«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1986, ТОМ 17, ВЫП. 4
УДК 539.19+538.114+517.923+519.46

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ БОГОЛЮБОВА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ: АЛГЕБРА ЛИ ТОКОВ, ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

Обзор посвящен систематическому изложению нового подхода к исследованию квантового метода производящих функционалов Боголюбова в статистической физике на основе анализа представлений алгебры Ли токов в нерелятивистской квантовой механике и соответствующих им функциональных уравнений. Показана эффективность развиваемого авторами квантового метода производящих функционалов Боголюбова для важной проблемы вычисления корреляционных функций систем многих частиц. Получены явные функционально-операторные выражения для производящего функционала функций распределения в классической статистической механике как в равновесном, так и в неравновесном случаях. На основе анализа представления Вигнера для производящего функционала Боголюбова доказана впервые гамильтоновость неравновесного функционального уравнения в большом каноническом ансамбле Гиббса классической статистической механики систем многих частиц относительно специальной симплектической структуры Ли — Пуассона — Власова на орбитах коприсоединенного представления квазиклассической алгебры Ли наблюдаемых операторов. Рассмотрены примеры взаимодействующих одномерных бозе- и ферми-газа частиц на оси, для которых вычисления можно провести в замкнутой форме.

The review of new approach to investigate the quantum generating functional method of Bogoliubov in statistical physics is presented, the analysis of which being fulfilled by means of Lie algebra of currents and its representations in the nonrelativistic quantum mechanics. The efficiency of developping by authors method is demonstrated for important problem of calculation of correlation functions for many particle systems. The explicit formulas in functional-operator form for generating functional in classical statistical mechanics are received for stationar and nonstationar cases. Using the Wiegner representation for Bogoliubov generating functional firstly the Hamiltonian form of nonstationar functional equation is proved for Gibbs great canonical ansamble of classical systems. The special Lie-Poisson-Vlasov symplectic structure on coadjoint orbits of quasiclassical Lie algebra observables is constructed in explicit form. The examples of interacting one-dimensional bose- and fermi-systems of particles on axis are presented, the closed results for them are calculated using the devolopped formalism.

ВВЕДЕНИЕ

В фундаментальной работе [1] Н. Н. Боголюбовым был предложен в случае классической статистической механики метод производящих функционалов для изучения n-частичных, $n \in \mathbf{Z}_+$, функций распределения динамической системы многих частиц, который оказался [1, 2] очень эффективным в применении к конкретным физическим проблемам. Достаточно отметить, что такие установившиеся результаты в классической статистической механике, как разложение Майера — Урселла [3—8], представление «коллективных» переменных [4, 5] и др., стали частными случаями общего метода производящих функционалов Боголюбова. Особенно эффективной оказалась его квантовая интерпретация [6—9], которая при стремлении постоянной Планка $\hbar$ к нулю давала возможность предъявить для производящего функционала функций распределения классической динамической системы явные функционально-операторные [6] выражения как в равновесном, так и в неравновесном случаях. При этом очень важную роль играют в анализе свойств производящих функционалов соответствующие функциональные уравнения Боголюбова [1], решениями которых они являются. Анализируя квантовый подход к изучению решений функциональных уравнений, предложенный в [6], Н. Н. Боголюбовым была высказана идея его естественного развития на квантовые динамические системы статистической физики, где были бы положены в основу метод производящих функционалов и соответствующие им функциональные уравнения Боголюбова. Развивая эту идею с использованием естественного в этом случае формализма представлений алгебры Ли токов [7, 10—12], в настоящей работе мы даем полное функциональное описание исходной квантовой динамической системы, обобщающее соответствующее описание Боголюбова в работах [1, 13]. Переходя к классическому пределу на основе представления Вигнера для алгебры Ли наблюдаемых операторов, мы доказываем гамильтоновость неравновесного функционального уравнения Боголюбова на специальном бесконечномерном симплектическом многообразии со скобкой Ли — Пуассона — Власова на орбитах коприсоединенного представления указанной выше алгебры Ли.

Следует отметить, что в рамках альтернативного алгебраического подхода к квантовой теории многочастичных систем, основанного на методах гамильтоновой алгебры, производящие функционалы типа Боголюбова были впервые рассмотрены в [35]. Для этих производящих функционалов было получено ассоциированное уравнение в функциональных производных, соответствующее цепочке уравнений Боголюбова — Гурова для n-частичных ядер операторов распределения, из которого в пределе слабого взаимодействия и большого среднего числа частиц выведено квантовое уравнение Власова. В этой работе также была введена алгебра вторично-квантованных наблюдаемых, описываемых производящими функционалами на основе метода канонического квантования (униформизации) классической гамильтоновой алгебры этих функционалов с поточечным произведением и скобкой типа Ли — Пуассона. Вопросы аксиоматического определения производящих функционалов типа Боголюбова на произвольных C^*-алгебрах рассматривались в [36], в которой была доказана теорема реконструкции вторично-квантованной системы, основанная на описанных свойствах этих функционалов (теорема типа ГНС-Араки), и получены квантовые кинетические уравнения типа Больцмана, соответствующие марковской динамике вторично-квантованной системы.

Пользуясь случаем, авторы выражают искреннюю признательность академику Н. Н. Боголюбову за поддержку, постоянный интерес и помощь при выполнении настоящей работы. Различные вопросы по теме статьи нами обсуждались с академиком АН УССР О. С. Парасюком, Б. И. Садовниковым, П. П. Кулишом и Д. П. Санковичом, А. М. Курбатовым, В. П. Белавкиным и П. И. Голодом, за что всех искренне благодарим.

1. ФОРМАЛИЗМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ТОКОВ

Пусть задано гильбертово пространство Ф состояний в нерелятивистской квантовой механике. В нем определены канонические полевые операторы рождения $\psi^+(x)$ и уничтожения $\psi(y)$, $x, y \in \mathbf{R}^3$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям бозе- или ферми-типа:

$$\left.\begin{aligned}&[\psi(x),\ \psi(y)]_\pm = [\psi^+(x),\ \psi^+(y)]_\pm = 0;\\ &[\psi(x),\ \psi^+(y)]_\pm = \delta(x-y).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В качестве алгебры наблюдаемых операторов, описывающей взаимодействующие квантовые частицы, мы выбираем алгебру Ли токов [7]. С целью ее построения вводим следующие основные операторные величины:

$$\rho(x) = \psi^+(x)\,\psi(x) \tag{2}$$

— оператор плотности частиц;

$$J(x) = \frac{1}{2i}\,[\psi^+(x)\,\nabla_x\psi(x) - \nabla_x\psi^+(x)\,\psi(x)] \tag{3}$$

— оператор плотности тока частиц в точке $x \in \mathbf{R}^3$. Тогда прямыми вычислениями несложно убедиться, что операторы

$$\rho(f) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\, f(x)\,\rho(x) \quad \text{и} \quad J(g) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\, g(x)\, J(x),$$

где $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$ — быстроубывающие функции Шварца, удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(f_1),\ \rho(f_2)] = 0;\\ &[\rho(f),\ J(g)] = i\rho(g\nabla f);\\ &[J(g_1),\ J(g_2)] = iJ(g_2\nabla g_1 - g_1\nabla g_2)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

для всех $f, f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$, $g, g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$. Алгебра Ли токов (4) будет основным объектом рассмотрения в нашем подходе к квантовому методу производящих функционалов Боголюбова. Алгебра Ли токов (4) соответствует физически наблюдаемым величинам, поэтому, естественно, необходимо, чтобы операторы $\rho(f)$ и $J(g)$ были самосопряженными, т. е. $\rho^+(f) = \rho(f)$, $J^+(g) = J(g)$ для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$. Но они, как это часто бывает в квантовой теории, могут быть неограниченными операторами в гильбертовом пространстве состояний Ф. Поэтому представляется естественным и удобным работать с унитарными операторами $U(f)$ и

$V(\varphi_t^g)$, определяемыми формулами

$$U(f) = \exp[i\rho(f)]; \quad V(\varphi_t^g) = \exp[itJ(g)], \tag{5}$$

где $t \in \mathbf{R}^1$; $\frac{d}{dt}\varphi_t^g(x) = g \circ \varphi_t^g(x)$; $\varphi_0^g(x) = x \in \mathbf{R}^3$; $g \circ \varphi_t^g(x) = g(\varphi_t^g(x))$ и $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$; $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$.

Экспоненциальные токи (5) образуют группу G со следующим законом композиции [10]:

$$\left.\begin{aligned} &U(f_1)U(f_2) = U(f_1 + f_2); \\ &V(\varphi)U(f) = U(f \circ \varphi)V(\varphi); \\ &V(\varphi_1)V(\varphi_2) = V(\varphi_2 \circ \varphi_1). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Группа G (6) — это полупрямое произведение $\mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$, где $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$, $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ — группа диффеоморфизмов [14, 15] пространства $\mathbf{R}^3$. Из (6) следует, что для $f_1, f_2 \in \mathscr{S}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ групповой закон в $\mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ имеет вид

$$(f_1, \varphi_1) \circ (f_2, \varphi_2) = (f_1 + f_2 \circ \varphi_1, \varphi_2 \circ \varphi_1). \tag{7}$$

При этом, очевидно, алгебра (4) — это алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$. Чтобы определить группу $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$, введем группу $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{R}^3)$ гладких диффеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^3$ с компактными носителями и со стандартной групповой операцией при помощи композиции отображений. Группа $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{R}^3)$ является топологической; ее топология задается счетной системой метрик вида

$$\langle\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle\rangle_n = \max_{|m|=\overline{0, n}} \sup (1 + |x|^2)^n |\varphi_1^{(m)}(x) - \varphi_2^{(m)}(x)|$$

для всех $n \in \mathbf{Z}_+$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Diff}_0(\mathbf{R}^3)$, где $(m) = (m_1, m_2, m_3)$ —мульти-индекс из пространства $\mathbf{Z}_+^3$, $|m| = \sum_{j=1}^{3} m_j$, $\varphi_k^{(m)}(x) = \left(\frac{\partial^{|m|}\varphi_k(x)}{\partial x^{(m)}}\right)$, $k = 1, 2$. Группа $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ как топологическое пространство может быть определена при помощи операции пополнения пространства $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{R}^3)$ с введенной выше топологией. Таким образом, группа $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ — топологическая, метризуемая со счетным базисом топологии (окрестностей) в каждой ее точке. Группа $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ содержит диффеоморфизмы с некомпактными носителями, но которые при $|x| \to \infty$, $x \in \mathbf{R}^3$ аппроксимируются тождественным отображением в $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$. В частности, из условия $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$ элемент $\varphi_t^g(x) \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ при всех $t \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^3$ и отображение $\mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3) \ni g : \to \varphi_t^g \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ непрерывно. Кроме того, группа $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ является локально линейно-связной, но не локально-компактной в приведенной выше топологии.

