

# ДВУМЕРНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПЕРТУРБАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ

*А. И. Вайнштейн*

Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

*В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман*

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обзор посвящен обсуждению параллелей между четырехмерными калибровочными теориями и двумерными сигма-моделями. Сигма-модели используются как лаборатория, позволяющая исследовать такие проблемы, как операторное разложение вне рамок теории возмущений, вакуумные конденсаты, низкоэнергетические теоремы, т. е. непертурбативные эффекты. Все эти вопросы интенсивно обсуждаются в текущей литературе, и мы даём критический анализ ситуации.

Вторая часть обзора представляет собой подробное обсуждение суперсимметричной  $O(3)$  сигма-модели. Дается описание метода вычисления функции Гелл-Мана — Лоу и фермионных конденсатов, основанного на инстантонном исчислении. Ранее аналогичный метод был использован нами в четырехмерных теориях Янга — Миллса. В обзоре мы пытаемся пояснить все аспекты метода на упрощенном примере. Основные пункты: 1) инстантонная мера из чисто классического анализа; 2) теоремы о неперенормируемости при самодуальном внешнем поле; 3) существование вакуумных конденсатов, совместимых с суперсимметрией.

This review is devoted to the discussions of the parallels existing between four-dimensional gauge theories and two-dimensional sigma-models. Sigma-models are used as a laboratory allowing us to investigate such issues as the operator product expansion beyond perturbation theory, vacuum condensates, low-energy theorems i.e. non-perturbative effects. All these questions are intensively discussed in the current literature, and we give a critical analysis of the situation.

The second part of the review represents a discussion of the supersymmetric  $O(3)$   $\sigma$ -model. The instanton-based method for calculating the exact Gell-Mann—Low function and bifermionic condensate is considered in detail. Previously an analogue of this method has been used by us in four-dimensional Yang—Mills theories. Here we try to elucidate all aspects of the method in simplifying conditions. The basic points are: 1) the instanton measure from purely classical analysis; 2) a non-renormalization theorem in self-dual external fields; 3) existence of vacuum condensates and their compatibility with supersymmetry.

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее концентрированные усилия вкладываются сейчас в исследования неабелевых теорий Янга — Миллса. Динамика, присутствующая этим теориям, богата и необычна. Достаточно упомянуть такие явления, как пленение цвета, размерная трансмутация, спонтанное нарушение киральной симметрии и т. д. К сожалению, не-

смотря на существенный прогресс, мы все еще далеки от полного понимания этих явлений. Стало ясно, что они каким-то образом связаны со сложной структурой вакуума, однако исследование последней оказалось чрезвычайно трудной задачей.

Для того чтобы глубже понять сущность проблемы, теоретики часто упрощают исходную теорию. Например, пренебрегают фермионами, или рассматривают предел больших  $N$ , или даже — совсем радикальный шаг — заменяют исходную теорию Янга — Миллса на какую-нибудь простую модель, которая лишь отчасти имитирует характерные черты неабелевой динамики. Это, конечно, удаляет от реальности, зато одновременно предоставляет большую свободу для теоретического маневра, выявляет новые аспекты теории, скрытые параметры и симметрии. Более того, подобные упрощенные модели зачастую служат прекрасной теоретической лабораторией для проверки методов и подходов, разработанных для решения реальных задач реальной физики.

Как было впервые отмечено А. М. Поляковым [1], существует глубоко коренящаяся аналогия между четырехмерными теориями Янга — Миллса и двумерными  $\sigma$ -моделями. Действительно, впервые предложенная 25 лет назад [2]  $\sigma$ -модель служила для демонстрации идей спонтанного нарушения киральной симметрии во времена, предшествующие квантовой хромодинамике (КХД). Через два года после открытия асимптотической свободы КХД было показано, что в двумерных  $O(3)$   $\sigma$ -моделях константа связи также падает на малых расстояниях [1]. Что касается топологически нетривиальных решений классических уравнений поля в КХД и  $O(3)$   $\sigma$ -модели, они были получены одновременно [3, 4]. Далее, в  $SU(N)$ -обобщениях  $\sigma$ -модели [так называемых  $CP(N-1)$ -моделях] инстантоны были найдены при всех  $N$  [5]. В пределе больших  $N$  обе теории,  $O(N)$  и  $CP(N-1)$ , были точно решены [1, 6, 7]. В результате удалось понять на языке двумерных моделей роль инстантонов в формировании физического спектра, сформулировать  $U(1)$ -проблему, получить безмассовое векторное калибровочное поле как связанное состояние исходных полей и т. д. [7].

Вдохновленные этими наблюдениями, мы обсудим здесь некоторые непертурбативные эффекты в рамках  $\sigma$ -моделей. Конкретнее, основное внимание будет уделено проблемам, наиболее интересным с точки зрения КХД: — статусу вилсоновского операторного разложения (ОРЕ) вне рамок теории возмущений, вакуумным конденсатам, низкоэнергетическим теоремам, инстантонам. Во многих случаях интерес к соответствующим проблемам в хромодинамике вытекает из так называемых правил сумм КХД [8]. Возможно, стоит подчеркнуть с самого начала, что статья добавляет очень мало, если добавляет вообще, к пониманию динамики двумерных моделей. Мы используем  $\sigma$ -модели как надежный теоретический базис для анализа в упрощенных условиях некоторых практически важных и активно обсуждаемых задач хромодинамики.

Настоящий обзор организован следующим образом. Для того чтобы сделать материал замкнутым, мы излагаем в разд. 1 основные сведения об  $O(N)$   $\sigma$ -моделях, которые необходимы для всего последующего рассмотрения. Раздел 2 посвящен обсуждению вилсоновского операторного разложения [9]. Затрагиваются несколько взаимосвязанных, но не тождественных аспектов проблемы: математическая формулировка ОРЕ, его физический смысл и, наконец, непертурбативные вакуумные ожидания локальных операторов. Среди прочего мы подчеркиваем, что последовательное операторное разложение обязательно требует введения вспомогательного параметра, точки нормировки  $\mu$  рассматриваемых операторов. Коль скоро это сделано — и коэффициентные функции, и вакуумные конденсаты определены однозначно. Общий вывод таков: операторное разложение хорошо определено вне рамок теории возмущений. Более того,  $\sigma$ -модели при больших  $N$  очень похожи на КХД и в численном аспекте. Именно, при разумном выборе точки нормировки зависимость вакуумных конденсатов от  $\mu$  оказывается слабой и численно ею можно пренебречь в хорошем приближении.

Глубокая аналогия между  $\sigma$ -моделями и КХД (асимптотическая свобода, размерная трансмутация, существование непертурбативных эффектов) делает, на наш взгляд, выяснение статуса операторного разложения в  $\sigma$ -модели особенно поучительным. Упомянем, что в этом контексте  $\sigma$ -модель рассматривалась в работах Давида [11, 12], соотношение с которыми обсуждается в конце разд. 2.

Операторное разложение обсуждается в литературе и на примере других простых моделей, в частности в хиггсовской модели [10] и, особенно подробно, в модели Швингера [13]. Окончательный вывод из исследований модели Швингера состоит в том, что операторное разложение имеет место. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к оригинальным работам [13]. Возможно, стоит отметить, что статус ОРЕ в последнее время стал предметом активного обсуждения и полемики [10—13]. Мы проанализируем вопросы, поднятые в [10—13], и постараемся объяснить, как разрешаются «загадки», упомянутые в этих работах.

В следующем разделе (разд. 3) разбирается вопрос об аномалии в следе тензора энергии-импульса. С использованием точного решения  $O(N)$ -модели в пределе больших  $N$  продемонстрировано, что аномалия определяет массы физических частиц. Аналогичное соотношение было получено ранее в КХД [8, 14].

В разд. 4 обсуждаются низкоэнергетические теоремы, которые связывают амплитуды рассеяния при низких энергиях с непертурбативными вакуумными ожиданиями некоторых операторов. Демонстрировано, что теоремы действительно воспроизводят точный ответ, известный в  $\sigma$ -моделях при больших  $N$ . Это тем более замечательно, что в КХД сходные теоремы служат важным, а зачастую и единственным источником динамической информации [15].

Этот же раздел трактует так называемую  $U(1)$ -проблему [16]

в  $CP(N - 1)$ -моделях. В КХД она является ключевой для понимания механизма генерации массы  $\eta'$ -мезона. С технической стороны изучается низкоэнергетическое поведение корреляционных функций, индуцированных операторами плотности топологического заряда. Мы анализируем аналогичные корреляторы в случае  $\sigma$ -модели и демонстрируем, что общая картина, развитая в КХД, подтверждается. Наконец, в разд. 5 мы обращаемся к суперсимметричной  $O(3)$   $\sigma$ -модели, предложенной в [17, 18]. Дан краткий обзор структуры модели и ее основных свойств. С использованием инстантонного исчисления найдена точная функция Гелл-Мана — Лоу для этой теории. Вывод в значительной степени повторяет рассмотрение, проведенное в [19], где была определена полная  $\beta$ -функция суперсимметричной теории Янга — Миллса. Имеются, однако, некоторые новые пункты и, что более важно для настоящих целей, рассмотрение двумерных моделей дает возможность разъяснить некоторые тонкие моменты и является весьма полезным с педагогической точки зрения.

### 1. МОДЕЛЬ $O(N)$ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ $N$

В дальнейшем нам понадобятся сведения о  $CP(N - 1)$  и  $O(N)$   $\sigma$ -моделях и их обобщениях. Эти модели хорошо изучены, и их решения в пределе больших  $N$  описаны в [6, 7] \*. Однако в целях замкнутости изложения мы рассмотрим здесь решение для простейшей  $O(N)$ -модели. В более сложных случаях мы ограничимся тем, что приведем нужные нам результаты, отсылая за деталями к литературе.

$O(N)$   $\sigma$ -модель в двумерном пространстве-времени — это теория  $N$ -полей  $\sigma^a$  ( $a = 1, \dots, N$ ), определенных на сфере

$$\sigma^a(x) \sigma^a(x) = 1 \tag{1}$$

и преобразующихся по векторному представлению группы  $O(N)$ . Лагранжиан выбирается в виде \*\*

$$\mathcal{L} = \frac{N}{2f} (\partial_\mu \sigma^a(x)) (\partial_\mu \sigma^a(x)). \tag{2}$$

На первый взгляд, это теория без взаимодействия. Легко, однако, убедиться, что, разрешая условие (1) относительно одной из компонент поля, мы приходим к нетривиальному взаимодействию между остальными полями. В рамках теории возмущений это взаимодействие описывается вершинами с 4, 6 и т. д. линиями. Величина  $f$  играет роль константы связи. Точное решение не исчерпывается, однако, теорией возмущений. Так, для  $N = 3$  (и только для  $N = 3$ ) уравнения поля имеют классические решения с конечным действием — инстантоны [3]. Но непертурбативные эффекты имеют место и для

\* Прекрасное введение в  $CP(N - 1)$ -модели было дано Коулманом [20].

\*\* Во всех случаях, если не оговорено особо, мы работаем с формулами в евклидовом пространстве-времени.

$N \neq 3$ , т. е. не зависят от существования инстантонов. Мы убедимся в этом, рассмотрев предел  $N \rightarrow \infty$ .

Прежде чем непосредственно заняться решением теории в этом пределе, удобно изменить нормировку  $\sigma$ -поля и учесть связь (1) с помощью множителя Лагранжа  $\alpha(x)$ . Действие  $S_E$  и производящий функционал для функций Грина  $Z_E[J]$  в евклидовом пространстве-времени тогда запишутся в виде

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial_\mu \sigma^a \partial_\mu \sigma^a + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \left( \sigma^a \sigma^a - \frac{N}{f} \right) \right\}, \quad (3)$$

$$Z_E[J] = \int \prod_x D\sigma(x) D\alpha(x) \exp \left\{ -S_E + \int d^2x J^a(x) \sigma^a(x) \right\}. \quad (4)$$

Множитель  $N^{-\frac{1}{2}}$  перед  $\alpha(x)$  выбран из соображений удобства. Действие (3) квадратично по  $\sigma(x)$ , поэтому функциональный интеграл по  $\sigma$  легко вычисляется:

$$Z_E[J] = \int \prod_x D\alpha(x) \times \\ \times \exp \left\{ -S_{\text{eff}} + \frac{1}{2} \int d^2x J^a(x) \frac{1}{-\partial^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}} J^a(x) \right\}, \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{N}{2} \text{Sp} \ln \left[ -\partial^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \right] - \int d^2x \frac{\sqrt{N}}{2f} \alpha(x).$$

Здесь  $\left[ -\partial^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \right]^{-1}$  — символическая запись функции Грина оператора  $\left( -\partial^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \right)$ .

Решающим для дальнейшего продвижения является тот факт, что существует стационарная точка по  $\alpha(x)$  для  $Z_E[J]$ . В результате удастся взять оставшийся функциональный интеграл методом перевала. В силу лоренц-инвариантности перевальное значение  $\alpha(x)$  (если существует) не зависит от  $x$ . Обозначим эту константу  $\sqrt{N} m^2$ . Тогда

$$\alpha(x) = \sqrt{N} m^2 + \alpha_{qu}(x).$$

Отклонения от перевального значения  $\alpha_{qu}(x)$  описывают квантовые флуктуации. Разложим  $S_{\text{eff}}$  по  $\alpha_{qu}(x)$ , считая флуктуации малыми. Тогда

$$S_{\text{eff}} = \frac{N}{2} \text{Sp} \ln(-\partial^2 + m^2) - \int d^2x \frac{m^2 N}{2f} + \\ + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{Sp} \left[ \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} \right]^k - \frac{\sqrt{N}}{2f} \int d^2x \alpha_{qu}(x). \quad (6)$$

Первые два члена в разложении — несущественные константы, и пока мы их опустим. Преобразуем член, линейный по  $\alpha_{qu}(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{N}}{2} \text{Sp} \left[ \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \alpha_{qu} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{N}}{2} \int d^2x \left\langle x \left| \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \right| x \right\rangle \alpha_{qu}(x) = \\ &= \frac{\sqrt{N}}{2} \left\langle 0 \left| \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \right| 0 \right\rangle \int d^2x \alpha_{qu}(x) = \\ &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{\sqrt{N}}{2} \int d^2x \alpha_{qu}(x). \end{aligned}$$

Возникший интеграл по импульсам требует регуляризации. С этой целью мы введем импульс обрезания  $\Lambda$ :

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Параметр  $m^2$  выбирался из требования стационарности  $S_{\text{eff}}$ , т. е. из условия отсутствия в разложении (6) члена, линейного по  $\alpha_{qu}(x)$ . Из приведенных формул видно, что это условие выполнено, если  $m$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{7}$$

Можно, конечно, вместо затравочной константы  $f$  ввести эффективную константу связи  $f(\mu)$ , тогда

$$\frac{1}{f(\mu)} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2}.$$

Формула (7) интересна в двух отношениях. Во-первых, из нее следует, что теория асимптотически свободна. Действительно, при фиксированном  $m$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$  константа связи  $f \rightarrow 0$ . Во-вторых, возник массовый параметр  $m$ , зависимость которого от константы связи неаналитична:

$$m^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{f}}.$$

Обратимся теперь к следующим членам разложения  $S_{\text{eff}}$  по  $\alpha_{qu}(x)$ . Квадратичный член

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \text{Sp} \left[ \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \alpha_{qu} \right]^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^2x d^2y \alpha_{qu}(x) \Gamma(x-y) \alpha_{qu}(y) \end{aligned}$$

описывает распространение  $\alpha$ -частиц с пропагатором

$$D^{(\alpha)}(p) = -2/\Gamma(p),$$

где  $\Gamma(p)$  — фурье-образ  $\Gamma(x-y)$ ,

$$\Gamma(p) = A(p) \equiv \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{[q^2 + m^2][(p+q)^2 + m^2]} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4m^2)}} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4m^2} - \sqrt{p^2}} \quad (8)$$

Пропагатор  $D^{(\alpha)}(p)$  не содержит полюсов по  $p^2$  (только разрез, начинающийся при  $p^2 = -4m^2$ ). Поэтому, строго говоря, поле  $\alpha(x)$

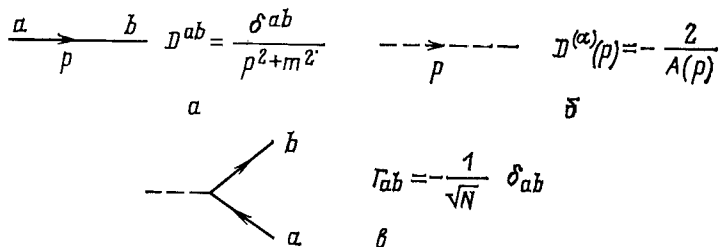


Рис. 1. Правила Фейнмана в  $O(N)$   $\sigma$ -модели

не описывает настоящей частицы. Зная пропагатор  $D^{(\alpha)}(p)$ , можно вычислить  $Z[J]$  с помощью теории возмущений. Результат удобно сформулировать в терминах диаграмм Фейнмана (рис. 1). Таким образом, теория описывает распространение  $N$  массивных частиц

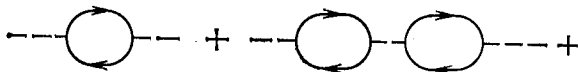


Рис. 2. Одночастично приводимые диаграммы, включаемые в  $\alpha$ -пропагатор

с пропагатором  $D^{ab}(p) = \delta^{ab}/(p^2 + m^2)$  (рис. 1, а), распространение  $\alpha$ -«частицы» с  $D^{(\alpha)}(p) = -2/A(p)$  (рис. 1, б) и их взаимодействие с вершиной  $\Gamma^{ab} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\delta^{ab}$  (рис. 1, в). Как ясно из построения

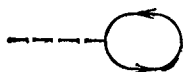


Рис. 3. «Головастики», которые не надо включать в диаграммы Фейнмана для  $\sigma$ - и  $\alpha$ -полей

в главном по  $N$  приближении, диаграммы типа рис. 2 уже содержатся в  $D^{(\alpha)}(p)$  и их не нужно учитывать. То же справедливо для диаграмм типа «головастик» (рис. 3).

Описанная теория возмущений значительно отличается от теории возмущений в исходной формулировке (1) и (2). Во-первых, в ней явно учтен главный непертурбативный эффект — возникновение массы у  $\sigma$ -частиц (и увеличение  $\sigma$ -частиц на единицу). Во-вторых, что не менее важно, структура диаграмм сильно упростилась. Действительно, поскольку  $\alpha$ -частица — синглет по группе  $O(N)$ , то каждый

член разложения по  $1/N$  определяется теперь конечным числом диаграмм Фейнмана. В частности, главный член разложения вычислен в этом разделе и определяется древесными диаграммами.

## 2. ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ВАКУУМНЫЕ ДИАГРАММЫ

В этом разделе, центральном для настоящего обзора, обсуждается статус операторного разложения (ОРЕ) вне рамок теории возмущений.

Общая идея, лежащая в основе ОРЕ в асимптотически свободных теориях поля, такова. Из-за асимптотической свободы флуктуации малых размеров находятся под теоретическим контролем. Во-первых, есть пертурбативные флуктуации, эффект которых характеризуется малой эффективной константой связи. Во-вторых, существуют, как правило, классические решения и квантовые флуктуации вокруг них. Их эффект экспоненциален по обратной константе связи. Однако, если необходимо, он может быть вычислен явно, коль скоро речь идет о флуктуациях малого размера.

Таким образом, первый шаг в построении ОРЕ — явное интегрирование по всем флуктуациям малого размера. Результат интегрирования представляет собой нечто вроде эффективного лагранжиана, т. е. набор членов с различным числом внешних линий. Это, однако, еще не окончательный ответ для физической амплитуды. Для того чтобы найти последнюю, мы должны учесть также флуктуации большого размера. По отношению к флуктуациям большого размера эффективный лагранжиан, полученный на первом шаге, представляет собой набор **операторов**. Матричные элементы этих операторов зависят от динамики на больших расстояниях. Скажем, в КХД они, вообще говоря, неизвестны. Однако в  $\sigma$ -моделях (по крайней мере при больших  $N$ ) все матричные элементы, имеющие отношение к делу, вычислимы (см. ниже).

До сих пор мы ввели только один масштаб масс  $\mu$ . Именно, мы предположили, что явное интегрирование по флуктуациям размера  $\rho < \mu^{-1}$  выполнено. Массовый параметр  $\mu$  должен быть выбран таким образом, чтобы бегущая константа связи при этой виртуальности была мала.

Если другого массового параметра нет, скажем, мы имеем дело с вакуум-вакуумной амплитудой, тогда процедура, намеченная выше, имеет малую практическую значимость, поскольку, для того чтобы получить физическую амплитуду, необходимо отсуммировать бесконечный ряд матричных элементов.

Поэтому обычно рассматривается случай, когда есть большой внешний импульс  $q \gg \mu$ . Тогда коэффициентные функции для различных операторов, определяемые на первом этапе — интегрирование по флуктуациям малых размеров, являются обратными степенями  $(q/\mu)$  и можно обрезать ряд, удержав лишь несколько первых членов.



Ясно, что выбор  $\mu$  неоднозначен. Пока константа связи остается малой,  $\mu$  может изменяться. Что происходит при этом? Физические амплитуды не зависят от  $\mu$  вовсе. Таким образом, изменяя  $\mu$ , мы просто перераспределяем вклады между матричными элементами и коэффициентными функциями. Матричные элементы включают, среди прочего, эффекты пертурбативных флуктуаций с размером  $\rho > \mu^{-1}$ . Поэтому для практических целей желательно выбрать  $\mu$  (внутри разрешенной области) как можно меньше. Тогда относительный вес тривиального, т. е. пертурбативного, вклада уменьшается, и наоборот, вес нетривиального вклада, связанного с крупномасштабными флуктуациями, увеличивается.

В случае КХД, оказывается, можно выбрать  $\mu$  таким образом, что вакуумные матричные элементы в значительной мере насыщаются непертурбативными флуктуациями. Практически, зависимость от  $\mu$  можно оставить только в логарифмических факторах, связанных с аномальными размерностями, и пренебречь пертурбативными вкладами в матричные элементы. Другими словами, в хорошем приближении эффект теории возмущений абсорбируется в коэффициентные функции, в то время как непертурбативные эффекты учитываются в нетривиальных вакуумных ожиданиях различных операторов. Эта упрощенная процедура составляет основу так называемого метода правил сумм КХД, успешно применявшегося в течение последних пяти лет для изучения адронного спектра.

Подобная численная ситуация, конечно, не универсальна и не распространяется на все теории поля. Например, нет смысла обсуждать непертурбативные эффекты в КЭД. Вся затея с операторным разложением в этом случае — просто перераспределение теории возмущений между коэффициентными функциями и матричными элементами.

Несмотря на феноменологический успех правил сумм КХД, существует несколько вопросов, которые требуют дальнейшего теоретического рассмотрения. Например, непертурбативные эффекты экспоненциальны по обратной константе связи. Последовательно ли учитывать их, не суммируя при этом весь ряд теории возмущений?

Мы изучим некоторые из этих проблем в рамках  $O(N)$   $\sigma$ -моделей при больших  $N$ . Достоинство этих моделей заключается в том, что они могут быть решены явно и можно сравнить формулы, основывающиеся на операторном разложении с точным ответом.

Весьма забавно, что  $\sigma$ -модели, как оказывается, действительно имитируют основные черты КХД. Именно, в главном приближении по  $N$  можно забыть о  $\mu$ -зависимости матричных элементов. С другой стороны, более тонкие вопросы, возникающие в следующих порядках по  $1/N$ , адекватно решаются только в том случае, если мы придерживаемся общей процедуры и вводим точку нормировки  $\mu$ .

Возможно, стоит отметить, что ОРЕ в двумерных (или простых четырехмерных) теориях исследовалось в ряде недавних работ [10—13]. Во всех этих работах утверждается, что существуют трудности

с операторным разложением или оно вообще неприменимо. Мы полагаем, что этот вывод связан с тем обстоятельством, что авторы забывают о необходимости введения точки нормировки. Мы разделяем, однако, с Давидом [10] утверждение о справедливости и простоте ОРЕ в главном по  $1/N$  порядке.

**Вакуумные конденсаты в  $O(N)$ -моделях в ведущем по  $1/N$  приближении.** Начнем с систематического обсуждения проблем операторного разложения в  $O(N)$   $\sigma$ -моделях. В частности, свяжем ведущие непертурбативные вклады с вакуумными матричными элементами.

В разд. 1 было показано, что поле  $\alpha(x)$  имеет ненулевое вакуумное среднее. Конкретно, в ведущем по  $1/N$  порядке

$$\langle 0 | \alpha(x) | 0 \rangle = \sqrt{Nm^2} = \sqrt{N}\Lambda^2 \exp(-4\pi/f).$$

Квантовые поправки к этому выражению подавлены как степени  $1/N$  и не могут разрушить конденсат. Выпадение в осадок одного поля  $\alpha(x)$  влечет за собой конденсацию других полей. В частности, в силу уравнений движения

$$(\partial_\mu \sigma)^2 = -\sigma \partial^2 \sigma = -\sigma \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sigma = -\alpha \frac{\sqrt{N}}{f},$$

и поэтому

$$\langle 0 | f (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle = -Nm^2. \tag{9}$$

Вакуумные ожидания от произведения полей  $[f (\partial_\mu \sigma)^2]^k$  также отличны от нуля и в главном по  $N$  приближении факторизуются [22]:

$$\langle 0 | [f (\partial_\mu \sigma)^2]^k | 0 \rangle = [-Nm^2]^k. \tag{10}$$

На первый взгляд, формула (9) выглядит странной, поскольку в евклидовом пространстве-времени  $f (\partial_\mu \sigma)^2$  — положительно определенный оператор, а его вакуумное ожидание оказалось отрицательным. Разрешение парадокса состоит, конечно, в том, что оператор  $(\partial_\mu \sigma)^2$  — сингулярный объект и матричный элемент (9) требует доопределения. При регуляризации условия положительности, вообще говоря, не возникает. Разберем этот вопрос подробнее.

Чтобы резко отделить проблему, начнем с грубого вычисления, которое состоит в том, что матричный элемент от произведения полей  $\partial_\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x)$  заменяется функцией Грина в совпадающих точках, т. е.

$$\langle 0 | f (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle = fN \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{p^2 + m^2}. \tag{11}$$

Обрезав интеграл на верхнем пределе на импульсе  $\Lambda^2$ , получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | f (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle &= \frac{fN}{4\pi} \left( \Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) = \\ &= \frac{fN}{4\pi} \Lambda^2 - Nm^2 = \frac{fN}{4\pi} \Lambda^2 - N\Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{f}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Поправки к этому вычислению, связанные с обменом  $\alpha$ -частицами, содержат малость, пропорциональную степеням  $(1/N)$ . Поэтому вычисление вакуумного конденсата в главном по  $N$  приближении заканчивается на первом же шаге. Результат представляется как сумма двух членов. Первый член регулярен по  $f$  и может быть получен в теории возмущений над «вакуумом», отвечающим исходной формулировке теории, когда  $\sigma$ -частицы безмассовы. Второй член возник из-за утяжеления квантов поля, он неаналитичен по константе связи и связан с непертурбативными эффектами. Происхождение этих двух членов совершенно различно и их невозможно спутать. Вопрос со знаком вакуумного ожидания не возникает, поскольку полная сумма (12) положительна.

