сдвигов рассеяния частицы на составной системе. ЭКС-метод как самостоятельный подход был сформулирован Д. А. Киржницем в 1965 г. [20]. Ясное и четкое изложение сути этого метода можно найти в [69, 70], где рассмотрены, в частности, некоторые его приложения к задачам квантовой теории поля. Ниже мы сосредоточимся на нерелятивистском варианте данного метода.

Приведем основные уравнения ЭКС-метода, относящиеся к случаю, когда имеется лишь один тип взаимодействия (см. [70]). Гамильтониан системы в этом случае имеет вид

$$H = H_0 + gV, \quad (32)$$

где H_0 — свободный гамильтониан; gV — взаимодействие, а g — константа связи. Собственные функции гамильтониана H будем обозначать $|\mu\rangle$, $|\nu\rangle$ и т. д., а взятые по ним матричные элементы потенциала взаимодействия — $V_{\mu\nu}$ и т. д. Система уравнений для S -матрицы рассеяния из состояния $|\mu\rangle$ в $|\nu\rangle$ — $S_{\mu\nu}$ имеет следую-

щий вид:

$$\frac{d}{dg} S_{\mu\nu} = -2\pi i \sum_{\sigma} S_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \delta(E_{\mu} - E_{\sigma}), \quad E_{\mu} = E_{\nu}; \quad (33)$$

$$\frac{d}{dg} V_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} V_{\mu\sigma} V_{\sigma\nu} \left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\sigma} - i\delta} + \frac{1}{E_{\nu} - E_{\sigma} + i\delta} \right) \quad (34)$$

с очевидными граничными условиями $S_{\mu\nu}(g=0) = 1$, $V_{\mu\nu}(g=0) = V_{\mu\nu}^{\text{борн}}$ — борновское приближение для матричного элемента.

Обратим особое внимание на матричные элементы $V_{\mu\nu}$. Эти величины занимают центральное место в ЭКС-методе, поскольку через них выражаются наблюдаемые, такие как фазы рассеяния и энергии связанных состояний. В частности, энергии связанных состояний определяются с помощью известного соотношения Хельмана — Фейнмана [72]

$$dE_{\mu}/dg = V_{\mu\mu}.$$

Существенно, что $V_{\mu\nu}$ — эрмитова матрица для эрмитова взаимодействия V . Следствием этого является унитарность S -матрицы. Поэтому любые итерационные схемы решения уравнений (34), сохраняющие эрмитовость $V_{\mu\nu}$, будут приводить к унитарной S -матрице в каждом последовательном приближении.

Рассмотрим простую задачу — упругое рассеяние двух частиц. В этом случае можно провести парциальное разложение в каждом канале $\alpha = (l, j, I)$ (l — орбитальный момент, j — полный момент, I — изоспин) всех величин в уравнениях (33) и (34):

$$S(k', k; g) = 4\pi \sum_{\alpha} Y_{\alpha}^*(\hat{\mathbf{k}}') Y_{\alpha}(\hat{\mathbf{k}}) S_{\alpha}(k, g), \quad k = k';$$

$$V(k', k; g) = 4\pi \sum_{\alpha} Y_{\alpha}^*(\hat{\mathbf{k}}') Y_{\alpha}(\hat{\mathbf{k}}) V_{\alpha}(k', k; g).$$

Здесь \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульс частиц до и после рассеяния в их с. ц. м. Полагая $S_{\alpha} = \exp(2i\delta_{\alpha})$, δ_{α} — парциальная фаза рассеяния, мы получаем важное соотношение для определения фаз рассеяния

$$\frac{d}{dg} \delta_{\alpha}(k, g) = -\pi \varepsilon(k) V_{\alpha}(k, k; g), \quad (35)$$

где $\varepsilon(k) = k^2/[2\pi^2 dE(k)/dk]$ — плотность состояний рассеяния; $E(k)$ — полная энергия столкновения двух частиц в с. ц. м.

Детально задача двух тел в ЭКС-методе рассмотрена в [70]. Существенно, что уравнение (34) решается точно для сепарабельного взаимодействия. Такой класс потенциалов широко используется в задачах ядерной физики, в частности, для описания πN -взаимодействия.

В [71] была исследована в рамках данного подхода проблема о взаимодействиях трех нуклонов с гамильтонианом (32), где потенциал V отвечает парным силам. Важным результатом этой работы

явилось полученное там разложение многочастичного матричного элемента $V_{\mu\nu}$ в ряд по степеням парных матричных элементов $v_{\mu\nu}^i$ (i — частица-спектатор). Этим результатом мы воспользуемся ниже при построении унитарной теории многократного рассеяния пиона на ядре. На примере nd -рассеяния в [71] была продемонстрирована быстрая сходимость данного разложения.

Пион-ядерное рассеяние: основные уравнения подхода. Здесь мы рассмотрим задачу об упругом рассеянии частицы на составной системе, отличающейся от частиц, образующих связанный комплекс. К такому случаю относится рассеяние пиона на ядре.

Предположим пока *, что пион-ядерное взаимодействие носит потенциальный характер, и запишем гамильтониан в виде [ср. с (6)]

$$H = K_{\pi} + H_A + \lambda V, \quad V = \sum_{i=1}^A v_{\pi N}^i, \quad (36)$$

где H_A — гамильтониан ядра; K_{π} — оператор кинетической энергии пиона; $v_{\pi N}^i$ — потенциал взаимодействия пиона с i -м нуклоном ядра, а λ играет роль константы связи πN -взаимодействия. Будем предполагать известным решение чисто ядерной задачи с гамильтонианом

$$h = K_{\pi} + H_A. \quad (37)$$

Рассмотрим эволюцию системы с изменением λ от 0 до реального значения $\lambda = 1$. Параметр λ здесь вводится формально и по окончании выкладок устремляют к единице. Центральную роль здесь играют матричные элементы $V_{\mu\nu} = \langle \mu | V | \nu \rangle$ потенциала взаимодействия $\sum_i v_{\pi N}^i$, взятые по собственным функциям $|\mu\rangle$, $|\nu\rangle$ и т. п. гамильтониана H (36). Через них в конечном счете выражаются пион-ядерные фазы рассеяния.

Удобно ввести собственные функции канального гамильтониана h : $|\psi_{\mu}\rangle$, $|\psi_{\nu}\rangle$ и т. п. В пространстве данных асимптотических, не зависящих от λ состояний, уравнение для S -матрицы рассеяния имеет вид [18]:

$$\frac{d}{d\lambda} S(E, \lambda) = -2\pi i S(E, \lambda) \delta(E - h) V(\lambda) \quad (38)$$

с граничным условием $S(E, \lambda = 0) = 1$. Соответственно для T -матрицы, определенной на энергетической поверхности соотношением

$$S = I + 2\pi i \delta(E - h) T,$$

получим уравнение:

$$\frac{d}{d\lambda} T(E, \lambda) = -V(\lambda) - 2\pi i T(E, \lambda) \delta(E - h) V(\lambda) \quad (39)$$

* Проблема учета канала поглощения пиона посвящен разд. 5.

с граничным условием $T(E, \lambda = 0) = 0$. Эрмитов оператор $V(\lambda)$ определен так, что

$$V_{\mu\nu} = \langle \mu | V | \nu \rangle \equiv \langle \Psi_\mu | V(\lambda) | \Psi_\nu \rangle. \quad (40)$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ оператор $V(\lambda)$ совпадает с потенциалом V .

Уравнения (38) и (39) допускают итерационное решение в виде ряда по степеням $V(\lambda)$. Компактно эти разложения можно представить в форме

$$S(E, \lambda) = T_\lambda \exp \left[-2\pi i \int_0^\lambda d\lambda_1 \delta(E - h) V(\lambda_1) \right];$$

$$T(E, \lambda) = -T_\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 V(\lambda_1) \exp \left[-2\pi i \int_{\lambda_1}^\lambda d\lambda_2 \delta(E - h) V(\lambda_2) \right], \quad (41)$$

где T_λ — оператор «антиупорядочения» [69] по переменной λ . Под знаком этого символа операторы располагаются в порядке возрастания их аргументов слева направо.

Метод оптического потенциала. Сосредоточимся на изучении упругого рассеяния. Введем более детальное обозначение для асимптотических пион-ядерных состояний: $|\psi\rangle \equiv |\mathbf{k}, n\rangle$, где \mathbf{k} — импульс пиона в с. ц. м. пион-ядро, а n обозначает квантовые числа состояний ядра ($n = 0$ соответствует основному состоянию). Упругому рассеянию отвечает переход из состояния $|\mathbf{k}, 0\rangle$ в $|\mathbf{k}', 0\rangle$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы пиона до и после рассеяния.

С помощью оператора проектирования $\hat{P} = |0\rangle\langle 0|$ на основное состояние определим подматрицу T_0 полной матрицы рассеяния T : $T_0 = \hat{P}T\hat{P}$, описывающую упругий канал реакции. Перестраивая с помощью операторов \hat{P} и $\hat{Q} = 1 - \hat{P}$ правую часть уравнения (39), можно получить следующее уравнение для T_0 -матрицы:

$$\frac{d}{d\lambda} T_0(E, \lambda) = -U_0(E, \lambda) - 2\pi i T_0(E, \lambda) \hat{P} \delta(E - h) U_0(E, \lambda) \quad (42)$$

с граничным условием $T_0(E, \lambda = 0) = 0$. Эффективный, зависящий от энергии оператор $U_0(E, \lambda)$ определяется системой уравнений:

$$U_0(E, \lambda) = V(\lambda) + 2\pi i \mathcal{K}(E, \lambda) \hat{Q} \delta(E - h) V(\lambda); \quad (43)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{K}(E, \lambda) = -U_0(E, \lambda) + 2\pi i U_0(E, \lambda) \hat{P} \delta(E - h) \mathcal{K}(E, \lambda) \quad (44)$$

с граничным условием для вспомогательного оператора \mathcal{K} : $\mathcal{K}(E, \lambda = 0) = 0$. Краткое доказательство эквивалентности уравнений (42) — (44) исходному (39) дано в приложении 1.

В матричной форме уравнение для T_0 -матрицы упругого рассеяния имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \langle \mathbf{k}', 0 | T_0(E, \lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle = & - \langle \mathbf{k}', 0 | U_0(E, \lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle - \\ & - 2\pi i \int \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{k}', 0 | T_0(E, \lambda) | \mathbf{k}'', 0 \rangle \delta(E - E_0(k'')) \times \\ & \times \langle \mathbf{k}'', 0 | U_0(E, \lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь $E = E_0(k) = \omega_\pi(k) + \omega_A(k)$ — энергия столкновения в с. ц. м. пион-ядро, отсчитываемая от основного состояния ядра;

$$\omega_\pi(k) = (\mu^2 + k^2)^{1/2}; \quad \omega_A(k) = (M_A^2 + k^2)^{1/2};$$

μ и M_A — соответственно массы пиона и ядра. Здесь и ниже релятивизм учитывается на кинематическом уровне.

Из уравнений (42) и (45) видно, что с помощью зависящего от энергии оператора $U_0(E, \lambda)$ сложная многоканальная задача свелась эффективно к двухчастичной проблеме (наличие оператора проектирования \hat{P} в правых частях уравнений). Таким образом, оператор $U_0(E, \lambda)$ играет в данном подходе роль оптического потенциала.

Путем парциального разложения величин, входящих в уравнение (45), легко получить (в полной аналогии с (35)) для парциальных фазовых сдвигов пион-ядерного рассеяния следующую простую формулу*:

$$\delta(k) = -\pi \varepsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \langle \mathbf{k}', 0 | U_0(E, \lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle. \quad (46)$$

Здесь $\varepsilon_A(k) = k^2/[2\pi^2 dE_0(k)/dk]$ — плотность уровней состояний рассеяния. В нерелятивистском случае $\varepsilon_A(k) = kM/2\pi^2$, где M — приведенная масса πA -системы.