Пусть $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ — полупрямое произведение абелевой топологической группы $\mathscr{S}$ со стандартной топологией [16] и топологической группы $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$, описанной выше, действие в котором определяется выражением (7). Различные унитарные представления группы токов $G = \mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ описывают различные физические системы. Например, система $N \in \mathbf{Z}_+$ идентичных бозе-частиц и система $N \in \mathbf{Z}_+$ идентичных ферми-частиц соответствуют двум унитарно неэквивалентным представлениям этой группы. Так как группа $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ является бесконечно параметрической, то представляется возможным ее различными унитарными представлениями описывать очень широкий спектр физических ситуаций [15].

Гильбертово пространство Φ для каждого неприводимого представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ унитарно эквивалентно [11] гильбертовому пространству:

$$\Phi = \oplus \int_{\mathcal{S}'} d\mu(F)\, \Phi_F, \tag{8}$$

где μ — цилиндрическая мера на $\mathcal{S}'$ — пространстве непрерывных действительных и линейных функционалов на $\mathcal{S}$; Φ_F — отмеченные индексом $F \in \mathcal{S}'$ комплексные линейные пространства. В физических приложениях [11] необходимо выбирать $\dim \Phi_F = 1$; в этом случае $\Phi \approx L_2^{(\mu)}\,(\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ — пространство квадратично-интегрируемых по мере μ на $\mathcal{S}'$ функций.

Пусть теперь элемент $\omega(F) \in \Phi$ — произволен; тогда для действия группы $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ на этот элемент справедливо следующее представление:

$$\left.\begin{aligned} &U(f)\,\omega(F) = \exp\left[\mathrm{i}\,(F,\ f)\right]\omega(F);\\ &V(\varphi)\,\omega(F) = \chi_\varphi(F)\,\omega(\varphi^* F)\left[\frac{d\mu(\varphi^* F)}{d\mu(F)}\right]^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $(\varphi^* F, f) = (F, f \circ \varphi)$; $f \in \mathcal{S}$; $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$; $F \in \mathcal{S}'$; $d\mu\,(\varphi^* F)/d\mu\,(F)$ — производная Радона — Никодима [16] меры $\mu\,(\varphi^* F)$ по отношению к мере $\mu\,(F)$ и $\chi_\varphi\,(F)$ — комплекснозначный множитель единичной нормы, удовлетворяющий условию

$$\chi_{\varphi_2}(F)\,\chi_{\varphi_1}(F) = \chi_{\varphi_1 \circ \varphi_2}(F) \tag{10}$$

для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$. Чтобы существовала производная Радона — Никодима в (9), мера μ на $\mathcal{S}'$ должна быть квазиинвариантной по отношению к группе $\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$, т. е. для любого измеримого множества $Q \subset \mathcal{S}'$ и любого $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ мера $\mu\,(Q) = 0$, если и только если $\mu\,(\varphi^* Q) = 0$.

Представление (9), соответствующее квантовомеханической системе $N \in \mathbf{Z}_+$ одинаковых частиц, имеет меру μ, сосредоточенную на дельта-функциях Дирака, т. е. функционалах вида [11, 12]

$$= \sum_{j=1}^{N} \delta\,(x - x_j) \tag{11}$$

с мерой вида

$$d\mu\,(F) = \Omega^*\Omega \prod_{j=1}^{N} d^3x_j\,\delta\,\Big(F - \sum_{j=1}^{N} \delta\,(x - x_j)\Big),$$

где $x, x_j \in \mathbf{R}^3$; $j = \overline{1, N}$ и $\Omega \in L_2^{(\pm)}(\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$ — симметричная или антисимметричная волновая функция основного состояния N-частичной динамической системы. При этом справедливы следующие формулы: $\Omega(F) = 1$; $\omega \in L_2^{(\mu)}(\mathscr{S}'; \mathbf{C}^1)$;

$$\left.\begin{aligned} &\rho(x)\,\omega(F) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)\,\omega(F); \\ &J(x)\,\omega(F) = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{N} [2\delta(x - x_j)\nabla_j - (\nabla\delta)(x - x_j)]\,\omega(F), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\omega(F) = \omega(x_1, \ldots, x_N) \in \Phi \approx L_2^{(\pm)}(\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$; $x, x_j \in \mathbf{R}^3$; $j = \overline{1, N}$. Следствием (11) и (12) будут формулы для представления группы $\mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ в $\Phi \approx L_2^{(\pm)}(\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$:

$$U(f)\,\omega(F) = \exp\Big[i \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\Big]\,\omega(F);$$

$$V(\varphi)\,\omega(F) = \omega(\varphi^* F)\left[\det\left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right\|\right]^{1/2},$$

где мы положили $\chi_\varphi(F) = 1$ для всех $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$, $\omega(\varphi^* F) = \omega(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_N)$ в случае статистики Бозе.

Ввиду особой эффективности анализа свойств представлений группы $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ при помощи метода производящих функционалов [11, 17, 18], обобщающего подход работ [1, 6], введем некоторые определения в связи с этим методом.

Определение 1.1. Производящий функционал на группе $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ — это комплекснозначная функция E на G с условиями:

1) $E(1) = 1$, $1 \in G$;

2) $E(a_1 \exp(t, A)\, a_2)$ — непрерывная функция параметра $t \in \mathbf{R}^1$ для всех $A \in \mathfrak{G}$ и $a_1, a_2 \in G$;

3) матрица $\| E(a_i^{-1} a_j) \|$ $i, j = \overline{1, N}$, положительно определена для всех $a_j \in G$, $j = \overline{1, N}$ и $N \in \mathbf{Z}_+$. Справедлива [18] следующая теорема.

Теорема 1.2. E — производящий функционал на G тогда и только тогда, когда существует непрерывное унитарное представление π: $G \to \mathrm{Aut}(\Phi)$ на Φ с циклическим вектором $\Omega \in \Phi$, таким, что

$$E(a) = (\Omega, \pi(a)\,\Omega). \tag{13}$$

При этом вектор $\Omega \in \Phi$ называется циклическим по отношению к представлению π, если множество $\{\pi(a)\,\Omega\colon a \in G\}$ является полным в Φ, т. е. плотным в Φ, если взято вместе со своими линейными комбинациями над $\mathbf{C}^1$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в Φ.

Смысл этой теоремы заключается в том, что можно неявно конструировать унитарные представления группы токов $G = \mathscr{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ и тем самым алгебры Ли токов $\mathfrak{G}$ (4), определяя соответствующим образом производящий функционал на G. Это является очень существенным, так как часто последняя проблема намного проще, чем исходная.

Рассмотрим теперь представление $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}\,(\Phi)$ из теоремы 1.2, ограниченное на абелеву подгруппу $\mathcal{S}$, в группе $G = \mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$, и соответствующий ему производящий функционал $\mathcal{L}(f)$, $f \in \mathcal{S}$, в виде

$$\mathcal{L}(f) = (\Omega,\ \exp[i\rho(f)]\,\Omega) = \int_{\mathcal{S}'} d\mu(F) \exp[i(F,\ f)], \tag{14}$$

где циклический вектор $\Omega \in \Phi$ нормирован на единицу: $(\Omega, \Omega) = 1$. В соответствии с принципами нерелятивистской квантовой статистической механики [8] функционал (14) можно переписать [6] в эквивалентном trace-представлении:

$$\mathcal{L}(f) = \mathrm{tr}\,(\mathcal{P} \exp[i\rho(f)]), \tag{15}$$

где $\mathcal{P}\colon \Phi \to \Phi$ — соответствующий статистический оператор [8], удовлетворяющий условию $\mathrm{tr}\,\mathcal{P} = 1$. Как продемонстрировано в [6, 2], во многих случаях представление (15) является практически более удобным для исследования, так как вскрывает явным образом операторную структуру циклического вектора $\Omega \in \Phi$.

Мы здесь будем при необходимости пользоваться обоими представлениями (14) и (15).