В КХД вакуумные средние, как мы думаем, также представляются в виде суммы регулярных по константе связи бесконечных членов (пропорциональных  $\Lambda^4$ ) и конечных членов, связанных с непертурбативными эффектами. Причем, в случае КХД число регулярных по константе связи членов бесконечно. Поэтому в КХД возникает вопрос, как выделить из бесконечного числа бесконечно больших членов интересующий нас конечный непертурбативный вклад. В вычислениях на решетках методом Монте-Карло эта проблема стоит со всей остротой [23]. Проблема усложняется еще тем обстоятельством, что ряд регулярных членов обычно факториально расходится. Иногда даже высказывается предположение, что правильный способ суммирования расходящихся рядов воспроизведет непертурбативный вклад.

Мы видим, что по сравнению с КХД двумерная  $\sigma$ -модель значительно проще. Тем не менее этот пример вполне поучителен и ясно показывает, что непертурбативный вклад никак не есть результат доопределения суммирования регулярных по константе связи членов, поскольку суммировать, собственно говоря, нечего — есть только один расходящийся член. Более внимательный анализ показывает, что можно пойти дальше и ввести такую регуляризацию, что вклад теории возмущений в конденсат вообще отсутствует.

Чтобы разобраться в этом вопросе более обстоятельно, нужно дать формальное определение для сингулярного произведения  $\partial_\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x)$ . В качестве одного из возможных приемов следующее:

$$\langle 0 | \partial_\mu \sigma^a(0) \partial_\mu \sigma^b(0) | 0 \rangle = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow +0 \\ x_1 = 0}} \langle 0 | T \{ \partial_\mu \sigma^a(x) \partial_\mu \sigma^b(0) \} | 0 \rangle, \quad (13)$$

где символ  $T$  означает обычное дайсоновское  $T$ -произведение. Последнее определено в пространстве Минковского, поэтому средние в (13) понимаются как средние в пространстве Минковского. Тогда

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \partial_\mu \sigma^a(x) \partial_\mu \sigma^b(y) \} | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \langle 0 | T \{ \sigma^a(x) \sigma^b(y) \} | 0 \rangle + \\ &+ \delta(x_0 - y_0) \langle 0 | [\partial_0 \sigma^a(x), \sigma^b(y)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Воспользовавшись каноническим коммутационным соотношением, получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \partial_\mu \sigma^a(x) \partial_\mu \sigma^b(y) \} | 0 \rangle &= \delta^{ab} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \exp[-ip(x-y)] \frac{ip^2}{p^2 - m^2} - \\ &- i\delta^{ab} \delta^{(2)}(x-y) = \delta^{ab} \left\{ i\delta^{(2)}(x-y) + \frac{m^2}{4\pi} \ln \frac{1}{m^2 |x-y|^2} + \right. \\ &\left. + O((x-y)^2 \ln(x-y)^2) \right\} - i\delta^{ab} \delta^{(2)}(x-y). \end{aligned} \quad (14)$$

Квадратично расходящийся член  $\sim \Lambda^2$  в (12) отвечает  $\delta^2(x-y)$  в совпадающих точках  $x = y$  в формуле (14). Новым по сравнению с наивным вычислением является коммутаторный член, который сокращает  $\delta^2(x-y)$  (или, что то же самое,  $\Lambda^2$ ). Итак,

$$\langle 0 | f \partial_\mu \sigma^a \partial_\mu \sigma^a | 0 \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \langle 0 | f(|x|) T \{ \partial_\mu \sigma^a(x) \partial_\mu \sigma^a(0) \} | 0 \rangle = Nm^2,$$

$$f(|x|) = \frac{4\pi}{\ln \frac{1}{m^2 |x|^2}}$$

что как раз соответствует евклидову ожиданию (9). При доопределении (13) условие положительности для  $\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma$ , очевидно, не имеет места, и отрицательный знак в (9) не должен вызывать удивления.

Может показаться, что выбранное нами доопределение не самое лучшее и можно найти более удачное. В частности, кажется более естественным определить  $\langle 0 | (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle$  через функциональный интеграл, т. е. построить производящий функционал

$$\begin{aligned} Z_E[J, \varphi] &= \int \prod_x D\sigma(x) D\alpha(x) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2 x \left[ (1 + \varphi) (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \left( \sigma^2 - \frac{N}{f} \right) + J^a \sigma^a \right] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

и вычислить среднее, воспользовавшись привычной формулой

$$-\frac{1}{2} \langle 0 | (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{Z_E(J, \varphi)} \frac{\delta}{\delta \varphi} Z_E(J, \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{J=0}. \quad (16)$$

Такие средние на операторном языке обычно отвечают виковскому  $T$ -произведению, в котором (в отличие от дайсоновского) можно свободно выносить производные за знак  $T$ -произведения, не добавляя коммутаторов. Поэтому на первый взгляд кажется, что доопределение (16) должно вернуть нас к наивным вычислениям (11), (12). Однако, как известно из нерелятивистской квантовой механики (см. книгу Фейнмана и Хиббса [24]), при варьировании по источнику для кинетической энергии возникает ряд тонкостей. В приложении мы покажем, что правильное обращение с функциональным интегралом приводит к ответу, который совпадает с результатом (14), т. е. с вычислением через дайсоновское  $T$ -произведение. Таким образом, пертурбативный вклад в вакуумное ожидание  $\langle 0 | (\partial_\mu \sigma)^2 | 0 \rangle$  равен нулю.

**Операторное разложение в пределе  $N \rightarrow \infty$ .** Мы докажем здесь, что наивное операторное разложение справедливо в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Но сначала несколько слов о теории возмущений в  $O(N)$ -моделях. Взаимосвязь между пертурбативными и непертурбативными эффектами в этих моделях в некотором смысле противоположна той, которая существует в модели Хиггса.

Теорию возмущений для  $O(N)$ -модели можно развивать несколькими способами. Можно, например, разрешить условие связи относительно одной из компонент, скажем  $\sigma_N$ :

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{N}{f} - \sigma^i \sigma^i} \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

и подставить ее в исходный лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu \sigma^i \partial_\mu \sigma^i + \left( \frac{N}{f} - \sigma^i \sigma^i \right)^{-1} (\partial_\mu \sigma^h \sigma^h) (\partial_\mu \sigma^l \sigma^l) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma^i \left\{ \delta^{ih} + \frac{f}{N} \sigma^i \sigma^h \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{f}{N} \sigma^2 \right)^n \right\} \partial_\mu \sigma^h. \end{aligned} \quad (17)$$

При малой константе связи второй член в (17) можно рассматривать как возмущение. Тогда в нулевом порядке по константе связи вакуумное ожидание  $N$ -й компоненты поля отлично от нуля:

$$\langle 0 | \sigma_N | 0 \rangle = \sqrt{N/f},$$

а колебания ортогональных компонент  $\sigma^i$  соответствуют голдстоуновским бозонам

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma^i \partial_\mu \sigma^i.$$

Как ясно из разд. 1, точное решение задачи не имеет ничего общего с этой теорией возмущений: вакуум оказывается невырожденным, и никаких голдстоуновских бозонов нет. Спектр состоит из  $N$  массивных частиц, т. е. на одну частицу больше, чем независимых динамических переменных в лагранжиане (17). Таким образом, эта теория возмущений строится над спонтанно-нарушенным вакуумом, а точное решение отвечает восстановлению  $O(N)$ -симметрии\*. Представляется интересным проверить, можно ли воспроизвести результаты точного решения с помощью операторного разложения в этой совсем нетривиальной ситуации.

Прежде чем непосредственно заняться операторным разложением, нужно выяснить, чему равны матричные элементы различных опера-

\* Подробный анализ  $O(N)$ -модели с этой точки зрения проведен в [6].

торов по физическому вакууму. Пользуясь результатами разд. 1, легко показать, что

$$\langle f\sigma^i\sigma^k \rangle = \delta^{ik},$$

$$\langle f\partial_\mu\sigma^i\partial_\nu\sigma^k \rangle = -g_{\mu\nu}\delta^{ik}m^2/2.$$

Поскольку поле  $\sigma$  — безразмерно, то число операторов данной размерности бесконечно велико, и, чтобы вычислить одну степенную поправку в двумерных теориях, приходится суммировать бесконечно много матричных элементов. Эти матричные элементы в главном по  $N$  приближении факторизуются. Например,

$$\langle \underbrace{\sigma^2\sigma^2 \dots \sigma^2}_{n} (\partial\sigma)^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle^n \langle (\partial\sigma)^2 \rangle.$$

Факторизация означает, в частности, что вакуумные ожидания операторов с «неудачно» свернутыми  $O(N)$ -индексами малы, например:

$$\langle \sigma^i\partial_\mu\sigma^i\sigma^k\partial_\mu\sigma^k \rangle = \langle \sigma^i\sigma^k \rangle \langle \partial_\mu\sigma^i\partial_\mu\sigma^k \rangle = \frac{1}{N} \langle \sigma^2 \rangle \langle (\partial\sigma)^2 \rangle.$$

Это условие значительно упрощает весь дальнейший анализ.

Чтобы обойти некоторые технические осложнения, мы будем работать, однако, не с полями  $\sigma^i$ , а введем новые переменные  $\phi^{i*}$ , так что [6a]

$$\sigma^i = \frac{\phi^i}{1 + \frac{f}{4N} \phi^k\phi^k}.$$

В новых переменных действие приобретает стандартный вид нелинейного лагранжиана киральной модели

$$\mathcal{L} = \frac{1/2 \partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^i}{\left[1 + \frac{f}{4N} \phi^2\right]^2},$$

а система равенства для вакуумных средних  $\sigma$ -полей в новых переменных переписывается в виде

$$\left\langle 0 \left| \frac{f}{4} \phi^i\phi^k \right| 0 \right\rangle = \delta^{ik},$$

$$\left\langle 0 \left| \frac{f}{4} \partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^k \right| 0 \right\rangle = -\frac{m^2}{2} g_{\mu\nu}\delta^{ik}$$

с аналогичным условием факторизации для более сложных операторов. В качестве предварительной заготовки нам понадобится операторное разложение для пропагатора поля  $\phi^i$ . При построении опера-

\* В приложении Б продемонстрировано, как можно работать непосредственно с полями  $\sigma$ .

торного разложения удобно использовать технику внешнего поля. Подставим  $\phi^i$  в виде

$$\phi^i = c^i + q^i,$$

где  $c^i$  — численное внешнее поле, удовлетворяющее классическим уравнениям движения, а  $q^i$  — малые квантовые флуктуации на фоне классического поля. Лагранжиан, квадратичный по полю  $q(x)$ , описывает распространение волны во внешнем поле  $c(x)$ :

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\lambda c^2)^2} \left\{ (\partial_\mu q)^2 - \frac{2\lambda (\partial_\mu c)^2}{(1+\lambda c^2)} q^2 - 8\lambda \frac{(\partial_\mu c^i) c^k}{1+\lambda c^2} \partial_\mu q^i q^k + \right. \\ \left. + 12\lambda^2 \frac{(\partial_\mu c)^2 c^i c^k}{(1+\lambda c^2)^2} q^i q^k \right\}, \quad \lambda = \frac{f}{4N}.$$

Используя этот лагранжиан, пропагатор  $q^i(x)$  можно представить в следующем символическом виде:

$$D^{ik}(x, y) = \left\langle x \left| \frac{1}{[\mathcal{P}^2 + M^2(c)] \delta^{ik} + iA_\mu^{ik}(c) \mathcal{P}_\mu + B^{ik}(c)} (1 + \lambda c^2)^2 \right| y \right\rangle. \quad (18)$$

Здесь  $|x\rangle$  — собственное состояние оператора координаты  $\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle$ ;  $\langle x|y\rangle = \delta(x-y)$ ;  $\mathcal{P}_\mu$  — оператор импульса  $\langle x| \mathcal{P}_\mu |y\rangle = -i\partial_\mu \delta(x-y)$ ; коэффициенты  $A, B$  и  $M$  — функции классического поля  $c(\hat{X})$ :

$$M^2(c) = -2\lambda (\partial_\mu c)^2 / (1 + \lambda c^2); \\ A_\mu^{ik}(c) = 4\lambda [c \partial_\mu c \delta^{ik} + (c^k \partial_\mu c^i - c^i \partial_\mu c^k)] / (1 + \lambda c^2); \\ B^{ik}(c) = 12\lambda^2 \frac{(\partial_\mu c)^2 c^i c^k}{(1 + \lambda c^2)^2} + 4\lambda (1 + \lambda c^2)^2 \partial_\mu \left[ \frac{c^k \partial_\mu c^i}{(1 + \lambda c^2)^3} \right].$$

В импульсном представлении пропагатор переписывается в виде

$$D^{ik}(q) \equiv \int d^2x e^{-iqx} \langle x | \hat{D}^{ik} | 0 \rangle = \\ = \int d^2x \langle x | e^{-iq\hat{X}} \hat{D}^{ik} e^{iq\hat{X}} | 0 \rangle = \\ = \int d^2x \left\langle x \left| \frac{(1 + \lambda c^2)^2}{[(\mathcal{P} + q)^2 + M^2] \delta^{ik} + iA_\mu^{ik}(\mathcal{P} + q)_\mu + B^{ik}} \right| 0 \right\rangle. \quad (19)$$

При получении этой формулы мы использовали соотношения типа

$$e^{iq\hat{X}} |y\rangle = e^{iqy} |y\rangle, \quad e^{-iq\hat{X}} \frac{1}{\mathcal{P}_\mu} e^{iq\hat{X}} = \frac{1}{\mathcal{P}_\mu + q_\mu}$$

и т. д. Если внешний импульс  $q$  много больше всех других размерных параметров, то  $D^{ik}(q)$  можно разложить в ряд по  $1/q$ :

$$D^{ik}(q) = [1 + \lambda c^2(0)]^2 \left\{ \frac{1}{q^2} \delta^{ik} - \frac{iq_\mu}{q^4} A_\mu^{ik} + \right. \\ \left. + \frac{1}{q^4} [-M^2 \delta^{ik} + \partial_\mu A_\mu^{ik} - B^{ik}] - \frac{q_\mu q_\nu}{q^6} (2\partial_\nu A_\mu^{ik} + A_\mu^{il} A_\nu^{kl}) + \dots \right\}. \quad (20)$$

Чтобы получить такое разложение, следует воспользоваться соотношениями:

$$\int d^2x \langle x | F[c(\hat{X})] | 0 \rangle = F[c(0)] \int d^2x \langle x | 0 \rangle = F[c(0)]; \\ \int d^2x \langle x | \mathcal{P}_\mu F[c(\hat{X})] | 0 \rangle = F[c(0)] \int d^2x i \partial_\mu \delta^{(2)}(x) = 0; \\ F[c(\hat{X})] \mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu F[c(\hat{X})] - i \partial_\mu F[c(\hat{X})],$$

где  $F[c(\hat{X})]$  — произвольный функционал поля  $c(\hat{X})$ .

Очевидно, что разложение (20) дает операторное разложение коррелятора

$$\hat{D}^{ik}(q) = i \int d^2x e^{-iqx} T \{ \phi^i(x) \phi^k(0) \}$$

в древесном приближении, если отождествить функции  $M^2(c)$ ,  $A(c)$  ... с нормально упорядоченными операторами:  $M^2[\phi]$ ,  $A[\phi]$ : ... Следующий шаг состоит в вычислении среднего от (20) по физическому вакууму. Сформулированные в этом разделе правила вычисления средних позволяют найти все матричные элементы:

$$\langle 0 | : (1 + \lambda \phi^2)^2 : | 0 \rangle = 4;$$

$$\langle 0 | : M^2[\phi] : | 0 \rangle = m^2;$$

$$\langle 0 | : A_\mu^{ik}[\phi] : | 0 \rangle = 0;$$

$$\langle 0 | : A_\mu A_\nu : | 0 \rangle \sim \langle 0 | : B : | 0 \rangle \sim \frac{1}{N} m^2.$$

Таким образом, при больших импульсах  $q \gg m$  пропагатор поля  $\phi^i$  ведет себя как

$$D^{ik}(q)_{q \rightarrow \infty} = 4\delta^{ik} \frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{m^2}{q^2} + \dots \right).$$

Можно проверить, что первая степенная поправка действительно соответствует одночастичному возбуждению с массой  $m$ . Мы, однако, займемся другой задачей и посмотрим на коррелятор двух токов, связанных с лагранжианом  $O(N)$ -модели:

$$S(q) = \int d^2x e^{-iqx} T \{ j_S(x) j_S(0) \}, \quad (21)$$

где

$$j_S(x) = 2f\mathcal{L}(y) = 4N\lambda \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{(1 + \lambda \phi^2)^2}.$$



Начнем с древесных диаграмм. Для этого ток  $j_S$  следует разложить до линейного по квантовому полю  $q$  члена. Поскольку  $c(x)$  — решение классических уравнений,  $j_S$  можно представить в виде полной производной

$$j_S = -8N\lambda\partial_\mu \left[ \frac{\partial_\mu c^i}{(1+\lambda c^2)^2} q^i \right].$$

Тогда коррелятор [21] переписывается в виде

$$S(q) = (8N\lambda)^2 q_\alpha q_\beta \int d^2x \left\langle x \left| \frac{\partial_\alpha c^i}{(1+\lambda c^2)^2} \{[(\mathcal{P} + q)^2 + M^2] \delta^{ih} + iA_\mu^{ih} (\mathcal{P} + q)_\mu + B^{ih}\}^{-1} \partial_\beta c^k |0 \right\rangle \right.$$

Раскладывая  $S(q^2)$  по степеням  $1/q^2$  и протаскивая операторы  $\mathcal{P}_\mu$  налево с помощью формул коммутирования, можно получить явное выражение для коррелятора  $S(q)$  во внешнем поле:

$$\begin{aligned} \hat{S}(q) = & \frac{64N^2\lambda^2 q_\alpha q_\beta}{(1+\lambda c^2)^2} \left\{ \partial_\alpha c^i \partial_\beta c^k \left( \frac{1}{q^2} - \frac{M^2}{q^4} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{q^4} [\partial_\alpha c^i B^{ih} \partial_\beta c^k - \partial_\alpha c \partial^2 \partial_\beta c \delta^{ih} - \partial_\alpha c^i A_\mu^{ih} \partial_\mu \partial_\beta c^k] + \\ & \left. + \frac{q_\mu q_\nu}{q^8} \partial_\alpha c^i [-4\partial_\mu \partial_\nu \delta^{ih} + 2\partial_\mu A_\nu^{ih} + 2A_\mu^{ih} \partial_\nu - (A_\mu A_\nu)^{ih}] \partial_\beta c^k \right\}. \end{aligned}$$

Эта формула описывает класс диаграмм, изображенных на рис. 4. Операторное разложение получается заменой  $c^i \rightarrow \phi^i$ . При вакуум-

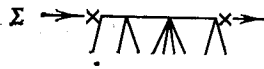


Рис. 4. Приближение деревьев для двухточечной функции (21) во внешнем поле

ном усреднении это громоздкое выражение значительно упрощается и остается только первая скобка:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{S}(q) | 0 \rangle = & -64N^2\lambda^2 q_\alpha q_\beta \frac{1}{8} g_{\alpha\beta} \frac{m^2}{\lambda q^2} \left( 1 - \frac{m^2}{q^2} \right) = \\ = & -8N^2\lambda m^2 \left( 1 - \frac{m^2}{q^2} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Следующий этап состоит в вычислении петли во внешнем поле (рис. 5). Для этого источник  $j_S$  следует разложить до второго порядка по  $q$ :

$$j_S = 8N\lambda \mathcal{L}^{(2)}(q).$$

Реально однопетлевое вычисление не сложнее древесного, однако промежуточные формулы громоздки, и мы приведем лишь ответ, возникающий после вакуумного усреднения:

$$S^{(1)}(q) = -\frac{q^2 N f^2}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{q^2} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} - \frac{2m^4}{q^4} + \dots \right) + O(f^2).$$

В результате сумма древесных и однопетлевых диаграмм равна:

$$S^{(0)} + S^{(1)} = -q^2 \frac{N f^2}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{q^2} - 2N \left[ f + \frac{f^2}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{q^2} \right] \left( m^2 - \frac{m^4}{q^2} + \dots \right). \quad (23)$$

Из ренорм-групповых соображений следует, что члены перед степенными поправками собираются в эффективную константу связи  $f(q^2) = 1/4\pi \ln q^2/m^2$  \*. Обсудим теперь первый член, отвечающий петле-



Рис. 5. Однопетлевые диаграммы для двухточечной функции (21) во внешнем поле

теории возмущений. Как всегда для величин, содержащих внешний логарифм по отношению к ренорм-групповым, следует до выполнения последнего интегрирования выразить подынтегральное выражение через эффективную константу связи и аномальные размерности и только потом выполнить интегрирование. В нашем случае этот рецепт дает следующий результат:

$$q^2 \int_{q^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} \frac{N}{4\pi} f^2(p^2) = q^2 \frac{N}{4\pi} \int_{q^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} \left( \frac{4\pi}{\ln^2 \frac{p^2}{m^2}} \right)^2 = q^2 \frac{4\pi N}{\ln \frac{q^2}{m^2}}.$$

Окончательный ответ для коррелятора  $S$  представляется в виде

$$S(q) \underset{q^2 \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{4\pi N q^2}{\ln \frac{q^2}{m^2}} \left[ 1 + \frac{2m^2}{q^2} - \frac{2m^4}{q^4} \right] (1 + O(f(q^2))). \quad (24)$$

Мы собрали члены типа  $(f \ln \frac{\Lambda^2}{q^2})^n$ , но не проследили за членами  $\sim f (f \ln \frac{\Lambda^2}{q^2})^2$ . Поэтому, строго говоря, мы не выяснили, чему равна константа  $m^2$  в логарифме в уравнении (24).

\* Следует, конечно, убедиться что аномальные размерности операторов отсутствуют.

Посмотрим теперь на точный ответ. Из уравнений движения ясно, что рассматриваемый коррелятор фактически совпадает с пропагатором для поля  $\alpha(x)$ , точнее

$$S(q) = ND^{(\alpha)}(q) = -4\pi N \frac{\sqrt{q^2(q^2+4m^2)}}{\ln \frac{\sqrt{q^2+4m^2} + \sqrt{q^2}}{\sqrt{q^2+4m^2} - \sqrt{q^2}}}. \quad (25)$$

Разложим (25) по  $m^2/q^2$  при больших  $q^2$ :

$$\begin{aligned} ND^{(\alpha)}(q) &= -\frac{4\pi N}{\ln \frac{q^2}{m^2} + \frac{2m^2}{q^2} + \dots} q^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{4m^2}{q^2} - \frac{1}{8} \frac{16m^4}{q^4} + \dots \right) \simeq \\ &\simeq -\frac{4\pi N}{\ln \frac{q^2}{m^2}} q^2 \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} - \frac{2m^4}{q^4} + \dots \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln \frac{q^2}{m^2}}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до членов порядка  $q^2 \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^n \frac{1}{\ln^2 q^2/m^2}$  вычисления с помощью операторного разложения совпали с точным ответом. В принципе, не представляет большого труда вычислить и члены  $\sim \ln^{-2}(q^2/m^2)$ , однако нам кажется, что разобраный пример и так достаточно ясно показывает, что точные вычисления и операторное разложение находятся в соответствии друг с другом.

**Операторное разложение за рамками главного приближения.** При обсуждении ОРЕ в предыдущем разделе промежуточная точка нормировки  $\mu$  не была введена явно. Причина заключается в том, что в главном порядке по  $1/N$  зависимости от  $\mu$  нет ни в вакуумных ожиданиях составных операторов, ни в коэффициентных функциях. Действительно, вакуумное ожидание оператора  $\alpha(x) = f(\partial_\nu \sigma)^2$ , нормированного в точке  $\mu$ , может быть определено следующим образом (см. п. Вакуумные конденсаты):

$$\langle 0 | f(\mu) (\partial_\mu \sigma)^2 |_\mu 0 \rangle = f(\mu) \int_{\text{Eucl. } p < \mu} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} D(p),$$

где

$$\begin{aligned} D(p) &= \int d^2 x e^{ip(x-y)} \langle 0 | T \{ \partial_\nu \sigma^a(x) \partial_\nu \sigma^a(y) \} | 0 \rangle = \\ &= \int d^2 x e^{ip(x-y)} \left\{ i\delta^{(2)}(x-y) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \langle 0 | T \{ \sigma^a(x) \sigma^a(y) \} | 0 \rangle \right\} = \\ &= \frac{im^2 N}{p^2 - m^2} \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$f(\mu) = \frac{4\pi}{\ln(\mu^2/m^2)}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} & \langle 0 | f(\mu) (\partial_{\nu}\sigma)^2 |_{\mu} | 0 \rangle = \\ & = f(\mu) \int_0^{\mu^2} \frac{dp^2}{4\pi} \frac{m^2 N}{p^2 + m^2} = f(\mu) \frac{m^2 N}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2} = m^2 N \end{aligned}$$

и эта величина, конечно, не зависит от  $\mu$ .

Поскольку вакуумные ожидания всех других операторов в главном порядке по  $1/N$  факторизуются и сводятся к некоторым степеням  $\langle f(\partial\sigma)^2 \rangle$ , они также не зависят от  $\mu$ .

Такая ситуация, однако, не является общей. Действительно, даже в предыдущем примере оператор  $(\partial_{\nu}\sigma)^2 |_{\mu}$  зависит от  $\mu$  логарифмическим образом. Как хорошо известно, логарифмическая зависимость от  $\mu$  устраняется подходящим мультипликативным переопределением оператора.

Но, вообще говоря, матричные элементы могут зависеть от точки нормировки  $\mu$  степенным образом, как некоторая степень  $\mu$ . Несколько лет назад нами было показано [21], что инстантонные эффекты в КХД действительно индуцируют такую степенную зависимость вакуумных ожиданий и коэффициентных функций.

В этом разделе мы продемонстрируем, что в  $\sigma$ -модели подобная степенная зависимость возникает в следующем порядке по  $1/N$ . В самом деле, рассмотрим матричный элемент оператора  $\alpha^2 |_{\mu}$ . По определению

$$\langle 0 | \alpha^2 |_{\mu} | 0 \rangle = \int_{\text{Eucl } p < \mu} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \tilde{D}^{(\alpha)}(p),$$

где

$$\tilde{D}^{(\alpha)}(p) = i \int d^2 x e^{i p x} \langle 0 | T \{ \alpha(x) \alpha(0) \} | 0 \rangle = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p) \langle \alpha \rangle^2 + D^{(\alpha)}(p). \quad (27)$$

Первый член формулы (27) с  $\delta^{(2)}(p)$  соответствует факторизующейся части вакуумного ожидания оператора  $\alpha^2$ . В главном порядке по  $1/N$  ответ для  $\langle \alpha \rangle$  известен:

$$\langle \alpha \rangle = \sqrt{N} m^2.$$

В следующем приближении по  $1/N$  возникают поправки к  $\langle \alpha \rangle$ , но в данный момент факторизующаяся часть  $\langle \alpha^2 \rangle$  для нас неинтересна.