Проблема нахождения пион-ядерных фаз рассеяния свелась к вычислению матричного элемента $\langle \mathbf{k}', 0 | U_0 | \mathbf{k}, 0 \rangle$. Из уравнения (43) видно, что оператор $U_0(E, \lambda)$ неэрмитов. Его неэрмитова часть отражает вклад неупругих каналов в упругий [наличие оператора \hat{Q} в правой части (43)]. В пределе низких энергий, когда энергия пиона меньше энергии первого возбужденного состояния ядра: $E_0(k) = E_1(k=0) < 0$, второй член в (43) исчезает. В этом пределе оператор $U_0 = V$ эрмитов, а T_0 — матрица рассеяния — унитарна [фазы рассеяния (46) вещественны]. Следовательно, условие двухчастичной унитарности в данном подходе выполняется автоматически.

* В соотношениях, подобных (46) и носящих общий характер, мы не указываем явно индексов момента, спина и т. п.

Итерационное решение уравнений для $U_0(E, \lambda)$. Система уравнений (43) и (44) может быть решена итерационным методом:

$$U_0^{(N)} = V + 2\pi i \mathcal{K}^{(N-1)} \hat{Q} \delta(E - h) V;$$

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{K}^{(N)} = -U_0^{(N)} + 2\pi i U_0^{(N)} \hat{P} \delta(E - h) \mathcal{K}^{(N-1)}, \quad (47)$$

где $N = 1, 2, 3 \dots$ — номер итерации, величины $\mathcal{K}^{(N)}$ и $U_0^{(N)}$ при $N \leq 0$ полагаются равными нулю. Такая схема дает разложение U_0 по степеням оператора V , первые два члена которого имеют вид:

$$U_0(E, \lambda) = V(\lambda) - 2\pi i \int_0^\lambda d\lambda_1 V(\lambda_1) \hat{Q} \delta(E - h) V(\lambda). \quad (48)$$

Соответственно для фазовых сдвигов (46) в этом приближении получаем:

$$\delta(k) = -\pi \varepsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda [\langle \mathbf{k}', 0 | V(\lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle - 2\pi i \int_0^\lambda d\lambda_1 \sum_{n>0} \times$$

$$\times \int \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{k}', 0 | V(\lambda_1) | \mathbf{k}'', n \rangle \delta(E_0(k) - E_n(k'')) \times$$

$$\times \langle \mathbf{k}'', n | V(\lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle], \quad (49)$$

где $E_n(k) = \omega_\pi(k) + \omega_A(k) + \varepsilon_n$, ε_n — энергия возбужденного состояния, отсчитываемая от основного состояния, т. е. $\varepsilon_n > 0$.

Ряд многократного рассеяния. В результате итерационного решения уравнения для $U_0(E, \lambda)$ мы получили разложение (49) для пион-ядерных фаз по степеням многочастичного эрмитова оператора $V(\lambda)$, определенного соотношением (40). Задача состоит в том, чтобы выразить эту величину в терминах двухчастичных матриц рассеяния $u^i(\lambda)$, отвечающих взаимодействию пиона с i -нуклоном ядра. Таким образом, в отличие от стандартной теории многократного рассеяния, где ряд строится для T -матрицы, здесь аналогичное разложение получается для оператора рассеяния $V(\lambda)$.

Искомое разложение было получено в [17]. Первые два члена ряда имеют вид:

$$V(\lambda) = V^{(1)}(\lambda) + V^{(2)}(\lambda), \quad V^{(2)} = V_1^{(2)} + V_2^{(2)}, \quad (50)$$

где

$$V^{(1)}(\lambda) = \sum_{i=1}^A u^i(\lambda); \quad (51)$$

$$V_1^{(2)}(\lambda) = \sum_{i \neq j=1}^A \int_0^\lambda d\lambda_1 \left[\sum_s \hat{P}_s u^i(\lambda_1) G_0^{(+)}(E_s) u^j(\lambda_1) + \text{в.с.} \right]; \quad (52)$$

$$V_2^{(2)}(\lambda) = \sum_{i, j=1}^A \int_0^\lambda d\lambda_1 \left\{ \left[\sum_s \hat{p}_s u^i(\lambda_1) G_0^{(+)}(E_s) u^j(\lambda) - \sum_\sigma \hat{p}_\sigma u^i(\lambda_1) G^{(+)}(E_\sigma) u^j(\lambda) \right] + \text{э.с.} \right\}. \quad (53)$$

Здесь $\hat{p}_s \equiv |\chi_s\rangle\langle\chi_s|$ и $\hat{p}_\sigma \equiv |\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma|$ — операторы проектирования на собственные состояния $|\chi_s\rangle$ и $|\psi_\sigma\rangle$ соответственно свободного $H_0 = K_\pi + K_A$ (K_A — оператор кинетической энергии нуклонов) и канального \hbar (37) гамильтонианов, а G_0 и G — функции Грина:

$$G_0^{(\pm)}(E) = (E \pm i\delta - H_0)^{-1} \text{ и } G^{(\pm)}(E) = (E \pm i\delta - \hbar)^{-1}. \quad (54)$$

Диаграммное представление данного разложения показано на рис. 10, где двойная линия означает ядро, тонкая сплошная линия — нуклон, толстая — ядро-остаток, штриховая — пион, черная вершина — взаимодействие, белая — волновую функцию ядра,

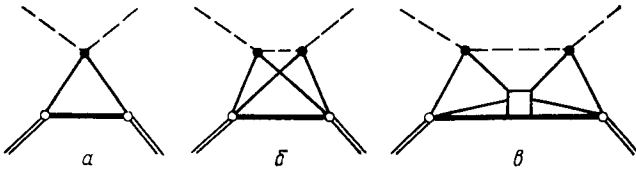


Рис. 10. Графический образ ряда многократного рассеяния (50)

а квадратик — перерассеяние нуклонов. Диаграмма рис. 10, а отвечает приближению первого порядка (51), а диаграммы рис. 10, б, в — перерассеянию пиона соответственно без взаимодействия (52) и с взаимодействием (53) нуклонов в промежуточных состояниях.

Парная $u^i(\lambda)$ -матрица рассеяния в (51) — (53) представляет собой матричный элемент от заданного двухчастичного потенциала v^i [см. (36)] по точным волновым функциям $\psi_{k,p}^{(+)}(\lambda)$ задачи рассеяния пиона на свободном нуклоне с гамильтонианом

$$H^i = K_\pi + K_N^i + \lambda v^i, \quad (55)$$

где K_N — оператор кинетической энергии нуклона, т. е.

$$\langle k', p' | u(\lambda) | k, p \rangle \equiv \langle \psi_{k',p'}^{(+)}(\lambda) | v | \psi_{k,p}^{(+)}(\lambda) \rangle. \quad (56)$$

Здесь k, p и k', p' — импульсы пиона и нуклона до и после столкновения. В с. ц. м. пион-нуклон данные матричные элементы определяют πN -фазы рассеяния посредством соотношения (35). В (51)–(53) u^i -матрица рассеяния действует в $(A + 1)$ -частичном пространстве, включая в себя δ -функции законов сохранения импульса, спина и т. п. всех нуклонов-спектаторов.

Структура полученного ряда аналогична ряду Ватсона (10). Существенно, что в каждом последовательном приближении оператор

$V(\lambda)$ эрмитов. Следовательно, условие двухчастичной унитарности в рассматриваемой итерационной схеме не нарушается.

Пион-ядерные фазы рассеяния. Подставив (50) в (49), для первых двух членов разложения фаз рассеяния по степеням парной u -матрицы получим следующие выражения:

$$\delta(k) = \delta^{(1)}(k) + \delta^{(2)}(k), \quad \delta^{(2)} = \delta_{\text{Re}}^{(2)} + i\delta_{\text{Im}}^{(2)}, \quad (57)$$

где $\delta^{(1)}$ — приближение первого порядка:

$$\delta^{(1)}(k) = -\pi\epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \langle \mathbf{k}', 0 | V^{(1)}(\lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle; \quad (58)$$

$\delta_{\text{Re}}^{(2)}$ — вещественная часть поправки второго порядка:

$$\delta_{\text{Re}}^{(2)}(k) = -\pi\epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \langle \mathbf{k}', 0 | V^{(2)}(\lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle, \quad (59)$$

а $\delta_{\text{Im}}^{(2)}$ — ее мнимая часть:

$$\delta_{\text{Im}}^{(2)}(k) = 2\pi^2\epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \langle \mathbf{k}', 0 | V^{(1)}(\lambda_1) \hat{Q} \delta(E - \hbar) V^{(1)}(\lambda) | \mathbf{k}, 0 \rangle. \quad (60)$$

Операторы $V^{(1)}, (2)$ определены в (51) — (53), а оператор \hat{Q} проектирует на возбужденные состояния ядра. Структура матричных элементов, входящих в (58) — (60), аналогична выражениям для оптического потенциала первого и второго порядков [см. (13), (14) и (26)]: Фактически отличие состоит в замене парной t -матрицы рассеяния на u -матрицу. Поэтому ниже в конкретных расчетах величин (58) — (60) мы будем использовать ряд приближений, уже отработанных в оптической модели (разд. 3).

Приближение первого порядка. В этом приближении, с учетом (58) и (51), пион-ядерные фазы рассеяния определяются следующим выражением:

$$\delta^{(1)}(k) = -\pi\epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \left\langle \mathbf{k}', 0 \left| \sum_{i=1}^A v^i(\lambda) \right| \mathbf{k}, 0 \right\rangle. \quad (61)$$

С помощью одночастичной функции перекрытия:

$$F_{00}^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1) = \int \prod_{i=2}^A \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{j=1}^A \mathbf{k}_j\right) \bar{\Psi}_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_A) \times \\ \times \Psi_0(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_A), \quad (62)$$

где Ψ_0 — волновая функция основного состояния ядра, $\delta^{(1)}(k)$ можно представить в виде:

$$\delta^{(1)}(k) = -A\pi\epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} F_{00}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}) \langle \mathbf{k}, \mathbf{p} | u^1(\lambda) | \mathbf{k}', \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle, \quad (63)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — переданный импульс. Кроме интегрирования по импульсам в (62) и (63) подразумевается также проведение суммирования по спин-изоспиновым переменным. Индекс u -матрицы рассеяния 1 относится к спин-изоспиновой части этого оператора.

Чтобы лучше понять структуру выражений, получающихся в данном подходе, полезно вычислить (63) в статическом пределе теории, т. е. при $\mu/M \rightarrow 0$, где μ — масса пиона, а M — нуклона. В этом пределе, как показано в [73], матричный элемент $\langle \mathbf{k}, 0 | \sum_i u^i | \mathbf{k}', 0 \rangle$ факторизуется и имеет вид:

$$\langle \mathbf{k}, 0 | \sum_{i=1}^A u^i(\lambda) | \mathbf{k}', 0 \rangle = A \rho_{00}(\mathbf{q}) \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k} | u^1(\lambda) | \mathbf{k}', -\mathbf{k}' \rangle, \quad (64)$$

где

$$\rho_{00}(\mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} F_{00}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}) = \langle 0 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} | 0 \rangle \quad (65)$$

— ядерный формфактор. Таким образом, для фаз рассеяния получаем:

$$\delta^{(1)}(k) = -\pi A \varepsilon_A(k) \rho_{00}(\mathbf{q}) \int_0^1 d\lambda \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k} | u^1(\lambda) | \mathbf{k}', -\mathbf{k}' \rangle. \quad (66)$$

Парная u -матрица находится здесь на энергетической поверхности ($|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$), поэтому интегрирование по λ можно провести точно с помощью соотношения (35), предварительно разлагая матричный элемент по парциальным волнам. Приведем результат [73] для случая рассеяния пиона на ядре с полным изоспином, равным нулю:

$$\delta_L^{(1)}(k) = A \frac{\mathcal{M}}{\mu} \sum_{\substack{i, i' \\ j = i \pm \frac{1}{2}}} \left(j + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} L & l' & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \rho_{l'}(k) \frac{1}{3} (2\delta_{ij}^{3/2} + \delta_{ij}^{1/2}), \quad (67)$$

где \mathcal{M} и $\bar{\mu}$ — приведенные массы систем пион-ядро и пион-нуклон; $\rho_l(k)$ — парциальная гармоника ядерного формфактора:

$$\rho_{00}(q) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \rho_l(k) P_l(\hat{k}\hat{k}'),$$

а $\delta_{ij}^I(k)$ — πN -фаза рассеяния в канале $\alpha = (l, j, I)$ с определенным орбитальным (l), полным (j) моментами и изоспином ($I = 1/2, 3/2$).