Производящий функционал (14) обладает следующими всеми необходимыми свойствами: 1) $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}^*(-f)$ для всех $f \in \mathcal{S}$; 2) $\mathcal{L}(0) = 1$; 3) $|\mathcal{L}(f)| \leqslant 1$, $f \in \mathcal{S}$; 4) $\mathcal{L}(f)$ — положительно определенный функционал; это означает, что для произвольных $c_j \in \mathbf{C}^1$, $f_j \in \mathcal{S}$, $j = \overline{1, N}$, $N \in \mathbf{Z}_+$, выполнено неравенство $\sum_{j,k=1}^{N} c_j^* \mathcal{L}(f_k - f_j) \geqslant 0$. Функционал $\mathcal{L}(f)$ со свойствами 1—4, как можно показать, всегда определяет меру μ на $\mathcal{S}'$ для представления абелевой подгруппы $\mathcal{S}$ группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$. Если мера μ является к тому же квазиинвариантной и известны множители $\chi_\varphi(F)$ в (9) для всех $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$, $F \in \mathcal{S}'$, то тем самым представление (9) группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ полностью определено. При этом нас будут интересовать только неприводимые представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$. Приводимые представления группы $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ согласно [11] соответствуют системам частиц с разными массами или с внутренними степенями свободы. В последнем случае к алгебре Ли токов (4) необходимо добавить дополнительные локальные токи наблюдаемых величин, чтобы получить полную систему наблюдаемых [19]. В связи с этим укажем, что представление группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ будет неприводимым тогда и только тогда, когда мера μ на $\mathcal{S}'$ эргодична для $\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$, т. е. когда для любого измеримого инвариантного множества $Q \subset \mathcal{S}'$ либо $\mu(Q) = 0$, либо $\mu(\mathcal{S}' \setminus Q) = 0$ [20]. Для $F \in \mathcal{S}'$ положим $\mathrm{Or}\,(F) = \{\varphi^* F\colon\ \varphi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)\}$, где множество $\mathrm{Or}\,(F)$ называется орбитой элемента $F \in \mathcal{S}'$ под действием группы $\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$. Произвольное инвариантное множество является в общем случае несчетным объединением семейства взаимно непересекающихся орбит. Предполагая, что орбиты, содержащие инвариантное множество $Q \subset \mathcal{S}'$, измеримы, находим только две возможности для эргодичности цилиндрической меры μ на $\mathcal{S}'$: или она сосредоточена на одной орбите, или каждая орбита имеет нулевую меру. Как указано в [15], обе ситуации для группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ имеют место. В частности, случай, когда мера μ сосредоточена на функционалах вида (11) и который был разобран выше, ведет к неприводимости в $\Phi \approx L_2^{(\pm)}(\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$ представления (13) группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$. Другие интересные с физической точки зрения неприводимые представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$ могут быть получены [15] при помощи метода индуцированных представлений из подгрупп группы $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^3)$. На их применении в теории квантового метода производящих функционалов Боголюбова мы надеемся остановиться в следующей работе.

2. АЛГЕБРА ЛИ ТОКОВ, ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БОГОЛЮБОВА

Пусть нам задана квантовая система частиц со средней плотностью $\bar{\rho} \in \mathbf{R}_+^1$, которая находится в равновесном основном состоянии, и гамильтониан $\mathbf{H}\colon \Phi \to \Phi$, которой в представлении вторичного квантования [8] имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x \nabla_x \psi^+(x) \nabla_x \psi(x) + \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x \int_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x-y) \psi^+(x) \psi^+(y) \psi(y) \psi(x), \quad (16)$$

где $V(x-y)$ — скалярный двухчастичный потенциал взаимодействия в системе; $m \in \mathbf{R}_+^1$ — масса одной частицы. В терминах операторов токов (2) и (3) оператор Гамильтона (16) имеет [11] следующее представление:

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x K^+(x) \rho^{-1}(x) K(x) + \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x \int_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x-y) :\rho(x)\rho(y):. \quad (17)$$

Здесь оператор $K(x) = \nabla_x \rho(x) + 2iJ(x) = 2\psi^+(x) \nabla_x \psi(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, а символ : : обозначает стандартную операцию нормального упорядочения [21] операторов рождения и уничтожения. Эта операция имеет эквивалентное представление в терминах операторов плотности $\rho(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$:

$$:\rho(x_1)\ldots\rho(x_n): = \prod_{j=1}^{n} \left(\rho(x_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \delta(x_j - x_k)\right), \quad (18)$$

где $n \in \mathbf{Z}_+$ произвольно. Результат (18) легко извлекается из N-частичного представления (12) оператора плотности в гильбертовом пространстве Ф:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(x) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j); \\ &\prod_{j=1}^{n} \rho(y_j) = \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_n=1}^{N} \delta(y_1 - x_{j_1}) \ldots \delta(y_j - x_{j_n}), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $y_j \in \Lambda \subset \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, n}$ и $N/\Lambda = \bar{\rho} \in \mathbf{R}^1_+$ фиксировано. Из (19) определяется операция : : нормального упорядочения в N-частичном представлении:

$$:\prod_{j=1}^{n} \rho(y_j): = \sum_{\{j_1, \ldots, j_n\}} \delta(y_1 - x_{j_1}) \ldots \delta(y_n - x_{j_n}), \tag{20}$$

где суммирование в (20) выполняется только по таким наборам индексов $\{j_1, \ldots, j_n\}$, что $1 \leqslant j_k \leqslant N$ и $j_k \neq j_p$, если $p \neq k$, $k, p = \overline{1, N}$. Выражение (20), как легко проверить, эквивалентно выражению (18) с учетом перехода к фоковскому представлению. В частности, из (18) при $n = \overline{1,3}$ получаем

$$\left.\begin{aligned} &:\rho(x_1): = \rho(x_1); \\ &:\rho(x_1)\rho(x_2): = \rho(x_1)[\rho(x_2) - \delta(x_1 - x_2)]; \\ &:\rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x_3): = \rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x_3) - \\ &- \rho(x_1)\rho(x_2)\delta(x_1 - x_3) - \rho(x_1)\rho(x_3)\delta(x_2 - x_3) - \\ &- \rho(x_1)\rho(x_3)\delta(x_2 - x_3) - \rho(x_2)\rho(x_3)\delta(x_1 - x_2) + \\ &+ 2\rho(x_1)\delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Рассмотрим более детально выражение (17) для оператора Гамильтона $\mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве Ф. В случае конечной плотности $\bar{\rho} \in \mathbf{R}^1_+$ нашей квантовой системы оператор (17) в большом каноническом ансамбле Гиббса является плохо определенным неограниченным оператором. С целью придания смысла оператору (17) рассмотрим [11] следующее линейное подмножество D в гильбертовом пространстве Ф:

$$D = \operatorname{span}\{\exp[i\rho(f)]\,\Omega\} \tag{22}$$

для всех $f \in \mathcal{S}$, где $\Omega \in \Phi$ — циклический вектор, т. е. неприводимый вектор основного состояния. Так как $\bar{D} = \Phi$, где $\bar{D}$ — замыкание в Ф подмножества D, то для любых двух векторов ω_1 и $\omega_2 \in D$ «матричный» элемент

$$(\omega_1, \mathbf{H}_0\omega_2) = \frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x\, (K(x)\,\omega_1,\ \rho^{-1}(x)\,K(x)\,\omega_2), \tag{23}$$

где $\mathbf{H}_0 = \frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x\, K^+(x)\,\rho^{-1}(x)\,K(x)$ является хорошо определенной эрмитовой формой на $D \times D$. С целью обобщения этой конструкции на полный гамильтониан $\mathbf{H}$ (17) предположим, что справедливы следующие условия: i) существует нормированное состояние $\Omega \in \Phi$ квантовой системы (здесь при нулевой температуре) с наинизшей энергией, являющееся основным для $\mathbf{H}$, причем $\mathbf{H} \geqslant 0$ и $\mathbf{H}\Omega = 0$; ii) подмножество векторов $D = \operatorname{span}\{\exp[i\rho(f)]\,\Omega\colon f \in \mathcal{S}\}$ плотно в Φ, $\bar{D} = \Phi$ и $D = \operatorname{dom}\mathbf{H}$; iii) справедливо уравнение непрерывности для токов: $i/\hbar\,[\mathbf{H}, \rho(f)] = (\hbar/m)\,J(\nabla f)$; iv) существует антиунитарный оператор отражения времени T, действующий так, что $T\rho(f)\,T^{-1} = \rho(f)$, $TJ(g)\,T^{-1} = -J(g)$ и $T\Omega = \Omega$. Справедливо следующее, полезное для дальнейшего [11, 12]

Утверждение 2.1. Пусть $|f\rangle = \exp[i\rho(f)]\,\Omega \in \Phi$, $f \in \mathcal{S}$ и представление $U(f)$, $V(\varphi)$ группы токов $\mathcal{S} \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$ удовлетворяет описанным выше условиям i — iv с циклическим вектором $\Omega \in \Phi$. Тогда справедливы формулы

$$\left.\begin{aligned} \langle f_1 \,|\, J(g) \,|\, f_2\rangle &= \frac{\hbar}{2m}\langle f_1 \,|\, \rho(g\cdot\nabla(f_1+f_2)) \,|\, f_2\rangle; \\ \langle f_1 \,|\, \mathbf{H} \,|\, f_2\rangle &= \frac{\hbar^2}{2m}\langle f_1 \,|\, \rho(\nabla f_1\,\nabla f_2) \,|\, f_2\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Доказательство формул (24) основывается на следующих тождествах:

$$\left.\begin{aligned} [\exp[i\rho(f)],\ J(g) &= -\frac{1}{2}[\exp[i\rho(f)],\quad K(g)] = \\ &= -\rho(g\cdot\nabla f)\exp[i\rho(f)]; \\ \frac{i}{\hbar}[\exp[i\rho(f)],\ \mathbf{H}] &= \frac{\hbar}{m}\left[-J(\nabla f) + \frac{1}{2}\rho(\nabla f\cdot\nabla f)\right]\exp[i\rho(f)], \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

легко следующих из соотношений (4) и формулы Кемпбелла — Хаусдорфа:

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n\in\mathbf{Z}_+}(n!)^{-1}(\operatorname{Ad}A)^n B, \tag{26}$$

где $(\operatorname{Ad}A)^0 B = B$; $(\operatorname{Ad}A)\,B = [A, B]$; $(\operatorname{Ad}A)^n B = [A, (\operatorname{Ad}A)^{n-1}B]$, $n \in \mathbf{Z}_+$. Используя (25) и (26), находим

$$\left.\begin{aligned} \langle f_1 \,|\, J(g) \,|\, f_2\rangle &= (TJ(g)\exp[i\rho(f_2)]\,\Omega; \\ T\exp[i\rho(f_1)]\,\Omega) &= -(\Omega,\ \exp[i\rho(f_2)]\,J(g)\exp[-i\rho(f_2)]\,\Omega) = \\ &= -(\Omega,\ \exp[-i\rho(f_1)]\,[J(g) - \rho(g\cdot\nabla(f_1+f_2))]\exp[i\rho(f_2)]\,\Omega); \\ \langle f_1 \,|\, \mathbf{H} \,|\, f_2\rangle &= (\exp[i\rho(f_1)]\,\Omega,\ [\mathbf{H},\ \exp[i\rho(f_2)]]\,\Omega) = \\ &= (\exp[i\rho(f_1)]\,\Omega,\ \left[J\left(\nabla f_2 - \frac{1}{2}\rho(\nabla f_1\cdot\nabla f_2)\right]\exp[i\rho(f_2)]\,\Omega\right). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из (27) легко уже следует выражение (24).