Что касается нефакторизующейся (связанной) части вакуумного ожидания  $\alpha(0) \alpha(0)$ , она содержит дополнительный фактор  $1/N$  по сравнению с  $\langle \alpha \rangle^2$ . Таким образом, чтобы вычислить нефакторизующийся вклад  $\langle \alpha^2 \rangle^{n.f}$  в следующем за главным приближением, достаточно знать  $D^{(\alpha)}(p)$  в старшем порядке:

$$D^{(\alpha)}(p) |_{\text{Eucl.}} = -4\pi \frac{\sqrt{p^2(p^2 + 4m^2)}}{\ln \frac{\sqrt{p^2 + 4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4m^2} - \sqrt{p^2}}}.$$

Далее удобно использовать следующую подстановку:

$$x = \left[ \sqrt{1 + \frac{p^2}{4m^2}} + \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}} \right]^4.$$

В итоге

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha^2 |_{\mu} \rangle^{n.f} &= -m^4 \int_1^{A(\mu)} \frac{dx}{x} (x-1)^2 \frac{1}{\ln x}, \\ A(\mu) &= \left[ \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4m^2}} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2}} \right]^4. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ответ для этого интеграла может быть записан в терминах специальной функции  $Ei(x)$ :

$$\langle \alpha^2 |_{\mu} \rangle^{n.f} = -m^4 \{ Ei[\ln A(\mu)] + Ei[-\ln A(\mu)] - 2 \ln \ln A(\mu) - 2C \}, \quad (29)$$

где  $C = 0,57721$  — константа Эйлера.

Чтобы сравнить точную формулу с операторным разложением, следует рассмотреть большие  $\mu$ , именно  $\mu \gg m$ . Действительно, только при таких  $\mu$  коэффициенты ОРЕ вычислимы с помощью разложения в ряд по теории возмущений, причем константа разложения  $f(\mu)/4\pi$  мала,  $f(\mu)/4\pi = 1/\ln(\mu^2/m^2)$ . Конечно, операторы, входящие в это операторное разложение, должны быть нормированы в той же точке  $\mu$ . В этом пределе формула (29) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \alpha^2 |_{\mu} \rangle^{n.f} &= -2\mu^4 e^{-L} Ei(L) - \frac{4}{L} \mu^2 m^2 + \\ &+ 2m^4 \left( C + \ln L - \frac{1}{L} + \frac{4}{L^2} \right) + O\left(\frac{m^6}{\mu^2}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$L = \ln \frac{\mu^4}{m^4} \gg 1; \quad e^{-L} Ei(L) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{L^{n+1}}.$$

Чтобы проинтерпретировать различные члены в формуле (30), сравним ее с общим операторным разложением для  $T$ -произведения двух ренорм-инвариантных токов  $j(x)$ ,  $j(0)$ :

$$\begin{aligned} i \int d^2x e^{ipx} T \{ j(x) j(0) \} &= C_0(p, \mu) I + C_1(p, \mu) \alpha(0) |_{\mu} + \\ &+ C_2(p, \mu) (\alpha(0) \alpha(0)) |_{\mu} + \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициенты  $C_i$  зависят от  $p$  и  $\mu$ . Выше было объяснено (в старшем порядке по  $1/N$ ), что, фактически, зависимости от  $\mu$  нет ни в коэффициентных функциях, ни в матричных элементах операторов. В следующем за главным приближением нетривиальная зависи-

мость от  $\mu$  в матричном элементе  $\langle \alpha^2 | \mu \rangle$  [см. формулу (30)] должна компенсироваться сходной зависимостью от  $\mu$  других членов в правой части (31). [Вакуум-вакуумный матричный элемент от операторного равенства (31) не может зависеть от  $\mu$ , если ток  $j(x)$  ренорминвариантен.]

Проверим, как происходит это сокращение, более подробно. Ясно, что член порядка  $\mu^4$  в  $\langle \alpha^2 | \mu \rangle$  должен компенсироваться соответствующим членом в  $C_0(p, \mu) \langle 0 | I | 0 \rangle$ . Мы не проводили вычислений явно, но совершенно очевидно, что такая зависимость от  $\mu$  действительно возникает в  $C_0(p, \mu)$  через пертурбативные диаграммы, поскольку в  $C_0(p, \mu)$  должна учитываться лишь область виртуальностей внутренних линий  $p_i^2 > \mu^2$ . Далее, член, пропорциональный  $m^2 \mu^2$  в вакуумном ожидании  $\langle \alpha^2 | \mu \rangle$ , должен компенсироваться сходными членами в матричном элементе оператора  $\langle \alpha | \mu \rangle$  и коэффициентной функции  $C_1(p, \mu)$ . Наконец, имеется несколько членов  $\sim m^4$ \*. Ясно, что  $m^4/\ln(\mu^4/m^4)$ ,  $m^4/\ln^2(\mu^4/m^4)$  и  $m^4 \ln \ln(\mu^4/m^4)$  представляют аномальную размерность оператора  $\alpha^2 | \mu$  в следующем за ведущим порядке по  $1/N$ . Действительно, если некоторый оператор  $O(\mu)$  имеет исчезающую аномальную размерность  $\gamma$ , пропорциональную  $1/N$ , то

$$O(\mu) = c(\mu, \tilde{\mu}) O(\tilde{\mu}),$$

где

$$c(\mu, \tilde{\mu}) \equiv \exp \int_{f(\tilde{\mu})}^{f(\mu)} df \frac{\gamma(f)}{\beta(f)} = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_{f(\tilde{\mu})}^{f(\mu)} df \left( \frac{a_{-1}}{f} + a_0 + a_1 f + \dots \right) \right\} =$$

$$= (\text{не зависящий от } \mu \text{ фактор}) \times \exp \left\{ \frac{1}{N} \left[ a_{-1} \ln f(\mu) + a_0 f(\mu) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} a_1 f^2(\mu) + \dots \right] \right\} = (\text{не зависящий от } \mu \text{ фактор}) \times \left\{ 1 + \frac{1}{N} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ a_{-1} \ln f(\mu) + a_0 f(\mu) + \frac{1}{2} a_1 f^2(\mu) + \dots \right] \right\},$$

$$f(\mu) = 4\pi/\ln(\mu^2/m^2),$$

Сравнивая эту общую формулу с уравнением (30), можно определить коэффициенты  $a_{-1}$ ,  $a_0$ ,  $a_1$  разложения аномальной размерности оператора  $\alpha^2 | \mu$ . Они равны:

$$a_{-1} = -2, \quad a_0 = -1/4\pi, \quad a_1 = 1/4\pi^2.$$

\* Коэффициенты при степенных членах ( $\mu^4$ ,  $\mu^2$ ) зависят от процедуры разделения больших и малых импульсов, т. е. от способа обрезания. Мы использовали выше обрезание ступенчатой функцией. Другие способы дают другой ответ. Так, размерная регуляризация вообще не дает степенных по  $\mu$  членов (см. ниже). Следует выбрать какую-либо определенную процедуру и использовать ее при вычислении как матричных элементов, так и коэффициентов. Логарифмические члены не зависят от регуляризации.

Как обычно, логарифмическая зависимость от  $\mu$  матричного элемента компенсируется соответствующей зависимостью коэффициентной функции  $C_2(p, \mu)$ .

Таким образом, в следующем порядке по  $1/N$  коэффициентные функции в ОРЕ зависят от  $\mu$  довольно не тривиально [в частности,  $C_i(p, \mu)$  содержат члены порядка  $\mu^2, \mu^4$ ]. Но для вакуумного матричного элемента операторного равенства можно перегруппировать члены, зависящие от  $\mu$ , таким образом, что полный ответ не зависит от  $\mu$ .

Отметим, что пертурбативная поправка  $1/N$  к коэффициентам  $C_i(p, \mu)$  содержит бесконечное число членов  $\sim (j/4\pi)^k$  в отличие от той ситуации, которая имеет место в главном по  $1/N$  приближении. Этот ряд факториально расходится, что является общей чертой теории поля.

Таким образом, мы убедились, что в следующем по  $1/N$  приближении введение точки нормировки  $\mu$  необходимо, и, вообще говоря, матричные элементы составных операторов получают вклад как от истинно непертурбативных флуктуаций, так и от пертурбативных. Если бы этот феномен проявился уже в старшем порядке, изучение непертурбативных эффектов с использованием ОРЕ было бы значительно затруднено (но даже и в этом случае формальная справедливость ОРЕ вне всякого сомнения).

Сходная ситуация имеет место в КХД. Именно, с общей точки зрения явное введение промежуточной шкалы  $\mu$  является необходимым элементом ОРЕ, но существует область  $\mu$ , где, с одной стороны, константа связи  $\alpha_S(\mu)$  достаточно мала, а с другой, зависимостью от  $\mu$  вакуумных ожиданий можно пренебречь численно. (Некоторые оценки можно найти в [8]).

В заключение этого раздела мы хотели бы сравнить результаты, приведенные выше, с результатами Давида, который впервые рассмотрел матричный элемент оператора  $\alpha^2$  вне рамок главного приближения [10, 11].

Согласно [11], не существует однозначного способа определения вакуумных ожиданий составных операторов в следующем приближении, и поэтому математический статус ОРЕ вне рамок теории возмущений не ясен. Наш вывод совершенно противоположен. В более техническом аспекте разница связана с тем фактом, что в [10, 11] точка нормировки  $\mu$  не вводится вообще. Из предыдущего изложения (так же как и из исследования обычной теории возмущений) ясно, что при этом вся процедура коллапсирует.

Если задаться целью более подробно сравнить [11] и настоящий материал, могут быть полезны несколько замечаний. Прежде всего, в [11] используется размерная регуляризация. По этой причине в матричном элементе нет членов, пропорциональных  $\mu^4$  или  $m^2\mu^2$  [ср. с формулой (30)], но удержаны только члены, пропорциональные  $m^4$ . Хотя в [11] нормировочная точка явно не вводилась, ясно, что параметр  $1/\epsilon$  в процедуре размерной регуляризации, применен-

ной в [11], играет ту же роль, что и  $\ln(\mu^2/m^2)$  в нашем представлении. Тогда предел  $\epsilon \rightarrow 0$  эквивалентен пределу  $\ln \mu^2/m^2 \rightarrow \infty$ , и, как результат, члены порядка  $m^4/\ln(\mu^2/m^2)$  и  $m^4/\ln^2(\mu^2/m^2)$  не видны в рассмотрении [11]. Ситуация с ведущим эффектом аномальной размерности, а именно членом  $\sim \ln \ln(\mu^2/m^2)$ , более интересна. Действительно, легко проверить, что  $\ln \ln(\mu^2/m^2)$  соответствует  $\ln \epsilon$  в размерной регуляризации (РР):

$$\begin{aligned} \ln \ln \frac{\mu^2}{m^2} &= \int_0^{\mu^2} \frac{dp^2}{p^2} \frac{1}{\ln \frac{p^2}{m^2}} \xrightarrow{pp} \int \frac{dp^2}{p^2} (p^2)^{-\epsilon} \frac{1}{\ln \frac{p^2}{m^2}} = \\ &= m^{2\epsilon} \{-\ln \epsilon - C + O(\epsilon)\}. \end{aligned}$$

Следуя обычной прескрипции схемы РР, Давид пытался найти предел  $\epsilon \rightarrow 0$  для  $\langle \alpha^2 | \epsilon \rangle$  и заметил, что этот предел зависит от направления, по которому  $\epsilon \rightarrow 0$ . Это обстоятельство стало для него основой утверждения о том, что вакуумное ожидание  $\langle \alpha^2 \rangle$  не может быть определено однозначно. Действительно,  $\ln \epsilon$  имеет точку ветвления при  $\epsilon = 0$  и, следовательно,  $\ln(\epsilon + i0) \neq \ln(\epsilon - i0)$ . Но это ни в коей мере не ставит под сомнение справедливость операторного разложения. Только ренорм-инвариантные произведения  $C_i(\mu) \langle O_i \rangle$  имеют физический смысл и не зависят от вспомогательного параметра  $\mu$  или  $\epsilon$ . Большинство составных операторов зависят от  $\mu$ , и эта зависимость не исключается никакой вычитательной процедурой. Если все-таки мы хотим избавиться от  $\ln \ln \mu$  (или  $\ln \epsilon$ ), то надо умножить  $O(\mu)$  на величину, обратную фактору аномальной размерности, т. е. на  $\exp\left(-\int df \frac{\gamma(f)}{\beta(f)}\right) \approx 1 - \frac{2}{N} \ln \ln \frac{\mu^4}{m^4}$ . Когда это сделано, произведение становится ренорм-инвариантом и предел  $\mu \rightarrow \infty$  (или  $\epsilon \rightarrow 0$ ) становится существующим и однозначным. Таким образом, загадка работы [11] в действительности возникла как артефакт процедуры, использованной в статье.

Следует отметить, что в последнее время появилось несколько статей [12, 13], в которых проверяется операторное разложение в присутствии непертурбативных эффектов. На наш взгляд (см. [25]), реальная причина обсуждаемых трудностей одна и та же — отсутствие явного введения нормировочной точки  $\mu$ . Когда это сделано, никаких проблем с общим статусом операторного разложения не возникает.

### 3. АНОМАЛИЯ В СЛЕДЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

В КХД вопрос о том, как влияют непертурбативные флуктуации на плотность энергии вакуума  $\epsilon_{\text{vac}}$ , представляет большой интерес. Хорошо известна, например, попытка [26] проследить формирование мешка, стартуя прямо с инстантонов — единственных непертурбативных флуктуаций, известных в КХД. Будем отсчитывать энергию вакуума от ее значения в теории возмущений. Именно этот непер-



турбативный вклад важен для адронной физики. В [26] предполагалось, что  $\epsilon_{\text{vac}} < 0$ , а внутри адрона имеет место фазовый переход и энергия вакуумных флуктуаций равна нулю. Если так, то объемная плотность энергии внутри адрона больше по сравнению с «чистым» вакуумом на  $|\epsilon_{\text{vac}}|$ . На языке модели мешков объемная плотность энергии описывается феноменологической константой  $B$ . Если принять гипотезу [26], то массы мезонов  $m \sim |\epsilon_{\text{vac}}|^{1/4}$ . С другой стороны, энергия вакуума определяется глюонным конденсатом [8]. Действительно, из-за лоренц-инвариантности

$$\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = g_{\mu\nu} \epsilon_{\text{vac}},$$

где  $\theta_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса. Уравнение для конформной аномалии приводит к результату

$$\epsilon = \frac{1}{4} \langle 0 | \theta_{\mu\mu} | 0 \rangle = \left\langle 0 \left| -\frac{b_0 \alpha_S}{32\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right| 0 \right\rangle, \quad (32)$$

где  $b_0$  — коэффициент функции Гелл-Мана — Лоу,  $b_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f$ . Однако оказалось, что подстановка численного значения для глюонного конденсата, найденного из правил сумм КХД, приводит к вакуумной энергии  $|\epsilon_{\text{vac}}|$ , в 10–20 раз превышающей общепринятое значение  $B$  [27]. Более того, формула (32) показывает, что в многоцветной хромодинамике непертурбативный вклад в  $\epsilon_{\text{vac}}$  растет как  $N_c^2$ . С другой стороны, масса мезонов от  $N_c$  не зависит. Эти факты привели нас к заключению, что энергия вакуума и изменение энергии вакуума вблизи адрона — разные величины и  $|\epsilon_{\text{vac}}| \gg B$  [15].

В  $O(N)$ -модели, конечно, нет нужды вводить мешок и вычислять массы частиц через константу  $B$ . В точно решаемой модели нам хотелось бы проверить, что непертурбативный вклад в энергию вакуума выделяется на фоне расходимостей, что он определяется аномалией и т. п.

Сначала мы вычислим энергию вакуума, стартуя с выражения (6) для эффективного действия  $S_{\text{eff}}$ . Эффективное действие сильно расходится и требует доопределения. Принятая нами в предыдущем разделе регуляризация с помощью раздвижки аргументов операторов в данном случае неудобна. Мы регуляризуем теорию методом Паули — Вилларса. Тогда (6) переписется в виде

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{eff}}^R &= \frac{N}{2} \sum_{i=0}^2 c_i \text{Sp} \left[ -\partial^2 + m_i^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \right] - \frac{N}{2f} \int d^2x \alpha(x), \\ \sum_{i=0}^2 c_i &= 0, \quad \sum_{i=0}^2 c_i m_i^2 = 0, \quad c_0 = 1, \quad m_0^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  имеют вид

$$c_1 = m_2^2 / (m_1^2 - m_2^2), \quad c_2 = m_1^2 / (m_2^2 - m_1^2).$$

В конце вычислений мы должны устремить массы регуляторов  $m_1$  и  $m_2$  к бесконечности.

Плотность энергии вакуума оказывается равной:

$$V_2 \varepsilon_{\text{vac}} = S_{\text{eff}}(\alpha = \sqrt{N} m^2) = \frac{N}{2} \sum_{i=0}^2 c_i \text{Sp} \ln(-\partial^2 + m_i^2 + m^2) - \\ - \frac{N}{2f} m^2 V_2 = V_2 \frac{N}{8\pi} \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_2^2 + m^2}{m_1^2 + m^2}, \quad (34)$$

где мы воспользовались следующим выражением для константы связи:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m_1^2 + m^2}{m^2} + \frac{m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_2^2 + m^2}{m_1^2 + m^2} \right\},$$

полученным из условия экстремума действия (33) в точке перевала  $\alpha = \sqrt{N} m^2$ .

Для упрощения перепишем уравнение (34) в специальном пределе равных регуляторных масс  $m_2^2 = M^2$ ,  $m_1^2 = M^2 x$ ,  $x \rightarrow 1$ . Тогда энергия вакуума представится как сумма двух членов:

$$\varepsilon_{\text{vac}} = \frac{N}{8\pi} (-M^2 + m^2). \quad (35)$$

Очевидно, что первый член определяется пертурбативными флуктуациями, а второй возникает от непертурбативных.

Действительно, пертурбативные вычисления соответствуют неустойчивому вакууму с  $\alpha = 0$ , и

$$\varepsilon_{\text{vac}}^{\text{p.t.}} V_2 = S_{\text{eff}}^R|_{\alpha=0} = \frac{N}{8\pi} \frac{m_2^2 m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_2^2}{m_1^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{N}{8\pi} (-M^2).$$

Следовательно, непертурбативный вклад в энергию вакуума

$$\varepsilon_{\text{vac}}^{\text{p.p.t.}} = \varepsilon_{\text{vac}} - \varepsilon_{\text{vac}}^{\text{p.t.}} = \frac{N}{8\pi} m^2. \quad (36)$$

Сейчас мы хотим перевывести этот результат, используя конформную аномалию для тензора энергии-импульса  $\theta_{\mu\nu}$ . Действию (33) отвечает следующее регуляризованное выражение для  $\theta_{\mu\nu}^R$ :

$$\theta_{\mu\nu}^R = \sum_{i=0}^2 c_i \left\{ \partial_\mu \sigma_i^a \partial_\nu \sigma_i^a - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[ \partial_\alpha \sigma_i^a \partial_\alpha \sigma_i^a - m_i^2 \sigma_i^a \sigma_i^a + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sigma_i^a \sigma_i^a \right] \right\} - \\ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\sqrt{N}}{f} \alpha,$$

где  $\sigma_{1,2}^a$  — поля регуляторов,  $\sigma_0^a = \sigma^a$ . След регуляризованного тензора  $\theta_{\mu\nu}^R$  не равен нулю:

$$\theta_{\mu\mu}^R = \sum_{i=0}^2 c_i \left\{ m_i^2 \sigma_i^a \sigma_i^a + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sigma_i^a \sigma_i^a \right\} - \frac{\sqrt{N}}{f} \alpha.$$

Прежде всего проверим, что матричный элемент от  $\theta_{\mu\mu}^R$  по физическому вакууму сводится к  $\varepsilon_{\text{vac}}$ . Действительно:

$$\langle 0 | \theta_{\mu\mu}^R | 0 \rangle = \sum_{i=0}^2 c_i m_i^2 \langle 0 | \sigma_i^a \sigma_i^a | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_2^2 + m^2}{m_1^2 + m^2} = 2\varepsilon_{\text{vac}}$$

в полном соответствии с общим выражением

$$\varepsilon_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \langle 0 | \theta_{\mu\mu}^R | 0 \rangle.$$

Теперь мы можем проверить гипотезу, принимаемую в КХД, согласно которой **непертурбативная** часть  $\varepsilon_{\text{vac}}$  равна **непертурбативному** вкладу в аномалию для  $\theta_{\mu\mu}$ .

Действительно, благодаря тяжелым регуляторным полям след тензора энергии-импульса отличен от нуля. Однако нас интересуют матричные элементы  $\theta_{\mu\mu}^R$  по легким состояниям или (что то же самое) среднее от  $\theta_{\mu\mu}^R$  в легких внешних полях  $\alpha^{\text{ext}}(x)$  и  $\sigma^{\text{ext}}(x)$ . В рассматриваемом случае при усреднении по легким полям остается только два члена

$$\langle \theta_{\mu\mu}^R \rangle = -\frac{N}{4\pi} M^2 + \frac{\sqrt{N}}{4\pi} \alpha^{\text{ext}} + O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

Полезно переписать это равенство в операторной форме

$$\theta_{\mu\mu}^R = c_I \mathbf{1} + c_\alpha \alpha, \quad c_I = -\frac{N}{4\pi} M^2, \quad c_\alpha = \frac{\sqrt{N}}{4\pi}.$$

В рассматриваемом приближении коэффициентные функции находятся из теории возмущений, а непертурбативные эффекты заперты в матричные элементы операторов.

Таким образом, коэффициент  $c$  при единичном операторе содержит весь вклад теории возмущений в энергию вакуума, что легко проверить:

$$c_I = -\frac{N}{4\pi} M^2 = 2\varepsilon_{\text{vac}}^{\text{p. t.}}$$

Так как мы уже проверили, что  $\frac{1}{2} \langle 0 | \theta_{\mu\mu} | 0 \rangle$  представляет полную энергию вакуума, ясно, что непертурбативная часть  $\epsilon_{\text{vac}}$  насыщается непертурбативной частью аномалии. Это явно видно из уравнения

$$c_\alpha \langle 0 | \alpha | 0 \rangle = \left( \frac{\sqrt{N}}{4\pi} \right) (V \sqrt{N} m^2) = \frac{N}{4\pi} m^2 = 2\epsilon_{\text{vac}}^{\text{n.p.t.}}$$

Таким образом, наша гипотеза подтверждается.

Отметим также, что отношение массы  $\sigma$ -частиц к  $\epsilon_{\text{vac}}^{\text{n.p.t.}}$  мало (ср. с КХД):

$$\frac{m^2}{\epsilon_{\text{vac}}^{\text{n.p.t.}}} = \frac{8\pi}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Проверим теперь, что если в теории нет затравочного массового параметра, то аномалия в  $\theta_{\mu\mu}$  определяет и массы частиц. Напомним, что в КХД это утверждение выглядит не совсем тривиально. Трудно себе представить, что вся масса, скажем, нуклона связана с глюонами. Однако в киральном пределе [14]

$$2m_N^2 = \langle N | \theta_{\mu\mu} | N \rangle = \langle N | -\frac{b_0 \alpha_S}{8\pi} G^2 | N \rangle.$$

Конечно, этот результат есть следствие уравнений движения. Тем не менее он противоречит нашей интуиции, и хотелось бы на простых примерах, допускающих точное решение, убедиться в его правильности.

$O(N)$   $\sigma$ -модель предоставляет такую возможность. Вычислим с помощью правил Фейнмана матричный элемент от аномалии

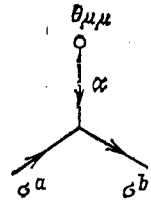


Рис. 6. Среднее значение  $\theta_{\mu\mu}$  по одночастичному состоянию

$\theta_{\mu\mu} = (\sqrt{N}/4\pi) \alpha$  по состояниям, отвечающим  $\sigma$ -частицам. Глядя на рис. 6, легко сообразить, что

$$\langle \sigma^a | \theta_{\mu\mu} | \sigma^b \rangle = \langle \sigma^a | \frac{\sqrt{N}}{4\pi} \alpha | \sigma^b \rangle = \left( \frac{\sqrt{N}}{4\pi} \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{N}} \delta^{ab} \right) D^{(\alpha)}(0),$$

где  $D^{(\alpha)}(p)$  — пропагатор для поля  $\alpha(x)$ . Явный вид для  $D^{(\alpha)}(p)$  известен [см. уравнение (8)], и

$$D^{(\alpha)}(0) = -8\pi m^2.$$

В результате

$$\langle \sigma^a | \theta_{\mu\mu} | \sigma^b \rangle = \delta^{ab} 2m^2. \tag{37}$$

Таким образом, инертная масса  $\sigma$ -частиц действительно определяется конформной аномалией.

#### 4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Низкоэнергетические теоремы в теории поля были изобретены почти так же давно, как и сама теория поля. Достаточно вспомнить теоремы Лоу для тормозного излучения фотонов и рассеяния фотонов на адронах в пределе низких частот [28].

Как правило, низкоэнергетические теоремы сводятся к определенным соотношениям между амплитудами с различным числом мягких внешних линий (частиц). Эти соотношения отражают некоторую симметрию — точную или приближенную, существующую в теории. Например, теоремы Лоу, упомянутые выше, вытекают из калибровочной инвариантности электромагнитных взаимодействий.

Поиски симметрий и ограничений, которые они накладывают на различные матричные элементы, особенно важны в КХД. Действительно, соответствующие результаты, основанные на общих свойствах теории, не зависят от нашего незнания динамики конфайнмента и часто дают уникальную информацию в основном о физике глюоболов, недоступную другим образом. Они ценны также и в чисто теоретическом аспекте, служа как бы плацдармом для новых конструкций и исследований (см., например, [29, 30]).

Кроме хорошо известных классических теорем РСАС существует набор низкоэнергетических соотношений, специфических для КХД. Собственно говоря, эти соотношения реализуют тождества Уорда, отражающие следующие свойства теории:

а) масштабную инвариантность на классическом уровне,  $\theta_{\mu\nu} \neq 0$  только за счет квантовой аномалии;

б) инвариантность относительно одновременных  $\gamma_5$ -вращений всех кварковых полей,  $q \rightarrow e^{i\frac{\alpha}{2}\gamma_5} q$ , сопровождаемых компенсирующим преобразованием так называемого  $\theta$ -члена ( $\theta \rightarrow \theta + \alpha$ ).

Оба пункта имеют параллель в  $\sigma$ -моделях, и мы исследуем их ниже.