Для длины рассеяния в этом приближении получаем

$$a_{\pi A}^{(1)} = \lim_{k \rightarrow 0} \delta^{(1)}(k)/k = A \frac{\mathcal{M}}{\mu} \frac{1}{3} (2a_3 + a_1), \quad (68)$$

где a_τ — s -волновые длины πN -рассеяния в изотопических состояниях, $\tau = 2I = 1$ и 3. Это выражение совпадает с первым порядком теории многократного рассеяния [1] в импульсном приближении.

Из (67) видно, что парциальные фазы пион-ядерного рассеяния варьируются через πN -фазовые сдвиги и ядерный формфактор. Это дает возможность полуфеноменологического анализа пион-ядерного рассеяния, использующего в качестве входных значений их экспериментально определенные значения и параметры.

При описании пион-ядерного рассеяния поправки к статическому приближению не малы. Важную роль играет p -волновое πN -взаимодействие. Поэтому необходимо учитывать ферми-движение нуклонов в ядре и угловое преобразование (см. разд. 3), возникающее при преобразовании парной u -матрицы рассеяния из с. ц. м. пион-нуклон в с. ц. м. пион-ядро. Поэтому в реальных расчетах мы используем приближение факторизации (см. разд. 3, потенциал первого порядка), в котором для $\delta^{(1)}(k)$ получается следующее выражение:

$$\delta^{(1)}(k) = -A\pi\varepsilon_A(k) \rho_{00}(\mathbf{q}) \int_0^1 d\lambda \bar{u}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \lambda), \quad (69)$$

где $\rho_{00}(\mathbf{q})$ — формфактор ядра (65), а \bar{u}^1 — усредненная по одночастичной плотности парная u -матрица рассеяния:

$$\bar{u}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \lambda) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} F_{00}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \langle \mathbf{k}, \mathbf{p} + \mathbf{p}_0 | u^1(\lambda) | \mathbf{k}', \mathbf{p} + \mathbf{p}_0 - \mathbf{q} \rangle. \quad (70)$$

Здесь $\mathbf{p}_0 = -\mathbf{k}/A + [(A-1)/2A]\mathbf{q}$, а $F_{00}^{(1)}$ определена в (62). Результат интегрирования по λ величины \bar{u}^1 и ее выражение через πN -фазы рассеяния мы приведем ниже (см. «парная u -матрица рассеяния»).

Результаты численных расчетов дифференциальных сечений рассеяния пионов на легких ядрах ${}^{14}\text{Ne}$ и ${}^{12}\text{C}$ в первом порядке теории показаны на рис. 11 и 12. Видно, что в рассматриваемом подходе в отличие от оптической модели уже в первом приближении получается удовлетворительное описание данных, что является следствием его согласованности с условием унитарности.

Эффекты второго порядка. Ограничиться приближением первого порядка (69) нельзя по двум причинам. Во-первых, в первом порядке теории фазы пион-ядерного рассеяния вещественны. Процессы с возбуждением ядра в промежуточных состояниях, отвечающие за возникновение мнимых частей у фазовых сдвигов (параметры неупругости), появляются лишь во втором порядке [см. (60)]. Во-вторых, необходимо учесть эффекты перерассеяния пиона, т. е. член (59), особенно в области низких энергий. Это обусловлено не медленной сходимостью метода, а известным изотопическим эффектом обращения почти в ноль изоскалярной длины πN -рассеяния

$$b_0 = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_3),$$

где a_{2l} — s -волновые длины πN -рассеяния. Например, в [74] для $a_{1,3}$ получены следующие значения: $a_1 = 0,170 \mu^{-1}$ и $a_3 = -0,092 \mu^{-1}$.

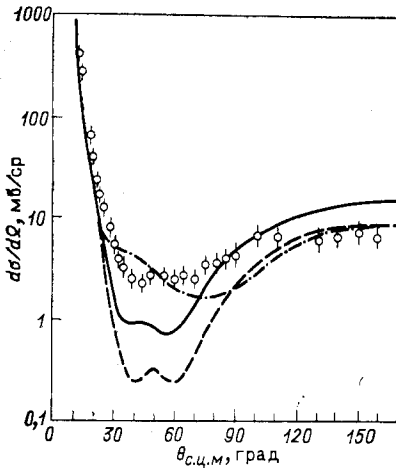


Рис. 11. Дифференциальное сечение π^+ — ^{12}C -рассеяния при 28,4 МэВ: данные — из [21]; сплошная кривая — приближение первого порядка ($\delta^{(1)}$) унитарного подхода, пунктир и штрихпунктир — расчеты [5] с оптическим потенциалом в трехчастичной модели (23) соответственно без учета канала поглощения и с его учетом

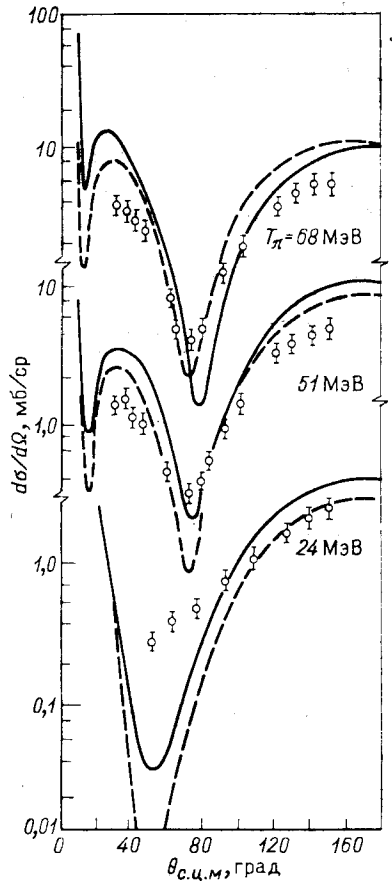


Рис. 12. Дифференциальные сечения π^+ — ^4He -рассеяния: данные — из [29, 31]; кривые — результаты потенциального расчета в унитарном подходе [19]: пунктир — приближение первого порядка ($\delta^{(1)}$); сплошные кривые — $\delta^{(1)} + \delta^{(2)}$

По этой причине длина рассеяния пиона на изоскалярном ядре (68) также очень мала. Учет второго порядка, как видно из табл. 3, в случае πd -рассеяния практически воспроизводит точный расчет [75] по уравнениям Фаддеева.

А. Вещественная часть поправки второго порядка (59) содержит два слагаемых: $\delta_{\text{Re}}^{(2)} = \delta_{\text{Re},1}^{(2)} + \delta_{\text{Re},2}^{(1)}$, где

$$\delta_{\text{Re},i}^{(2)}(k) = -\pi \epsilon_A(k) \int_0^1 d\lambda \langle \mathbf{k}, 0 | V_1^{(i)}(\lambda) | \mathbf{k}', 0 \rangle, \quad i = 1, 2. \quad (71)$$

Операторы $V_{1,2}^{(i)}$ определены в (52) и (53) и соответствуют диаграммам рис. 10, б, в.

Таблица 3. Длина πd -рассеяния, рассчитанная для различных наборов длин πN -рассеяния

Длина πN -рассеяния, фм			Длина πd -рассеяния, фм		
a_1	a_3	Литература	$a_{\pi d}^{(1)}$	$a_{\pi d}^{(1)} + a_{\pi d}^{(2)}$	$a_{\pi d}^{Фад}$
0,2573	-0,1541	[81]	-0,0365	-0,0725	-0,0746
0,2566	-0,1260	[84]	0,0032	-0,0284	-0,0309
0,2404	-0,1300	[74]	-0,0141	-0,0485	-0,0460

Примечание. Значения $a_{\pi d}^{Фад}$ взяты из [75]. Экспериментальное значение длины πd -рассеяния равно $-(0,073^{+0,031}_{-0,024})$ фм [80].

Как показано в [19], в приближении факторизации для величин $\delta_{Re,1}^{(2)}$ получается следующее выражение:

$$\delta_{Re,1}^{(2)}(k) = -A(A-1) \pi e_A(k) \int \frac{dk''}{(2\pi)^3} 2P \left(\frac{1}{E_0(k) - E_0(k'')} \right) \times \\ \times C_{00}(q', q'') \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \bar{u}^1(k, k''; \lambda_1) \bar{u}^2(k'', k'; \lambda_1), \quad (72)$$

где $q' = k - k''$; $q'' = k'' - k'$; P означает интегрирование в смысле главного значения; $\bar{u}^{1,2}$ — усредненные по одночастичной плотности матричные элементы от u -матрицы рассеяния (70), а

$$C_{00}(q, q') = \langle 0 | \exp(iq'r_1 + iq'r_2) | 0 \rangle \quad (73)$$

— двухчастичная корреляционная функция.

Рассмотрим теперь поправку $\delta_{Re,2}^{(2)}$. Она выражается через матричный элемент от $V_2^{(2)}$ (53). В [17] показано, что эта поправка строго обращается в нуль в статическом пределе теории, т. е. при $\mu/M \rightarrow 0$. Это обусловлено тем, что в таком пределе энергетические знаменатели функций Грина G и G_0 (54) не зависят от нуклонных переменных, причем $G = G_0 + O(\mu/M)$. Поэтому с учетом условия полноты волновых функций гамильтонианов h и H_0 получаем искомым результат. Из этого следует ожидать, что вклад от $\delta_{Re,2}^{(2)}$ будет составлять не более 20% величины $\delta_{Re,1}^{(2)}$. Оценку можно провести точнее, если воспользоваться приближением полноты при вычислении члена, пропорциональной G в (53), т. е. полагая $E_n(k'') = E_0(k'') + \Delta$, где E_n — собственное значение гамильтониана h , а Δ — некоторая средняя энергия возбуждения ядерной системы. В [65] (Вакамацу, 1978) путем численного расчета было показано на примере $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния, что вариация Δ от нуля до 20 МэВ меняет значение интеграла лишь на 10%. Поэтому мы будем полагать, что $\delta_{Re}^{(2)} \simeq \delta_{Re,1}^{(2)}$.

В. Мнимая часть поправки второго порядка $\delta_{\text{Im}}^{(2)}$ в соответствии с (60) имеет вид

$$\delta_{\text{Im}}^{(2)}(k) = 2\pi^2 \varepsilon_A(k) \sum_{n>0} \int \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \delta(E_0(k) - E_n(k'')) \times \\ \times \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \langle k, 0 | V^{(1)}(\lambda_1) | k'', n \rangle \langle k'', n | V^{(1)}(\lambda) | k', 0 \rangle, \quad (74)$$

где

$$V^{(1)} = \sum_i u^i; \quad E_0(k) = \omega_\pi(k) + \omega_A(k); \quad E_n(k'') = E_0(k'') + \varepsilon_n;$$

ε_n — энергия возбужденного состояния ядра, отсчитываемая от энергии основного состояния.