Определим теперь следующий, важный для дальнейшего оператор $A(x;\,\rho)\colon \Phi \to \Phi$, обладающий свойством

$$K(g)\,\Omega = A(g;\,\rho)\,\Omega \tag{28}$$

для всех $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\,\mathbf{R}^3)$. Для представления $\pi\colon G \to \operatorname{Aut} L_2^{(\mu)}(\mathcal{S}';\,\mathbf{C}^1)$ группы токов $G = \mathcal{S}' \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$ с циклическим вектором $\Omega(F) = 1$

обозначим $A\ (g)$ оператор умножения на функцию $(K\ (g)\ \Omega)\ (F)$, определяемую равенством $(A\ (g)\ \omega)\ (F) = (K\ (g)\ \Omega)\ (F)\ \omega\ (F)$ для любого $\omega\ (F) \in L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$, $F \in \mathcal{S}'$. Область определения оператора $A\ (g)$ имеет вид $\operatorname{dom} A\ (g) = \{\omega\ (F) \in L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)\colon \int\limits_{\mathcal{S}'} d\mu\ (F)\ |\ (A\ (g)\ \omega) \times \times (F)\ |^2 < \infty\}$. Так как оператор $\exp\,[i\rho\ (f)]$ в $L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ есть оператор умножения на функцию $\exp\,[i\ (F,\ f)]$, находим, что $[A\ (g),\ \exp\,[i\rho\ (f)]] = 0$ для всех $f \in \mathcal{S}\ (\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$ и $g \in \mathcal{S}\ (\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$. Кроме того, $A\ (g) \exp\,[i\rho\ (f)]\ \Omega = \exp\,[i\rho\ (f)]\ K\ (g)\ \Omega$, т. е. $\operatorname{dom} A\ (g) \supset D$. Из свойства iv, введенного выше, следует, что $(K\ (g)\ \Omega)^*\ (F) = (K\ (g)\ \Omega)\ (F)$, т. е. построенный нами оператор $A\ (g)$ — эрмитов и с плотной в $L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ областью определения $\operatorname{dom} A\ (g) \supset D$. Более того, оператор $A\ (g)\colon L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1) \to L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ является самосопряженным. Чтобы это показать, достаточно доказать, что $\{\operatorname{range}\ (A\ (g) \pm i)\}^\perp = 0$ [16]. Имеем поэтому: если $\bar{\omega}\ (F) \in \{\operatorname{range}\ (A\ (g) \pm i)\}^\perp$, тогда величина $\int\limits_{\mathcal{S}'} d\mu\ (F)\ \bar{\omega}\ (F)\ (A\ (g) \pm i) \times \omega\ (F) = 0$ для всех $\omega\ (F) \in \operatorname{dom} A\ (g)$. Выбирая $\omega(F) = \chi_Q\ (F)$ — характеристическую функцию произвольного измеримого множества $Q \subset \mathcal{S}'$, находим $\int\limits_Q d\mu\ (F)\ \bar{\omega}\ (F)\ [(K\ (g)\ \Omega)\ (F) \pm i] = 0$. В силу произвольности множества $Q \subset \mathcal{S}'$ заключаем, что $\bar{\omega}\ (F) \times [(K\ (g)\ \Omega)\ (F) \pm i] = 0$, или $\bar{\omega}\ (F) = 0$, так как $(K\ (g)\ \Omega)\ (F) \pm i \neq 0$. Тем самым показано, что оператор $A\ (g)$, $g \in \mathcal{S}\ (\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$ самосопряжен.

Для эффективного изучения представлений группы $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\ (\mathbf{R}^3)$ с условиями i — iv, выписанными нами выше при построении циклического вектора $\Omega \in \Phi$, необходимо иметь выражение для оператора $A\ (g)$ как функции оператора плотности ρ. Такое представление является возможным, так как $\rho\colon L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1) \to L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ является оператором умножения и множество полиномов от ρ согласно условию ii после действия их на вектор $\Omega \in \Phi$ является плотным в пространстве всех операторов, эквивалентных в $L_2^{(\mu)}\ (\mathcal{S}';\ \mathbf{C}^1)$ операторам умножения на функцию.

Определим теперь оператор $\tilde{K}\ (x) = K\ (x) - A\ (x;\ \rho)$, $x \in \mathbf{R}^3$; в силу определения выполнено равенство

$$\tilde{K}\ (x)\ \Omega = 0. \tag{29}$$

При помощи оператора $\tilde{K}\ (x)\colon \Phi \to \Phi$ построим следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\hbar^2}{8m} \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \tilde{K}^+\ (x)\ \rho^{-1}\ (x)\ \tilde{K}\ (x). \tag{30}$$

Справедлива [11] следующая важная

Теорема 2.2. Оператор $\tilde{\mathrm{H}}$: $\Phi \to \Phi$ является хорошо определенной эрмитовой формой с плотной областью определения $D \subset \Phi$. Кроме того, для всех $\omega_1,\ \omega_2 \in D$

$$(\omega_1,\ \tilde{\mathrm{H}}\omega_2) = (\omega_1,\ \mathrm{H}\omega_2). \tag{31}$$

Действительно, для любых $|f_1\rangle,\ |f_2\rangle \in D$, где $|f_j\rangle = \exp[\mathrm{i}\rho(f_j)]\,\Omega,\ j = 1,\ 2$, выполнено равенство

$$\begin{aligned}\langle f_1 \,|\, \tilde{\mathrm{H}} \,|\, f_2\rangle &= \frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\langle \tilde{K}(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f_1)]\,\Omega,\ \rho^{-1}(x)\times\\ &\times \tilde{K}(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f_2)]\,\Omega\rangle = \frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\times\\ &\times\langle -2\mathrm{i}\nabla f_1(x)\,\rho(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f_1)]\,\Omega,\ \rho^{-1}(x)(-2\mathrm{i})\nabla f_2(x)\times\\ &\times\rho(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f_2)]\,\Omega\rangle = \frac{\hbar^2}{8m}(\exp[\mathrm{i}\rho(f_1)]\,\Omega,\ \rho(\nabla f_1\cdot\nabla f_2)\times\\ &\times\exp[\mathrm{i}\rho(f_2)]\,\Omega) = \langle f_1 \,|\, \mathrm{H} \,|\, f_2\rangle.\end{aligned} \tag{32}$$

При выводе (32) нами использовано соотношение $[\exp[\mathrm{i}\rho(f)],\ \tilde{K}(x)] = -2\mathrm{i}\nabla f(x)\,\rho(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]$, справедливое для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$. Распространяя теперь по линейности соотношение (32) на все множество $D \subset \Phi$, получаем результат (31).

Таким образом, теорема 2.2 утверждает, что оператор (30) как оператор в Φ с областью определения $D \subset \Phi$ совпадает с исходным оператором Гамильтона H: $\Phi \to \Phi$ с той же областью определения, т. е. $\tilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H}$ на $D \subset \Phi$. В частности, спектры операторов $\tilde{\mathrm{H}}$ и H: $\Phi \to \Phi$ совпадают. Прямыми вычислениями находим также, что

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\tilde{\mathrm{H}},\ \rho(f)] &= \frac{\hbar\mathrm{i}}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\tilde{K}(x)^+\rho^{-1}(x)\,[\tilde{K}(x),\ \rho(f)] +\\ &+ [\tilde{K}(x)^+,\ \rho(f)]\,\rho^{-1}(x)\,\tilde{K}(x)) = \frac{\hbar\mathrm{i}}{4m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\tilde{K}(x)^+\times\\ &\times\rho^{-1}(x)\,\rho(x)\,\nabla f(x) - \nabla f(x)\,\rho(x)\,\rho^{-1}(x)\,\tilde{K}(x)) =\\ &= \frac{\hbar\mathrm{i}}{4m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\nabla f(x)\,[\tilde{K}(x)^+ - \tilde{K}(x)] = \frac{\hbar}{m}\,J(\nabla f).\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь мы учли равенство $A(x;\ \rho)^+ = A(x;\ \rho)$, а также для всех $\omega_1,\ \omega_2 \in D \subset \Phi$ соотношение $(\omega_1,\ \tilde{\mathrm{H}}\rho(f)\,\omega_2) - (\rho(f)\,\omega_1,\ \tilde{\mathrm{H}}\omega_2) = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}(\omega_1,\ J(\nabla f)\,\omega_2)$, дающее возможность приравнять на $D \subset \Phi$ матричные элементы операторов $[\tilde{\mathrm{H}},\ \rho(f)]$ и $[\mathrm{H},\ \rho(f)]$ для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$. Тем самым равенство (33) утверждает сохранение на $D \subset \Phi$ уравнения неразрывности для токовых операторов при замене $\mathbf{H} \to \widetilde{\mathbf{H}}$ в качестве наблюдаемого оператора Гамильтона в гильбертовом пространстве Φ с циклическим вектором $\Omega \in \Phi$, удовлетворяющим условиям i — iv. Следствием теоремы 2.2 является [11, 12].

Утверждение 2.3. Оператор $\widetilde{\mathbf{H}}$: $\Phi \to \Phi$ (30) определяет в $D \times D$ положительно определенную эрмитову форму.