**Масштабные тождества Уорда.** Если выключить массы кварков, в лагранжиане не остается массового параметра, и можно получить следующее соотношение:

$$\lim_{q \rightarrow 0} i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \tau(x) \tau(0) \} | 0 \rangle_{\text{Conn}} = -d_n \langle 0 | \tau | 0 \rangle, \quad (38)$$

где  $\tau(x)$  — след тензора энергии-импульса,  $\tau(x) = \theta_{\mu\nu}(x) = \frac{\beta(\alpha_S)}{4\alpha_S} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$  и  $d_n$  обозначает (нормальную) размерность оператора  $\tau$  (в хромодинамике  $d_n = 4$ ). Вывод этой формулы, так же как ее обобщения, можно найти в [15, 30]. Предполагается, что пертурбативный вклад вычтен как в правой, так и в левой частях (38).

Масштабное тождество Уорда в  $O(N)$   $\sigma$ -модели внешне выглядит точно так же. Конкретный вид  $\tau(x)$ , конечно, другой:

$$\tau = (\theta_{\mu\mu})_{\sigma\text{-model}} = -\frac{f}{4\pi} (\partial_\mu \sigma)^2 = \frac{\sqrt{N}}{4\pi} \alpha(x),$$

и  $d_n = 2$ , а не 4. Доказательство весьма прозрачно.

Рассмотрим корреляционную функцию двух  $\tau$ , нормированных следующим образом:

$$\Sigma(0) = \int d^2x \langle 0|T \{f (\partial_\mu \sigma(x))^2 f (\partial_\nu \sigma(0))^2\}|0\rangle \quad (39)$$

(здесь и ниже импользуются евклидовы обозначения). Прежде всего переопределим полевую переменную,  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{f}} \tilde{\sigma}$  [фактически вернемся к исходному определению, см. формулу (2)]. Тогда действие переходит в

$$S_E = \frac{1}{2f} \int d^2x \left\{ (\partial_\mu \tilde{\sigma})^2 + \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{N}} (\tilde{\sigma}^2 - N) \right\}.$$

Варьируя производящий функционал  $Z_E$  один раз по  $\left(-\frac{1}{2f}\right)$ , очевидно, получаем вакуумное ожидание  $\langle f (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$ :

$$\frac{1}{V_2} \frac{\delta Z_E}{\delta \left(-\frac{1}{2f}\right)} = \langle f (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle = -Nm^2 = -N\Lambda^2 e^{-4\pi/f}.$$

В разд. 2 и приложении А подробно обсуждалось, что при таком определении вклад теории возмущений в вакуумное среднее равен нулю, если учесть зависимость меры функционального интегрирования от источника (в данном случае роль источника играет заряд  $1/f$ ). Если еще раз проварьировать  $Z_E$ , то получается коррелятор  $\Sigma(0)$ :

$$\frac{1}{V_2} \frac{\delta^2 Z_E}{\left[\delta \left(-\frac{1}{2f}\right)\right]^2} = \int d^2x \langle T \{(\partial_\mu \tilde{\sigma}(x))^2 (\partial_\nu \tilde{\sigma}(0))^2\} \rangle = \Sigma(0).$$

Однако явное дифференцирование ренорм-групповой формулы для  $m^2 \left(\Lambda^2, \frac{1}{f}\right)$  по  $\left(-\frac{1}{2f}\right)$  дает  $\Sigma(0) = -8\pi Nm^2$ . Этим завершается доказательство теоремы. Интересно отметить, что в случае  $O(N)$ -модели правильный учет  $f$  — зависимости меры интегрирования по полям сразу же приводит к нулевому вкладу теории возмущений в коррелятор  $\Sigma(0)$ . Мы уже использовали этот факт.

Теперь можно проверить, что полученная низкоэнергетическая теорема правильна. Это легко сделать. Действительно,

$$\Sigma(q) \equiv ND^{(\alpha)}(q).$$

Положив в уравнении (8)  $q \ll m$ , найдем

$$D^{(\alpha)}(0) = -8\pi m^2 \quad \text{и} \quad \Sigma(0) = -8\pi N m^2$$

в полном согласии с (38).

**$U(1)$ -проблема в КХД и  $CP(N-1)$ -моделях.** В КХД важную роль играет топологический заряд  $Q$ . Что касается  $O(N)$   $\sigma$ -моделей, то для всех  $N \neq 3$  такое понятие ввести нельзя. Поэтому полной аналогии между этими двумя теориями нет. Тем не менее, хотелось бы иметь простой пример, на котором можно было бы проверять, как работают различные соотношения для топологического заряда, выведенные в КХД. С этой целью обратимся к новому классу  $\sigma$ -моделей, именно к  $CP(N-1)$ -моделям.

Опишем сначала, как они выглядят. Рассмотрим теорию комплексных полей  $\sigma^a$  ( $a = 1, \dots, N$ ), заданных на сфере

$$\bar{\sigma}^a \sigma^a = \frac{N}{2f},$$

и вспомогательного действительного поля  $A_\mu$ . Выберем действие  $S$  в следующем виде [5, 7]:

$$\left. \begin{aligned} S_E &= \int d^2x \left\{ \overline{D_\mu \sigma^a}(x) D_\mu \sigma^a(x) + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \left( \bar{\sigma}^a(x) \sigma^a(x) - \frac{N}{2f} \right) \right\}; \\ D_\mu &= \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{N}} A_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Очевидно, что действие (35) инвариантно относительно глобальных  $SU(N)$ -преобразований полей  $\sigma^a$ . Есть еще одна, не менее очевидная, симметрия  $S_E$  — локальная  $U(1)$ -симметрия. В самом деле, действие  $CP(N-1)$ -модели (40) отличается от действия для электродинамики скалярных полей только отсутствием свободного члена для поля  $A_\mu$ , который сам по себе калибровочно-инвариантен. Поскольку действие (40) не содержит производных от  $A_\mu$ , поле может быть исключено из действия:

$$A_\mu = i \frac{f}{\sqrt{N}} (\bar{\sigma}^a \vec{\partial}_\mu \sigma^a - \bar{\sigma}^a \overleftarrow{\partial}_\mu \sigma^a) \equiv i \frac{f}{\sqrt{N}} \bar{\sigma}^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \sigma^a.$$

Это соотношение есть следствие уравнений движения.

При любом значении  $N$  в  $CP(N-1)$ -моделях есть инстантоны. Явный вид их известен и описан в литературе [31]. Однако в дальнейшем они нам не понадобятся, и все, что нам нужно — это вид топологического заряда

$$Q = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \equiv \frac{if}{\pi N} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \overline{D_\mu \sigma^a} D_\nu \sigma^a.$$

Очевидно, что  $Q$  определяется лишь асимптотикой поля и принимает целочисленные значения.

Этот класс  $\sigma$ -моделей в пределе  $N \rightarrow \infty$  может быть решен точно так же, как были решены  $O(N)$   $\sigma$ -модели [6, 7]. Не останавливаясь на выводе, сформулируем правила Фейнмана для возбуждений над физическим вакуумом.

Функции распространения полей  $\sigma(x)$  и  $\alpha(x)$ , а также вершинная часть  $\Gamma^{ab}$ , описывающая их взаимодействие, не отличаются от случая  $O(N)$ -модели и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} D^{ab}(p) &= \langle \bar{\sigma}^a(p) \sigma^b(-p) \rangle = \frac{\delta^{ab}}{p^2 + m^2}; \\ D^{(\alpha)}(p) &= \langle \alpha(p) \alpha(-p) \rangle = -A^{-1}(p); \\ \Gamma^{ab} &= -\frac{1}{\sqrt{N}} \delta^{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Дополнительное векторное поле  $A_\mu(x)$  становится динамическим. Его функция распространения в калибровке Лоренца равна

$$\left. \begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D_A(p); \\ D_A^{-1}(p) &= (p^2 + 4m^2) A(p) - \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Легко проверить, что  $D_A(p)$  при  $p^2 = 0$  имеет полюс. Таким образом, поле  $A_\mu$  действительно стало калибровочным. «Фотон»  $A_\mu$  взаимодействует с  $\sigma$ -частицами по обычным правилам, если принять, что их «заряд» равен  $-1/\sqrt{N}$ .

В  $CP(N-1)$ -моделях, так же как и в  $O(N)$ -моделях, поле  $\alpha(x)$  выпадает в осадок, т. е. матричный элемент  $\alpha(x)$  по физическому вакууму отличен от нуля:

$$\langle 0 | \alpha(x) | 0 \rangle = \left\langle 0 \left| -\frac{2f}{\sqrt{N}} \partial_\mu \bar{\sigma}^a \partial_\mu \sigma^a \right| 0 \right\rangle = \sqrt{N} m^2.$$

Мы не будем, однако, повторять рассуждений разд. 2 и рассматривать все вытекающие отсюда следствия, а займемся топологическим зарядом.

Напомним, почему так важны токи

$$j_P = \frac{3\alpha_S}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a, \quad (43)$$

связанные с топологическим зарядом, в КХД. Если рассмотреть чистую глюодинамику, то коррелятор

$$P(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_P(x) j_P(0) \} | 0 \rangle$$

при  $q^2 = 0$ , вообще говоря, отличен от нуля. Следуя Виттену [32], он равен второй производной от плотности энергии вакуума по вакуумному углу  $\theta$ . Если включить в игру легкие кварки, то возникнут два новых эффекта. Во-первых, коррелятор  $P(q)$  при  $q^2 = 0$



обратится в нуль, поскольку ток  $j_P$  становится равным дивергенции от синглетного аксиального тока:

$$j_P = \partial_\mu j_\mu^5, \quad j_\mu^5 = \sum_i \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma_5 q_i.$$

Во-вторых, в спектре возникает почти безмассовое псевдоскалярное состояние —  $\eta'$ -мезон, который дает вклад в коррелятор  $P(q)$ . Если списать первый эффект на  $\eta'$ -мезон, то возникнет соотношение [32]:

$$\left. \begin{aligned} f_\eta^2 m_\eta^2 &= -P(0)|_{\text{без кварков}}, \\ \langle 0 | j_\mu^5 | \eta' \rangle &= i f_\eta P_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Таким образом, решение  $U(1)$ -проблемы непосредственно связано со значением коррелятора  $P(q)$  при  $q^2 = 0$ . В [15] мы предположили, что среди прямых флуктуаций, определяющих поведение  $S(q)$  и  $P(q)$  вблизи  $q^2 = 0$ , основную роль играют флуктуации с определенной дуальностью. Тогда в евклидовом пространстве-времени

$$\left. \begin{aligned} -P_E(0) &= S_E(0) = \frac{18}{b_0} \left\langle 0 \left| \frac{\alpha_S}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right| 0 \right\rangle, \\ S_E(q) &= \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_S(x) j_S(0) \} | 0 \rangle, \\ j_S &= \frac{3\alpha_S}{4\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Таким образом, возникает массовое соотношение

$$f_\eta^2 m_\eta^2 = \frac{18}{b_0} \left\langle 0 \left| : \frac{\alpha_S}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a : \right| 0 \right\rangle,$$

которое находится во вполне удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

В рамках  $CP(N-1)$ -модели можно вычислить  $P(0)$  без кварков, ввести кварки, найти безмассовые псевдоскаляры и убедиться, что синглет по  $SU(N)$  приобретает массу в соответствии с формулой (44). Эта работа была уже проделана в [7]. Мы не будем ее повторять, а посмотрим, насколько хорошо выполняется соотношение, аналогичное [45].

Чтобы правильно нормировать скалярный и псевдоскалярные токи, нужно вспомнить, как выглядит уравнение самодуальности в случае  $CP(N-1)$ . Его вид хорошо известен:

$$D_\mu \sigma = \pm i \epsilon_{\mu\nu} D_\nu \sigma.$$

Тогда токи следует выбрать, например, в виде

$$j_S = \overline{D_\mu \sigma^a} D_\mu \sigma^a; \quad j_P = i \epsilon_{\mu\nu} \overline{D_\mu \sigma^a} D_\nu \sigma^a.$$

С помощью уравнений движения их можно связать с полями  $\alpha(x)$  и  $A_\mu(x)$ :

$$j_S = \frac{\sqrt{N}}{2} \alpha(x); \quad j_P = \frac{\sqrt{N}}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu(x).$$

Тогда корреляторы  $S(q)$  и  $P(q)$  переписутся через функции пространства соответствующих полей. В евклидовом пространстве-времени

$$S(q) = \int d^2x e^{-iqx} \langle j_S(x) j_S(0) \rangle = \frac{N}{4} D^{(\alpha)}(q);$$

$$P(q) = \int d^2x e^{-iqx} \langle j_P(x) j_P(0) \rangle = \frac{N}{4} (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) D_{\mu\nu}^A = \frac{N}{4} q^2 D^A(q).$$

Хотя  $D_{\mu\nu}^A$  зависит от калибровки, искомый коррелятор  $P(q)$  является, конечно, калибровочно-инвариантной величиной. Воспользовавшись явным видом  $D^{(\alpha)}$  и  $D^A$ , находим, что при  $q^2 = 0$

$$S(0) = -N\pi m^2; \quad P(0) = 3N\pi m^2; \quad S(0)/P(0) = -1/3. \quad (46)$$

Мы видим, что  $S(0)$  и  $P(0)$  близки друг к другу, но знак отношения другой, чем следует из гипотезы\*. Это обстоятельство весьма замечательно и его можно было предсказать заранее. Действительно, существует глубокое различие между КХД и  $\sigma$ -моделью. Именно, вклады в энергию вакуума непертурбативных флуктуаций в случае КХД и  $\sigma$ -модели имеют разные знаки:

$$[\varepsilon_{\text{vac}}]_{\text{КХД}} = - \left\langle 0 \left| \frac{b\alpha_S}{32\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right| 0 \right\rangle < 0;$$

$$[\varepsilon_{\text{vac}}]_{\sigma} = \frac{N}{8\pi} m^2 > 0.$$

Поэтому скалярные корреляторы при  $q^2 = 0$  также отличаются знаками:

$$S(0)_{\text{КХД}} = \left\langle 0 \left| : \frac{32\pi}{b} \alpha_S G^2 : \right| 0 \right\rangle > 0;$$

$$S(0)_{CP(N-1)} = \langle 0 | : 8\pi f (\partial_\mu \sigma)^2 : | 0 \rangle = -8\pi N m^2 < 0.$$

С другой стороны, значение  $P(0)$  определяется вкладом реальной физической частицы, поэтому во всех случаях  $P(0)$  положительно.

Таким образом, гипотеза о доминировании флуктуаций с определенной дуальностью в  $CP(N-1)$ -модели буквально не оправдалась. Но с другой стороны, видно, что значения  $S(0)$  и  $P(0)$  по абсолютной величине близки друг к другу и можно ожидать, что полученная оценка  $P(0)_{\text{КХД}}$  по порядку величины должна быть правильной.

\* Заметим, что соотношения (45) написаны в пространстве Минковского. а (46) — в евклидовом. Переход меняет знак  $P$ .

## 5. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ

В последнее время большое внимание привлекают суперсимметричные теории [33—35]. Хотя пока еще не ясно, имеют ли они какое-либо отношение к природе, влияние, которое они оказали на развитие теории, несомненно. Аспект, исследовавшийся наиболее подробно и продемонстрировавший новые и поразительные черты суперсимметрии — это пертурбативное разложение. Действительно, в самых первых работах по суперсимметрии было найдено, что существуют удивительные сокращения между различными графиками теории возмущений. Кульминационной точкой этого направления исследований явилось доказательство неренормализационных теорем, устанавливающих в ряде случаев отсутствие радиационных поправок во всех порядках. Хорошо известный пример такого типа — отсутствие перенормировки  $F$ -членов. Именно это сокращение радиационных поправок к определенным массовым членам породило надежду, что суперсимметричные модели в конце концов разрешат проблему иерархий массовых масштабов в слабых взаимодействиях.

В то время как теория возмущений исчерпывает содержание моделей с малой константой связи, в суперсимметричных теориях с сильным взаимодействием возникают дальнейшие проблемы. Ввиду простоты ряда теории возмущений вся нетривиальная динамика таких теорий — прерогатива непертурбативной физики. В частности, непертурбативные эффекты являются центральными для суперсоставных моделей кварков и лептонов.

На первый взгляд и основываясь на опыте, полученном в обычной КХД, в области непертурбативных явлений мало надежды на существенный прогресс. Действительно, в результате десятилетия интенсивных исследований квантовой хромодинамики мы имеем фактически единственный пример непертурбативных флуктуаций, который до конца разобран теоретически: это — инстантоны. Таким образом, для ориентации в непертурбативной хромодинамике приходится полагаться на инстантонные модели физического вакуума. Несмотря на то, что строительство таких моделей продолжается — постоянно идет доработка и улучшение, решающего аргумента, почему именно инстантоны должны доминировать в волновой функции вакуума, до сих пор все нет.

Совершенно неожиданно недавно было показано, что инстантоны могут быть использованы в суперсимметричных теориях совершенно другим образом. Так, само существование инстантонов как математической конструкции (т. е. инстантонов очень малых размеров) достаточно для вычисления функции Гелл-Мана — Лоу во всех порядках по константе связи. Далее, удается найти некоторые вакуумные конденсаты. Грубо говоря, основной прием состоит в том, чтобы соединить инстантонные результаты с общими свойствами теории, такими, как перенормируемость или тождества Уорда.

Более подробно, в случае функции Гелл-Мана — Лоу, анализ на-

чинается с вычисления вакуумной энергии в присутствии инстантона произвольно малого размера. Удастся доказать общую теорему, что радиационные поправки в вакуум-вакуумном переходе сокращаются в любом самодуальном внешнем поле. Эта теорема является близким «родственником» утверждения о равенстве нулю всех радиационных поправок к энергии вакуума в суперсимметричной теории возмущений. Однако имеется и некоторое отличие. Именно, нулевые моды (их нет в теории возмущений) должны рассматриваться отдельно, и они дают ненулевой вклад в (дифференциальное) выражение для энергии вакуума. Таким образом, получаем точный результат для этой величины и, используя перенормируемость теории, немедленно превращаем этот результат в точную функцию Гелл-Мана — Лоу.

Для определения вакуумных конденсаторов рассматриваем некую функцию Грина, которая на малых расстояниях полностью фиксируется одноинстантонным вкладом. Затем применяем тождества Уорда, позволяющие распространить результат, относящийся к малым расстояниям, на все расстояния. При этом оказывается, что нарушается свойство кластеризации для исследуемой функции Грина и возникают вакуумные конденсаты.

Цель этого раздела — проиллюстрировать и развить вышеупомянутые идеи на простом примере двумерной суперсимметричной  $\sigma$ -модели. В первой части обзора уже было показано, что во многих аспектах  $\sigma$ -модели похожи на четырехмерные калибровочные теории. Настоящий раздел содержит материал, дающий новое подтверждение этому выводу.

Материал представлен в следующем порядке. Сначала изучены классические решения — инстантоны в  $O(3)$   $\sigma$ -модели [1, 3], введено суперсимметричное обобщение модели [17, 18] и показано, как находится точная функция Гелл-Мана — Лоу (во всех порядках по константе связи) в суперсимметричных моделях [19, 37]. Основная наша цель — дать как можно более простой обзор метода, предложенного в [19] в контексте суперсимметричной глюодинамики, и продемонстрировать справедливость утверждений, которые кажутся в глюодинамике значительно менее очевидными. Нет необходимости извиняться за то, что рассматривается лишь ограниченный круг вопросов — другие аспекты, относящиеся к суперсимметрии и инстантонному исчислению, подробно обсуждаются в многочисленных публикациях.

Литература по суперсимметрии очень богата. Даже если ограничиться двумерными суперсимметричными моделями, и то остаемся с очень большим числом связей. Мы цитируем только те работы, которые непосредственно связаны с содержанием настоящего обзора, так что список литературы никоим образом не претендует на полноту.

**Суперсимметричное обобщение  $\sigma$ -модели.** Опустим описание обычной  $O(3)$   $\sigma$ -модели в надежде, что читатель может получить общее представление из разд. 1. Педагогическое обсуждение специфических свойств модели приведено в [31].

Наиболее прямолинейная процедура, позволяющая получить суперсимметричное обобщение, по-видимому, такова [17, 18]. Вместо реального поля  $\sigma^a$  вводится реальное суперполе  $N^a$ :

$$N^a(x, \theta) = \sigma^a(x) + \bar{\theta}\psi^a(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F^a(x), \quad (47)$$

где  $\theta$  — двухкомпонентный майорановский (вещественный) спинор;  $\psi^a$  — фермионное поле и  $F^a$  — вспомогательное бозонное поле. В отличие от четырехмерной теории в двух измерениях майорановское представление можно реализовать как в минковском, так и в евклидовом пространствах. Поэтому мы могли бы записать лагранжиан в терминах  $N^a$  для обоих вариантов теории. Для определенности рассмотрим псевдоевклидов вариант [17] (суперсимметризация непосредственно в евклидовом пространстве проведена в [18]). Гамма-матрицы выбираются следующим образом:

$$\gamma^0 = \sigma_2; \quad \gamma^1 = i\sigma_1; \quad (48)$$

они чисто мнимые и удовлетворяют стандартной алгебре гамма-матриц. В формуле (47)  $\bar{\theta} = \theta\gamma_0$ . Действие суперсимметричной модели является прямым обобщением действия  $\int d^2x (\partial_\mu\sigma^a)^2$ :

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^2x \frac{1}{2} d^2\theta \epsilon^{\alpha\beta} D_\alpha N^a D_\beta N^a, \quad (49)$$

где  $D_\alpha$  — так называемая суперковариантная производная

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - i(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu. \quad (50)$$

Константа связи обозначена  $g^2$  (в бозонной модели аналогичная константа была обозначена  $f$ ). Связь  $\sigma^a\sigma^a = 1$  переходит теперь в следующее соотношение:

$$N^a(x, \theta) N^a(x, \theta) = 1. \quad (51)$$

Читатель легко убедится, что в компонентной форме суперсимметричная модель сводится к

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^2x [(\partial_\mu\sigma^a)^2 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + F^aF^a]. \quad (52)$$

Далее, разложение формулы (51) по  $\theta$  дает три связи:

$$\sigma^2 = 1, \quad \sigma\psi = 0, \quad \sigma F = \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi. \quad (53)$$

Как и ожидалось, производные от поля  $F$  отсутствуют, что означает возможность полного устранения поля  $F$  с помощью уравнений движения.

Вывод этих уравнений в данном случае требует некоторой осторожности, поскольку необходимо учесть связи. Простейший способ

сделать это — ввести соответствующие множители Лагранжа. Оставляя эту задачу в качестве упражнения, приведем конечный ответ:

$$\left. \begin{aligned} (-\delta^{ab} + \sigma^a \sigma^b) \partial^2 \sigma^b - \sigma^b \bar{\psi}^a i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^b &= 0; \\ (\delta^{ab} - \sigma^a \sigma^b) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^b + \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi) \psi^a &= 0; \\ F^a &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \sigma^a. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

В терминах физических полей лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma^a)^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi}^a i \hat{\partial} \psi^a + \frac{1}{8} (\bar{\psi} \psi)^2 \right]. \quad (55)$$

Остановимся здесь, чтобы сделать несколько замечаний о явных и «скрытых» симметриях лагранжиана (50). Прежде всего, он обладает очевидно глобальной  $O(3)$ -симметрией: три генератора, отвечающие вращениям в изопространстве вокруг первой, второй и третьей осей. Далее, использование суперполевого формализма гарантирует суперсимметрию, т. е. инвариантность действия по отношению к следующим преобразованиям:

$$\delta \sigma^a = \bar{\epsilon} \psi^a, \quad \delta \psi^a = -i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \sigma^a. \quad (56)$$

Действительно,

$$\delta S = \frac{1}{g^2} \int d^2x \left\{ -\partial_\mu (\partial_\mu \sigma^a \bar{\epsilon} \psi^a) - \frac{i}{2} \bar{\psi} \psi \bar{\psi}^a \gamma_\mu \epsilon \partial_\mu \sigma^a \right\},$$

причем второй член также сводится к полной производной, поскольку  $\partial_\mu \sigma^a \psi^a = 0$ .

Соответствующий сохраняющийся суперток записывается так:

$$S^\mu = \partial_\lambda \sigma^a \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi^a. \quad (57)$$

Проверим его сохранение:

$$\begin{aligned} \partial_\mu S^\mu &= \partial_\lambda \sigma^a \gamma^\lambda \hat{\partial} \psi^a + \partial_\lambda \sigma^a \gamma^\lambda \overleftarrow{\partial} \psi^a = \frac{i}{2} \partial_\lambda \sigma^a \gamma^\lambda \psi^a (\bar{\psi} \psi) - \sigma^b (\bar{\psi}^a i \hat{\partial} \psi^b) \psi^a = \\ &= -\frac{i}{2} (\sigma^a \hat{\partial} \psi^a) (\bar{\psi} \psi) + \frac{i}{2} (\sigma^b \hat{\partial} \psi^b) (\bar{\psi} \psi) = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Мы воспользовались здесь формулами (53), (54) и учли то обстоятельство, что  $(\bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b) \psi^a = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}^a \psi^a) \gamma^\mu \psi^b$ .

Суперток  $S^\mu$  существует для произвольной группы  $O(N)$ , не только для  $O(3)$ . Что более удивительно,  $O(3)$ -модель (и только она) обладает расширенной супералгеброй. Именно, в этом случае существует дополнительный сохраняющийся суперток [17]:

$$\tilde{S}^\mu = \varepsilon^{abc} \sigma^a \partial_\nu \sigma^b \gamma^\nu \gamma^\mu \psi^c. \quad (59)$$

Ниже эта расширенная супералгебра будет явно реализована в терминах комплексных киральных суперполей [36].

Добавок, имеет место сохранение векторного тока

$$J_\mu = -\frac{i}{2g^2} \epsilon^{abc} \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^\mu \psi^c \tag{60}$$

и его кирального партнера, аксиального тока

$$J_{\mu 5} = -\frac{i}{2g^2} \epsilon^{abc} \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^\mu \gamma^5 \psi^c. \tag{61}$$

Оба строятся с помощью  $\epsilon$ -символа и, следовательно, не имеют аналогов при  $N > 3$ . Отметим, что в этом пункте параллель с суперсимметричной глюодинамикой не является абсолютной, поскольку в последней нет синглетного по цвету сохраняющегося векторного тока.

Действие инвариантно относительно преобразований, генерируемых токами (57), (59), (60), причем соответствующие симметрии не нарушаются даже на квантовом уровне. Что касается киральной симметрии, она имеет место только на классическом уровне и разрушается квантовой аномалией точно так же, как и в КХД.

Остановимся на этом вопросе несколько более подробно, поскольку его трактовка в литературе довольно фрагментарна, а, с другой стороны, вывод аномалии не так тривиален, как могло бы показаться с первого взгляда.

а. **Н а и в н о е с о х р а н е н и е.** Дифференцирование  $J_{\mu 5}$  дает

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_{\mu 5} &= -\frac{i}{2g^2} \epsilon^{abc} \{ \partial_\mu \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^\mu \gamma^5 \psi^c + \\ &+ \sigma^a (\overleftarrow{\psi}^b \hat{\partial}) \gamma^5 \psi^c - \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^5 \hat{\partial} \psi^c \} = \\ &= -i \frac{\epsilon^{abc}}{2g^2} \{ \partial_\mu \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^\mu \gamma^5 \psi^c - i \sigma^a \bar{\psi}^b \gamma^5 \psi^c (\bar{\psi} \psi) \}. \end{aligned} \tag{62}$$

Далее, поскольку  $\sigma^2 = 1$ , векторы  $\partial_\mu \sigma^a$  и  $\sigma^a$  ортогональны друг другу в изопространстве:

$$\partial_\mu \sigma^a(x) = \epsilon^{ade} \sigma^d(x) v^e(x),$$

где  $v^e(x)$  — вспомогательный изовектор. Подставляя это соотношение в первую часть (56) и вспоминая, что  $\sigma\psi = 0$ , получаем, что первый член обращается в нуль.