Матричные элементы в (74) аналогичны матричному элементу, возникающему в приближении первого порядка (61). Поэтому по аналогии с (69) в приближении факторизации они имеют вид:

$$\langle \mathbf{k}, 0 | \sum_{i=1}^A u^i(\lambda) | \mathbf{k}', n \rangle = A \rho_{0n}(\mathbf{q}') \bar{u}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; \lambda), \quad (75)$$

где $\rho_{0n}(\mathbf{q}') = \langle 0 | \exp(i\mathbf{q}'\mathbf{r}_1) | n \rangle$ — переходный формфактор; $\mathbf{q}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}''$, а \bar{u}^1 — усредненная по одночастичной плотности u -матрица (70). Подставив (75) в (74) и проинтегрировав в явном виде по $d\mathbf{k}''$ с учетом δ -функции, получим:

$$\delta_{\text{Im}}^{(2)}(k) = 2\pi^2 A^2 \varepsilon_A(k) \sum_{n>0} \varepsilon_A(k_n) \rho_{0n}(\mathbf{q}') \rho_{n0}(\mathbf{q}'') \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{n}''}{4\pi} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \bar{u}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; \lambda_1) \bar{u}^2(\mathbf{k}'', \mathbf{k}'; \lambda), \quad (76)$$

где $\mathbf{q}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}''$, $\mathbf{q}'' = \mathbf{k}'' - \mathbf{k}'$; $\mathbf{k}'' = k_n \mathbf{n}''$. Импульс пиона в промежуточном состоянии k_n определяется уравнением

$$E_0(k) - E_0(k_n) - \varepsilon_n = 0. \quad (77)$$

В нерелятивистском случае $\varepsilon_A(k_n) = \mathcal{M} k_n / 2\pi^2$, $k_n = \sqrt{k^2 - 2\mathcal{M} \varepsilon_n}$, где \mathcal{M} — приведенная масса системы пион-ядро. Таким образом, формула (76) дает правильное пороговое поведение амплитуды рассеяния, позволяя последовательно учитывать открывающиеся каналы с ростом энергии пиона.

Для оценки параметров неупругости $\eta = \exp(-2\delta_{\text{Im}})$ можно воспользоваться приближением полноты, полагая $E_n(k) = E_0(k) + \Delta$, где Δ — некоторая средняя энергия возбуждения ядерной системы. Тогда, интегрируя в явном виде по $d\mathbf{k}''$ и суммируя по проме-

жучточным состояниям с учетом тождества

$$\sum_{n>0} \rho_{0n}(\mathbf{q}') \rho_{n0}(\mathbf{q}'') = A^{-1} \rho_{00}(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'') + (1 - A^{-1}) C_{00}(\mathbf{q}', \mathbf{q}'') - \rho_{00}(\mathbf{q}') \rho_{00}(\mathbf{q}''),$$

получаем

$$\delta_{\text{Im}}^{(2)}(k) = 2A\pi^2 \varepsilon_A(k) \varepsilon_A(k_\Delta) \int \frac{d\mathbf{n}''}{4\pi} [\rho_{00}(\mathbf{q}) - A\rho_{00}(\mathbf{q}') \rho_{00}(\mathbf{q}'') + (A-1)C_{00}(\mathbf{q}', \mathbf{q}'')] \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \bar{u}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; \lambda_1) \bar{u}^2(\mathbf{k}'', \mathbf{k}'; \lambda), \quad (78)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — переданный импульс; $\mathbf{q}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}''$; $\mathbf{q}'' = \mathbf{k}'' - \mathbf{k}'$; $\mathbf{k}'' = k_\Delta \mathbf{n}''$; \mathbf{n}'' — единичный вектор, а импульс k_Δ определяется уравнением: $E_0(k) - E_0(k_\Delta) - \Delta = 0$.

В данном приближении в теорию входит параметр Δ , зависящий, вообще говоря, от энергии налетающего пиона. Из (76) и (77) следует, что при энергии пиона, недостаточной для возбуждения нижайшего (ε_1) состояния ядра, мнимая часть фазы должна обратиться в нуль. Поэтому в качестве первого приближения разумно выбрать $\Delta = \varepsilon_1$, т. е. равной экспериментальному значению первого возбужденного состояния. Такой выбор, как показывают численные расчеты, оценивает сверху величину $\delta_{\text{Im}}^{(2)}$.

Парные матричные элементы. Конечной целью расчетов является выражение пион-ядерных фаз через πN -фазы рассеяния. Для этого парные u -матрицы рассеяния в (69), (72) и (78), определенные в с. ц. м. пион-ядро, необходимо выразить через парные \tilde{u} -матрицы в с. ц. м. пион-нуклон. Учитывая, что u -матрица имеет те же трансформационные свойства, что и t -матрица рассеяния, получаем

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{p} | u(\lambda) | \mathbf{k}', \mathbf{p}' \rangle = \gamma \langle \boldsymbol{\kappa} | \tilde{u}(\lambda) | \boldsymbol{\kappa}' \rangle, \quad (79)$$

где определение фактора γ и импульсов пиона в с. ц. м. пион-нуклон даны в (19) — (22).

Парная $\boldsymbol{\kappa}$ -матрица, как оператор в спин-изоспиновом пространстве, имеет вид

$$\langle \boldsymbol{\kappa} | \tilde{u}(\lambda) | \boldsymbol{\kappa}' \rangle = \sum_{\beta=0}^3 \langle \boldsymbol{\kappa} | u_\beta(\lambda) | \boldsymbol{\kappa}' \rangle O_\beta. \quad (80)$$

Здесь $O_\beta = 1, \mathbf{t}\boldsymbol{\tau}, i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}), i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})(\mathbf{t}\boldsymbol{\tau})$; \mathbf{t} — оператор изоспина пиона; $\boldsymbol{\tau}/2$ и $\boldsymbol{\sigma}/2$ — операторы изоспина и спина нуклона, а $\mathbf{n} = [\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\kappa}'] / |\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\kappa}'|$. Если пренебречь спин-зависящими членами ($\beta = 2, 3$), то парциальное разложение матричных элементов $u_{0,1}$ можно записать в виде:

$$\langle \boldsymbol{\kappa} | u_\beta(\lambda) | \boldsymbol{\kappa}' \rangle = \sum_I c_I^\beta \sum_{l,j} \left(j + \frac{1}{2} \right) u_{Ij}^I(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}'; \lambda) P_l(\hat{\boldsymbol{\kappa}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}'), \quad (81)$$

где $I = 1/2, 3/2$ — значения изоспина πN -системы, а $c_{1/2}^1 = 1/3, c_{3/2}^0 = 2/3, c_{3/2}^1 = -c_{1/2}^1 = 1/3, j = l \pm \frac{1}{2}$.

На энергетической поверхности $\kappa = \kappa'$ парциальный матричный элемент $u_\nu(\kappa, \kappa; \lambda)$ ($\nu \equiv l, j, I$) определяет соответствующую фазу πN -рассеяния:

$$\delta_\nu(\kappa) = -\pi \varepsilon_2(\kappa) \int_0^1 d\lambda u_\nu(\kappa, \kappa; \lambda), \quad (82)$$

где $\varepsilon_2(\kappa) = \kappa^2/[2\pi^2 dE_2(\kappa)/d\kappa]$; $E_2(\kappa) = \omega_\pi(\kappa) + E_N(\kappa)$.

Безэнергетическое поведение парных u -матриц можно учесть в модели сепарабельного πN -взаимодействия [см. (31)]

$$u_\nu(\kappa, \kappa'; \lambda) = u_\nu(\kappa, \kappa; \lambda) g_\nu(\kappa')/g_\nu(\kappa), \quad (83)$$

где $g_\nu(\kappa)$ — формфактор сепарабельного взаимодействия, определяемый подгонкой по данным πN -рассеяния.

Рассмотрим, наконец, интегралы по λ от произведений парных матричных элементов, возникающие в (72) и (78). С учетом (83) они сводятся к выражениям:

$$A_{\nu\nu'} \equiv \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 [u_\nu(\kappa, \kappa; \lambda_1) u_{\nu'}(\kappa', \kappa'; \lambda) + (\nu \rightleftharpoons \nu')];$$

$$B_{\nu\nu'} \equiv \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 [u_\nu(\kappa, \kappa; \lambda_1) u_{\nu'}(\kappa', \kappa'; \lambda) + (\nu \rightleftharpoons \nu')]. \quad (84)$$

Интегрируя по частям с учетом (82), можно получить разложение, главный член которого

$$A_{\nu\nu'} = B_{\nu\nu'} = \delta_\nu(\kappa) \delta_{\nu'}(\kappa') / [\pi^2 \varepsilon_2(\kappa) \varepsilon_2(\kappa')]. \quad (85)$$

Можно убедиться, что поправки к (85) составляют около 20% (см., например, формулу (31) в [17]). Поэтому ими можно пренебречь в пределах точности наших расчетов величин $\delta_{Re}^{(2)}$ и $\delta_{Im}^{(2)}$ в (72) и (78).

Полученные соотношения (79) — (85) завершают определение первых двух итераций (69), (72) и (78) в терминах πN -фаз рассеяния, корреляционных функций и ядерных формфакторов.

Сходимость итерационной схемы. Вычисление и анализ поправки второго порядка (72) и (78) позволяют установить область сходимости рассматриваемой итерационной схемы. Этот вопрос исследовался в [17, 19]. В [17] было показано (см. табл. 3), что длина πd -рассеяния, вычисленная во втором порядке теории, практически совпадает с точным значением [75], полученным с помощью уравнений Фаддеева [13]. В [17] анализировался вклад от поправок второго порядка, а также частично от высших итераций для $\delta_{Im}^{(2)}$ в случае $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния. Было показано, что при $T_\pi \leq 70 \div 80$ МэВ вклад от поправки второго порядка $\delta^{(2)}$ (72) составляет по отношению

к первому $\delta^{(1)}$ (69) около 10% при $T_\pi \lesssim 70$ МэВ. Однако с уменьшением энергии $T_\pi \lesssim 50$ МэВ роль эффектов перерасеяния становится существенной, особенно для s -фазы. Если длина рассеяния $a_{\pi^4\text{He}}$ в первом порядке с πN -фазами из [76] равна $-0,023 \mu^{-1}$, то с учетом второго порядка $a_{\pi^4\text{He}} = -0,071 \mu^{-1}$, что удовлетворительно воспроизводит экспериментальное значение [77]: $\text{Re} a_{\pi^4\text{He}} = -(0,098 \pm \pm 0,028) \mu^{-1}$. Возрастание роли эффектов второго порядка обусловлено изотопической структурой задачи: в низшем приближении происходит сокращение больших величин [см. (68)].

Результаты численных расчетов фаз $\pi - ^4\text{He}$ -рассеяния и дифференциального сечения рассеяния показаны соответственно в табл. 4

Таблица 4. Фазы $\pi - ^4\text{He}$ -рассеяния, град, полное и полное упругое сечение при 51 МэВ

Фазы	$\text{Re } \delta_s$	$\text{Im } \delta_s$	$\text{Re } \delta_p$	$\text{Im } \delta_p$	$\sigma_{\text{упр, мб}}$	$\sigma_{\text{полн, мб}}$	$\text{Re } f(0), \text{ фм}$
$\delta_{\pi A} = \delta_{\pi A}^{\text{пот}}$	-7,56	0,98	12,82	0,51	53,1	68,4	1,04
$\delta_{\pi A} = \delta_{\pi A}^{\text{пот}} + \delta_{\pi A}^{\text{погл}}$	-9,60	1,89	8,17	2,22	29,0	77,44	0,59
Данные фазового анализа [78]	-8,40	1,75	9,05	2,30	30,6	79,6	0,61

и на рис. 12. Описание деталей расчета: конкретный выбор фактора, корреляционной функции и т. п.— дано в [19]. Из табл. 4 видно, что реальные части фаз $\pi - ^4\text{He}$ -рассеяния с точностью 20% согласуются с данными фазового анализа [78]. Описать мнимые части фаз в потенциальной теории не удастся. Это является основной причиной расхождения теории и эксперимента (рис. 12). Характерной качественной закономерностью потенциального поведения параметров неупругости в области низких энергий является [19] их увеличение (при данной энергии) с ростом орбитального момента, т. е. $\eta_S < \eta_P < \eta_D$ и т. п. [$\eta_L = \exp(-2\text{Im } \delta_L)$]. Это естественно объясняется увеличением роли центробежного барьера. Поэтому наблюдаемое при $T_\pi \sim 50$ МэВ (см. табл. 4, а также [79]) отклонение в данных фазового анализа можно рассматривать как проявление канала поглощения пиона.