Пусть $\omega = \sum_{j=1}^{n} c_j U(f_j) \Omega \in D \subset \Phi$, тогда

$$(\omega, \widetilde{\mathbf{H}}\omega) = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j,k=1}^{n} c_j^* c_k \langle f_j | \rho(\nabla f_j \cdot \nabla f_k) | f_k \rangle =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathcal{S}'} d\mu(F) \left(F, \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \nabla f_j \exp[\mathrm{i}(F, f_j)] \right|^2 \right) \geqslant 0, \qquad (34)$$

где мы воспользовались изоморфизмом между Φ и $L_2^{(\mu)}(\mathcal{S}'; \mathbf{C}^1)$, а также формулой

$$(\omega, \rho(f)\omega) = \int_{\mathcal{S}'} d\mu(F)(F, f) |\omega(F)|^2. \qquad (35)$$

Неравенство в (34) следует из естественного физического предположения, что для любого $\omega \in D \subset \Phi$ величина $(\omega, \rho(f)\omega)$ для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}_+^1)$, как среднее значение оператора плотности $\rho(f)$ в состоянии $\omega \in D$, должна быть положительной. В силу теоремы Фридрихса [11, 16] операторное выражение (30) определяет в Φ положительный самосопряженный оператор $\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$: $\Phi \to \Phi$, играющий в нашем анализе роль наблюдаемого оператора Гамильтона, выраженного полностью в терминах токовых операторов (2) и (3). Последнее означает, что нами проведена процедура реконструкции по Араки [22] оператора Гамильтона $\mathbf{H}$: $\Phi \to \Phi$ в соответствии с неприводимым унитарным представлением группы токов $G = \mathcal{S} \wedge \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$, заданной соотношениями (6), с циклическим вектором представления $\Omega \in \Phi$, удовлетворяющим условиям i — iv.

Рассмотрим теперь производящий функционал $\mathcal{L}(f)$ (14) унитарного представления абелевой подгруппы $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$ группы токов $G = \mathcal{S} \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$. Он согласно соотношению (29) удовлетворяет следующему уравнению:

$$0 = (\Omega, \exp[\mathrm{i}\rho(f)] \widetilde{K}(x)\Omega) =$$
$$= (\Omega, \exp[\mathrm{i}\rho(f)] [\nabla\rho(x) - \mathrm{i}\nabla f(x)\rho(x)]\Omega) -$$
$$- (\Omega, \exp[\mathrm{i}\rho(f)] A(x; \rho)\Omega). \qquad (36)$$

Учитывая, что $\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\delta}{\delta f(x)} \mathcal{L}(f) = (\Omega, \rho(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega)$ для всех $x \in \mathbf{R}^3$, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$, из (36) немедленно получаем первое функциональное уравнение типа Боголюбова:

$$[\nabla_x - \mathrm{i}\nabla f(x)] \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\delta \mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = A(x; \delta)\mathcal{L}(f), \qquad (37)$$

где $A(x; \delta) = A(x; \rho)\,\big|_{\rho=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}}$. Учитывая наше дальнейшее желание работать с производящим функционалом $\mathscr{L}(f)$ в виде (15) в случае большого канонического ансамбля Гиббса для квантовой системы частиц со средней плотностью $\bar\rho \in \mathbf{R}^1_+$, дополним условия 1—4 из разд. 1 следующими: 5) $\mathscr{L}(f)$ — экстремальное решение уравнения (37), т. е. его нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации его других решений, т. е. представление группы токов $\mathscr{S} \wedge \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$ в Φ с циклическим вектором $\Omega \in \Phi$ неприводимо; 6) $\frac{1}{i}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta f(x)}\Big|_{f=0} = (\Omega,\ \rho(x)\,\Omega) = \bar\rho$ — средняя плотность частиц системы; 7) $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(f_a)$, где $f_a(x) = f(x-a)$, $x,\ a \in \mathbf{R}^3$ — условие трансляционной инвариантности; 8) $\lim\limits_{|a|\to\infty} \mathscr{L}(f + h_a) = \mathscr{L}(f)\,\mathscr{L}(h)$, где $h_a(x) = h(x-a)$ — условие кластерности, или принцип ослабления корреляций [1] Боголюбова, $f, h \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$.

Определение 2.4. Представление группы токов $G = \mathscr{S} \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$, для которого производящий функционал $\mathscr{S}(f)$, $f \in \mathscr{S}$ удовлетворяет отмеченным выше условиям 1—8, будем называть каноническим.

Справедливо в силу теоремы 2.2 следующее

Утверждение 2.5. Выражение $\tilde{\mathrm{H}}$: $\Phi \to \Phi$ (30) определяет в случае канонического представления группы токов $G = \mathscr{S} \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$ хорошо определенный положительный самосопряженный оператор Гамильтона исходной квантовой системы частиц в большом каноническом ансамбле Гиббса при нулевой температуре.

Рассмотрим теперь введенные Н. Н. Боголюбовым [1, 8] следующие n-частичные функции распределения исходной квантовой системы частиц с гамильтонианом (16) при температуре $\beta \in \mathbf{R}^1_+$:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{tr}(\mathscr{P}\colon \rho(x_1) \ldots \rho(x_n)\colon), \tag{38}$$

где $x_j \in \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, n}$, $n \in \mathbf{Z}_+$; $\mathscr{P} = \exp(-\beta\bar{\mathrm{H}})\,[\operatorname{tr}\exp(-\beta\bar{\mathrm{H}})]^{-1}$ — равновесный статистический оператор; $\bar{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mu N$, $N = \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\rho(x)$ — оператор числа частиц и $\mu \in \mathbf{R}^1$ — химический потенциал [8]. В силу выражения (15) для производящего функционала $\mathscr{L}(f)$, $f \in \mathscr{S}$ можно записать

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \colon \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_1)} \ldots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_n)} \colon \mathscr{L}(f)\Big|_{f=0}, \tag{39}$$

где для всех $n \in \mathbf{Z}_+$ оператор $\colon \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_1)} \ldots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_n)} \colon$ вычисляется по правилу

$$\colon \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_1)} \ldots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_n)} \colon = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x_j)} - \sum_{k=1}^{j-1}\delta(x_j - x_k)\right). \tag{40}$$

Таким образом, функциональное уравнение (37) эквивалентно бесконечной цепочке уравнений Боголюбова [1] для функций распределения (38), обобщающей на квантовый случай уравнения из [1]. При этом, как легко заметить, производящий функционал Боголюбова $\mathscr{L}_B(u)$, $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$ из работы [1] дается выражением

$$\mathscr{L}_B(u) = \operatorname{tr}(\mathscr{P} : \exp[\rho(u)] :). \tag{41}$$

Разлагая выражения (15) и (41) под операцией «tr» в ряд, получаем следующее важное формальное тождество [6]:

$$\mathscr{L}_B(u) = \mathscr{L}(f), \tag{42}$$

где формально $u(x) = \exp[if(x)] - 1$, $x \in \mathbf{R}^3$.

С целью вычисления плотности энергии $\varepsilon(x) \in \mathbf{R}^1_+$, $x \in \mathbf{R}^3$, основного состояния оператора Гамильтона $\tilde{\mathrm{H}}$: $\Phi \to \Phi$ (30) при нулевой температуре в случае канонического представления группы токов $\mathscr{S} \wedge \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^3)$ в гильбертовом пространстве Φ нам необходимо получить еще одно функциональное уравнение [11, 7], учитывающее второе условие на циклический вектор $\Omega \in \Phi$ канонического представления группы токов: условие $\tilde{\mathrm{H}}\Omega = 0$. Чтобы записать его в удобной форме в терминах производящего функционала $\mathscr{L}(f)$ и его функциональных производных, изучим предварительно более детально структуру оператора $A(x; \rho)$, исходя из его определения (28). Согласно свойствам оператора отражения времени T при его действии на алгебру Ли токов $\mathfrak{G}$ (4) заключаем, что циклический вектор $\Omega \in \Phi$ является действительным, т. е. $\Omega^* = \Omega$ [7]. Переходя по формулам (11) — (13) к N-частичному представлению токовой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (4), $N \in \mathbf{Z}_+$, из (28) легко находим

$$A(x; \rho) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)(\nabla_{x_j} \ln \Omega^2)(x_1, \ldots, x_N). \tag{43}$$

Переходя далее по формуле (18) к токовому представлению, из (43) получаем

$$A(x; \rho) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_2 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_N : \rho(x)\rho(x_2)\ldots\rho(x_N) : \nabla_x \ln \Omega^2. \tag{44}$$

Здесь уместно заметить, что выражение (44) получается также немедленно из (43) при помощи перехода ко вторично квантованному [8] представлению с учетом выражений (2) и (18). Выражение (44) является для случая большого канонического ансамбля Гиббса неудобным ввиду неопределенности его предела при $N \to \infty$. Поэтому оператор $A(x; \rho)$ необходимо представить в виде полиноминального по операторам $\rho(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$ ряда [7]:

$$A(x; \rho) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_n : \rho(x)\rho(y_1)\ldots$$
$$\ldots \rho(y_n) : \nabla_x \mathscr{A}_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{45}$$

где функции $\mathcal{A}_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, можно определить следующим образом. Рассмотрим симметричную функцию $\ln \Omega^2(x_1, \ldots, x_N)$ в виде разложения

$$\ln \Omega^2(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{A}(x_j) + \sum_{i<j}^{N} \mathcal{A}_2(x_i, x_j) + \\ + \sum_{i<j<k}^{N} \mathcal{A}_3(x_i, x_j, x_k) + \ldots + \mathcal{A}_N(x_1, \ldots, x_N), \tag{46}$$

где $x_j \in \Lambda \subset \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, N}$, причем $\bar{\rho} = N/\Lambda$. С целью определения членов ряда (46) воспользуемся следующим [7] утверждением.

Утверждение 2.6. (лемма Кемпбелла). Пусть $F(x_1, \ldots, x_N)$, $x_j \in \Lambda \subset \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, N}$ — симметричная функция всех своих переменных, тогда

$$F(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_N \leqslant N\}} F_n(x_{j_1} \ldots, x_{j_n}), \tag{47}$$

где

$$F_n(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n} \sum_{\{j_1 < j_2 < \ldots < j_m\}} C_m^{(N)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}); \tag{48}$$

$$C_m^{(N)}(x_1, \ldots, x_m) = \Lambda^{m-N} \int_\Lambda d^3x_{m+1} \ldots \int_\Lambda d^3x_N F(x_1, \ldots, x_N).$$

Доказательство леммы Кемпбелла проводится [7] методом преобразования Фурье, на чем мы здесь останавливаться не будем. Переходя в (46) к пределу $N \to \infty$, $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^3$, $N/\Lambda = \bar{\rho}$, а также к токовому представлению, получаем требуемое выражение (45) для оператора $A(x; \rho)$ в большом каноническом ансамбле Гиббса, причем коэффициенты в (45) определяются по алгоритму утверждения 2.6 однозначно.