Второй член тождественно равен нулю из-за свойств грассмановых чисел. Действительно, зафиксируем оси в изопространстве таким образом, чтобы в данной точке  $x$  вектор  $\sigma(x)$  имел лишь третью компоненту,  $\sigma(x) = (0, 0, \sigma^3(x))$ . Тогда из соотношения  $\sigma\psi = 0$ , очевидно, следует  $\psi^3 = 0$ , и мы остаемся с

$$\bar{\psi}^1 \gamma^5 \psi^2 (\bar{\psi}^1 \psi^1 + \bar{\psi}^2 \psi^2).$$

Поскольку  $\psi$  — вещественный двухкомпонентный спинор,

$$\psi_\alpha^1 \psi_\beta^1 \psi_\gamma^1 \equiv 0, \quad \psi_\alpha^2 \psi_\beta^2 \psi_\gamma^2 \equiv 0.$$

б. Аксиальная аномалия. Как хорошо известно из КХД, формальные манипуляции с уравнениями движения могут привести к неправоначальному выводу, поскольку теория должна быть сначала регуляризована, а при этом некоторые симметрии классического действия могут быть утеряны. Именно такая ситуация реализуется с аксиальным током. Существуют различные методы регуляризации. По-видимому, простейший из них в данном случае — введение вспомогательного тяжелого фермионного поля  $R$  (с массой  $M_0$ ):

$$J_{REG}^{\mu 5} = -\frac{i}{2g^2} \varepsilon^{abc} \sigma^a \{ \bar{\psi}^b \gamma^\mu \gamma^5 \psi^c - \bar{R}^b \gamma^\mu \gamma^5 R^c \}. \quad (63)$$

Теперь дивергенция тока уже не обращается в нуль, а сводится к

$$\partial_\mu J_{REG}^{\mu 5} = -\frac{i}{2g^2} 2i M_0 \varepsilon^{abc} \sigma^a \bar{R}^b \gamma^5 R^c.$$

Дальнейший вывод по существу не отличается от вывода треугольной аномалии в КХД (впрочем, аномалия в  $\sigma$ -модели двуугольная, см. ниже). Перебираем один за другим матричные элементы оператора  $M_0 \bar{R} \gamma^5 R$  по всем состояниям, содержащим только легкие поля; далее сортируем их, пытаясь выделить матричный элемент, не стремящийся к нулю при  $M_0 \rightarrow \infty$ . Если результат поиска положителен, аномалия действительно существует. Какой конкретно матричный элемент является потенциальным кандидатом в аномалию, это нам подскажут простые размерные соображения.

Технически удобно рассмотреть распространение фермиона  $R$  во внешнем (фоновом)  $\sigma$ -поле. Тогда

$$\partial_\mu J^{\mu 5}(x) = -\frac{i}{2g^2} 2i M_0 \varepsilon^{abc} \sigma^a(x) i \text{Sp} [\gamma^5 G^{cb}(x, x)], \quad (64)$$

где  $G(x, y)$  — пропагатор поля  $R$  во внешнем поле, определенный уравнением

$$\frac{1}{g^2} [(i\partial_\mu \delta^{ab} + A_\mu^{ab}) \gamma^\mu - M_0 \delta^{ab}] G^{bc}(x, y) = \delta^{ac} \delta(x - y), \quad (65)$$

$A_\mu^{ab} = i\sigma^a \partial_\mu \sigma^b$  [ср. с формулой (54)], и символ  $\text{Sp}$  обозначает взятие следа по лоренцевым (спинорным) индексам.

Теперь последнее усилие. Функцию Грина вычисляем разложением в ряд по  $A_\mu^{ab}$ . Достаточно удержать лишь член, пропорциональный  $(\partial_\alpha A_\mu^{ab}(x))(x - y)$ . [Действительно, член, пропорциональный  $A_\mu^{ab}(x)$ , даст нуль, будучи свернут с  $\varepsilon$ -символом в соотношении (64),  $A_\mu^{ab}(x) A_\nu^{bc}(x) \equiv 0$ ; все другие члены разложения более высокой размерности, и поэтому их вклад обращается в нуль при  $M_0 \rightarrow \infty$ .]



Таким образом, фактически мы имеем дело с двуугольной аномалией (рис. 7). После нескольких преобразований формулы (64) (подробности смотрите в [58]) получаем

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{abc} \sigma^a \partial_\mu \sigma^b \partial_\rho \sigma^c \varepsilon^{\mu\rho}. \quad (66)$$

Вместо того чтобы иметь дело с исходными полями  $\sigma^a$  и  $\psi^a$  и учитывать связи, во многих отношениях удобнее избавиться от связей, ввести новые поля. Обсудим этот пункт, последний в настоящем разделе, подробнее.

Поскольку  $\sigma$ -поля живут на единичной сфере, существует чрезвычайно естественная возможность введения новых независимых

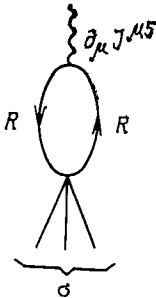


Рис. 7. Петля тяжелого фермиона, определяющая аномалию в дивергенции аксиального тока  $J^{\mu 5}$ . [Определение  $J^{\mu 5}$  см. в формулах (61), (63)]

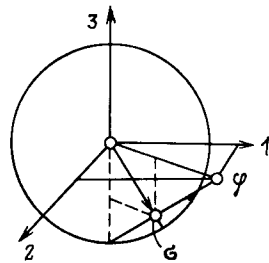


Рис. 8. Единичная сфера  $\sigma = 1$ , спроектированная на плоскость  $(\varphi_1, \varphi_2)$  с помощью стереографической проекции

переменных, а именно стереографическая проекция. От трех полей  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  с одной связью ( $\sigma^3 = 1$ ) перейдем к двум независимым полевым переменным  $\varphi_1, \varphi_2$  с помощью следующего преобразования (рис. 8):

$$\sigma^1 = \frac{2\varphi_1}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 1}, \quad \sigma^2 = \frac{2\varphi_2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 1}, \quad \sigma^3 = \frac{1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 1}. \quad (67)$$

Далее,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  объединяются в одно комплексное поле  $\varphi$ :

$$\varphi = \text{Re } \varphi + i \text{Im } \varphi = \varphi_1 + i \varphi_2. \quad (68)$$

Фермионный аналог уравнений (67) можно легко установить с помощью суперсимметрии:

$$\left. \begin{aligned} \psi^1 &= \frac{2\text{Re}\Psi}{1 + \varphi^*\varphi} - \frac{2\text{Re}\varphi(\varphi^*\Psi + \varphi\Psi^*)}{(1 + \varphi^*\varphi)^2}; \\ \psi^2 &= \frac{2\text{Im}\Psi}{1 + \varphi^*\varphi} - \frac{2\text{Im}\varphi(\varphi^*\Psi + \varphi\Psi^*)}{(1 + \varphi^*\varphi)^2}; \\ \psi^3 &= -2 \frac{\varphi^*\Psi + \varphi\Psi^*}{(1 + \varphi^*\varphi)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где  $\Psi$  — комплексное двухкомпонентное спинорное поле, являющееся партнером к  $\varphi$ . Отметим, что параметризация (67), (69) автоматически дает  $\sigma^a \sigma^a = 1$ ,  $\sigma^a \psi^a = 0$ . Стоит подчеркнуть еще раз, что ни  $\Psi$ , ни  $\varphi$  не обладают изотопическими индексами.

Для полноты приведем также формулы обратного преобразования:

$$\varphi = \frac{\sigma^1 + i\sigma^2}{1 + \sigma^3}, \quad \Psi = \frac{\psi^1 + i\psi^2}{1 + \sigma^3} - \frac{\sigma^1 + i\sigma^2}{(1 + \sigma^3)^2} \psi^3. \quad (70)$$

Перепишем лагранжиан (55) в терминах новых полей  $\varphi$  и  $\Psi$ . Переход к новым полям — простое, но довольно длинное алгебраическое упражнение, приводящее к следующему лагранжиану:

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g^2} \frac{1}{\chi^2} \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) - \right. \\ \left. - \frac{i}{\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) - \frac{1}{2\chi^2} (\Psi^\nu \Psi^\delta \varepsilon_{\nu\delta})^+ \Psi^\alpha \Psi^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}, \quad (71)$$

где  $\chi = 1 + \varphi^* \varphi$ .

При выводе лагранжиана мы воспользовались формулами (67), (69) и явным видом гамма-матриц [см. формулу (48)]. Более точно использовались такие общие свойства, как  $\text{Re} \Psi \gamma^0 \gamma^\mu \text{Re} \Psi = 0$  и т. д.

Вернемся теперь к обстоятельству, отмеченному впервые в работе [17]: хотя суперполевого формализм, описанный выше, обеспечивает  $n = 1$  суперсимметрию, в действительности имеется два сохраняющихся супертока [см. формулы (57), (59)] —  $O(3)$ -модель обладает расширенной  $n = 2$  супералгеброй. В исходной формулировке (49) сохранение тока  $S_\mu$  неявное. После введения комплексных полей  $\Psi$  и  $\varphi$  расширенная суперсимметрия может быть реализована явно [36].

Прежде всего построим комплексное киральное суперполе  $\Phi$ :

$$\Phi = \varphi(x_c) + \sqrt{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\alpha \Psi^\beta(x_c) + \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta F(x_c), \quad (72)$$

где  $F$  — вспомогательное бозонное поле, и все функции  $\varphi$ ,  $\Psi$ ,  $F$  зависят от кирального аргумента

$$x_c^\mu = x^\mu + i\bar{\theta} \gamma^\mu \theta. \quad (73)$$

Отметим, что параметр  $\theta$ , фигурирующий в этом выражении, является теперь комплексным двухкомпонентным спинором ( $\bar{\theta}$  и  $\theta$  — независимые грасмановы переменные), в то время как исходное суперполе (47) содержало майорановский спинор. Таким образом, число фермионных координат удваивается\*.

Теперь действие можно переписать в терминах суперполя  $\Phi$  [36]:

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int d^2 x d^2 \theta d^2 \bar{\theta} \ln(1 + \Phi^+ \Phi). \quad (74)$$

\* Один и тот же символ  $\theta$  обозначает реальный и комплексный спиноры, — мы не рискнули избрести новое обозначение для фермионной координаты. Надеемся, что это обстоятельство не вызовет путаницы; смысл  $\theta$  всегда ясен из контекста.

Имея ответ, читатель легко убедится, что после интегрирования по  $\theta$  и  $\bar{\theta}$  (по стандартным правилам грассмановой алгебры) действительно воспроизводится «старый» компонентный лагранжиан (71).

Существование  $n = 2$  суперсимметрии и ее явная реализация (74) не специфичны для  $O(3)$   $\sigma$ -модели. Как было отмечено Зумино [36], явление имеет совершенно общую природу. В  $O(3)$ -модели  $\sigma$ -поля живут на сфере. Двумерная сфера является комплексным кэлеровым многообразием (педагогическое изложение предмета см. в книгах [39, 40]). Оказывается, что для любого кэлерова многообразия соответствующие  $\sigma$ -модели обладают расширенной  $n = 2$  суперсимметрией. Более того, исходя лишь из общих соображений, Зумино получил выражение для действия, аналогичное (74) и годящееся для любой кэлеровой  $\sigma$ -модели.

Цена, которую приходится заплатить за явную реализацию  $n = 2$  суперсимметрии, довольно высока,  $O(3)$ -симметрия совершенно прозрачная в лагранжиане (47), теперь частично скрыта. Повороты  $N^a$  вокруг третьей оси в изопространстве соответствуют следующим инфинитезимальным преобразованиям  $\Phi$ :

$$\Phi \rightarrow (1 + i\delta) \Phi, \quad \Phi^+ \rightarrow (1 - i\delta) \Phi^+,$$

где  $\delta$  — действительный параметр. Действие (74), очевидно, инвариантно относительно этого фазового «поворота». Что касается двух других изотопических вращений  $N^a$  (вокруг первой и второй осей), соответствующая симметрия проявляется как инвариантность действия (74) относительно нелинейных преобразований  $\Phi \rightarrow \epsilon + \epsilon^* \Phi^2$ ,  $\Phi^+ \rightarrow \epsilon^* + \epsilon (\Phi^+)$  с комплексным параметром  $\epsilon$ .

**Инстантоны.** Конфигурационное пространство, в котором определены  $\sigma$ -поля, топологически эквивалентно (после виковского поворота и компактификации \*) двумерной сфере. С другой стороны, в  $O(3)$ -модели  $\sigma$ -поля живут на той же двумерной сфере,  $(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 = 1$ . Таким образом должны существовать топологически неэквивалентные классы полевых конфигураций, соответствующие топологически различным отображениям этих двух сфер друг на друга. Столь же ясно, что для  $O(N)$ -группы с  $N > 3$  все отображения  $S^2 \rightarrow S^{N-1}$  топологически эквивалентны тривиальному и, следовательно, инстантоны отсутствуют.

Выражение для топологического заряда в евклидовой  $O(3)$   $\sigma$ -модели приведено в [3]:

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{abc} \epsilon_{\mu\nu} \sigma^a \partial_\mu \sigma^b \partial_\nu \sigma^c. \quad (75)$$

\* Термин «виковский поворот» означает, что мы переходим в евклидово пространство-время. Термин «компактификация», грубо говоря, означает, что все бесконечно удаленные точки отождествляются. Другими словами, рассматриваются только такие конфигурации  $\sigma^a(x)$ , которые имеют один и тот же предел при  $|x| \rightarrow \infty$ , независимо от направления.

Можно легко убедиться, что интеграл в правой части действительно удовлетворяет необходимым требованиям. Для этого покажем, что, если асимптотика  $\sigma$  фиксирована, непрерывные вариации  $\sigma$  не изменяют  $q$ . В самом деле, удерживая лишь члены, линейные по  $\delta\sigma$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta q &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon^{abc} \varepsilon_{\mu\nu} \{ \delta\sigma^a \partial_\mu \sigma^b \partial_\nu \sigma^c + 2\sigma^a \partial_\mu (\delta\sigma^b) \partial \sigma^c \} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon^{abc} \varepsilon_{\mu\nu} \{ 2\partial_\mu (\sigma^a \delta\sigma^b \partial_\nu \sigma^c) + 3\delta\sigma^a \partial_\mu \sigma^b \partial_\nu \sigma^c \}. \end{aligned} \quad (76)$$

Первый член здесь — полная производная и, следовательно, сводится к интегралу по поверхности. Последний, в свою очередь, обращается в нуль, поскольку искажения  $\sigma$  по предположению локализованы,  $\delta\sigma \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Второй член равен нулю сам по себе. Для доказательства заметим, что из связи  $\sigma^a \sigma^a = 1$  вытекает соотношение

$$\sigma^a \delta\sigma^a = 0 \quad \text{или} \quad \delta\sigma^a(x) = \varepsilon^{ade} \sigma^d(x) v^e(x),$$

где  $v^e(x)$  — некоторый изовектор. Подставляя последнее соотношение, получаем

$$\varepsilon^{abc} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{ade} \sigma^d v^e \partial_\mu \sigma^b \partial_\nu \sigma^c = 2\varepsilon_{\mu\nu} [v^c \partial_\mu (\sigma^2) \partial_\nu \sigma^c] = 0.$$

Таким образом,  $q$  не изменяется при непрерывных преобразованиях  $\sigma$ , представляя собой топологический заряд, который характеризует классы полей. Нормированный фактор  $(8\pi)^{-1}$  выбирается таким образом, что  $q$  принимает только целые значения 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  и т. д. Тривиальная (вакуумная) полевая конфигурация  $\vec{\sigma}(x) = \text{const}$ , очевидно, соответствует  $q = 0$ .

Если  $q \geq 0$ , удобно переписать действие в следующем тождественном виде:

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^2x [\partial_\mu \sigma^a + \varepsilon^{abc} \sigma^b \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma^c]^2 + \frac{1}{2g^2} q. \quad (77)$$

Отсюда сразу же видно, что локальные минимумы действия достигаются при

$$\partial_\mu \sigma^a = -\varepsilon^{abc} \sigma^b \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma^c. \quad (78)$$

Это и есть уравнение самодуальности в  $O(3)$   $\sigma$ -модели. Его решения, инстантоны, автоматически удовлетворяют также классическим уравнениям движения. Антиинстантоны получаются из уравнения антисамодуальности, которое отличается знаком в правой части (минус заменяется на плюс).

В силу  $O(3)$ -инвариантности существование решения с асимптотикой  $\sigma^a(x)|_{|x| \rightarrow \infty} = \sigma_{ASU}^a$  автоматически влечет за собой существование повернутых решений с любой асимптотикой, совместимой с условием  $\sigma = 1$ . Если  $\sigma^3 = 1$ ,  $\sigma^{1,2} = 0(|x| \rightarrow \infty)$ , то мы будем называть такие граничные условия стандартными.

Одноинстантонное решение, удовлетворяющее стандартным граничным условиям, имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \frac{2(x-x_0)y}{(x-x_0)^2+y^2}, \quad \sigma^2 = \frac{2(x-x_0) \times y}{(x-x_0)^2+y^2}, \quad \sigma^3 = \\ &= \frac{(x-x_0)^2-y^2}{(x-x_0)^2+y^2} (a \times b \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1),\end{aligned}\quad (79)$$

где  $x_0$  и  $y$  — произвольные двумерные векторы, причем  $x_0$  играет роль инстантонного центра (две коллективные координаты),  $|y| \equiv \equiv \rho$  — размер инстантона, и, наконец, направление  $y$  фиксирует ориентацию инстантона по отношению к третьей оси в изопространстве. Таким образом, решение (79) содержит четыре коллективных координаты. Вообще говоря, существует возможность повернуть решение вокруг первой и (или) второй осей в изопространстве, генерируя при этом решения с «нестандартной» асимптотикой. Таким поворотам, очевидно, соответствуют две дополнительных коллективных координаты.

Стоит отметить, что

$$(\partial_\mu \sigma^a(x))^2_{\text{inst}} = \frac{8y^2}{[(x-x_0)^2+y^2]^2}$$

и одноинстантонное действие сводится к

$$S_0 = \frac{1}{2g^2} \int d^2x (\partial_\mu \sigma^a(x))^2_{\text{inst}} = \frac{4\pi}{g^2}. \quad (80)$$

Кроме того, легко проверить, что топологический заряд, соответствующий решению (79), действительно равен единице:

$$q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon^{abc} \varepsilon_{\mu\nu} [\sigma^a(x) \partial_\mu \sigma^b(x) \partial_\nu \sigma^c(x)]_{\text{inst}} = 1. \quad (81)$$

Комбинируя определение топологического заряда (75) с аксиальной аномалией (66), мы видим, что (как и в КХД) инстантон обязательно генерирует фермионные нулевые моды. Более точно, для одноинстантонного перехода  $\Delta Q_5 = 4$ , где  $Q_5$  обозначает аксиальный заряд. Другими словами, каждый инстантон сопровождается четырьмя фермионными линиями. Это обстоятельство окажется важным впоследствии.

Поясним теперь, каким образом можно легко найти решение (79) и другие (многоинстантонные) решения исходя из уравнения дуальности. В терминах комплексных полей  $\varphi$  это уравнение сводится к [3]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi(z, \bar{z}) = 0, \quad (82)$$

где  $z = x_1 + i x_2$ ,  $\bar{z}_1 = \bar{x}_1 - i x_2$ . Любая функция, зависящая только от  $z$ , очевидно, удовлетворяет соотношению (82). Далее, классическое поле, очевидно, не должно иметь существенных сингулярностей

и, следовательно, функция  $\varphi(z)$  должна быть аналитической. Однако полюсы допустимы — полюс у  $\varphi(z)$  в некоторой точке  $\tilde{z}$  просто означает, что  $\sigma^3 \rightarrow -1$  при  $x_1 \rightarrow \operatorname{Re} \tilde{z}$ ,  $x_2 \rightarrow \operatorname{Im} \tilde{z}$ .

Единственная аналитическая функция без полюсов —  $\varphi(x) = \operatorname{const}$ , что отвечает тривиальному вакуумному решению. Аналитические функции с одним полюсом соответствуют одноинстантонному решению,  $q = 1$ , с двумя полюсами — двухинстантонному решению,  $q = 2$ , и т. д.

Наиболее общая параметризация одного инстантона такова:

$$\varphi_{\text{inst}} = C + y/(z - z_0), \quad (83)$$

где  $C$ ,  $y$ ,  $z_0$  — три независимых комплексных константы (шесть вещественных коллективных координат). Используя закон преобразования (67), можно выразить  $\sigma_{\text{inst}}^2$  через  $\varphi_{\text{inst}}$  и проверить, что стандартные граничные условия отвечают  $C = 0$ . Далее,  $Z_0$  — положение инстантонного центра, а параметр  $y$  имеет тот же самый смысл, что и в формуле (53):  $|y|$  играет роль радиуса инстантона  $\rho$ , в то время как фаза  $y$  совпадает с углом поворота вокруг третьей оси в изопространстве. Добавляя  $C$ , мы поворачиваем инстантон вокруг первой и (или) второй осей.

Так же как и в КХД, дифференцирование по коллективным координатам дает нулевые моды, бозонные нулевые моды в данном случае. Две комплексные моды, интересные для дальнейшего, таковы:

$$\varphi^{(1)} \sim y/(z - z_0)^2, \quad \varphi^{(2)} \sim 1/(z - z_0). \quad (84)$$

Их геометрический смысл совершенно прост — имеется четыре вещественных моды, две из которых совпадают с трансляциями, одна с дилатацией, и последняя мода связана с поворотами вокруг третьей оси в изопространстве (такие повороты не меняют стандартной асимптотики).

Если бы асимптотика поля псевдочастицы не была бы фиксирована, возникли бы две дополнительные нулевые моды, соответствующие поворотам вокруг первой и второй осей. Однако одновременно тривиальная амплитуда с нулевым топологическим зарядом [«вакуум»,  $\sigma^a(x) = \operatorname{const}$ ] тоже приобрела бы те же две нулевых моды — явление, не имеющее параллели в КХД. Более того, поскольку одноинстантонная амплитуда всегда нормируется на теорию возмущений (см. ниже), эффекты, связанные с двумя дополнительными модами, полностью сократились бы, и поэтому их можно не рассматривать вовсе.

До сих пор наше обсуждение инстантонов не зависело от фермионов. Как хорошо известно из КХД, наиболее радикальный эффект безмассовых фермионов — появление фермионных нулевых мод, которые полностью подавляют инстантонную амплитуду в отсутствие фермионных источников.

Рассматриваемая модель не является исключением. Более того, как уже упоминалось выше, число фермионных нулевых мод известно заранее, из аксиальной аномалии. Инстантон генерирует четыре (вещественных) нулевых моды.

Остановимся на этом пункте более подробно. Прежде всего лагранжиан (71) следует аналитически продолжить в евклидово пространство-время. Процедура совершенно тривиальна для бозонной части и слегка менее тривиальна для фермионной. Все необходимые детали и определения приведены в [42], и мы просто сформулируем окончательный ответ:

$$\mathcal{L}_E = \frac{2}{g^2} \frac{1}{\chi^2} \left\{ \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - \frac{i}{2} (\Psi^+ \gamma_\mu^E \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \Psi^+ \gamma_\mu^E \Psi) + \right. \\ \left. + \frac{i}{\chi} \Psi^+ \gamma_\mu^E \Psi (\varphi^+ \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^+) + \frac{1}{\chi^2} (\Psi^+ \Psi)^2 \right\}, \quad (85)$$

где  $\Psi$  и  $\Psi^+$  в евклидовом пространстве трактуются как независимые переменные:  $\chi = 1 + \varphi^+ \varphi$ ; матрицы  $\gamma_\mu^E$  удовлетворяют стандартной алгебре  $\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$ . Удобно выбрать евклидовы гамма-матрицы в виде

$$\gamma_\mu^E = \sigma_\mu, \quad \mu = 1, 2.$$

Отметим, что, поскольку  $\Psi$  и  $\Psi^+$  — независимые комплексные переменные, не связанные условием майорановости, нет необходимости требовать вещественности гамма-матриц [ср. с формулой (48)].

Фермионные нулевые моды удовлетворяют классическому уравнению движения

$$-i\gamma_\mu \partial_\mu \Psi + \frac{2i}{\chi} \gamma_\mu \Psi \varphi^+ \partial_\mu \varphi + \frac{2}{\chi^2} (\Psi^+ \Psi) \Psi = 0, \quad (86a)$$

где  $\varphi = \varphi_{\text{inst}}$  плюс дополнительное условие

$$\Psi^+ \gamma_\mu \Psi = 0, \quad (86b)$$

обеспечивающее отсутствие фермионного тока в классическом уравнении движения для  $\varphi$ .

В принципе, можно пытаться решить эти уравнения; к счастью, суперсимметрия выполняет за нас эту работу. Решение бозонного уравнения уже известно,  $\varphi_{\text{inst}}$ . Делая над ним преобразования суперсимметрии, генерируем фермионные решения. Это обстоятельство, впервые отмеченное в [43, 44], является общим для всех суперсимметричных теорий.

Рассмотрим евклидов вариант суперполя  $\Phi$ , определенного в формуле (72), и положим  $\Psi = F = 0$ ,  $\varphi = \varphi_{\text{inst}}$ . Сдвиги  $\theta$ , очевидно, не приводят к каким-либо изменениям  $\Phi$ , поскольку киральный аргумент  $x_c$  при этом не меняется. Наоборот, при сдвиге  $\theta^+$ ,  $\theta^+ \rightarrow \theta^+ + \xi^+$

$$x_c^\mu \rightarrow x_c^\mu + 2i\xi^+ \gamma^\mu \theta.$$

Таким образом, генерируется фермионная компонента  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{SS}^1 &= -2 \sqrt{2} i \alpha^+ y / (z - z_0)^2, \\ \Psi_{SS}^2 &= 0, \quad F = 0, \end{aligned} \tag{87}$$

где (1, 2) — спинорные (лоренцевы) индексы и  $\alpha^+ = (\xi^+)^1$ . Смысл нижнего индекса ( $SS$ -supersymmetry) станет ясен из нижеследующего.

Не составляет труда убедиться, что полученное решение для  $\Psi$  автоматически удовлетворяет классическим уравнениям движения.

Однако это еще не конец истории. Так же как и в суперсимметричной глюодинамике, лагранжиан (85) не содержит размерных параметров и обладает масштабной инвариантностью на классическом уровне. Комбинируя масштабную инвариантность и суперсимметрию, приходим к так называемой суперконформной группе, которая включает конформные преобразования и их суперпартнеров (обсуждение суперконформной симметрии в глюодинамике см., например, в обзоре [34]).