5. УЧЕТ КАНАЛА ПОГЛОЩЕНИЯ В УНИТАРНОМ ПОДХОДЕ

Обобщим изложенный выше (разд. 4) формализм на случай с сохраняющейся числом пионов. Будем предполагать, что решение потенциальной задачи, определяемой гамилтонианом (36), известно, и ограничимся энергиями столкновения, недостаточными для рождения второго пиона, т. е. $T_\pi < 250$ МэВ. В этом случае проблему учета канала поглощения можно свести [16] к двухканальной задаче

с эрмитовым гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \hat{H} + \eta \hat{R}, \quad (86)$$

где

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & R_{10} \\ R_{01} & 0 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Здесь индекс 1 обозначает канал с одним пионом во всем конфигурационном пространстве, а 0 — чисто нуклонные состояния. Величины R_{10} и R_{01} представляют собой многочастичные операторы поглощения и рождения пиона, а η — динамическая переменная, меняющаяся в пределах от 0 до 1. Потенциальное пион-ядерное взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H_1 = K_\pi + H_A + V, \quad V = \sum_{i=1}^A v^i, \quad (88)$$

K_π — оператор кинетической энергии пиона; H_A — ядерный гамильтониан; v^i — потенциал взаимодействия пиона с i -нуклоном ядра. Во избежание двойного счета в потенциальной схеме следует провести вычитание полюсной части p_{11} — πN -взаимодействия. Канальный гамильтониан \tilde{H}_0 в отличие от физического H_A не содержит перенормировок масс и взаимодействий, генерируемых операторами R_{10} и R_{01} .

Гамильтониан (86) получается как результат проектирования полного пространства состояний пион-ядерной системы, включающего в себя произвольное количество мезонов (π , ρ , ω и т. д.) в промежуточных состояниях, на подпространство состояний с числом пионов, не большим одного. Его микроскопический вывод, а также диаграммное представление входящих в него величин дано в [10, 66] (см. также гл. 6 в [5]).

Основные уравнения. Обозначим $|m, \mu\rangle$, $E_{m\mu}$ и т. п. собственные функции и энергии гамильтониана \mathcal{H} , где латинские буквы различают асимптотические состояния по числу пионов ($m = 0, 1$). Соответствующие матричные элементы оператора \hat{R} будем обозначать $R_{m\mu, n\nu}$. Уравнение для T -матрицы рассеяния имеет вид [70, 16]

$$\frac{d}{d\eta} T_{m\mu, n\nu} = -R_{m\mu, n\nu} - 2\pi i \sum_{s, \sigma} T_{m\mu, s\sigma} \delta(E - E_{s\sigma}) R_{s\sigma, n\nu} \quad (89)$$

с граничным условием для упругого канала

$$T_{1\mu, 1\nu}(E, \eta = 0) = T_{\mu\nu}^{\text{пот}}(E), \quad (90)$$

где $T_{\mu\nu}^{\text{пот}}$ — T -матрица потенциального рассеяния, отвечающая гамильтониану H_1 . Матричные элементы $R_{m\mu, n\nu}$ определяются следую-

щей системой уравнений:

$$\frac{d}{d\eta} R_{m\mu, n\nu} = \sum_{s, \sigma} R_{m\mu, s\sigma} R_{s\sigma, n\nu} \left(\frac{1}{E_{m\mu} - E_{s\sigma} - i\delta} + \frac{1}{E_{n\nu} - E_{s\sigma} + i\delta} \right) \quad (91)$$

с граничным условием $R_{m\mu, n\nu}(\eta = 0) = \langle \psi_{m\mu} | R | \psi_{n\nu} \rangle$, где $|\psi_{m\mu}\rangle$ — собственные функции канального гамильтониана \hat{H} (87).

В задаче об упругом рассеянии пиона наша цель состоит в сведении многоканальной проблемы эффективно к двухчастичной. Это позволит получить явное выражение для поправки к пион-ядерным фазам, возникающей за счет поглощения пиона. При наличии канала поглощения эта процедура, в отличие от метода оптического потенциала, изложенного в разд. 4, состоит из двух этапов. На первом этапе проводится отделение чисто нуклонного канала (индекс 0) от канала с одним пионом (индекс 1), а на втором — отделение упругого канала от неупругих в подпространстве волновых функций системы пион-ядро. Заметим, что на втором этапе задача сводится к уже решенной в разд. 4. Если реализовать эту программу (см. приложение 2), то можно получить следующую формулу для пион-ядерных фаз рассеяния [16]

$$\delta_{\pi A}(k) = \delta_{\pi A}^{\text{пот}}(k) + \delta_{\pi A}^{\text{погл}}(k) \quad (92)$$

с учетом граничного условия (90).¹ Здесь $\delta_{\pi A}^{\text{пот}}$ — фаза, возникающая за счет потенциального рассеяния (46). Метод ее расчета изложен в разд. 4. Поправка на поглощение имеет вид:

$$\delta_{\pi A}^{\text{погл}}(k) = -\pi \epsilon_A(k) \int_0^1 d\eta \langle \mathbf{k}, 0 | \Lambda(E, \eta) | \mathbf{k}', 0 \rangle, \quad (93)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы пиона до и после рассеяния, а

$$\Lambda(E, \eta) = \Omega^{(+)\dagger} \mathcal{R}_0(E, \eta) \Omega^{(+)}, \quad (94)$$

где $\Omega^{(+)}$ — оператор Меллера,¹ описывающий искажение пионной волны:

$$|\psi_{\mathbf{k}, \alpha}^{(+)}\rangle = \Omega^{+} |\mathbf{k}, \alpha\rangle, \quad |\psi_{\mathbf{k}, \alpha}^{(+)}\rangle$$

— состояния рассеяния гамильтониана H_1 , а $|\mathbf{k}, \alpha\rangle$ — собственные функции гамильтониана $h = K_{\pi} + H_A$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ состояния ядра. Оператор $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ включает в себя все диаграммы с промежуточными нуклонными состояниями. Он выражается (см. приложение 2) через исходный оператор \hat{R} (87) посредством системы интегральных уравнений.

В рамках данного формализма учет искажения пионной волны проводится разложением по кратности πN -столкновений, т. е. по сте-

пеням парных u -матриц πN -рассеяния (56):

$$|\Psi_{k,0}^{(+)}\rangle = \left(1 + \int_0^1 d\lambda G^+(E) \hat{P} U_0(E, \lambda)\right) |k, 0\rangle, \quad (95)$$

где $G(E)$ и U_0 определены в (43) и (45). В предположении однонуклонного характера операторов R_{10} и R_{01} , т. е. $R_{10} = \sum_i r_{10}^i$, для вычисления оператора $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ можно развить, используя (91), последовательную итерационную схему. Такое разложение получается в полной аналогии с построением унитарного ряда многократного рассеяния для оператора $U_0(E, \eta)$ (см. разд. 4). Отличие состоит лишь

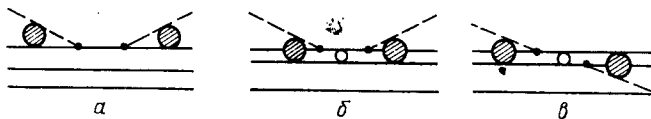


Рис. 13. Графический образ ряда (96) для оператора $\Lambda(E, \eta)$

в замене парных u -матриц рассеяния на двухчастичные матричные элементы $r_{m\mu, n\nu}^i = \langle m\mu | r^i | n\nu \rangle$, отвечающие взаимодействию пиона с i -нуклоном ядра посредством поглощения или испускания пиона, т. е. в терминах вершинных функций.

Таким образом, общая структура оператора $\Lambda(E, \eta)$ (94) с учетом (95) имеет вид:

$$\Lambda(E, \eta) = \sum_i \Lambda^i(E, \eta) + \sum_{i \neq j} \Lambda^{ij}(E, \eta) + \dots, \quad (96)$$

где первый член отвечает механизму однонуклонного поглощения (рис. 13, а), второй — двухнуклонному (рис. 13, б, в) и т. п. На рис. 13 заштрихованные кружки обозначают потенциальное перерассеяние пионов, а светлые — NN -взаимодействие.

Двухнуклонный механизм поглощения. Получим выражение для $\delta_{\pi A}^{\text{погл}}$, предположив, что основной вклад дает механизм двухнуклонного поглощения (рис. 13, б, в). Для этого необходимо вычислить матричный элемент от двухчастичного оператора Λ^{12} между волновыми функциями основного состояния ядра. С такой проблемой мы уже сталкивались при вычислении поправки второго порядка $\delta_{\text{Re}}^{(2)}$ (см. разд. 4). Упрощающим обстоятельством в данном случае является то, что радиус операторов поглощения значительно меньше среднего между нуклонного расстояния. Это позволяет воспользоваться приближением локальной плотности. В результате получаем [85]

$$\delta_{\pi A}^{\text{погл}}(k) = A(A-1) \gamma [\varepsilon_A(k)/\varepsilon_{2N}(\kappa)] M(\kappa, \kappa') \hat{\rho}^2(\mathbf{q});$$

$$M(\kappa, \kappa') = -\pi \varepsilon_{2N}(\kappa) \int_0^1 d\eta \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Lambda^{12}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; \mathbf{p}', \mathbf{k}'; \eta), \quad (97)$$

где ϵ_A и ϵ_{2N} — плотность уровней соответственно для пион-ядерной и пион-двухнуклонной систем; $\kappa = |\kappa| = |\kappa'|$ — импульс пиона в с. ц. м. ($\pi, 2N$); фактор γ возникает в результате перехода из с. ц. м. ($\pi, 2N$) в с. ц. м. пион-ядро; $\hat{\rho}^2(q)$ — фурье-образ квадрата ядерной плотности $\rho(r)$, нормированной на единицу; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — переданный импульс; $\mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — корреляционная функция ястровского типа. В области низких энергий можно использовать нерелятивистскую кинематику для нуклона. Тогда

$$\begin{aligned} \kappa &= (\mathbf{k} - \epsilon \mathbf{P}_0)/(1 + \epsilon), \quad \kappa' = (\mathbf{k}' - \epsilon \mathbf{P}'_0)/(1 + \epsilon), \\ \epsilon &= \omega_\pi(k)/2M, \quad \omega_\pi(k) = (k^2 + \mu^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где μ и M — массы пиона и нуклона; \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}'_0 — полные импульсы пары нуклонов (в приближении замороженности: $\mathbf{P}_0 = -\mathbf{k}/2A$ и $\mathbf{P}'_0 = \mathbf{P}_0 - \mathbf{q}$). Наконец, $\gamma\epsilon_A/\epsilon_{2N} = (1 + \epsilon)/(1 + 2\epsilon/A)$.

Помимо интегрирований по импульсам в (97) предполагается соответствующее усреднение матричного элемента Λ^{12} по спин-изоспиновым переменным. Спин-изоспиновая структура Λ^{12} полностью аналогична структуре ($\pi, 2N$)-амплитуды (см. [42]). Ограничиваясь s - и p -волнами в $\pi 2N$ -рассеянии и беря соответствующую парциальную волну от правой части (97), для ядер с нулевым спином и изоспином получаем [16]

$$\begin{aligned} \delta_l^{\text{погл}}(k) &= A(A-1)k \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon/A} [\hat{\rho}_l^2(k) (\tilde{B}_0(k) + \alpha k^2 \tilde{C}_0(k)) + \\ &+ \beta k^2 \tilde{C}_0(k) ((l+1) \hat{\rho}_{l+1}^2(k) + l \hat{\rho}_{l-1}^2(k))/(2l+1)], \quad l=0, 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (98)$$

Здесь $\hat{\rho}_l^2$ — парциальная гармоника $\hat{\rho}^2(q)$, параметры α и β отвечают угловому преобразованию из с. ц. м. пион-ядро в с. ц. м. ($\pi, 2N$). $\alpha = (1 - 1/2A)(1 + \epsilon/2A)/(1 + \epsilon)^2$, $\beta = (1 + \epsilon/2A)/(1 + \epsilon)$.