Рассмотрим теперь следующее равенство:

$$(\Omega, \exp[i\rho(f)]\, \mathbf{H}\Omega) = 0, \tag{49}$$

где оператор $\mathbf{H}\colon \Phi \to \Phi$ дается выражением (17). Используя выражение (29), из (49) последовательно получаем

$$(\Omega, \exp[i\rho(f)]\, \mathbf{H}\Omega) = 0 = \frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x\, (\Omega, \exp[i\rho(f)]\, K^+(x) \times \\ \times \rho^{-1}(x) K(x)\Omega) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x \int_{\mathbf{R}^3} d^3y\, V(x-y)\, (\Omega, \exp[i\rho(f)] \times \\ \times :\rho(x)\rho(y):\Omega) - \int_{\mathbf{R}^3} d^3x\, \varepsilon(x)\, (\Omega, \exp[i\rho(f)]\, \rho(x)\Omega) = \\ = \frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x\, (\Omega, \exp[i\rho(f)]\, 2\nabla(x) \cdot \rho^{-1}(x) A(x; \rho)\Omega) -$$

$$
-\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,[K(x),\ \rho^{-1}(x)A(x;\ \rho)]\,\Omega)-
$$

$$
-\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,A(x;\ \rho)\cdot\rho^{-1}(x)A(x;\ \rho)\,\Omega)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\,V(x-y):\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathscr{L}(f)-
$$

$$
-\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\varepsilon(x)\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}=\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,\mathrm{i}\nabla f(x)\cdot A(x;\ \rho)\,\Omega)-
$$

$$
-\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,\rho(x)\,\nabla\cdot(\rho^{-1}A(x;\ \rho))\,\Omega)-
$$

$$
-\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,\frac{1}{2}[K(x),\ (\rho^{-1}(x)A(x;\ \rho))]\,\Omega)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\,V(x-y):\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathscr{L}(f)-
$$

$$
-\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\varepsilon(x)\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}, \tag{50}
$$

где $\varepsilon(x)\in\mathbf{R}^1_+$, $x\in\mathbf{R}^3$ — плотность энергии основного состояния нашей системы. При выводе равенства (50) мы воспользовались следующими соотношениями:

$$
\left.\begin{aligned}
&(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,K^+(x)\,\rho^{-1}(x)\,K(x)\,\Omega)=\\
&=\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,A(x;\ \rho)\cdot\rho^{-1}(x)A(x;\ \rho)\,\Omega)+\\
&+\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,(\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,2\mathrm{i}\,\nabla f(x)\cdot A(x;\ \rho)\,\Omega);\\
&\qquad 2\nabla\rho(x)=K^+(x)+K(x),
\end{aligned}\right\} \tag{51}
$$

прямо следующими из определения оператора $K(x)\colon \Phi\to\Phi$ и свойства (28). Учитывая дополнительно к равенству (50) уравнение (37) и соотношение

$$
[K(x),\ (\rho^{-1}(x)A(x;\ \rho))]=2\rho(x)\left[\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\right](\rho^{-1}(x)A(x;\ \rho)), \tag{52}
$$

окончательно можно записать [7]

$$
-\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\mathrm{i}\,\nabla f(x)\cdot[\nabla_x-\mathrm{i}\,\nabla f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}+
$$

$$
+\frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,B(x;\ \delta)\,\mathscr{L}(f)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\ \times
$$

$$
\times V(x-y):\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathscr{L}(f)-\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\varepsilon(x)\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}. \tag{53}
$$

Здесь оператор $B(x;\ \rho)$ дается выражением

$$B(x;\ \rho)=\rho(x)\nabla\cdot(\rho^{-1}(x;\ \rho))+\rho(x)\left[\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\right](\rho^{-1}A(x;\ \rho)), \tag{54}$$

причем символ $\left[\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\right]$ означает оператор градиента вариационной производной $\delta/\delta\rho(x)$, а не произведение операторов градиента и вариационной производной, что, как легко убедиться, является существенным.

Из представления (45) для оператора $A(x;\ \rho)$: $\Phi\to\Phi$ и выражения (54) прямой подстановкой можно найти, что

$$\begin{aligned}B(x;\ \rho)=\sum_{m\in\mathbf{Z}_+}(m!)^{-1}\int_{\mathbf{R}^3}d^3y_1\ldots\int_{\mathbf{R}^3}d^3y_m\Big\{:\rho(x)\rho(y_1)\ldots\\ \ldots\rho(y_m):\nabla_x^2\mathscr{A}_{m+1}(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)+\\ +\rho(x)\left[\left(\nabla_x+\left[\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\right]\right)\rho^{-1}(x):\rho(x)\rho(y_1)\ldots\right.\\ \left.\ldots\rho(y_m):\right]\nabla_x\mathscr{A}_{m+1}(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)\Big\}.\end{aligned} \tag{55}$$

Легко убедиться, что второе слагаемое в (55) аннулируется тождественно согласно формуле (18) и тождеству

$$\left(\nabla_{x_1}+\left[\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x_1)}\right]\right)\left(\rho(x_j)-\sum_{k=1}^{j-1}\delta(x_j-x_k)\right)=0, \tag{56}$$

справедливому для всех $j\in\mathbf{Z}_+$. Таким образом, из (53) — (56) получаем

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbf{R}^3}d^3x\,\mathrm{i}\nabla f(x)\cdot[\nabla_x-\mathrm{i}\nabla f(x)]\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}+\int_{\mathbf{R}^3}d^3x\,\varepsilon(x)\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}+\\ +\frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbf{R}^3}d^3x\sum_{m\in\mathbf{Z}_+}(m!)^{-1}\int_{\mathbf{R}^3}d^3y_1\ldots\int_{\mathbf{R}^3}d^3y_m:\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y_1)}\ldots\\ \ldots\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y_m)}:\mathscr{L}(f)\nabla_x^2\mathscr{A}_{m+1}(x,y_1,\ldots,y_m)=\\ =\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}d^3x\int_{\mathbf{R}^3}d^3y\,V(x-y):\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathscr{L}(f).\end{aligned} \tag{57}$$

Уравнение (57) вместе с уравнением (37) составляет систему функциональных уравнений типа Н. Н. Боголюбова для квантового производящего функционала $\mathscr{L}(f)$, $f\in\mathscr{S}$ (14). В случае, когда выражение $[\nabla_x-\mathrm{i}\nabla f(x)](\Omega,\ \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\rho(x)\Omega)$ стремится к нулю быстрее, чем $|x|^{-2}$ при $\mathbf{R}\ni x$ и $|x|\to\infty$, первый член в (57) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbf{R}^3}d^3x[\nabla_x-\mathrm{i}\nabla f(x)]^2\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)}=-\frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbf{R}^3}d^3x\,\mathrm{i}\nabla f(x)\times\\ \times[\nabla_x-\mathrm{i}\nabla f(x)]\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)},\end{aligned} \tag{58}$$

что несколько упрощает запись уравнения (57). В терминах функций распределения Боголюбова (38) равенство (58) эквивалентно [1, 7] условию ослабления корреляций в виде

$$|F_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) - \bar{\rho} F_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1})| \to 0 \tag{59}$$

быстрее, чем $|x|^{-1}$ при $|x| \to \infty$ для всех $y_j \in \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, n-1}$, $n \in \mathbf{Z}_+$. Условие (59), естественно, зависит от межчастичного потенциала взаимодействия в операторе Гамильтона (16), и в случае его короткодействия [7] оно должно выполняться. Учитывая далее, что для функционала $\mathscr{L}(f)$, $f \in \mathscr{S}$ (14) справедливо разложение [6, 7]

$$\mathscr{L}(f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \prod_{j=1}^{n} \{\exp[\mathrm{i} f(x_j)] - 1\} \times \\ \times F_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{60}$$

из (57), (37) и (60) легко получаем следующие цепочки уравнений типа Боголюбова [1] для функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ (38) при нулевой температуре:

$$\frac{\hbar^2}{8m} \sum_{j=1}^{n} \nabla^2_{x_j} F_n(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\hbar^2}{8m} \int_{\mathbf{R}^1} d^3x_{n+1} \times \\ \times \nabla^2_{x_{n+1}} [F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) - F_1(x_{n+1}) F_n(x_1, \ldots, x_n)] + \\ + \sum_{m \in \mathbf{Z}_+} \Bigg\{ \sum_{(r=\max(m-n,\ 0))} \left(\frac{1}{r!\,(m-r)!} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+1} \ldots \right. \\ \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+r} \sum_{(j_1 \neq j_2 \neq \ldots \neq j_{m-r})} V_m(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{m-r}}, x_{n+1}, \ldots \\ \left. \ldots, x_{n+r}) F_{n+r}(x_1, \ldots, x_{n+r}) \right) - (m!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+1} \ldots \\ \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+m} V(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) F_m(x_{n+1}, \ldots \\ \ldots, x_{n+m}) F_n(x_1, \ldots, x_n) \Bigg\}; \tag{61}$$

$$\nabla_{x_1} F_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m \in \mathbf{Z}_+} \sum_{(r=\max(0,\ m+1-n))} \frac{1}{r!\,(m-r)!} \times \\ \times \sum_{(j_1 \neq j_2 \neq \ldots \neq j_{m-r})}^{n} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+1} \ldots \\ \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_{n+r} \nabla_{x_1} \mathscr{A}_{m+1}(x_1, x_{j_1}, \ldots \\ \ldots, x_{j_{m-r}}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}) F_{n+r}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+r}).$$

Здесь мы ввели обозначения: при $n=2$

$$V_2(x, y) = -\frac{\hbar^2}{8m}[\nabla_x^2 \mathcal{A}_2(x, y) + \nabla_y^2 \mathcal{A}(y, x)] + V(x-y) \tag{62}$$

и при $n \neq 2$

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{(n-1)!}\sum_\sigma \nabla_{x_{\sigma(1)}} \mathcal{A}_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где $\sigma \in S_n$ — элемент симметричной группы перестановок S_n. В случае $n=0$ также получаем уравнение, определяющее плотность $\varepsilon(x) \in \mathbf{R}^1$ энергии основного состояния оператора Гамильтона (16):

$$F_1(x)\varepsilon(x) = -\frac{\hbar^2}{8m}\nabla_x^2 F_1(x) + \sum_{n \in \mathbf{Z}_+}(n!)^{-1}\int_{\mathbf{R}^3} d^3x_2 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \times$$
$$\times V_n(x, \ldots, x_n) F_n(x, x_2, \ldots, x_n). \tag{63}$$

В случае канонического представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ из трансляционной инвариантности производящего функционала $\mathcal{L}(f)$, $f \in \mathcal{S}$ немедленно находим, что $F_1(x) = \bar{\rho} \in \mathbf{R}_+^1$ — средняя плотность системы квантовых частиц и $\nabla_x \mathcal{A}_1(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^3$. Заметим здесь, что выражение (63) в фурье-представлении аналогично формуле (28) из работы [23], развивающей метод коллективных переменных [24]. Отметим также то важное свойство уравнений (61), что в зависимости от выбора представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \wedge\, \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ в гильбертовом пространстве Φ эти уравнения годятся для изучения свойств как бозе-, так и ферми-систем квантовых тождественных частиц при нулевой температуре в основном состоянии.