Фермионный сектор этой группы состоит из обычных преобразований суперсимметрии с параметрами  $\xi$  и  $\xi^+$  — постоянными грассмановыми спинорами плюс те же преобразования с параметрами, зависящими от  $x$ :

$$\xi^{\pm\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} x_\mu (\gamma_\mu)_{\beta\delta} \tilde{\xi}^\delta.$$

Как масштабная, так и суперконформная инвариантности разрушаются квантовыми аномалиями. Однако для классических решений они являются реальной симметрией, которую необходимо учитывать. Делая суперконформное преобразование над  $\varphi_{inst}$ , мы получаем другое фермионное решение \*, вводя таким образом новую фермионную коллективную координату  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{SC}^1 &= -2 \sqrt{2} i \beta y / (z - z_0); \\ \Psi_{SC}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{88}$$

( $\beta$  — некоторое грассманово число).

В итоге имеем две комплексных фермионных коллективных координаты, что эквивалентно четырем действительным нулевым модам — число, ожидаемое из аксиальной аномалии. Стоит подчеркнуть, что найденные моды обладают определенной киральностью:

$$\gamma^5 \Psi_{SS(SC)} = \Psi_{SS(SC)} \tag{89}$$

\* Отметим, что простой анализ уравнения (86) показывает следующее. Любой спинор типа  $\Psi^1 = f(z)$ ;  $\Psi^2 = 0$ , где  $f$  — произвольная функция  $z$ , удовлетворяет этому уравнению. Может возникнуть вопрос: «Почему же мы отдали предпочтение решению, приведенному в тексте, а не какому-либо другому?» Дело в том, что решения, приведенные в тексте, — единственные нормируемые решения с правильным аналитическим поведением (функция  $f$  должна быть мероморфной).



Теперь можно записать суперинстантон в следующей сжатой форме:

$$\Phi_{\text{inst}} = \frac{y(1 + 4i\theta^2\beta)}{z_c - z_0 - 4i\theta^2\alpha^+}; \quad (90)$$

$$z_c = z + 2i\theta^+ \theta^2.$$

**Инстантонная мера.** Читатель, знакомый с инстантонным исчислением в КХД, помнит, конечно, что основным объектом является амплитуда одноинстантонного перехода (другой термин для той же величины — инстантонный вклад в энергию вакуума). В КХД эту амплитуду часто называют плотностью инстантонов — она входит во все вычисления, которые делаются в рамках инстантонных моделей вакуума [45—47]. В суперсимметричной глюодинамике нам удалось найти одноинстантонную амплитуду точно [19], и это позволило определить точную функцию Гелл-Мана — Лоу. Демонстрация и иллюстрация метода, использованного в суперсимметричной глюодинамике, — наша основная цель в этом разделе, и поэтому мы переходим к обсуждению одноинстантонной амплитуды в  $\sigma$ -модели.

Центр инстантона может находиться в любой точке (евклидова) пространства, кроме того, его размер и ориентация так же произвольны. Интуитивно ясно, что амплитуда одноинстантонного перехода  $I$  должна быть пропорциональна интегралу по  $x_0$  и  $\rho$ . (Более строгие аргументы приведены в [41, 48].) В суперсимметричных моделях интегрирование по бозонным коллективным координатам обязательно сопровождается интегрированием по их фермионным суперпартнерам. Если так, то (после интегрирования по ориентации)  $I$  сводится к функции  $g_0$ ,  $M$  (ультрафиолетового обрезания) и  $\rho$ , помноженной на

$$dx_0 d\rho d\alpha d\beta d\alpha^+ d\beta^+.$$

Подынтегральное выражение носит естественное название инстантонной меры.

В [19] было показано, что благодаря суперсимметрии инстантонная мера однозначно фиксируется и может быть выписана почти немедленно (с точностью до общей числовой постоянной). Поясним этот важный пункт более подробно.

Прежде всего, главный экспоненциальный фактор

$$I \sim e^{-4\pi/g_0^2}$$

определяется инстантонным действием,  $S(\Phi_{\text{inst}})$ . Предэкспоненциальные петлевые поправки учитывают то обстоятельство, что поля флуктуируют вокруг  $\Phi_{\text{inst}}$ .

Для того чтобы получить однопетлевую поправку,  $\Phi$  представляется в виде  $\Phi_{\text{inst}}$  плюс малое отклонение:

$$\Phi = \Phi_{\text{inst}} + \delta\Phi,$$

действие разлагается по  $\delta\Phi$ , причем учитываются только билинейные по  $\delta\Phi$  члены. Возникший функциональный интеграл — гауссов и, в принципе, его можно взять. Символически результат записывается как произведение детерминантов в фоновом инстантонном поле.

Вычисление многопетлевых поправок представляет собой, вообще говоря, весьма трудную задачу. К счастью, в суперсимметричных теориях нет нужды вычислять что-либо. Все многопетлевые поправки к одноинстантонной амплитуде гаснут. То же самое было бы справедливо и для однопетлевой поправки, если бы не нулевые моды. Ситуация напоминает хорошо известное сокращение бозонных и фермионных петель в «пустом» вакууме (без инстантонного фона) [49]. Присутствие инстантона фактически не сказывается на упомянутом выше сокращении.

А. Однопетлевой вклад, ненулевые моды. Забудем на минуту о существовании нулевых мод. Вскоре мы вернемся к их обсуждению, а пока проинтегрируем по «ортогональным направлениям» в функциональном пространстве.

Удобно ввести  $\delta\varphi$  и  $\delta\Psi$  следующим образом:

$$\varphi = \varphi_{\text{inst}} + \frac{g}{\sqrt{2}} \delta\varphi; \quad \Psi = \Psi_{\text{inst}} + \frac{g}{\sqrt{2}} \delta\Psi, \quad (91)$$

где  $\varphi_{\text{inst}}$  и  $\Psi_{\text{inst}}$  — классические решения, описанные выше. Подставляя это соотношение в выражение для действия, получаем в билинейном приближении [38]

$$S^{(2)} = \int d^2x \left\{ \delta\varphi^+ \left( -4 \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \delta\varphi - 2i \delta\Psi^+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \\ \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{bmatrix} \delta\Psi \right\}, \quad (92)$$

где

$$\chi_0 = 1 + \varphi_{\text{inst}}^+ \varphi_{\text{inst}} = 1 + \frac{|y|^2}{|z - z_0|^2}.$$

Следующий шаг — диагонализация билинейной формы, фигурирующей в (92). Для диагонализации необходимо найти собственные функции соответствующих операторов. Бозонные моды определяются следующим уравнением:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \delta\varphi_n = E_n^2 \chi_0^{-2} \delta\varphi_n, \quad (93)$$

где  $E_n^2$  —  $n$ -е собственное значение, а  $\delta\varphi_n$  — соответствующая собственная функция, нормированная условием

$$\int \delta\varphi_n^+ \delta\varphi_n \chi_0^{-2} d^2x = 1.$$

Отметим, что оператор  $-\frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z}$  действительно обладает только неотрицательными собственными значениями.

Мы не будем пытаться решить уравнение (93). Вместо этого продемонстрируем, что каждая бозонная мода (с  $E_n \neq 0$ ) обязательно сопровождается двумя «вырожденными» фермионными модами.

Уравнение для фермионных собственных функций выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \\ \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Psi_n^1 \\ \delta\Psi_n^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_n \chi_0^{-2} \begin{pmatrix} \delta\Psi_n^1 \\ \delta\Psi_n^2 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Оно имеет два решения — этот факт немедленно вытекает из (93). Действительно, первое решение

$$\delta\Psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta\varphi_n, \quad \delta\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{E_n} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} \delta\varphi_n$$

отвечает  $\varepsilon_n = -E_n$ , в то время как второе решение

$$\delta\Psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta\varphi_n, \quad \delta\Psi_n^{(2)} = -\frac{1}{E_n} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} \delta\varphi_n$$

имеет собственное значение  $\varepsilon_n = +E_n$ . Двукратное вырождение фермионных мод — следствие  $\gamma_5$ -инвариантности модели. Не стоит и говорить, что бозон-фермионное вырождение отражает суперсимметрию.

Возможно, для многих читателей уже очевидно, что бозонный и фермионный вклады сокращают друг друга. Для тех, кто еще не вполне убежден в этом, сделаем несколько пояснительных замечаний. Согласно стандартным правилам функционального интегрирования

$$\int D\delta\varphi^+(x) D\delta\varphi(x) \rightarrow \left[ \text{Det} \left( -4 \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]^{-1} = \prod_n \frac{1}{4E_n^2}. \quad (95)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \int D\delta\Psi^+(x) D\delta\Psi(x) &\rightarrow \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2i \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \\ 2i\chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \prod_n 2i\varepsilon_n = \prod_n 4E_n^2. \end{aligned} \quad (96)$$

В итоге комбинированный эффект ненулевых мод равен единице.

Формальные манипуляции не должны затенить очень простой и общий смысл явления. Во всех суперсимметричных теориях число бозонных и фермионных степеней свободы равно друг другу (за возможным исключением уровней с нулевой энергией). Энергии вырождены (суперсимметрия!), следовательно, неудивительно, что фер-

мионная петля совпадает с бозонной с точностью до знака (знак минус появляется из-за противоположной статистики). Это обстоятельство не зависит от присутствия инстантона \*.

Б. Однопетлевой вклад, нулевые моды. Уровни с нулевой энергией, нулевые моды, являются исключительными, поскольку они, вообще говоря, не спарены. Все такие моды имеют геометрический смысл, отражая симметрии классического действия. Впрочем, не все симметрии генерируют нулевые моды, некоторые симметрии реализуются тривиально. Например, лоренцева инвариантность не представлена специальными нулевыми модами. Причины просты — инстантонное решение (79) является скаляром по отношению к комбинированным вращениям в координатном и изотопическом пространствах. Таким образом, чтобы избежать двойного счета, достаточно учесть только изотопические вращения. Точно так же конформная инвариантность эквивалентна трансляции и одновременной дилатации.

Что касается фермионных нулевых мод, легко убедиться, что только одна из двух возможных комбинаций супертоков, именно  $\frac{1}{2}(S^\mu + \tilde{S}^\mu)$ , генерирует нетривиальное  $\Psi_{\text{inst}}$  из  $\sigma_{\text{inst}}$ . Другая линейная комбинация,  $\frac{1}{2}(S^\mu - \tilde{S}^\mu)$ , приводит к тривиальному — нулевому фермионному полю.

Интегрирование по коэффициентам перед бозонными нулевыми модами негауссово и, как хорошо известно, нужно перейти к интегрированию по соответствующим коллективным координатам. При переходе к коллективным координатам возникают якобианы. И опять вместо прямого вычисления мы попытаемся найти обходной путь.

Прежде всего напомним, что мы интересуемся инстантонной мерой, усредненной по ориентации инстантона в изопространстве. Практически это означает, что необходимо проинтегрировать по фазе  $y$ . Как было объяснено выше, учитывать два других возможных вращения не нужно — этот эффект полностью сокращается точно таким же эффектом в нормировочной «вакуумной» амплитуде  $\sigma(x) = \text{const}$ .

Далее, мы должны позаботиться об ультрафиолетовой регуляризации теории. Наиболее удобным в данном случае является метод Паули — Вилларса в инстантонном фоновом поле (см. [48] и очень подробное обсуждение в [42]). Введение регуляторов Паули — Вилларса, бозонных и фермионных, приводит к следующему. Детерминант, фигурирующий, скажем, в (95), заменяется

$$\left[ \text{Det} \left( -4 \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \right) / \text{Det} \left( -4 \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial z} + M_0^2 \right) \right]^{-1},$$

\* Потребовалось несколько лет, чтобы понять, что сокращение, обнаруженное для «пустого» вакуума, имеет место также в любом самодуальном внешнем поле [50].

где  $M_0$  — масса регулятора. Иными словами, произведение собственных значений  $(4E_n^2)^{-1}$  заменяется  $\prod (M_0^2/4E_n^2)$ . Массовый член для фермионного регулятора линеен по  $M_0$  и, следовательно,  $\prod 2i\epsilon_n \rightarrow \rightarrow \prod (2i\epsilon_n/M_0)$ .

Появление  $M_0$ , очевидно, не сказывается на сокращении ненулевых мод, продемонстрированном выше, — каждая бозонная мода входит в сопровождении пары вырожденных фермионных мод, так что эффективно множитель  $M_0$  выпадает. Это не так, однако, в случае нулевых мод, поскольку их число несбалансированно.

Как обычно, каждая комплексная бозонная нулевая мода дает предэкспоненциальный фактор  $S_{\text{inst}} M_0^2 = \text{const } M_0^2/g_0^2$ , где  $g_0$  — голый заряд,  $g_0 = g(M_0)$ . Имеется две таких моды [см. (84)], следовательно, их вклад в  $I$  пропорционален

$$(M_0^2/g_0^2)^2. \quad (97)$$

С другой стороны, две (комплексных) фермионных нулевых моды приводят к фактору

$$(g_0^2/M_0)^2. \quad (98)$$

Единственный пункт, который, возможно, заслуживает пояснения — это множитель  $g_0^4$  в формуле (98). В КХД мы привыкли к тому, что фермионные нулевые моды генерируют  $(S_{\text{inst}})^0$ . В действительности наше определение коллективных координат  $\alpha$  и  $\beta$  не соответствует стандартной нормировке фермионных нулевых мод. Сравнивая (87), (88) с (91), видим, что

$$\int (\delta\Psi + \delta\Psi)_{\substack{\text{нулевые} \\ \text{моды}}} \chi_0^{-2} dx \sim \frac{1}{g_0^2}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что интеграл по  $d\alpha d\alpha^+$ , возникающий из

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2i \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \\ 2i \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{pmatrix},$$

сопровождается фактором  $(M_0/g_0^2)^{-4}$ , который приходит из регулирующего детерминанта

$$\left[ \text{Det} \begin{pmatrix} M_0 & 2i \frac{\partial}{\partial z} \chi_0^{-2} \\ 2i \chi_0^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & M_0 \end{pmatrix} \right]^{-1}.$$

Конечно, то же самое имеет место и для  $d\beta d\beta^+$ .

Собирая вместе все множители, получаем:

$$I = \text{const } M_0^2 \exp(-4\pi/g_0^2) d^2x_0 \frac{d\rho}{\rho} d\alpha d\alpha^+ d\beta d\beta^+. \quad (99)$$

Степень  $\rho$  реконструируется здесь из размерных соображений. (Действительно,  $I$  — безразмерная величина. Далее, в силу однородности суперпространства мера не должна зависеть от  $x_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и может зависеть только от  $\rho$ .) Этим исчерпывается вычисление инстантонной меры на однопетлевом уровне.

$I(x_0, \rho, \alpha, \alpha^+, \beta, \beta^+)$  может рассматриваться как эффективное взаимодействие с четырьмя фермионными (внешними) линиями. Все собственно вершинные поправки к этому четырехфермионному взаимодействию равны нулю (см. ниже). Важно, что перенормировка поля  $\Psi$  также отсутствует;  $O(3)$   $\sigma$ -модель обладает лишь одним  $Z$ -фактором, перенормирующим константу связи. (При условии, что все вычисления производятся  $O(3)$ -инвариантным образом, см. приложение В.)

До сих пор вывод был аналогичен нашему анализу суперсимметричной глюодинамики [49]. Все же внимательный читатель, возможно, отметил некоторую особенность. Моды  $\varphi^{(2)}$  и  $\Psi_{SC}$  фактически ненормируемы и требуют инфракрасной регуляризации. Мы не будем специально останавливаться на этом вопросе, отсылая читателя к очень подробной работе [38]. В нескольких словах ситуация может быть обрисована так. Если ввести инфракрасное обрезание  $R$ , оно все равно сокращается в  $I$ , поскольку  $\varphi^{(2)}$  дает  $\ln R |y|$  в числителе, а  $\Psi_{SC}$  генерирует точно такой же фактор в знаменателе.

**Суперинвариантность инстантонной меры.** Многопетлевые поправки. Выражение (99) для инстантонной меры, полученное выше, является в действительности точным ответом. Чтобы доказать это, продемонстрируем сначала инвариантность (99) при преобразованиях суперсимметрии.

Каковы законы преобразования коллективных координат? Наиболее просто ответить на этот вопрос так. Посмотрим на инстантонное суперполе (90). Применяя преобразования суперсимметрии к исходному решению  $\Phi_{\text{Inst}}$ , получаем снова решение, функционально похожее на исходное, однако отличающееся от него переопределением параметров (коллективных координат). При  $\theta \rightarrow \theta + \zeta$ ,  $\theta^+ \rightarrow \theta^+ + \zeta^+$  исходное решение принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Inst}} &\rightarrow \frac{y(1 + 4i\theta^{(2)}\beta + 4i\zeta^{(2)}\beta)}{z_c - z_0 + 4i\zeta^{+(1)}\theta^{(2)} - 4i\theta^{(2)}\alpha^+ - 4i\zeta^2\alpha^+} = \\ &= \frac{y(1 + 4i\zeta^{(2)}\beta)(1 + 4i\theta^{(2)}\beta)}{z_c - (z_0 + 4i\zeta^{(2)}\alpha^+) - 4i\theta^{(2)}(\alpha^+ + \zeta^{+(1)})}, \end{aligned} \quad (100)$$

где удержаны лишь члены, линейные по  $\zeta$ ,  $\zeta^+$ . Иными словами, коллективные координаты преобразуются так:

$$y \rightarrow y(1 + 4i\zeta^{(2)}\beta), \quad \bar{y} \rightarrow \bar{y}(1 - 4i\beta + \zeta^{+(2)}); \quad (101a)$$

$$z_0 \rightarrow z_0 + 4i\zeta^{(2)}\alpha^+, \bar{z}_0 \rightarrow \bar{z}_0 - 4i\alpha\zeta^{+(2)}; \tag{101б}$$

$$\alpha \rightarrow \alpha + \zeta^{(1)}, \alpha^+ \rightarrow \alpha^+ + \zeta^{+(1)}; \tag{101в}$$

$$\beta \rightarrow \beta, \beta^+ \rightarrow \beta^+. \tag{101г}$$

Довольно очевидно, что инстантонная мера (99) инвариантна относительно этих преобразований. Более того,  $d \ln \rho$  — единственное выражение, совместимое с законом (101а). (Напомним, что  $\rho \equiv |y|$ .) Только из этого обстоятельства следует, что многопетлевые поправки типа

$$1 + Cg_0^2 \ln M_0^2 \rho^2 + \dots$$

не могут возникнуть, поскольку их присутствие нарушило бы суперсимметрию. Вскоре мы покажем, что поправка к инстантонной мере (99) типа  $I + Cg_0^2 + \dots$ , не исключенная приведенным выше рассуждением, также фактически отсутствует.

Опустив некоторые тонкости, наметим доказательство этого утверждения. Двухпетлевая и более высокие поправки в инстантонном

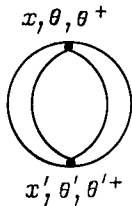


Рис. 9. Многопетлевые вклады в вакуумную амплитуду в присутствии инстантона. Линии соответствуют пропагаторам суперполей во внешнем инстантонном поле

фоновом поле определяются фейнмановскими графиками. Пример трехпетлевого вклада в  $I$  приведен на рис. 9. У этого графика две вершины и четыре суперпропатора, соединяющие их. Подразумевается интегрирование по обеим суперкоординатам  $x, \theta, \theta^+$  и  $(x', \theta', \theta^+)$ .

Предположим, что суперпропаторы в инстантонном поле известны. Фиксируя коллективные координаты инстантона и интегрируя по  $x', \theta', \theta^+$ , мы должны прийти к выражению

$$\int d^2x d^2\theta d^2\theta^+ f(x, \theta, \theta^+, x_0, \rho, \alpha, \beta, \alpha^+, \beta^+), \tag{102}$$

где  $f$  — некоторая функция. Явного ответа для  $f$  у нас нет, но кое-что известно. Дело в том, что функция  $f$  должна быть инвариантна относительно преобразований суперсимметрии. Одного взгляда на соотношения (101) достаточно, чтобы убедиться, что  $f$  может зависеть лишь от следующих аргументов:

$$z - z_0 + 4i\theta^{(2)}\alpha^+, \bar{z} - \bar{z}_0 - 4i\alpha\theta^{+(2)};$$

$$\theta^1 - \alpha, \theta^{+(1)} - \alpha^+$$

$$y (1 + 4i\beta\theta^{(2)}), \bar{y} (1 - 4i\theta^{+(2)}\beta^+).$$

Очень важно, что  $\theta^2$  и  $\theta^{+2}$  не фигурируют в этом списке сами по себе. Если так, интегрирование по  $d^2x d^2\theta d^2\theta^+$  должно неизбежно привести к нулевому результату.

Действительно, делая сдвиг  $x$ , избавляемся от зависимости от  $\theta^2\alpha^+$  и  $\alpha\theta^{+2}$ . Теперь единственный шанс получить не нуль — попытаться привлечь  $y(1 + 4i\beta\theta^2)$  и  $\bar{y}(1 - 4i\theta^{+2}\beta^+)$ .

Тем не менее это не поможет. Если бы это помогло, ответ был бы пропорционален  $\beta\beta^+$ . Однако последнее невозможно, поскольку пропорциональность результата  $\beta\beta^+$  означала бы, что при привлечении высоких порядков теории возмущений удастся устранить две из четырех фермионных нулевых мод ( $SC$ -моды). В то же время число фермионных нулевых мод фиксировано топологией и не может изменяться в теории возмущений. Следовательно,

$$\int d^2x d^2\theta d^2\theta^+ f = 0.$$

Несмотря на некоторое своеобразие в деталях, приведенная выше перенормализационная теорема весьма похожа на аналогичную теорему, установленную ранее в суперсимметричной глюодинамике [19].

**Точная функция Гелл-Мана — Лоу.** Последнее усилие, и в качестве награды получим точную функцию Гелл-Мана—Лоу модели, включающую все порядки по константе связи.

Напомним, что двумерная  $\sigma$ -модель перенормируема. Более того, все перенормировки сводятся к единственному  $Z$ -фактору, перенормирующему константу связи,  $Z/g_0^2 = 1/g_R^2$  (см. приложение В). Все физические амплитуды, будучи выражены через перенормированную константу, не должны содержать ультрафиолетового параметра. Иными словами, явная зависимость от  $M_0$  в формуле (99) должна сокращаться с неявной зависимостью, входящей через  $g_0 = g(M_0)$ . Это требование немедленно дает

$$\frac{g^2(M_0)}{4\pi} = \left[ \ln \frac{M_0^2}{m^2} \right]^{-1}, \quad \beta = \frac{d}{d \ln M_0} \frac{g_0^2}{4\pi} = -2 \left( \frac{g_0^2}{4\pi} \right)^2, \quad (103)$$

где  $m$  — константа, играющая роль  $\Lambda_{\text{КХД}}$  — масштабного параметра квантовой хромодинамики.

Отметим, что точная  $\beta$ -функция (103) фактически совпадает с однопетлевым результатом, известным в литературе \* [51]. В четырехмерных суперсимметричных теориях существует общая теорема, гласящая, что для расширенных суперсимметрий ( $n \geq 2$ ) все коэффициенты  $\beta$ -функции (за возможным исключением первого) обращаются в нуль. Однако доказательство теоремы основывается на размерных соображениях, а не обобщается прямо — насколько мы понимаем — на двумерные  $\sigma$ -модели. Тем не менее результат, приве-

\* Таким методом можно найти точную  $\beta$ -функцию в  $CP(N-1)$   $\sigma$ -модели и ее обобщениях, так называемых кэлеровых моделях. Во всех случаях ситуация не меняется — отличен от нуля лишь однопетлевой коэффициент  $\beta$ -функции [53].



денный в (103) (так же как и совершенно аналогичный результат [53], имеющий место для широкого класса так называемых кэлеровых  $\sigma$ -моделей), наводит на мысль, что сходное общее утверждение должно существовать также и в двумерии.

Стоит добавить, что, в отличие от КХД, в  $\sigma$ -модели легко проанализировать более общие решения с топологическим зарядом  $q = k$ , или  $k$ -инстантонные конфигурации. Последние содержат  $4k$  бозонных и  $4k$  фермионных коллективных координаты. В частности, каждый из  $k$  инстантонов имеет свой размер и ориентацию. Конечно, зависимость  $k$ -инстантонного перехода от этих параметров довольно сложная и не определяется из тех простых соображений, которые были изложены выше. Однако зависимость от  $M_0$  может быть фиксирована. Собственно говоря, соответствующая формула является тривиальным обобщением (73), именно:

$$I_k \sim \{ M_0^2 \exp(-4\pi/g_0^2) \}^k.$$

Если перенормированную константу связи определить по ее зависимости от  $M_0$ , то, очевидно, приходим к старому результату для  $\beta$ -функции, как и должно быть в самосогласованной теории.

**Инстантонные эффекты.** В качестве примера более практического приложения вычислим двухточечную функцию

$$\Pi(x) = \langle 0 | T \{ O(x) O(0) \} | 0 \rangle, \quad (104)$$

где

$$O = \frac{1}{4} (\bar{\psi}^a \psi^a + i \epsilon^{abc} \psi^a \gamma^5 \psi^b \sigma^c) = \chi^{-2} \bar{\Psi} (1 + \gamma^5) \Psi, \quad \gamma_5 = \sigma_3.$$

Это упражнение будет прекрасной иллюстрацией результатов работы [54], в которой был найден четырехмерный аналог  $\Pi(x)$  в суперсимметричной глюодинамике. Было показано, что двухточечная функция глюонных плотностей стремится к константе на больших расстояниях, нарушая, таким образом, свойство кластеризации. Это, в свою очередь, служит указанием на существование вакуумного конденсата  $\langle 0 | \lambda^a \lambda^a | 0 \rangle$ . Здесь  $\lambda^a$  — поле глюино, и вакуумное среднее  $\lambda^a \lambda^a$  нарушает сохранение фермионного заряда, которое имеет место в теории возмущений. То обстоятельство, что двухточечная функция глюонных плотностей не равна нулю, не противоречит суперсимметрии.

Очень близкая ситуация реализуется в  $\sigma$ -моделях. Во-первых, оператор  $O$  инвариантен относительно  $O(3)$ -вращений. Во-вторых, в силу  $\gamma_5$ -инвариантности корреляционная функция (104) обращается в нуль в любом конечном порядке теории возмущений. В-третьих, существует нетривиальный одноинстантонный вклад в  $\Pi$ ; более того, только конфигурации с  $q = 1$  имеют отношение к делу, поскольку в этом случае  $\Delta Q_5 = 4$ , и поэтому из «вакуума» возникает ровно четыре фермионных линии, которые аннигилируются фермионными источниками, фигурирующими в (104). При  $q = k$  мы

имели бы  $4k$  фермионных линии и нам не удалось бы замкнуть их на четыре фермионных источника. Иными словами,  $k$ -инстантонные конфигурации могли бы дать вклад в  $2k$ -точечные функции фермионных плотностей.