Комплексные величины \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 выражаются через πN -фазы рассеяния и ($\pi N, N$)-вершинные функции. Их микроскопический расчет в рамках данного формализма отсутствует в настоящее время.

Энергетическая зависимость параметров \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 . Из обсуждения, представленного в разд. 2, видно, что об энергетической зависимости параметров B_0 и C_0 , определяющих поправку на поглощение в оптическом потенциале, известно пока мало. Можно лишь ожидать, что в области низких энергий ($T_\pi \ll 50$ МэВ) они будут меняться слабо, поскольку относительный импульс, соответствующий короткодействующим двухнуклонным корреляциям ($p_c \sim 400$ МэВ/с), значительно больше импульса низкоэнергетического пиона ($p_\pi \sim 120$ МэВ/с при $T_\pi \sim 50$ МэВ). Это предположение использовалось, в частности, при получении выражений (97) и (98) в приближении локальной плотности. Поэтому в качестве первого шага можно предположить, что параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 постоянны в области низких энергий, и взять их такими, чтобы описывались экспериментальные

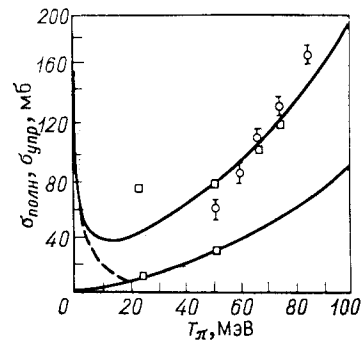
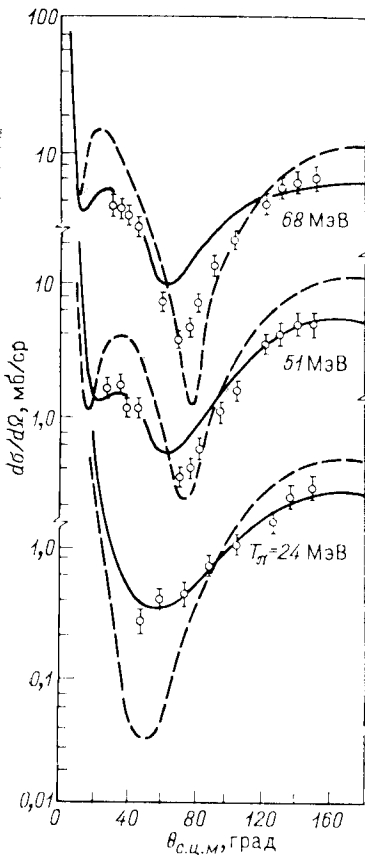


Рис. 15. Полное (верхняя кривая) и полное упругое (нижняя кривая) сечения $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния, рассчитанные в унитарном подходе с учетом канала поглощения:
 □ — результаты фазового анализа из [29, 31];
 ○ — данные ФА для $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния из [86];
 пунктир — $1/v$ -зависимость для $\sigma_{\text{полн}}$. Рисунок взят из [16]

Рис. 14. Дифференциальные сечения упругого $\pi^+ - {}^4\text{He}$ -рассеяния: данные — из [29, 31]; пунктир — потенциальный расчет ($\delta^{(1)} + \delta^{(2)}$); сплошная — с учетом поправки на поглощение. Рисунок взят из [16]

данные для длин ($a_0 = \lim \delta_0(k)/k, k \rightarrow 0$) и объемов ($a_1 = \lim \delta_1(k)/k^3, k \rightarrow 0$) рассеяния, т. е.

$$a_0^{\text{экср}} - a_0^{\text{пот}} = \gamma \hat{\rho}_0^2(0) \tilde{B}_0; \quad \gamma = A(A-1)(1+\epsilon)/(1+2\epsilon/A),$$

$$a_1^{\text{экср}} - a_1^{\text{пот}} = \gamma(\delta \tilde{B}_0 + \beta \tilde{C}_0 \hat{\rho}_0^2(0)/3), \quad (99)$$

где β определен в (98); $\delta = \lim \hat{\rho}_1^2(k)/k^2, k \rightarrow 0$.

Заметим, что параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 отличаются от соответствующих параметров оптического потенциала тем, что они включают в себя (см. рис. 13) эффекты, связанные с искажением пионной волны в упругом канале.

Низкоэнергетическое $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяние. В [16] с определенными в соответствии с (99) параметрами \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 был проведен расчет дифференциальных и полных сечений для $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния (рис. 14

и 15). Из рис. 14 видно, что учет канала поглощения позволяет количественно описать дифференциальные сечения в области до 50 МэВ. На рис. 15 расчет (сплошная кривая) удовлетворительно воспроизводит данные не зависящего от энергии фазового анализа (ФА) [31, 86] для $\sigma_{\text{упр}}$ и $\sigma_{\text{полн}}$ при энергиях ниже 80 МэВ, за исключением точки для $\sigma_{\text{полн}}$ при 24 МэВ [29]. При этой энергии фазовый анализ, представленный в [29], существенно неопределен, поскольку данные имеются лишь для углов рассеяния, больших 50° . Недавно в [30] были представлены новые данные для $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния при 25 МэВ. Полученные там дифференциальные сечения для π^+ -мезонов хорошо согласуются со старыми данными [29], а для π^- -мезонов различаются в области малых углов (существенно меньше). Наши расчеты, как показано в [87], лучше описывают новые данные. Пунктиром на рис. 15 указан $1/v$ -закон (v — скорость пиона) для полного сечения. Отклонение от $1/v$ -закона наблюдается при энергиях, больших 5 МэВ.

Таким образом, полученные результаты подтверждают принятое выше предположение о приближенном постоянстве параметров \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 в области энергий от 0 до 50 МэВ. Эти параметры прямым образом связаны с длинами и объемами рассеяния (99). Поэтому можно успешно решать обратную задачу об определении сдвигов и ширины p -орбит π -атомов легких ядер из данных по низкоэнергетическому рассеянию.

Эффект вычитания полюсного члена в p_{11} -волне. Мы рассмотрели три варианта потенциального расчета величин $a_{0,1}$ (табл. 5).

Таблица 5. Длина a_0 , объем a_1 и параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 поправки на поглощение для $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния

Фазы πN -рассеяния	$a_0^{\text{пот}}, \mu^{-1}$	$a_1^{\text{пот}}, \mu^{-3}$	\tilde{B}_0, μ^{-4}	\tilde{C}_0, μ^{-6}
RSL [76]	-0,071	0,367	-0,024 + i0,026	-0,30 + i0,146
RSL ($-p_{11}$)	-0,067	0,394	-0,027 + i0,026	-0,38 + i0,146
RSL ($-p_{11}^{\text{пол}}$)	-0,055	0,508	-0,038 + i0,026	-0,694 + i0,146

Примечание. Экспериментальное значение для $a_0^{\text{экс}} = (-0,098 - i 0,030) \mu^{-1}$ [77], а значение $a_1^{\text{экс}} = (0,258 + i 0,054) \mu^{-3}$ взято из [38].

В первой строке приведены результаты с использованием данных фазового анализа из [76] без вычитания полюсного члена p_{11} -волны πN -взаимодействия. Полученное значение для a_0 хорошо согласуется с результатом расчета длины $\pi - {}^4\text{He}$ -рассеяния, выполненного в [90] в рамках теории многократного рассеяния. Параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 каче-

ственно согласуются со стандартными значениями для B_0 и C_0 в оптическом потенциале (см. табл. 1), причем $\text{Re } \tilde{B}_0 / \text{Im } \tilde{B}_0 \simeq -1$. Вторая строка соответствует выключенной p_{11} -волне. Видно, что результаты изменились незначительно, что отражает малость p_{11} -фаз рассеяния ($\ll 2^\circ$) вплоть до энергий 200 МэВ. Наконец, третья строчка отвечает выключению полюсного члена в p_{11} -волне. В этом случае существенно изменились величины $a_{0,1}$ и как результат параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 . Это является следствием того, что в p_{11} -волне происходит сильное сокращение полюсного и неполюсного членов. Например, объем рассеяния в p_{11} -волне равен $-0,082 \mu^{-3}$ [91], тогда как в первом борновском приближении, соответствующем полюсному приближению, для него получается значение $-0,243 \mu^{-3}$, т. е. в три раза превосходит экспериментальное значение. Расчеты, представленные на рис. 14, соответствуют последнему варианту.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели проблемы теории низкоэнергетического пион-ядерного рассеяния. Большое внимание было уделено анализу оптической модели (разд. 2 и 3) с точки зрения ее приложений к описанию экспериментальных данных. Несмотря на большой прогресс в развитии формальных аспектов оптической модели, практически используемые схемы пока еще не свободны от подгоночных параметров. Это обусловлено существенной ролью эффектов второго порядка, учет которых приводит к сильному усложнению расчетных схем. Поскольку ряд эффектов второго порядка имеет тенденцию к взаимному сокращению, то результаты расчетов чувствительны к используемым приближениям. Проблемой остается последовательный учет канала поглощения пиона. Здесь большое значение имеет согласование теории с условием унитарности. Формально это удается сделать, например, в рамках трехчастичной модели (см. разд. 3) для оптического потенциала. Однако при практической реализации, когда параметр, характеризующий энергию связи нуклона, становится свободным, оптический потенциал перестает правильно воспроизводить пороговые свойства амплитуды рассеяния.

В этой связи представляется перспективным унитарный метод описания пион-ядерного взаимодействия, изложенный в разд. 4 и 5. Помимо корректного отделения потенциального взаимодействия от непотенциального, метод унитаризации эффективно учитывает высшие поправки, что приводит к быстросходящимся итерационным рядам. В ЭКС-методе [20, 69, 70] такой ряд строится непосредственно для расчета пион-ядерных фаз рассеяния. Это, в частности, позволяет избежать дополнительных приближений, связанных с необходимостью внеэнергетического продолжения оптического потенциала при решении уравнения Липпмана — Швингера для амплитуды рассеяния.

Строгая формулировка оптической модели [5, 66] (см. также

разд. 5) предписывает, в частности, вычитание полюсного члена p_{11} -волны πN -взаимодействия при построении потенциального блока оптического потенциала во избежание двойного счета при учете канала поглощения пиона. Эта процедура из-за сильного сокращения полюсной и неполюсной частей амплитуды πN -рассеяния в p_{11} -волне может существенно влиять на соотношение между потенциальным и ответственным за поглощение слагаемыми оптического потенциала (см. [11], а также табл. 5). В этой связи следует с известной осторожностью относиться к сравнению микроскопически рассчитанных параметров B_0 и C_0 , определяющих поправку на поглощение, с их феноменологическими значениями, определенными по сдвигам и ширинам уровней π -атомов. В рассмотренных выше вариантах оптических потенциалов отделения полюсного члена p_{11} -волны не проводилось.

Дальнейшего исследования требует проблема влияния короткодействующих NN -корреляций на распространение пиона в ядре, возникающих из-за обмена ρ -мезоном. В [47—50] этому механизму отводится решающая роль в динамике пион-ядерного взаимодействия. В оптических моделях, развиваемых в p -пространства (разд. 3), удовлетворительного описания данных при низких энергиях удается достичь без учета короткодействующих корреляций. Слабо изученным остается энергетическая зависимость параметров, определяющих поправку на поглощение пиона.