В случае же ненулевой температуры приведенные выше соображения требуют определенной модификации. А именно, условие $\mathbf{H}\Omega = 0$ на циклическом векторе $\Omega \in \Phi$ основного состояния уже не является справедливым, поэтому нам необходимо изучить более детально структуру производящего функционала (15). Следуя [6], получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f) = W(f)/W(0);\\
&W(f) = \mathrm{tr}(\exp(-\beta\overline{\mathbf{H}})\exp[i\rho(f)]) =\\
&= \mathrm{tr}(\exp(-\beta\overline{\mathbf{H}}_0)\,\mathbf{C}\exp(-\beta V(\rho))\exp[i\rho(f)]) =\\
&= (\Omega_0, \mathbf{C}\exp[-\beta V(\delta)]\exp[i\rho(f)]\,\Omega_0) = \exp[-\beta V(\delta)]C(\delta)\,\mathcal{L}_0(f),
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где операторы $\mathbf{C}: \Phi \to \Phi$ и $C(\delta)$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{C} = \exp(\beta\overline{\mathbf{H}}_0)\exp(-\beta\overline{\mathbf{H}})\exp[\beta V(\rho)];\\
&\mathbf{C}^+\Omega_0 = C^+(\rho)\,\Omega_0, \quad C(\delta) = C(\rho)\,|_{\rho = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}};\\
&V(\rho) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} d^3x \int_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x, y) : \rho(x)\rho(y):
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

и $\Omega_0 \in \Phi$ — основное состояние системы невзаимодействующих частиц при температуре $\beta \in \mathbf{R}_+^1$. Функционал $\mathcal{L}_0(f)$ — производящий функционал свободной системы невзаимодействующих частиц при температуре $\beta \in \mathbf{R}_+^1$, который удовлетворяет функциональному уравнению вида (32), причем

$$\mathscr{L}_0(f) = (\Omega_0, \exp[\mathrm{i}\rho(f)]\,\Omega_0) = \\ = \mathrm{tr}(\exp(-\beta\overline{\mathbf{H}}_0)\exp[\mathrm{i}\rho(f)])\,[\mathrm{tr}\exp(-\beta\overline{\mathbf{H}}_0)]^{-1}. \tag{66}$$

Учитывая тот факт, что основное состояние $\Omega_0 \in \Phi$ невзаимодействующей системы $N \in \mathbf{Z}_+$ частиц является известным [8], известным считается также и оператор A_0 (x; ρ) типа (45), входящий в уравнение вида (37)

$$[\nabla_x - \mathrm{i}\nabla f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathscr{L}_0(f)}{\delta f(x)} = A_0(x;\,\delta)\,\mathscr{L}_0(f). \tag{67}$$

Прямыми вычислениями несложно убедиться, что $A_0(x;\ \rho) = 0$, $x \in \mathbf{R}^3$, в случае бозе-системы:

$$[\nabla_x - \mathrm{i}\nabla f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathscr{L}_0(f)}{\delta f(x)} = 0 \tag{68}$$

при $\hbar$, $\beta \to 0$. Решением уравнения (68), как легко проверить, является функционал [7, 6]

$$\mathscr{L}_0(f) = \exp\left(z\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\,\{\exp[\mathrm{i}f(x)] - 1\}\right). \tag{69}$$

Случай производящего функционала $\mathscr{L}_0$ (f) (66) для ферми-системы рассмотрен в приложении.

Рассмотрим теперь более детально структуру оператора $\mathbf{C}$: $\Phi \to \Phi$ (65). Согласно определению (65) уравнение для оператора $\mathbf{C}$: $\Phi \to \Phi$ по переменной $\beta \in \mathbf{R}_+^1$ имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\beta} = \mathbf{C}V(\rho) - V_\beta(\rho)\,\mathbf{C}, \tag{70}$$

где

$$V_\beta(\rho) = \exp(\beta\mathbf{H}_0)\,V(\rho)\exp(-\beta\mathbf{H}_0) = \\ = V(\rho) + \beta[\mathbf{H}_0,\ V(\rho)] + \frac{\beta^2}{2!}[\mathbf{H}_0,\ [\mathbf{H}_0,\ V(\rho)]] + \ldots \tag{71}$$

Разлагая оператор $\mathbf{C}$: $\Phi \to \Phi$ в ряд по параметру $\beta \in \mathbf{R}_+^1$ (высокотемпературное разложение), из (70) находим

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{C} = \mathbf{1} + \beta\mathbf{C}_1 + \frac{\beta^2}{2!}\mathbf{C}_2 + \frac{\beta^3}{3!}\mathbf{C}_3 + \ldots; \\ &\mathbf{C}_1 = 0, \quad \mathbf{C}_2 = -[\mathbf{H}_0,\ V(\rho)]; \\ &\mathbf{C}_3 = [[\mathbf{H}_0,\ V(\rho)],\ \mathbf{H}_0 - V(\rho)]; \\ &\mathbf{C}_4 = [\mathbf{C}_3,\ V(\rho)] + 3[\mathbf{H}_0,\ V(\rho)]^2 - \mathrm{Ad}^3(\mathbf{H}_0)\,V(\rho)\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

и т. д., где все коммутаторы в (72) вычисляются при помощи соотношений (14) для алгебры Ли токов. В частности, из (33) получаем

$$[\mathbf{H}_0,\ V(\rho)] = \left[\mathbf{H}_0,\ \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\,V(x,\ y) : \rho(x)\,\rho(y) : \right] =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x, y)[\mathbf{H}_0, \rho(x)]\rho(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x, y)\rho(x)[\mathbf{H}_0, \rho(y)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x, y)\delta(x-y)[\mathbf{H}_0, \rho(x)]=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y[\rho(x)J(y)\nabla_y V(x, y)+J(x)\nabla_x V(x, y)\rho(y)]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y V(x, y)\delta(x-y)\frac{\hbar^2}{\mathrm{i}m}\nabla_x J(x). \tag{73}$$

Учитывая, что справедлива формула

$$(\exp[\mathrm{i}\rho(f_1)]\Omega_0, \quad J(g)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)=$$

$$=\frac{1}{2}(\exp[\mathrm{i}\rho(f_1)]\Omega_0, \quad \rho(g\nabla(f_1+f))\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0) \tag{74}$$

для всех $f_1, f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$, из (73) и (74) находим

$$(\Omega_0, [\mathbf{H}_0, V(\rho)]\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y(\Omega_0, \rho(x)\rho(\nabla_y V(x, y)\nabla_y f)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)-$$

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y(\Omega_0, \nabla\rho(y)\nabla_y V(x, y)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)-$$

$$-\frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y(\Omega_0, \rho(\nabla_x V(x, y)\nabla_x f)\rho(y)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)-$$

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y(\Omega_0, \nabla\rho(x)\nabla_x V(x, y)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)+$$

$$+\frac{\hbar^2}{2\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y(\Omega_0, \nabla_x[V(x, y)\delta(x-y)]J(x)\exp[\mathrm{i}\rho(f)]\Omega_0)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y[\nabla_y V(x, y)\nabla_y f+\nabla_x V(x, y)\nabla_x f]\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\times$$

$$\times\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}\mathscr{L}_0(f)-\frac{\hbar^2}{4m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\left\{\nabla_x V(x, y)\left[\nabla\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\right]+\right.$$

$$\left.+\nabla_y V(x, y)\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}\right]\right\}\mathscr{L}_0(f)+$$

$$+\frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}m}\int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3y\{\nabla_x[V(x, y)\delta(x, y)]\nabla_x f\}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}_0(f)}{\delta f(x)}=C_2(\delta)\mathscr{L}_0(f).$$

Аналогичным образом могут быть вычислены представления и всех остальных членов в разложении (72) для оператора $\mathbf{C}$: $\Phi \to \Phi$.

Рассмотрим некоторые очевидные следствия полученных выше результатов в случае высоких температур $\mathbf{R}^1_+ \ni \beta \to 0$ или при $\hbar \to 0$, когда квантовые выражения переходят в соответствующие формулы классической статистики [6, 8]. Из (64) при $\hbar \to 0$ получаем

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}(f) = W(f)/W(0);\\ &W(f) = \exp[-\beta V(\delta)]\,\mathcal{L}_0(f), \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

где функционал $\mathcal{L}_0(f)$ удовлетворяет уравнению (67) в случае ферми-системы и уравнению (69) в случае бозе-системы.

Для плотности энергии $\varepsilon(x) \in \mathbf{R}^1$ основного состояния имеем интегральное выражение

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3x\varepsilon(x)\,F_1(x) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\Omega,\ \int_{\mathbf{R}^3} d^3xK^+(x)\,\rho^{-1}(x)\,K(x)\,\Omega\right) + \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} d^3x \int_{\mathbf{R}^3} d^3yV(x,\ y)\,(\Omega,\ :\rho(x)\,\rho(y):\Omega). \tag{76}$$

Чтобы его вычислить, необходимо воспользоваться соотношением (57) в виде (63), где функции распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, находятся из соотношения (39) при помощи производящего функционала (64).