Предположим, что  $x \rightarrow 0$ , так что расстояние между двумя точками очень мало, и вычислим вклад в  $\Pi(x)$  флуктуаций малых размеров.

Следуя [38], введем комплексные поля  $\Psi$  и  $\Psi^+$  и сделаем виковский поворот (заметим, что в евклидовом пространстве  $\gamma^5$ -матрица та же, что и раньше,  $\gamma_E^5 = \sigma_3$ ). В результате получим:

$$\Pi(x) = \text{const} \langle 0 \left| \left\{ \frac{\Psi^+(x)(1+\gamma^5)\Psi(x)}{\chi^2(x)}, \frac{\Psi^+(0)(1+\gamma^5)\Psi(0)}{\chi^2(0)} \right\} \right| 0 \rangle. \quad (105)$$

Дальнейшие вычисления совершенно тривиальны. Нужно просто заменить  $\chi$  и  $\Psi$  их инстантонными значениями,

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma_5}{2} \Psi(x) &\rightarrow -2\sqrt{2}iy \left[ \frac{1}{(z-z_0)^2} \alpha^+ + \frac{1}{z-z_0} \beta \right], \\ \Psi^+(x) \frac{1+\gamma_5}{2} &\rightarrow \text{э.с.}; \\ \chi(x) &\rightarrow 1 + \frac{|y|^2}{|z-z_0|^2}, \end{aligned}$$

и вставить инстантонную меру. После относительно простых алгебраических преобразований приходим к следующему:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \text{const} M_0^2 e^{-4\pi/g_0^2} \int d^2x_0 \frac{d\rho}{\rho} d\alpha^+ d\alpha d\beta^+ d\beta \times \\ &\times \frac{\rho^4 |z|^2 \alpha^+ \alpha \beta^+ \beta}{|z-z_0|^4 \left(1 + \frac{\rho^2}{|z-z_0|^2}\right)^2 |z_0|^4 \left(1 + \frac{\rho}{|z_0|^2}\right)^2} = \\ &= \text{const} M_0^2 e^{-4\pi/g_0^2} \int d^2x_0 \frac{d\rho}{\rho} \frac{\rho^4 |z|^2}{(|z-z_0|^2 + \rho^2)^2 (|z_0|^2 + \rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Интегрирование по  $x_0$  и  $\rho$  (для этой цели можно ввести, например, фейнмановскую параметризацию) дает окончательно

$$\Pi(x) = \text{const} m^2 \neq 0, \quad (106)$$

где  $m$  — константа, определяющая поведение бегущей константы  $g(M_0)$ , см. (103).

Этот результат, очевидно, ренорм-инвариантен; более того, следуя аргументации предыдущего пункта, можно доказать, что он не модифицируется поправками более высокого порядка по  $g^2$ .

Еще более удивительно то обстоятельство, что  $\Pi(x)$  фактически не зависит от  $x$ . Конечно, буквально говоря, это утверждение относится к малым  $x$ , где оправдано одноинстантонное приближение, использованное выше. Однако легко показать, что в силу суперсимметрии этот результат остается справедливым при всех  $x$ .

Точно такая же ситуация имеет место для двухточечной функции глюонных плотностей:

$$\langle 0 | T \left\{ \bar{\lambda}^a \frac{1+\gamma_5}{2} \lambda^a(x), \bar{\lambda}^a \frac{1+\gamma_5}{2} \lambda^a(0) \right\} | 0 \rangle = \text{const.}$$

Доказательство в глюодинамике совершенно прозрачно, поскольку  $\bar{\lambda}^a \frac{1+\gamma_5}{2} \lambda^a$  является нижней компонентой кирального суперполя (см. [54] или работу [55]). Концептуально (но не технически) сходная идея применима и в  $\sigma$ -модели.

Рассмотрим для определенности евклидов вариант модели. Оператор

$$O = 2\chi^{-2}\Psi^{+(1)}\Psi^{(1)}$$

является (бозонной) компонентой вещественного суперполя  $\ln(1 + \Phi^+\Phi)$ :

$$\ln(1 + \Phi^+\Phi) = \dots + \theta^{+(2)}\theta^{(2)}2\chi^{-2}\Psi^{+(1)}\Psi^{(1)} + \dots \quad (107)$$

Заметим, что  $\gamma_5^5 = \sigma_3$  и, следовательно, рассмотрение только верхних (только нижних) компонент спинора не нарушает лоренц-симметрию и совершенно законно.

Среди других компонент того же суперполя — фермионный оператор, который входит с  $\theta^{(\alpha)}\theta^{(\beta)}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta^{+(2)}$ ; обозначим его  $K^{+(1)}$ . Очевидно, что

$$\langle 0 | K^{+(1)}(x)O(0) | 0 \rangle = 0, \quad (108)$$

поскольку в вакууме корреляции между операторами бозонного и фермионного типов, конечно, отсутствуют.

Теперь сделаем преобразование суперсимметрии с параметрами

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = 0; \quad \zeta^{+(1)} = 0; \\ \zeta^{+(2)} \neq 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что при таких преобразованиях

$$\delta K^{+(1)} = i\zeta^{+(2)}\lambda_\mu\partial_\mu O \quad (\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = i/2)$$

и  $\delta O = 0$ . Выполняя это преобразование в (108), находим, что

$$\partial_\mu \langle 0 | \{O(x), O(0)\} | 0 \rangle = 0$$

или

$$\langle 0 | \{O(x), O(0)\} | 0 \rangle = \text{const.} \quad (110)$$

Поскольку нам удалось показать, что при малых  $x$  константа в первой части не равна нулю, суперсимметрия распространяет этот ненулевой результат на все расстояния.

Если так, соотношение (110) при  $x \rightarrow \infty$  означало бы нарушение свойства кластеризации. Это обстоятельство естественно интерпретировать как возникновение конденсата,

$$\langle 0 | O | 0 \rangle = \text{const} \cdot m. \quad (111)$$

Справедливость этой интерпретации — существование «бикваркового» конденсата — можно проверить в  $CP(N)$ -моделях [56]. С одной стороны, известно, что при  $N \rightarrow \infty$  в этих моделях бикварковый конденсат действительно существует и его значение фиксировано теоретически [57, 58]. С другой, инстантонные вычисления дают результат, аналогичный (111). Функция Грина  $G(x_1, \dots, x_{N+1})$ , включающая  $(N+1)$ -пару  $\bar{\Psi}\Psi(x_i)$ , была найдена в [56]. Аналогично (106), (110) эта  $(N+1)$ -точечная функция оказалась не зависящей от  $x_i$ . В духе обсуждения, проведенного выше, из этого факта следует, что

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_{\text{Inst}} = \left\{ \lim_{(x_i - x_j) \rightarrow \infty} G(x_1, \dots, x_{N+1}) \right\}^{1/N+1} = \text{const} \cdot m.$$

В [56] было продемонстрировано, что инстантонный результат совпадает с ответом для конденсата, который получается в рамках разложения по  $1/N$

Отметим, что априори мы ожидали совпадения лишь по порядку величины. Действительно, простые размерные соображения показывают, что даже при  $x \rightarrow 0$  одноинстантонный вклад, вообще говоря, не насыщает коррелятора (104). Флуктуации фиксированного (большого) размера  $R \sim m^{-1}$ , генерирующие бифермионные конденсаты, могли бы приводить к вкладу того же порядка. К сожалению, в рассматриваемой модели прямая проверка этого последнего утверждения невозможна, так как на расстояниях  $\sim m^{-1}$  наступает режим сильной связи. Такая проверка была осуществлена нами в суперсимметричной КХД с одним (почти безмассовым) ароматом материи и цветовой группой  $SU(2)$  [64]. Если масса кварка мала, скалярное поле развивает большой вакуумный конденсат,  $SU(2)$  спонтанно нарушается, калибровочные бозоны приобретают массу, и режим слабой связи осуществляется на всех расстояниях. В этой модели удается проверить, что в корреляторе, который является аналогом (104), присутствуют два типа вкладов даже при  $x \rightarrow 0$ . Первый вклад («малых» расстояний) обусловлен инстантоном с  $\rho \sim x$ , второй (от «больших» расстояний) связан со структурой вакуума и наблюдается на размерах  $\sim v^{-1}$ , где  $v$  — вакуумное среднее скалярного поля. Эти вклады оказываются равными.

Подобной ситуации, на наш взгляд, следует ожидать и в  $\sigma$ -модели. Точный результат  $1/N$ -разложения для  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$  по порядку величины несомненно должен воспроизводить  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_{\text{Inst}}$ , однако численные факторы, скорее всего, будут разные. В этой связи утверждение работы

[56] об абсолютном совпадении представляется сейчас довольно удивительным и, по-видимому, требует дальнейшей проверки.

Хотелось бы еще раз обратить внимание на аналогию между глюодинамикой и  $\sigma$ -моделью, которая в этом пункте простирается весьма далеко. В частности, хотя конденсаты обсуждавшиеся выше, совместимы с суперсимметрией в калибровочном или  $O(3)$ -инвариантных секторах, они, по-видимому, означают, что в калибровочно-неинвариантном [ $O(3)$ -неинвариантном] секторах суперсимметрия спонтанно нарушена.

Рассмотрим для начала  $\bar{\lambda}(1 + \gamma^5)\lambda$ . С одной стороны, этот оператор пропорционален нижней компоненте суперполя  $W_\alpha W^\alpha$ . Далее, хорошо известно, что, если нижняя компонента развивает ненулевое вакуумное ожидание, это не означает нарушения суперсимметрии, поскольку нижняя компонента непредставима в виде (анти)коммутатора какой-либо другой компоненты с суперзарядом.

С другой, тот же оператор  $\bar{\lambda}\lambda$  является компонентой суперполя  $V^2$ , причем на этот раз занимает среднее положение. Более точно [59]:

$$\bar{\lambda}^a \lambda^a = \{Q^a, \bar{\lambda}_\alpha^a \gamma_\mu^a A_\mu^a\} \frac{1}{4i}.$$

Если так, ненулевое вакуумное среднее  $\bar{\lambda}^a \lambda^a$  возможно лишь в том случае, когда  $Q|0\rangle \neq 0$  — спонтанное нарушение.

Дилемма разрешается предположительно следующим образом. Суперсимметрия спонтанно нарушена, но это нарушение проявляется только в калибровочно-неинвариантном секторе теории, не оставляя следов в калибровочно-инвариантном секторе. Ситуация напоминает знаменитую  $U(1)$ -проблему. Там мы имеем «призрачный» полюс, генерируемый инстантонами и связанный с  $K_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (A_\nu^a \partial_\alpha A_\beta^a + \frac{2}{3} g f^{abc} A_\nu^a A_\alpha^b A_\beta^c)$ . Этот голдстоуновский полюс, однако, отцепляется от всех калибровочно-инвариантных операторов. Здесь то же самое имеет место для оператора  $\bar{\lambda}^a \gamma_\mu^a A_\mu^a(x)$ . Соответствующая корреляционная функция в инстантонном поле спадает как  $x^{-3}$ , демонстрируя таким образом существование полюса, связанного с  $\bar{\lambda}^a \gamma_\mu^a A_\mu^a$ .

Точно так же в  $O(3)$   $\sigma$ -модели оператор  $O$  не является нижней компонентой суперполя  $\ln(1 + \Phi + \Phi)$ . Однако более низкие компоненты этого суперполя — их антикоммутатор с суперзарядом дает 0 — не обладают  $O(3)$ -симметрией. В итоге суперсимметрия в  $O(3)$ -неинвариантном секторе может быть нарушена и, одновременно,  $O(3)$ -инвариантный сектор вполне может остаться абсолютно суперсимметричным.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Этот обзор можно было бы назвать «Избранные вопросы непертурбативного подхода в  $\sigma$ -моделях и КХД». Мы сконцентрировали внимание на тех аспектах, которые интересны, в первую очередь,

работающим в КХД и скорее тривиальны для теоретиков, занимающихся двумерными моделями. Их понимание двумерных моделей, конечно, гораздо глубже. В двух измерениях, в отличие от КХД, существуют различные уточненные и мощные методы, позволяющие получить исчерпывающие ответы на такие динамические вопросы, как спектр масс, матрица рассеяния и т. д. Достаточно упомянуть недавнее полное решение  $O(4)$   $\sigma$ -модели [60] или более старые результаты [61], основанные на развитом А. Б. Замолотчиковым  $S$ -матричном подходе [62]. К сожалению, эти методы и результаты вряд ли можно обобщить на четырехмерные теории, и мы их не затрагиваем.

В настоящем тексте затронуты лишь те проблемы, для которых можно провести параллель между  $4d$ -калибровочными теориями и  $\sigma$ -моделями. Прежде всего, мы изучаем операторное разложение Вильсона в присутствии непертурбативных эффектов. Дана общая формулировка, позволяющая конструировать разложение до любого порядка. Подчеркнута принципиальная роль вспомогательного параметра, точки нормировки  $\mu$ . Показано, что хорошо определенная теоретически процедура с необходимостью требует введения параметра  $\mu$ . Когда это сделано, и коэффициентные функции операторного разложения, и вакуумные средние составных операторов находятся без всяких неоднозначностей.

Степенные (непертурбативные) эффекты приводят к смешиванию операторов с различной нормальной размерностью. Это может показаться необычным тем, кто привык к пертурбативной логарифмической ситуации.

В пределе  $N \rightarrow \infty$  операторное разложение в  $O(N)$   $\sigma$ -модели хорошо иллюстрирует свойство, присущее КХД. Конкретно, операторы, входящие в разложение корреляторов типа

$$\langle 0 | T \{ f(\partial_\mu \sigma^a(x))^2, f(\partial_\mu \sigma^a(0))^2 \} | 0 \rangle,$$

не зависят от точки нормировки  $\mu$  в ведущем по  $1/N$  приближении. В результате операторное разложение выглядит особенно просто (и легко проверяется). Аналогично в КХД операторы, с которыми мы имеем дело в приложениях, как правило, имеют весьма слабую  $\mu$ -зависимость, пренебрежимую с численной точки зрения. По этой причине в практических задачах КХД (но не в теоретическом анализе операторного разложения!) можно принять упрощенный рецепт, который выглядит так:

1) нарисовать нужные графики Фейнмана и вычислить коэффициенты  $C_i$  операторного разложения в стандартной теории возмущений;

2) параметризовать непертурбативные эффекты вакуумными средними  $\langle 0 | O_i | 0 \rangle$ , предполагая, что  $\langle 0 | O_i | 0 \rangle$  обращается в нуль в теории возмущений для всех операторов, за исключением единичного.

Обе прескрипции имеют приближенный характер, вообще говоря, существуют непертурбативные вклады в  $c_i(\mu)$  и, напротив, пертур-

бативные вклады в  $\langle 0 | O_i(\mu) | 0 \rangle$ . Мы использовали  $O(N)$   $\sigma$ -модель в следующем за главным приближением, чтобы продемонстрировать последнее.

Другой интересный вопрос относится к низкоэнергетическим теоремам. Они выражают факт существования симметрий, точных или приближенных, и устанавливают строгие соотношения между различными амплитудами. Соответствующие соотношения в КХД являются уникальным источником информации о динамике конфайнмента. Мы исследовали два класса низкоэнергетических теорем: 1) для шпура тензора энергии-импульса и 2) для плотности топологического заряда. Их справедливость подтверждается прямым сравнением с точными результатами в  $O(N)$ - и  $CP(N-1)$ -моделях. Аналогия между  $\sigma$ -моделями и КХД оказывается весьма близкой, но не полной — некоторые детали различаются. Природа этих различий объясняется.

Во второй части обзора мы показали, что, комбинируя суперсимметрию с инстантонным исчислением, можно получить очень интересные следствия. В частности, вычисляется точная функция Гелл-Мана — Лоу для суперсимметричного обобщения янг-миллсовских теорий. Соответствующий метод, развитый ранее для теорий Янга — Миллса, приложим к  $2d$   $\sigma$ -моделям. Более того, в суперсимметричных  $\sigma$ -моделях он становится даже проще, так что мы не могли удержаться от использования этого обстоятельства в педагогических целях. Основной вывод состоит в том, что  $\beta$ -функция в суперсимметричных теориях имеет геометрический смысл и фиксируется числом нулевых мод, бозонных и фермионных, в инстантонном поле.

Другой результат, обсужденный в деталях, — это инстантонное вычисление фермионных конденсатов. В связи с этой задачей находится интересный вопрос, который остался не полностью решенным. Существование конденсатов  $\Psi^+\Psi$  указывает на нарушение суперсимметрии в нефизическом секторе теории (т. е. в калибровочно-неинвариантном секторе для теорий Янга — Миллса,  $O(3)$ -неинвариантном секторе для  $\sigma$ -модели). Является ли такая ситуация совместимой с общими теоремами, например с теоремой Виттена [63] об индексе?

В более широком контексте наше рассмотрение подтверждает существование нового способа изучения непертурбативных эффектов в суперсимметричных теориях. Так, специфический пример непертурбативных флуктуаций (инстантон) плюс некоторые общие свойства позволяют однозначно найти некоторые величины, которые обычно рассматриваются как определяемые неизученной динамикой больших расстояний. Суперсимметричные теории крайне специфичны, так как жесткая связь между динамикой малых и больших расстояний возникает уже из общих свойств теории. Действительно, что может запретить появление инстантонов произвольно малых размеров в асимптотически свободной теории, где физический вакуум на малых расстояниях так же прост, как пертурбативный. Одного этого

факта достаточно, чтобы определить точное значение полного вакуумного конденсата.

Что касается подобия между  $\sigma$ -моделями и калибровочными теориями, то оно получает дополнительное подтверждение. Результаты, впервые выведенные в калибровочных теориях, имеют прямые аналоги в  $\sigma$ -моделях. Более того, основанное на инстантонном рассмотрении вычисление вакуумного конденсата фермионов подтверждается альтернативным (и технически совершенно другим) вычислением той же величины.

В заключение мы хотим поблагодарить А. М. Полякова, который много лет назад предложил нам использовать  $\sigma$ -модели для проверки нашего подхода к КХД (операторное разложение, вакуумные конденсаты, низкоэнергетические теоремы). Мы признательны также А. Морозову и В. Фатееву за обсуждения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВАКУУМНЫЕ КОНДЕНСАТЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В этом приложении мы возвращаемся к вопросу о вакуумном конденсате и обсудим его с точки зрения функционального интегрирования. Введем производящий функционал (см. конец разд. 2)

$$Z[\varphi] = \int \prod_x D\alpha(x) D\sigma(x) \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x \left[ (1 + \varphi) (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} \left( \sigma^2 - \frac{N}{f} \right) \right] \right\}. \quad (A.1)$$

Если не заботиться о нормировке меры интегрирования, то казалось бы естественным определить среднее обычным способом

$$\left\langle -\frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 \right\rangle_E = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \varphi}. \quad (A.2)$$

Рецепт (A.2) немедленно воспроизводит результат наивного вычисления (12)

$$\langle (\partial_\mu \sigma) \rangle_E = N \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{p^2 + m^2} = \frac{N}{4\pi} \Lambda^2 \left( 1 - \frac{Nm^2}{f} \right). \quad (A.3)$$

Легко, однако, показать, что такое вычисление не может быть правильным. Действительно, переобозначим переменные интегрирования  $\sigma \rightarrow (1 + \varphi)^{-1/2} \sigma$ ,  $\alpha \rightarrow (1 + \varphi) \alpha$  и положим, что  $\varphi$  не зависит от  $x$ . Тогда функционал (A.1) переписывается в виде

$$Z[\varphi] = \int D\alpha D\sigma \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x \left[ (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \left( \sigma^2 - \frac{N}{f} (1 + \varphi) \right) \right] \right\}. \quad (A.4)$$



Теперь вычисление среднего по формуле (А.2) приводит к вакуумному ожиданию для поля

$$\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \varphi} = \frac{\sqrt{N}}{2f} \langle \alpha \rangle = \frac{N}{2f} m^2. \tag{А.5}$$

Этот ответ совпадает с результатом вычислений  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$  с использованием гейзенберговских уравнений движения для средних и с вычислением  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$  через дайсоновское  $T$ -произведение, но ни в коей мере не воспроизводит предыдущее вычисление (А.3). Однако значение интеграла не может меняться от переобозначений переменных интегрирования. Разрешение парадокса в следующем. Обычная мера нормированного функционального интеграла не зависит от источников. Поэтому, чтобы не писать громоздких выражений, связанных с нормировкой,

при вычислении средних используют выражение  $\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J}$ , где  $J$  — источник,  $Z$  — произвольно нормированный функционал. В нашем случае нормировочный множитель для функционала (А.1) зависит от  $\varphi$ , поэтому следует варьировать не только  $\exp \{ -S_{eff}(\varphi) \}$ , но и меру, т. е. пользоваться формулой  $\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \varphi}$  нельзя. Варьирование меры как раз сокращает член  $\frac{N}{4\pi} \Lambda^2$  в выражении (А.3).

Что касается функционала (А.4), то его мера от  $\varphi$  не зависит и стандартная формула для среднего приводит к правильному результату. Таким образом, все определения среднего  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$  согласуются между собой.

Наметим основные пункты доказательства этих утверждений, опуская некоторые детали. Во-первых, остановимся на зависимости меры от параметра  $\varphi$ . Чтобы восстановить эту зависимость, удобно начать с функционального интеграла в фазовом пространстве. Для одной степени свободы он имеет вид

$$\int \prod_i \frac{d\pi(t) dq(t)}{2\pi} \exp \left\{ i \int [\dot{\pi}q - H(\pi, q)] dt \right\},$$

где  $H(\pi, q)$  — функция Гамильтона,  $\pi$  — канонический импульс. Правильно нормированная мера интегрирования при разбиении интервала времени на  $N$  малых участков равна

$$\prod_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{d\pi_i dq_i}{2\pi} \right] \frac{d\pi_N}{2\pi}.$$

Переход к нормированному конфигурационному функционалу осуществляется интегрированием по каноническому импульсу  $\pi$ . Очевидно, что если  $H(\pi, q)$  квадратично зависит от  $\pi$ , то возникающая норма целиком определяется коэффициентом при  $\pi^2$  и не зависит от вида взаимодействия.

Канонический импульс для действия (А.1) равен

$$\pi(x) = (1 + \varphi) \partial_0 \sigma,$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1 + \varphi)} \pi(x) \pi(x) dx.$$

Поэтому результат интегрирования по  $\pi$  приводит к следующей формуле для меры в конфигурационном пространстве, явно зависящей от  $\varphi$ :

$$D\sigma(x, t) = \prod_{i=1}^N \prod_x d\sigma(x, t_i) \sqrt{1 + \varphi(x, t_i)} C,$$

где  $C$  — числовая константа.

Если перейти к новым переменным интегрирования и рассмотреть функционал (A.4), то параметр  $\varphi$  входит только в член, отвечающий взаимодействию. Поэтому соответствующая мера в конфигурационном пространстве от  $\varphi$  не зависит и стандартное определение среднего (A.2) приводит к правильному результату, совпадающему с вычислением  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$  через дайсоновское  $T$ -произведение или с помощью уравнений движения.

Для полноты следовало бы еще проверить, что дифференцирование меры сокращает квадратично расходящийся член  $N\Lambda^2/4\pi$  в интеграле (A.3). Буквально проследить это сокращение технически довольно сложно — следует переписать расходимость фейнмановского интеграла, пропорциональную  $\Lambda^2$ , через расходимости типа  $(1/\varepsilon)^N$ , где  $\varepsilon = t_{i+1} - t_i$  — малый интервал времени, возникающий при замене интеграла частичной суммой. Существует, однако, обходной путь, который разбирается в книге Фейнмана и Хиббса [24] на примере динамической системы с одной степенью свободы, где обсуждению этого вопроса посвящена целая глава. В этом примере вакуумному ожиданию  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$ , определенному с помощью уравнения (A.2), отвечает среднее от кинетической энергии

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{m}{2} \dot{q}(t) \dot{q}(t) \right\rangle = \frac{1}{\int Dq e^{iS}} \int Dq \frac{mq^2}{2} e^{iS}. \tag{A.6}$$

Оказывается, что определенное таким образом среднее расходится:

$$\langle T \rangle = i \hbar/2\varepsilon.$$

Далее легко показать, что если определить среднее  $\langle T \rangle$  как вариацию интеграла по массе  $m$  (масса в данном случае играет роль источника  $\varphi$ ) и учесть зависимость меры от массы, то бессмысленная бесконечность сокращается, и мы остаемся с разумным определением кинетической энергии. Очень важно, что конечный результат сокращения бесконечностей оказывается равным матричному элементу от произведения скоростей в слегка раздвинутых точках:

$$\langle T \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2} \langle \dot{q}(t+\varepsilon) \dot{q}(t) \rangle. \tag{A.7}$$

Различие в определениях (A.6) и (A.7) связано с равенством

$\langle m \dot{q}(t+\varepsilon) \dot{q}(t) \rangle - \langle \dot{q}(t+\varepsilon) m \dot{q}(t) \rangle = -i \hbar$ , т. е. с коммутаторным членом. Таким образом, видно, что в случае одной степени свободы определения кинетической энергии через вариацию по источнику и через дайсоновское  $T$ -произведение совпадают.

Ясно, что теория поля ничем не выделена по отношению к системам с конечным числом степеней свободы, поскольку в доказательстве Фейнмана важно только, что гамильтониан квадратичен по каноническим импульсам. Поэтому определение  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$  через вариацию по источнику эквивалентно определению через  $T$ -произведение. Оба эти определения приводят к одному ответу для вакуумного среднего  $\langle (\partial_\mu \sigma)^2 \rangle$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ $\sigma$

В тексте статьи при обсуждении операторного разложения в качестве динамических переменных были выбраны поля  $\varphi^i$ . Они связаны с исходными полями  $\sigma$ -модели нелинейным образом. В этом приложении описано, как можно работать в терминах полей  $\sigma^i$ .

Сначала поясним, в чем состоит трудность работы с  $\sigma^i$ . Начнем с лагранжиана  $\sigma$ -модели (24):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu \sigma^i \partial_\mu \sigma^i + \frac{1}{N - \sigma^i \sigma^i} (\sigma^k \partial_\mu \sigma^k) (\sigma^l \partial_\mu \sigma^l) \right\} \tag{B.1}$$

(по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до  $N - 1$ ). Лагранжиан (Б.1) отвечает тому, что в теории возмущений компонента  $\sigma^N$  велика:

$$\sigma^N = \sqrt{\frac{N}{f} - \sigma^i \sigma^i} \approx \sqrt{\frac{N}{f}},$$

а остальные компоненты малы. Тогда первый член в (Б.1) описывает малые колебания в плоскости, ортогональной направлению  $\sigma^N$ , второй член учитывает кривизну. Из точного решения задачи при больших  $N$  известно, что флуктуации любой из компонент поля  $\sigma^i$  на самом деле велики и матричные элементы от полей по основному состоянию равны:

$$\begin{aligned} \langle \sigma^i \sigma^k \rangle &= \frac{1}{f} \delta^{ik}; \\ \langle \partial_\mu \sigma^i \partial_\nu \sigma^k \rangle &= \frac{1}{2f} \delta_{\mu\nu} \delta^{ik} (-m^2). \end{aligned}$$

Попробуем теперь вычислить вакуумное ожидание от лагранжиана. С первым членом (Б.1) нет никаких трудностей:

$$\left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma^i \partial_\mu \sigma^i \right\rangle = \frac{N}{2f} (-m^2) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right],$$

что касается второго члена, то как его числитель

$$\langle \sigma^k \partial_\mu \sigma^k \sigma^l \partial_\mu \sigma^l \rangle = N^{-1} \langle \sigma^2 \rangle \langle \partial_\mu \sigma^2 \rangle,$$

так и знаменатель

$$\left\langle \frac{N}{f} - \sigma^2 \right\rangle = \frac{N}{f} - \frac{N}{f} \left( 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \sim O\left(\frac{1}{f}\right)$$

в главном по  $N$  приближении равны нулю. Чтобы разрешить неопределенность  $0/0$ , следует работать с большей точностью. В принципе это возможно, но выкладки неоправданно усложняются. Аналогичные трудности возникают при вычислении пропагатора  $\sigma$ -частиц и других корреляторов. Как было видно из разд. 2, преобразование  $\sigma^i \rightarrow \varphi^i$  позволило автоматически раскрыть неопределенность  $0/0$  и работать с выражениями, вычисленными в первом порядке по  $N$ .