В этом обзоре мы не затрагивали проблемы учета кулоновского взаимодействия, которое сильно влияет на рассеяние пионов низкой энергии. Строгий его учет представляет сложную задачу, и существенный прогресс был достигнут здесь лишь в последнее время для случая трех тел (см. [92]). Анализ проблем, возникающих при введении кулоновского потенциала в разложение Ватсона для многократного рассеяния, можно найти в [93]. В большинстве расчетов на оптической модели (см., например, [40, 52]) кулоновский потенциал просто добавляется к сильному, что соответствует пренебрежению кулоновским возбуждением и кулоновским взаимодействием в промежуточных состояниях при построении оптического потенциала [93]. Эти эффекты могут играть важную роль при описании взаимодействия медленных пионов с тяжелыми ядрами, когда характерные масштабы сильного и кулоновского (боровский радиус) взаимодействий становятся соизмеримыми [93, 94]. Данные замечания относятся также и к унитарному методу описания пион-ядерного рассеяния (разд. 4 и 5). Здесь кулоновское взаимодействие учитывается с помощью известной формулы для амплитуды рассеяния на двух потенциалах [8, 18]. Кулоновские поправки к фазам рассчитываются в соответствии с процедурой, развитой недавно в [95]. Корректный учет кулоновского взаимодействия особенно важен при анализе одновременных данных для π^+ - и π^- -мезонов, являющихся источником информации о протонном и нейтронном распределениях в ядрах [27, 88], о возможном нарушении зарядовой симметрии [89], а также при описании сдвигов и ширин в тяжелых π -атомах [93, 96].

Конечной целью рассмотренных теоретических схем было выражение пион-ядерных характеристик через парные πN -амплитуды рассеяния (или парные u -матрицы в унитарном подходе). Для описания πN -взаимодействия использовались потенциальные модели с сепарабельным взаимодействием, параметры которого определяются подгонкой по данным фазового анализа в каждой парциальной волне. Определенным дефектом такого описания является несогласованность с условием кроссинг-симметрии [97], связывающим парциальные амплитуды в разных каналах. При учете канала поглощения в теорию входит также формфактор πNN -вершины, определить который однозначно из данных по πN -рассеянию на энергетической поверхности нельзя. Вместе с тем результаты расчетов характеристик πNN -систем [11, 98] чувствительны к конкретному выбору πNN -формфакторов. Для устранения этих неоднозначностей необходимо выйти за рамки потенциального описания πN -взаимодействия. Большие надежды в этом направлении связывают сейчас с киральной теорией πN -взаимодействия, основанной на фундаментальных принципах квантовой хромодинамики. В полуженуменологической ее реализации — киральной модели мешков (см. [99]) возникает естественный параметр обрезания — радиус кваркового мешка, определяющий искомые вершинные функции.

В последнее время начинают изучаться экспериментально различные неупругие процессы при низких энергиях, такие как поглощение пионов [53, 100], квазиупругое выбивание [101], неупругое рассеяние с возбуждением ядерных состояний [88] и т. д. Поэтому в дальнейшем большое внимание будет уделяться совместному анализу как упругого, так и неупругих взаимодействий пионов с ядрами. Неупругие процессы более чувствительны к особенностям структуры ядра и к динамике пион-ядерного взаимодействия.

В заключение автор выражает благодарность за обсуждение затронутых в обзоре вопросов В. Б. Беляеву, Д. А. Киржницу, М. Гмитро, Р. Маху, М. Г. Сапожникову, Ф. Никитиу и Н. Ж. Такибаеву.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем эквивалентность системы уравнений (42)–(44) исходному уравнению (39) для T -матрицы рассеяния. Подставив (43) в (42), простой перегруппировкой слагаемых получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} T_0(E, \lambda) = & -V(\lambda) - 2\pi i T_0(E, \lambda) \hat{P} \delta(E-h) V(\lambda) - \\ & - 2\pi i M(E, \lambda) \hat{Q} \delta(E-h) V(\lambda), \end{aligned} \quad (\text{П1.1})$$

где

$$M(E, \lambda) = (1 + 2\pi i T(E, \lambda) \delta(E-h)) \hat{P} K(E, \lambda). \quad (\text{П1.2})$$

Уравнение (П1.1) будет эквивалентно (39), если $M(E, \lambda) = T(E, \lambda)$. Используя (42) и (44), для производной от $M(E, \lambda)$ по $d\lambda$ получаем следующее выражение:

$$\frac{d}{d\lambda} M(E, \lambda) = [1 + 2\pi i T(E, \lambda) \delta(E-h)] \hat{P} U_0(E, \lambda). \quad (\text{П1.3})$$

Из этого уравнения с учетом (42) получаем, что на подпространстве функций, образуемом оператором \hat{P} (основное состояние ядра):

$$\hat{P}M(E, \lambda)\hat{P} = T_0(E, \lambda). \tag{П1.4}$$

В общем случае подстановка (43) в (П1.3) и использование (П1.2) и (П1.4) приводят к уравнению вида

$$\frac{d}{d\lambda} M(E, \lambda) = -V(\lambda) - 2\pi i M(E, \lambda) \delta(E - h) V(\lambda) \tag{П1.5}$$

с граничным условием $M(E, \lambda = 0) = 0$, вытекающим из (П1.2) и (44). Из (П1.5) следует [ср. с (39)], что $M(E, \lambda) = T(E, \lambda)$, а следовательно, уравнение (П1.1) действительно эквивалентно исходному уравнению (39).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Получим систему уравнений для оператора $\mathcal{R}_0(E, \eta)$, определяющего поправку на поглощение (93). Удобно ввести волновые функции $|\psi_\mu^m\rangle, |\psi_\nu^n\rangle$ и т. п. канального гамильтониана H (87) и все искомые величины рассматривать как операторы, действующие на этом пространстве функций. В частности, вместо исходного оператора \hat{R} (87) возникает новый, зависящий от η оператор $R(\eta)$, определяемый соотношением:

$$R_{m\mu, n\nu} \equiv \langle m\mu | \hat{R} | n\nu \rangle = \langle \psi_\mu^m | R(\eta) | \psi_\nu^n \rangle. \tag{П.2.1}$$

Очевидно, что $R(\eta = 0) = \hat{R}$. Уравнение для T -матрицы рассеяния (89) запишется в виде:

$$\frac{d}{d\eta} T(E, \eta) = -R(\eta) - 2\pi i T(E, \eta) \hat{\delta}(E - H) R(\eta), \tag{П.2.2}$$

где $\hat{\delta}(E - H)$ — матрица 2×2 :

$$\hat{\delta}(E - H) = \begin{pmatrix} \delta(E - H_1) & 0 \\ 0 & \delta(E - \tilde{H}_0) \end{pmatrix}. \tag{П.2.3}$$

1. Отделение нуклонного канала. Разобьем пространство векторов состояния гамильтониана \mathcal{H} (86) на два подпространства с помощью проекционных операторов \hat{q}_1 и \hat{q}_0 , где \hat{q}_1 проектирует на состояния с одним пионом в каждой точке пространства, а \hat{q}_0 — на беспионные состояния. В полной аналогии с выводом системы уравнений (42)–(44) для интересующей нас подматрицы $T_{11} \equiv \hat{q}_1 \hat{T} \hat{q}_1$ можно получить следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\eta} T_{11}(E, \eta) = -R_1(E, \eta) - 2\pi i T_{11}(E, \eta) \hat{q}_1 \delta(E - H_1) R_1(E, \eta), \tag{П.2.4}$$

где эффективный зависящий от энергии оператор $R_1(E, \eta)$ определяется системой уравнений:

$$R_1(E, \eta) = R(\eta) + 2\pi i B(E, \eta) \hat{q}_0 \delta(E - \tilde{H}_0) R(\eta); \tag{П.2.5}$$

$$\frac{d}{d\eta} B(E, \eta) = -R_1(E, \eta) + 2\pi i R_1(E, \eta) \hat{q}_1 \delta(E - H_1) B(E, \eta). \tag{П.2.6}$$

Граничные условия для уравнений (П.2.4) и (П.2.6) имеют вид:

$$T_{11}(E, \eta = 0) = T_{\text{пот}}(E), \quad B(E, n = 0) = 0, \tag{П.2.7}$$

где $T^{\text{пот}}$ — матрица потенциального рассеяния, отвечающая гамильтониану H_1 . Неэрмитова часть оператора $R_1(E, \eta)$ возникает из-за наличия канала поглощения.

2. Отделение неупругих каналов. Уравнение (П2.4) полностью аналогично уравнению (42) для T -матрицы потенциального рассеяния. Поэтому отделение упругого канала от неупругих дается системой уравнений вида (42)–(44). Обозначим \mathcal{T}_0 подматрицу упругого рассеяния T_{11} -матрицы, т. е. величину $\hat{P}T_{11}\hat{P}$ (\hat{P} — оператор проектирования на основное состояние ядра). Уравнение для этой величины имеет вид:

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{T}_0(E, \eta) = -\mathcal{R}_0(E, \eta) - 2\pi i \mathcal{T}_0(E, \eta) \hat{P} \delta(E - H_1) \mathcal{R}_0(E, \eta), \quad (\text{П2.8})$$

где оператор $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ выражается через оператор $R_1(E, \eta)$ посредством системы уравнений:

$$\mathcal{R}_0(E, \eta) = R_1(E, \eta) + 2\pi i D(E, \eta) \hat{Q} \delta(E - H_1) R_1(E, \eta); \quad (\text{П2.9})$$

$$\frac{d}{d\eta} D(E, \eta) = -\mathcal{R}_0(E, \eta) + 2\pi i \mathcal{R}_0(E, \eta) \hat{P} \delta(E - H_1) D(E, \eta) \quad (\text{П2.10})$$

с граничным условием $D(E, \eta = 0) = 0$. Оператор $\hat{Q} = \hat{q}_1 - \hat{P}$ проектирует на возбужденные состояния ядра. В матричной форме уравнение (П2.8) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \mathcal{T}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; E, \eta) &= -\langle \Psi_{\mathbf{k}', 0}^{(+)} | \mathcal{R}_0(E, \eta) | \Psi_{\mathbf{k}, 0}^{(+)} \rangle - \\ &- 2\pi i \varepsilon_A(k) \int \frac{d\mathbf{n}''}{4\pi} \mathcal{T}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; E, \eta) \langle \Psi_{\mathbf{k}'', 0}^{(+)} | \mathcal{R}_0(E, \eta) | \Psi_{\mathbf{k}, 0}^{(+)} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П2.11})$$

где $\mathbf{k}'' = k\mathbf{n}''$; $k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$; \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы пиона до и после столкновения, $\varepsilon_A(k)$ — плотность состояний рассеяния. Парциальное разложение величин, входящих в это уравнение, и учет граничного условия (П2.7) дают выражение (92) для π -ядерных фаз рассеяния.

Система уравнений (П2.9), (П2.10) совместно с (П2.1), (П2.5) и (П2.6) завершает определение искомого оператора $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ через исходный оператор $R(\eta)$. С ее помощью можно построить итерационное решение, разлагая $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ по степеням оператора $R(\eta)$. Первые два члена данного разложения имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0(E, \eta) &= R(\eta) - 2\pi i \int_0^\eta d\eta_1 R(\eta_1) \hat{q}_0 \delta(E - \tilde{H}_0) R(\eta) - \\ &- 2\pi i \int_0^\eta d\eta_1 R(\eta_1) \hat{q}_1 \hat{Q} \delta(E - H_1) R(\eta). \end{aligned} \quad (\text{П2.12})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hufner J. — Phys. Repts, 1975, v. 21C, p. 1.
2. Копалейшвили Т. И. — ЭЧАЯ, 1979, т. 10, с. 429.
3. Thomas A. W., Landau R. H. — Phys. Repts, 1980, v. 58, p. 121.
4. Oset E., Toki H., Weise W. — Phys. Repts, 1982, v. 83, p. 281.
5. Копалейшвили Т. И. Вопросы теории пион-ядерного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Eisenberg J. M., Koltun D. S. Theory of meson interactions with nuclei. N. Y.: Wiley, 1980.

7. Кириллов-Угрюмов В. Г., Никитин Ю. П., Сергеев Ф. М. Атомы и мезоны. М.: Атомиздат 1980.
8. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
9. Kerman A. K., McManus H., Thaler R. M.— Ann. of Phys., 1959, v. 8, p. 551.
10. Mizutani T., Koltun D. S.— Ann. of Phys., 1977, v. 109, p. 1.
11. Blankleider B., Afnan I. R.— Phys. Rev. C, 1981, v. 24, p. 1572; Afnan I. R., Blankleider B.— Phys. Lett. B, 1980, v. 93, p. 367.
12. Avishai Y., Mizutani T.— Nucl. Phys. A, 1979, v. 326, p. 352; 1980, v. 338, p. 377; 1981, v. 352, p. 399.
13. Фаддеев Л. Д.— ЖЭТФ, 1961, т. 39, с. 1459; Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1963, т. 69, с. 1—120.
14. Tandy P. C., Redish E. F., Bolle D.— Phys. Rev. C, 1977, v. 16, p. 1924.
15. Cannata F., Dedonder J. P., Lenz F.— Ann. of Phys., 1982, v. 143, p. 84.
16. Belyaev V. B., Khankhasayev M. Kh.— Phys. Lett. B, 1984, v. 137, p. 299.
17. Белыев В. Б., Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. и Ханхасаев М. Х.— ЯФ, 1980, т. 32, с. 1124.
18. Ханхасаев М. Х.— ЯФ, 1982, т. 36, с. 633.
19. Ханхасаев М. Х.— ЯФ, 1983, т. 37, с. 1196.
20. Киржниц Д. А.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 1544.
21. Johnson R. R. e.a.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 296, p. 444.
22. Johnson R. R. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 844; Johnson R.R. e.a.— Canad. J. Phys., 1979, v. 57, p. 775.
23. Gill D. R. e.a.— Phys. Rev. C, 1982, v. 26, p. 1306.
24. Amman J. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 426;
25. Dytman S. A. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1059; Phys. Rev. C, 1978, v. 18, p. 2316; Phys. Rev. C, 1979, v. 19, p. 971.
26. Malbrough D. J. e.a.— Phys. Rev. C, 1978, v. 17, p. 1395; Moinester M. A. e.a.— Ibid., 1978, v. 18, p. 2678; Bertrand F. E. e.a.— Ibid., 1979, v. 20, p. 1884; Freedom B. M. e.a.— Ibid., 1981, v. 23, p. 1134.
27. Oshain F. E. e.a.— Ibid., 1983, v. 27, p. 2753.
28. Dam S. E. e.a.— Ibid., 1982, v. 25, p. 2574.
29. Redwine R. P. Low energy pion-nucleus scattering: in AIP Conf. Proc. №54: Meson—Nuclear Physics—1979, Houston (Ed. by E. V. Hungerford III (N. Y., AIP, 1979), p. 501.
30. Nordberg M. E., Kinsey K. F.— Phys. Lett., 1966, v. 20, p. 692.
31. Fournier G. e.a.— Nucl. Phys. A, 1984, v. 426, p. 542.
32. Crowe K. M. e.a.— Nucl. Phys., 1969, v. 180, p. 1349.
33. Shcherbakov Yu. A. e.a.— Nuovo cimento A, 1976, v. 31, p. 249; Ibid., p. 262.
34. Axen D. e.a.— Nucl. Phys. A, 1976, v. 256, p. 387; Balestri B.e.a.— Ibid., 1983, v. 392, p. 217.
35. Kisslinger L.— Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 761.
36. Brown G. E., Jennings B. K., Rostokin V. I.— Phys. Repts, 1979, v. 50, p. 229.
37. Thies M.— Phys. Lett. B, 1976, v. 63, p. 43.
38. Бунатян Г. Г., Польш Ю. С.— ЯФ, 1977, т. 25, с. 535.
39. Stricker K., Carr J. A., McManus H.— Phys. Rev. C, 1979, v. 19, p. 929.
40. Stricker K., Carr J. A., McManus H.— Phys. Rev. C, 1980, v. 22, p. 2043.
41. Seki R., Masutani K.— Phys. Rev. C, 1983, v. 27, p. 2799; Seki R., Masutani K., Yazaki K.— Phys. Rev. C, 1983, v. 27, p. 2817.
42. Digiacomo N. J. e.a.— Phys. Lett. B, 1977, v. 66, p. 421.
43. Ericson M., Ericson T.— E. O.— Ann. of Phys., 1966, v. 36, p. 32.
44. Mach R.— Nucl. Phys. A, 1973, v. 205, p. 56.
45. Backenstoss G.— Ann. Rev. Nucl. Scim., 1970, v. 20, p. 467 (перевод УФН 1972, т. 107, с. 405).
46. Tauscher L.— In: Proc. of the 1st Course of Intern. School of Phys. of Exotic Atoms, Erice, 1977.

46. Бетти С. Дж. — ЭЧАЯ, 1982, т. 13, вып. 1, с. 164.
47. Chai J., Riska D. O. — Nucl. Phys. A, 1979, v. 329, p. 429.
48. Oset E., Weise W., Brockman R. — Phys. Lett., B, 1979, v. 82, p. 344;
- Shimizu K., Faessler A. — Nucl. Phys. A, 1980, v. 333, p. 495; Brockman R., Jennings B. K., Rockmore R. — Phys. Lett. B, 1981, v. 98, p. 236.
49. McManus H., Riska D. O. J. Phys. G. Nucl. Phys., 1981, v. 7, p. L153;
- Riska D. O., Sarafian H. — Phys. Lett. B, 1980, v. 95, p. 185.
50. Baym G., Brown G. E. — Nucl. Phys. A, 1975, v. 247, p. 395.
51. Landau R. H., McMillan M. — Phys. Rev. C, 1973, v. 8, p. 2094.
52. Landau R. H., Thomas A. W. — Nucl. Phys. A, 1978, v. 302, p. 461;
- Landau R. H., Phatak S. C., Tabakin F. — Ann. of Phys., 1973, v. 78, p. 299.
53. Navon I. e.a. — TRIUMF-preprint TPI-PP-83-14, Vancouver, 1983.
54. Landau R. H., Tabakin F. — Nucl. Phys. A, 1974, v. 231, p. 445.
55. Hufner J., Iachello F. — Nucl. Phys. A, 1975, v. 247, p. 441.
56. Kisslinger L. S., Tabakin F. — Phys. Rev. C, 1974, v. 9, p. 188.
57. Ernst D. J., Shakin C. M., Thaler R. M. — Phys. Rev. C, 1974, v. 9, p. 1374.
58. Mach R., Sapozhnikov M. G. — J. Phys. G: Nucl. Phys., 1984, v. 10, p. 147.
59. Chew G. F., Goldberger M. L. — Phys. Rev., 1952, v. 87, p. 778; Chew G. F., Wick G. C. — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 637.
60. Revai J. — Nucl. Phys. A, 1973, v. 208, p. 20.
61. Aaron R., Amado R. D., Young J. E. — Phys. Rev., 1968, v. 174, p. 2022.
62. Miller G. — Phys. Rev. C, 1974, v. 10, p. 1242.
63. Heller L., Bohanon G. E., Tabakin F. — Phys. Rev. C, 1976, v. 13, p. 742.
64. Celenza L., Liu L. C., Shakin C. M. — Phys. Rev. C, 1975, v. 11, p. 1593;
- Liu L. C., Shakin C. M. — Ibid., 1979, v. 20, p. 2339; Nuovo cimento A, 1979, v. 53, p. 142; De Kam J., Wafelbakker C. K. — Phys. Rev. C, 1982, v. 26, p. 570.
65. Lee T. S., Charkavarti S. — Phys. Rev. C, 1977, v. 16, p. 273; Wakamatsu M. — Nucl. Phys. A, 1978, v. 312, p. 427; Ibid., 1980, v. 340, p. 289.
66. Koltun D. S., Mizutani T. — Phys. Rev. C, 1980, v. 22, p. 1657.
67. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. — ЭЧАЯ, 1975, т. 6, вып. 2, с. 299.
68. Sloan J. H. — Phys. Rev., 1968, v. 165, p. 1578.
69. Киржниц Д. А. — В кн.: Проблемы теоретической физики, памяти И. Е. Тамма. М.: Наука, 1972, с. 74.
70. Киржниц Д. А., Крючков Г. Ю., Такибаев Н. Ж. — ЭЧАЯ, 1979, т. 10, вып. 4, с. 741.
71. Киржниц Д. А., Такибаев Н. Ж. — ЯФ, 1977, т. 35, с. 700.
72. Hellman H. — Einführung in die Quantenchemie. Leipzig, 1937; Feynman R. P. — Phys. Rev., 1939, v. 56, p. 340.
73. Khankhasayev M. Kh. JINR E4-80-691, Dubna, 1980.
74. Bugg D. V., Carter A. A., Carter J. R. — Nucl. Phys. B, 1973, v. 58, p. 378.
75. Петров Н. М., Пересыпкин В. В. — Укр. физ. журн., 1978, т. 23, с. 117.
76. Rowe G., Solomon M., Landau R. H. — Phys. Rev. C, 1978, v. 18, p. 584.
77. Backenstoss e.a. — Nucl. Phys. A, 1974, v. 232, p. 519.
78. Crowe K. M. e.a. — Nucl. Phys., 1969, v. 180, p. 1349.
79. Nichtig F. e.a. — Nuovo cimento A, 1982, v. 67, p. 1.
80. Bailey J. e.a. — Phys. Lett. B, 1974, v. 58, p. 403.
81. Ericson T. E. O. Preprint TH-1098, CERN, 1969.
82. Гмитро М., Камалов С. С., Мах Р., Сапожников М. Г. — ЯФ, 1984, т. 40, с. 107.
83. Eramzhan R. A., Gmitro M., Kamalov S. S., Kaipov T. D., Mach R. — Nucl. Phys. A, 1984, v. 429, p. 403.
84. Samarnayke V. K., Woolcock W. S. — Nucl. Phys. B, 1972, v. 48, p. 205.
85. Ханхасаев М. Х. ОИЯИ P4-83-593, Дубна, 1983.
86. Binon F. e.a. — Nucl. Phys. A, 1978, v. 298, p. 499.
87. Ханхасаев М. Х. — В сб. докл. IX Европейской конф. по пробл. неск. тел в физике, Тбилиси, 25–31 авг., 1984, с. 67.
88. Tacik R. e.a. — Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 1276; Sobie R. J. e.a. TRIUMF-preprint TRI-PP-84-8, Vancouver, 1984.

89. Pedroni E. e.a.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 300, p. 321.
90. Lohs K. P.— Nucl. Phys. A, 1978, v. 312, p. 297.
91. Pilkuhn e.a.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 65, p. 460.
92. Меркурьев С. П.— ЯФ, 1976, т. 24, с. 289; ТМФ, 1979, т. 38, с. 201.
93. Cannata F., Dedonder J. D.— Nuovo cimento A, 1983, v. 76, p. 468.
94. Киржниц Д. А., Пеньков Ф. М.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 657.
95. Frolich J., Pilkuhn H., Schaile H. G.— Phys. Lett. B, 1983, v. 121, p. 235;
- Frolich J. e.a.— J. Phys. G: Nucl. Phys., 1980, v. 6, p. 841.
96. d'Achard van Ensehut e.a.— Phys. Lett. B, 1984, v. 136, p. 24.
97. Швებер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 380.
98. Rinat A. S., Starkand Y.— Nucl. Phys. A, 1983, v. 393, p. 381.
99. Musakhanov M. M. ITEP-179, М., 1980; Thomas A. W. CERN/TH-3368, 1982.
100. Backenstoss G. e.a.— In: Proc. X Intern. Conf. on Few Body Problems in Physics, Karlsruhe, 1983, v. II, p. 239; Aniol K. e.a.— Ibid., p. 243.
101. Butler G. W. e.a.— Phys. Rev. C, 1982, v. 26, p. 1737.