Можно, однако, развить простой формализм, который позволяет вычислять все функции Грина, работая в терминах исходных полей  $\sigma$  в наимизшем порядке по  $N$ . Эта задача легко решается, если воспользоваться техникой внешнего поля. Для этого представим  $\sigma^a(x)$  в виде суммы классического поля  $c^a(x)$  и квантовых флуктуаций  $q^a(x)$ :

$$\sigma^a(x) = c^a(x) + q^a(x).$$

Аналогичное разложение сделаем для лагранжиана множителя  $\alpha(x)$ :

$$\alpha(x) = \alpha_c(x) + \alpha_{qu}(x)$$

[поле  $\alpha(x)$  входит лишь на промежуточных этапах и в окончательных ответах исключается]. Динамика классических полей описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu c^a \partial_\mu c^a + \frac{\alpha_c}{\sqrt{N}} \left( c^a c^a - \frac{N}{f} \right) \right\}, \quad (\text{Б.2})$$

а квантовых флуктуаций лагранжианом

$$\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu q^a \partial_\mu q^a + \frac{\alpha_c}{\sqrt{N}} q^a q^a + \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} 2c^a q^a + \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} q^a q^a \right\} - J^a q^a. \quad (\text{Б.3})$$

Член, линейный по  $q^a$  и  $\alpha_{qu}$ , сводится к полной производной и выпадает из действия, если  $c^a(x)$  и  $\alpha_c(x)$  удовлетворяют классическим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} c^a(x) c^a(x) &= N/f; \\ \partial^2 c^a(x) &= \frac{\alpha_c(x)}{\sqrt{N}} c^a(x); \\ \frac{\alpha_c(x)}{\sqrt{N}} \frac{N}{f} &= -(\partial_\mu c^a)^2. \end{aligned}$$

Квантовые флуктуации описываются уравнениями

$$2c^a q^a + q^a q^a = 0; \quad (\text{Б.4})$$

$$\partial^2 q^a = \frac{\alpha_c}{\sqrt{N}} q^a + \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} c^a - J^a + \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} q^a. \quad (\text{Б.5})$$

Начнем наши вычисления с пропагатора полей  $q^a$  во внешнем поле  $c^a$ . Это вычисление позволит нам построить операторное разложение для точного пропагатора полей  $\sigma^a$ .

Линеаризуем уравнения (Б.4) и (Б.5) по квантовым полям. Тогда уравнение  $c^a q^a = 0$  имеет общее решение

$$q^a = \Pi^{ab} \varphi^b, \quad (\text{Б.6})$$

где  $\Pi$  — проекционный оператор:

$$\Pi^{ab} = \delta^{ab} - \frac{c^a c^b}{c^2}; \quad \Pi^{ab} c^b = 0; \quad \Pi^2 = \Pi.$$

Линеаризованное уравнение (Б.5) переписывается в виде

$$[\partial^2 - M^2(c)] (\Pi \varphi)^a = -J^a + \frac{\alpha_{qu}}{\sqrt{N}} c^a, \quad (\text{Б.7})$$

$$M^2(c) = -\frac{(\partial_\mu c)^2}{c^2}.$$

Чтобы избавиться от нежелательного члена  $\sim \alpha_{qu}$ , подействуем справа на (Б.7) проекционным оператором. Тогда

$$[\Pi \partial^2 - M^2(c)] (\Pi \varphi)^a = -(\Pi J)^a,$$

и пропагатор поля  $q$  запишется в виде

$$D^{ab}(x, y) = - \left\langle x \left| \Pi \frac{1}{\Pi \partial^2 + \frac{(\partial_\mu c)^2}{c^2}} \Pi \right| y \right\rangle, \quad (\text{Б.8})$$

где мы воспользовались уравнениями движения и выразили  $\alpha_c(x)$  через поля  $c(x)$  и  $\partial_\mu c(x)$ . В импульсном представлении пропагатор имеет вид

$$D^{ab}(q) \equiv \int d^2x e^{-iqx} D^{ab}(x, 0) = \int d^2x \left\langle x \left| \Pi \frac{1}{\Pi (q + \hat{p})^2 + M^2(c)} \Pi \right| 0 \right\rangle,$$

где  $\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$ ;  $M^2(c) = -(\partial_\mu c)^2/c^2$ . При больших  $q$  можно разложить  $D^{ab}(q)$  в ряд по  $1/q$ :

$$D^{ab}(q) \simeq \Pi^{ab}[c(0)] \frac{1}{q^2} - \frac{M^2[c(0)] \delta^{ab}}{q^4} + \frac{1}{q^4} [\Pi^{ab}[c(x)], \hat{p}^2] |_{x=0} + \dots$$

(это выражение есть результат усреднения по направлениям вектора  $q$ ). Операторное разложение получается из пропагатора во внешнем поле путем отождествления функций от поля  $c^a$  с вакуумными ожиданиями от соответствующих операторов поля  $\sigma^a$ . Таким образом,

$$D^{ab}(q) \simeq \delta^{ab} \left\{ \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} \left\langle 0 \left| \frac{f}{N} (\partial_\mu \sigma^a)^2 \right| 0 \right\rangle + \dots \right\} \left( 1 + O \left( \frac{1}{N} \right) \right) \simeq \delta^{ab} \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{m^2}{q^4} + \dots \right\},$$

что воспроизводит поведение точного пропагатора при больших  $q$ .

Обратимся теперь к коррелятору  $S$  и начнем с вклада древесных графиков. Разложим ток  $j_S$  до члена, линейного по квантовой поправке. Поскольку  $j_S$  пропорционален лагранжиану, а поле  $c^a$  удовлетворяет уравнению движения, то  $j_S$  запишется в виде полной производной

$$j_S = 2f \partial_\mu [\partial_\mu c^a \Pi^{ab} q^b],$$

и коррелятор  $S$  оказывается пропорциональным внешнему импульсу  $q$ :

$$S(q) = 4f^2 \int d^2x e^{-iqx} \vec{\partial}_\mu \left\langle x \left| \partial_\mu c^a \left( \Pi \frac{-1}{\Pi \partial^2 - M^2} \Pi \right)^{ab} \partial_\nu c^b \right| 0 \right\rangle \vec{\partial}_\nu = \\ = 4f^2 q_\mu q_\nu \int d^2x \left\langle x \left| \partial_\mu c \Pi \frac{1}{\Pi (q + \hat{p})^2 + M^2} \Pi \partial_\nu c \right| 0 \right\rangle.$$

Удобно усреднить  $S(q)$  по направлениям  $q$ , тогда

$$S(q) = \frac{4f^2}{2} \left\{ \partial_\mu c \partial_\mu c + \frac{f}{N} (c \partial_\mu c)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{q^2} [(\partial_\mu c)^2 \alpha_c - \partial_\mu c \Pi \partial_\mu \partial^2 c + 3\partial^2 (\partial_\mu c \Pi) \partial_\mu c] + O \left( \frac{1}{q^4} \right) \right\}.$$

Вакуумное ожидание от  $S(q)$  получается после замены

$$\partial_\mu c^a \partial_\nu c^b \rightarrow \langle 0 | \partial_\mu \sigma^a \partial_\nu \sigma^b | 0 \rangle \text{ и т. д.}$$

В результате  $S(q)$  при больших  $q$  равно

$$S(q) = \frac{4f^2}{2} \left\{ -\frac{N}{f} m^2 - \frac{2Nm^4}{fq^2} + \dots \right\}$$

и совпадает с разложением, приведенном в тексте. Выкладки оказались даже проще.

Вычисление однопетлевых диаграмм несколько сложнее, чем вычисление древесных диаграмм. Мы не будем приводить здесь все выкладки. Отметим лишь, что для получения правильного ответа необходимо разрешить уравнение «связи»

$$2c^a q^a + q^a q^a = 0$$

с более высокой точностью. Решение этого уравнения имеет вид

$$q^a = \Pi^{ab} \Phi^b - \frac{c^a}{2c^2} (\Pi \Phi)^2 + \dots,$$

что меняет вершины для полей  $\Phi$  и поэтому вид тока  $j_S(\Phi)$ . Однако эти усложнения не так уж велики, и вычисление во внешнем поле оказывается наиболее экономным.

**ПРИЛОЖЕНИЕ В. ЕДИНСТВЕННОСТЬ Z-ФАКТОРА**

При выводе точной  $\beta$ -функции в разд. 5 мы использовали то обстоятельство, что в  $O(3)$   $\sigma$ -модели имеется только одна перенормировочная константа. Более точно, предполагалось, что для исходного лагранжиана \*

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g_0^2} \frac{\partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu \Phi_0}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2} \quad (\text{B.1})$$

радиационные поправки приводят к следующему контрчлену:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{2}{g_0^2} (Z-1) \frac{\partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu \Phi_0}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2}. \quad (\text{B.2})$$

Тогда весь эффект сводится к перенормировке константы связи  $g_0$ :

$$g^2 = g_0^2 Z^{-1}. \quad (\text{B.3})$$

В литературе, однако, можно встретить противоположное утверждение, согласно которому возникают два различных  $Z$ -фактора (см., например, [44]): один из них перенормирует  $g$ , другой перенормирует  $\phi$ . Иными словами,  $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$  представляется в виде

$$\frac{2Z_1}{g_0^2} \frac{\partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu \Phi_0}{(1 + Z_2 \Phi_0^+ \Phi_0)^2}. \quad (\text{B.4})$$

Чтобы избежать недоразумений, сделаем сразу же несколько пояснительных замечаний.

Появление двух  $Z$ -факторов связано с тем обстоятельством, что вычисления, как они иногда производятся, не сохраняют полную симметрию исходного лагранжиана,  $O(3)$ -симметрию. Если последняя поддерживается на каждом этапе (включая перенормировки), отличие  $Z_2$  от единицы невозможно. Далее, существует хорошо разработанный метод, именно формализм внешнего поля, который автоматически гарантирует  $O(3)$ -симметрию ответа.

Этот метод уже обсуждался в различных контекстах в настоящем обзоре, и поэтому мы не будем останавливаться на деталях. Перечислим основные моменты.

Первый шаг — разбиение поля  $\phi$  на внешнее ( $\phi_0$ ) и квантовое ( $q$ ):

$$\phi = \phi_0 + q, \quad (\text{B.5})$$

причем по  $q$  подразумевается интегрирование ( $q$  распространяется только в петлях). Инвариантность лагранжиана

$$\delta \phi = \varepsilon + \varepsilon^* \phi^2, \quad \delta \phi^+ = \varepsilon^* + \varepsilon (\phi^+)^2$$

становится теперь инвариантностью по отношению к следующим одновременным преобразованиям:

$$\delta \phi_0 = \varepsilon + \varepsilon^* \phi_0^2; \quad \delta \phi_0^+ = \varepsilon^* + \varepsilon (\phi_0^+)^2; \quad (\text{B.6a})$$

$$\delta q = 2\varepsilon^* \phi_0 q; \quad \delta q^+ = 2\varepsilon \phi_0^+ q^+. \quad (\text{B.6b})$$

Отметим, что преобразование для  $q$  однородно; это обстоятельство позволяет ввести массовый член для поля  $q$ , не нарушая симметрии, и, следовательно, регуляризовать теорию как в инфракрасной, так и в ультрафиолетовой областях.

Интегрируя по  $q$ , остаемся с эффективным лагранжианом, зависящим от  $\phi_0$  и инвариантным относительно (B.6a). Таким образом, интуитивно ясно, что единственный контрчлен, возникающий в рамках этой процедуры, сводится к (B.2). Ниже мы проиллюстрируем это утверждение однопетлевым вычислением, оставляя читателю возможность обобщения на многопетлевые графики.

\* Для простоты мы обсудим здесь бозонную модель (без фермионов и суперсимметрии), что тем не менее даст возможность ответить на все вопросы, связанные с перенормировками.

В билинейном приближении лагранжиан для квантовых флуктуаций таков;

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{2}{g_0^2} \left\{ \frac{\partial_\mu q^+ \partial_\mu q - \mu^2 q^+ q}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2} - 2 (\partial_\mu q^+ \partial_\mu \Phi_0 + \partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu q) \frac{\Phi_0^+ q + \Phi_0 q^+}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^3} + \partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu \Phi_0 \left[ \frac{3 (\Phi_0^+ q + \Phi_0 q^+)^2}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2} - \frac{2 q^+ q}{1 + \Phi_0^+ \Phi_0} \right] \frac{1}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2} \right\}. \quad (B.7)$$

Здесь введен маленький массовый член  $\mu^2 q^+ q (1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^{-2}$ , обеспечивающий инфракрасную регуляризацию. Ультрафиолетовая регуляризация достигается с помощью поля  $R$  Паули — Вилларса [к (B.7) добавляется точно такой же лагранжиан с заменой

$$q \rightarrow R, \quad q^+ \rightarrow R^+, \quad \mu \rightarrow M_0,$$

причем  $R$  приписывается обратная по отношению к  $q$  метрика].

Используя (B.7), необходимо найти эффективный однопетлевой лагранжиан, зависящий от фонового поля  $\Phi_0$ . Вообще говоря, вычисление легко провести для любого фонового поля. Однако, поскольку функциональный вид эффективного лагранжиана известен заранее [см. (B.4)], можно выбрать  $\Phi_0$  специальным образом — при этом задача существенно упрощается. Наиболее удобный выбор — плоская волна

$$\Phi_0 = f e^{ikx}, \quad \Phi_0^+ = f^+ e^{-ikx}, \quad (B.8)$$

где  $f$  — безразмерная константа. Значение  $f$  произвольно, в то время как параметр  $k$  предполагается малым. Далее, из (B.4) ясно, что необходимо удерживать все порядки по  $f, f^+$ , но по  $k$  можно разложить и последовательно удерживать только билинейные по  $k$  члены.

Для плоской волны (B.8) первый член в  $\mathcal{L}^{(2)}$  сводится к обычному бозонному лагранжиану, квадратичному по  $q$ . Именно этот член определяет пропа-

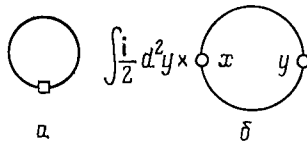


Рис. 10. Диаграммы, определяющие  $\Delta \mathcal{L}$  в однопетлевом приближении:

$$\square = \frac{2}{g_0^2} \partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu \Phi_0 \left( \frac{6 \Phi_0^+ \Phi_0}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2} - \frac{2}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)} \right) \frac{q^+ q}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2};$$

$$\circ = \frac{2}{g_0^2} (-2) (\partial_\mu q^+ \partial_\mu \Phi_0 + \partial_\mu \Phi_0^+ \partial_\mu q) \frac{\Phi_0^+ q + \Phi_0 q^+}{(1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^3}.$$

гатор поля  $q$ . Что касается второго [ $O(k)$ ] и третьего [ $O(k^2)$ ] членов, то будем трактовать их как взаимодействие. Оба индуцируют вершины с двумя  $q$ -линиями. Замкнув эти линии в петлю, получим эффективный лагранжиан  $\Delta \mathcal{L}$ . Соответствующие графики приведены на рис. 10, где сплошная линия обозначает функцию распространения  $q$ ,

$$D_q = \frac{g_0^2}{2} (1 + \Phi_0^+ \Phi_0)^2 \frac{1}{-\square - \mu^2}, \quad (B.9)$$

а вершины либо билинейны по  $k$  (одна вершина на рис. 4, а), либо линеинны по  $k$  (две вершины на рис. 4, б).

Вычисление головастика рис. 4, *a* совершенно тривиально. Результат таков:

$$\Delta \mathcal{L}_a = \partial_\mu \varphi_0^+ \partial_\mu \varphi_0 \left[ \frac{6\varphi_0^+ \varphi_0}{(1 + \varphi_0^+ \varphi_0)^2} - \frac{2}{1 + \varphi_0^+ \varphi_0} \right] \frac{1}{4\pi} \ln \frac{M_0^2}{\mu^2}. \quad (B.10)$$

Что касается другой диаграммы, следует иметь в виду, что

$$(\partial_\mu \varphi_0(x) \partial_\nu \varphi_0^+(x)) \int dy \langle \partial^\mu (q^+(x) q^+(x)), \partial_\nu (q(y) q(y)) \rangle e^{2ik(x-y)} = O(k^4),$$

и мы остаемся с коррелятором типа

$$\partial_\mu \varphi_0^+(x) \partial_\nu \varphi_0(x) \int d^2y \langle \partial_\nu q^+(x) q(x), \partial_\mu q^+(y) q(y) \rangle.$$

Интегрирование по *y* дает

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_b &= \partial_\mu \varphi_0^+ \partial_\mu \varphi_0 \left[ -\frac{4\varphi_0^+ \varphi_0}{(1 + \varphi_0^+ \varphi_0)^2} \right] \int \frac{d^2p}{4\pi} \left[ \frac{p^2}{(p^2 + \mu^2)^2} - \frac{p^2}{(p^2 + M_0^2)^2} \right] = \\ &= \partial_\mu \varphi_0^+ \partial_\mu \varphi_0 \left[ -\frac{4\varphi_0^+ \varphi_0}{(1 + \varphi_0^+ \varphi_0)^2} \right] \frac{1}{4\pi} \ln \frac{M_0^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (B.11)$$

Собирая все вместе, получаем

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\partial_\mu \varphi_0^+ \partial_\mu \varphi_0}{(1 + \varphi_0^+ \varphi_0)^2} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \ln \frac{M_0^2}{\mu^2} \quad (B.12)$$

— контрчлен, действительно пропорциональный исходному лагранжиану. Следовательно,

$$Z_2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Возможно, стоит добавить, что из (B.12) следует

$$g_R^2 = g_0^2 / \left[ 1 - \frac{g_0^2}{4\pi} \ln \frac{M_0^2}{\mu^2} \right]. \quad (B.13)$$

Таким образом, мы выводим заново в теории возмущений на однопетлевом уровне результат, который был получен в основном тексте с помощью инстантонного исчисления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polyakov A. M.— Phys. Lett., 1975, v. B59, p. 79—81.
2. Gell-Mann M., Levy M.— Nuovo cimento, 1960, v. 16, p. 705—726.
3. Белавин А. А., Поляков А. М.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 503—505.
4. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.— Phys. Lett., 1975, v. 59, p. 85—87.
5. Eichenherr H.— Nucl. Phys., 1978, v. B146, p. 215—224; Golo V. L., Perelomov A. M.— Phys. Lett., 1978, v. B79, p. 112—113; Cremmer E., Scherk J.— Ibid., v. B74, p. 341—343.
- 6a. Bardeen W., Lee B., Shrock R.— Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 985—1005;
- б. Brezin E., Zinn-Justin J.— Phys. Rev., 1976, v. B14, p. 3110—3120.
7. D'Adda T. A., Luscher M., Di Vecchia R.— Nucl. Phys., 1978, v. B146, p. 63—76; 6. Witten E.— Ibid., 1979, v. B149, p. 285—320.
8. Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Nucl. Phys., 1979, v. B147, p. 385—447.



9. a. **Wilson K.**— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499—1507; 6. **Brandt R.**— Ann. Phys. (N.Y.), 1967, v. 44, p. 221—265; **Zimmermann W.**— In: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory/Ed. by S. Deser, H. Grisar and H. Pendleton. Cambridge Mass, M. I. T. Press, 1971, v. 1; **Callan C. G.**— Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 3202—3209.
10. **David F.**— Nucl. Phys., 1982, v. B209, p. 433—460.
11. **David F.**— Nucl. Phys., 1984, v. B234, p. 237—251.
12. **Gupta S., Quinn H. R.**— Phys. Rev., 1982, v. D26, p. 499—504; 1983, v. D27, p. 980—984; **Taylor C., McClain B.**— Phys. Rev., 1983, v. D28, p. 1364—1374.
13. **Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.** Препринт ИЯИ Р-0314, М.: 1983. 28 с.; **Pivovarov A. A., Tavkhelidze A. N., Tokarev V. F.**— Phys. Lett., 1983, v. B132, p. 402—406; **Пивоваров А. А., Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.**— ТМФ, 1984, т. 60, с. 199—205; Препринт ИЯИ Р-0342, М.: 1984. 26 с.; **Soldate M.** Preprint SLAC-PUB-3054, Stanford, 1983, p. 32; **Данилов Г. С., Дятлов И. Т.**— ЯФ, 1985, т. 41, с. 1298—1310.
14. **Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.**— Phys. Lett., 1978, v. 78B, p. 443—446.
15. **Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1981, v. B191, p. 301—369.
16. **Weinberg S.**— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 3583—3593.
17. **Witten E.**— Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 2991—2994.
18. **Di Vecchia P., Ferrara S.**— Nucl. Phys., 1977, v. B130, p. 93—104.
19. **Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.**— Nucl. Phys., 1983, v. B229, p. 381—393.
20. **Coleman S.** Lecture at 1979 Intern. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy (SLAC-PUB-2484) (1980). 77 p.
21. **Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1980, v. B174, p. 378—396.
22. **Migdal A. A.**— Ann. Phys., 1980, v. 126, p. 279.
23. **Di Giacomo A., Pafutti C.**— Phys. Lett., 1982, v. B108, p. 327—330; **Banks T. e. a.**— Nucl. Phys., 1981, v. B190, p. 692—698; **Kripfganz J.**— Phys. Lett., 1981, v. B101, p. 189—191.
24. **Feynman R., Hibbs A.** Quantum Mechanics and Path Integrals. N. Y., McGraw Hill Book Co., 1965 362 p.
25. **Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1985, v. B249, p. 445—471.
26. **Shuryak E. V.**— Phys. Lett., 1978, v. B79, p. 135—137; **Callan C. G., Dashen R. J., Gross D. J.**— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1826—1855.
27. **Shuryak E. V.**— Phys. Repts, 1980, v. 61, p. 72—158.
28. **Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.** Релятивистская квантовая теория. Ч. 2, § 141, 142. М.: Наука, 1971. 288 с.; **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика, § 40.2. М.: Наука, 1969. 624 с.
29. **Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1980, v. B165, p. 67—79.
30. **Migdal A. A., Shifman M. A.**— Phys. Lett., 1982, v. 114B, p. 445—449.
31. **Rajaraman R.**— Solitons and Instantons. Amsterdam—N.Y.—Oxford, North-Holland, 1982. 344 p.
32. **Witten E.**— Nucl. Phys., 1979, v. B156, p. 269—283; **Veneziano G.**— Nucl. Phys., 1979, v. B159, p. 213—224.
33. **Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.**— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 37—44; Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452—454; **Волков Д. В., Акулов В. П.**— Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 624—623; Phys. Lett., 1973, v. B46, p. 109—110; **Wess J., Zumino B.**— Nucl. Phys., 1974, v. B70, p. 39—50; Phys. Lett., 1974, v. B49, p. 52—54.
34. **Fayet P., Ferrara S.**— Phys. Rep., 1977, v. 32, p. 249—334; **Огневецкий В. И., Мизинченко Л.**— УФН, 1975, т. 117, с. 637—687.
35. **Wess J., Bagger J.** Supersymmetry and Supergravity. Princeton, Prin-

- ceton University Press, 1983. 341 p.; Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W. Superspace, Benjamin-Cummings, Reading A, 1983. 556 p.
36. Zumino B.— Phys. Lett., 1979, v. 87B, p. 203—206.
  37. Novikov V., Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V.— Fortsch. Phys., 1984, v. 32, p. 585—622.
  38. Bohr H., Katznelson E., Narain K. S.— Nucl. Phys., 1984, v. B238, p. 407—435.
  39. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. N.Y.: Academic Press, 1978. 317 p.
  40. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
  41. Coleman S. The Uses of Instantons. Erice Lectures, Preprint HUPT-78/004, Harvard, 1977, 82 p.
  42. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.— УФН, 1982, т. 136, с. 553—591.
  43. Chadha S. e.a.— Phys. Lett., 1977, v. 67B, p. 103—106.
  44. Zumino B.— Phys. Lett., 1977, v. 69B, p. 369—371.
  45. Callan C., Dashen R., Gross D.— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1826—1855.
  46. Ilgenfritz E.-M., Mueller-Preussker M.— Nucl. Phys., 1981, v. B184, p. 443—460.
  47. Dyakonov D. I., Petrov V. Yu.— Nucl. Phys., 1984, v. B245, p. 259—292.
  48. 't Hooft G.— Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 3432—3450.
  49. Zumino B.— Nucl. Phys., 1975, v. 89B, p. 535—547; West P.— Nucl. Phys., 1976, v. B106, p. 219—227.
  50. D'Adda A., Di Vecchia R.— Phys. Lett., 1978, v. 73B, p. 162—166.
  51. Brezin E., Zinn-Justin J.— Phys. Rev., 1976, v. B14, p. 3110—3120.
  52. Howe P. S., Stelle K. S., West P. S.— Phys. Lett., 1983, v. 124B, p. 55—58.
  53. Morozov A. Yu., Perelomow A. M., Shifman M. A. Preprint ITEP-14, M., 1984, p. 1—44.
  54. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., 1983, v. B229, p. 407—420.
  55. Rossi G. C., Veneziano G.— Phys. Lett., 1984, v. 138B, p. 195—199.
  56. Narain K. S.— Nucl. Phys., 1984, v. B243, p. 131—156.
  57. Witten E.— Nucl. Phys., 1979, v. B149, p. 285—320.
  58. D'Adda A., Di Vecchia P., Luscher M.— Nucl. Phys., 1978, v. B146, p. 63—76.
  59. Dine M., Fischler W., Srednicki M.— Nucl. Phys., 1981, v. B189, p. 575—593.
  60. Polyakov A. M., Wiegmann P. B.— Phys. Lett., 1984, v. 141B, p. 223—228.
  61. Shankar R., Witten E.— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2134—2143.
  62. Замолодчиков А. Б.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 499; Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov A. I.— Ann. Phys., 1979, v. 120, p. 253—291.
  63. Witten E.— Nucl. Phys., 1982, v. B202, p. 253—316.
  64. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., 1985, v. B260, p. 157—172.