Если положить снова $\hbar \to 0$, то из (67) и (75) легко получаем функциональное уравнение типа Боголюбова [1] для функционала $\mathcal{L}(f)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$ [37]:

$$[\nabla_x - \mathrm{i}\nabla f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = A_0(x;\ \delta)\,\mathcal{L}(f) - \\ - \beta\int_{\mathbf{R}^3} d^3y\nabla_x V(x,\ y) : \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(y)} : \mathcal{L}(f). \tag{77}$$

Уравнение (77) справедливо для системы частиц, подчиняющихся как статистике Ферми, так и статистике Бозе (при высоких температурах), причем в последнем случае, как указывалось ранее, оператор $A_0(x;\ \delta) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^3$. Таким образом, разрешая функциональное уравнение (77), из формулы (56) находим явное, функционально-операторное выражение для производящего функционала $\mathcal{L}(f)$ функций распределения (38). С учетом большого успеха [25—29] в исследовании точно решаемых нелинейных моделей нерелятивистской теории поля представляет несомненный интерес сопоставление результатов и объединение методов исследования из работ [25—29, 34] с соответствующими методами настоящей статьи. На этих и родственных им вопросах мы надеемся остановиться в другом исследовании.

3. КВАНТОВЫЙ МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ БОГОЛЮБОВА В НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ: АЛГЕБРА ЛИ ТОКОВ, ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА И ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предположим, что для группы $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^3)$ алгебры Ли токов (4) существует представление (6) с так называемым «неравновесным» циклических вектором. $\Omega \in \Phi$ в гильбертовом пространстве Φ, для которого множество $D = \mathrm{span}\,\{\exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]\,\Omega\colon f \in \mathcal{S}\}$ плотно в Φ, $\overline{D} = \Phi$ и $D \supset \mathrm{dom}\,\mathbf{H}$. Для оператора плотности $\rho\,(f)$, $f \in \mathcal{S}\,(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$ справедливо уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho\,(f)}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\mathbf{H},\ \rho\,(f)] = \frac{\hbar}{m}\,J\,(\nabla f), \tag{78}$$

где $t \in \mathbf{R}^1$ — эволюционный параметр нашей квантовой системы. Оператор обращения времени $T\colon\ \mathbf{R}^1 \ni t \to -t \in \mathbf{R}^1$ действует следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &T\rho\,(f)\,T^{-1} = \rho\,(f); \quad T\Omega = \Omega^*; \\ &TJ\,(g)\,T^{-1} = -J\,(g); \quad T\mathbf{H}T^{-1} = \mathbf{H} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

для всех $f \in \mathcal{S}\,(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathcal{S}\,(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$. Согласно определению (15) для производящего функционала $\mathcal{L}\,(f)$ $f \in \mathcal{S}$, можно записать следующее функциональное уравнение:

$$\frac{\partial\mathcal{L}\,(f)}{\partial t} = \mathrm{tr}\left(\mathcal{P}\,\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\mathbf{H},\ \exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]]\right), \tag{80}$$

где мы воспользовались для статистического оператора $\mathcal{P}\colon\ \Phi \to \Phi$ динамическим уравнением Лиувилля [1, 8]:

$$\frac{\partial\,\mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\mathcal{P},\ \mathbf{H}], \quad \mathrm{tr}\,\mathcal{P} = 1. \tag{81}$$

Переписывая уравнение (80) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial\mathcal{L}\,(f)}{\partial t} = \left(\Omega,\ \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\mathbf{H},\ \exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]]\,\Omega\right), \tag{82}$$

из (82) и (25) получаем

$$\frac{\partial\mathcal{L}\,(f)}{\partial t} = \left(\Omega,\ \frac{\hbar}{m}\left[J\,(\nabla f) - \frac{1}{2}\,\rho\,(\nabla f\nabla f)\right]\exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]\,\Omega\right). \tag{83}$$

Чтобы эффективизовать выражение справа в (43), заметим, что для тока $J\,(x)\colon\ \Phi \to \Phi$ имеется следующее представление [10, 11]:

$$J\,(x) = \rho\,(x)\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\,\nabla\,\frac{\delta}{\delta\rho\,(x)}\right] + J_0\,(x;\ \rho), \tag{84}$$

где $J_0\,(x;\ \rho)$, $x \in \mathbf{R}^3$ — некоторая произвольная операторная функция. Тогда из (43) и (44) находим

$$\frac{\partial\mathcal{L}\,(f)}{\partial t} = \frac{\hbar}{m}\left(\Omega,\ \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3x\left(\rho\,(x)\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\,\nabla\,\frac{\delta}{\delta\rho\,(x)}\right]\nabla_x f\right)\exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]\,\Omega\right) -$$

$$-\ \frac{\hbar}{2m}\,(\Omega,\ \rho\,(\nabla f\nabla f)\exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]\,\Omega) + (\Omega,\ J_0\,(\nabla f;\ \rho)\exp\,[\mathrm{i}\rho\,(f)]\,\Omega) =$$

$$= \left(\Omega, \frac{\hbar}{m} \rho (\nabla f \nabla f) \exp [i\rho (f)] \Omega\right) + (\Omega, J_0 (\nabla f; \delta) \exp [i\rho (f)] \Omega) -$$
$$- \frac{\hbar}{2m} (\Omega, \rho (\nabla f \nabla f) \exp [i\rho (f)] \Omega) =$$
$$= \frac{\hbar}{2m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x (\nabla_x f \nabla_x f) \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{L} (f)}{\delta f (x)} + J_0 (\nabla f; \delta) \mathcal{L} (f), \tag{85}$$

где мы, как обычно, обозначили $J_0 (x; \delta) = J_0 (x; \rho) \big|_{\rho = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f}}$. С целью конкретизации оператора $J_0 (x; \delta)$ в (85) рассмотрим снова N-частичное представление алгебры Ли токов (4) в гильбертовом пространстве $\Phi \approx L_2^{(\pm)} (\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$:

$$\left.\begin{aligned} &\rho (x) \omega (x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \delta (x - x_j) \omega (x_1, \ldots, x_N); \\ &J (x) \omega (x_1, \ldots, x_N) = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{N} [-\nabla_x \delta (x - x_j) + 2\delta (x - x_j) \nabla_{x_j}] \omega (x_1, \ldots, x_N), \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

где $N \in \mathbf{Z}_+$; $\omega \in L_2^{(\pm)} (\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$. Производящий функционал $\mathcal{L} (f, g)$, $f \in \mathcal{S} (\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathcal{S} (\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$, представления (86) дается [7] формулой

$$\mathcal{L} (f, g) = (\Omega, \exp [i\rho (f)] \exp [iJ (g)] \Omega) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_N \Omega^* (x_1, \ldots, x_N) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{N} \exp [if (x_j)] \exp [i\xi (x_j; g)] \Omega (x_1, \ldots, x_N), \tag{87}$$

где $\xi (x; g) = \frac{1}{2i} [2g (x) \nabla_x + \nabla g (x)]$, $x \in \mathbf{R}^3$; $\Omega \in L_2^{(\pm)} (\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$ — основное состояние. Для любой функции $\omega \in L_2^{(\pm)} (\mathbf{R}^{3N}; \mathbf{C}^1)$ оператор $\exp [i\xi (x; g)]$ действует по правилу

$$\exp [i\xi (x; g)] \omega (x, \ldots, x_N) = (\varphi^* \omega) (x, \ldots, x_N) \left[\det \left\| \frac{\partial \varphi (x)}{\partial x} \right\|\right]^{1/2}. \tag{88}$$

Здесь $(\varphi^* \omega) (x, \ldots, x_N) = \omega (\varphi x, \ldots, \varphi x_N)$; $\varphi \in \mathrm{Diff} (\mathbf{R}^3)$ — поток, соответствующий векторному полю $g \in \mathcal{S} (\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$, т. е. $\varphi (x) = \varphi_1^g (x)$, где $\frac{d}{dt} \varphi_t^g (x) = g (\varphi_t^g (x))$, причем справедливы формулы (5). Из производящего функционала (87) можно получить

$$(\Omega, J (\Delta f) \exp [i\rho (f)] \Omega) = \int_{\mathbf{R}^3} d^3x \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{L} (f, g)}{\delta g (x)} \bigg|_{g=0} \tag{89}$$

и тем самым определить оператор $J_0(x;\rho)$ в (85). При $\mathbf{Z}_+ \ni N \to \infty$, $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^3$, $N/\Lambda = \bar\rho \in \mathbf{R}^1_+$ выражение (87) переходит [7] в следующее:

$$\mathcal{L}(f, g) = \sum_{n\in\mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_n \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} [\delta(x_j - y_j)\{\exp[\mathrm{i}f(x_j)]\exp[\mathrm{i}\xi(x_j;\ g)] - 1\}\times$$
$$\times F_n(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n), \tag{90}$$

где для всех $n \in \mathbf{Z}_+$

$$F_n(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, \psi^+(y_n)\ldots\psi^+(y_1)\psi(x_1)\ldots \ldots\psi(x_n)\,\Omega). \tag{91}$$

Очевидно также, что $F_n(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, где

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, :\rho(x_1)\ldots\rho(x_n):\Omega). \tag{92}$$

Введем теперь при $\hbar \to 0$ следующий [6, 8, 9] квантованный оператор Вигнера $w(x, p)$: $\Phi \to \Phi$:

$$w(x,\ p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} d^3\alpha e^{\mathrm{i}\alpha p}\psi^+\left(x + \frac{\hbar\alpha}{2}\right)\psi\left(x - \frac{\hbar\alpha}{2}\right), \tag{93}$$

где $(x, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Выполняя преобразование (93) в (91), переходим к следующему представлению Вигнера [9] для классической неравновесной функции распределения Боголюбова [1] $F_n(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$:

$$F_n(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n) = (\Omega, :w(x_1, p_1)\ldots w(x_n, p_n):\Omega), \tag{94}$$

где пара (x_j, p_j), $j = \overline{1, n}$ имеет здесь смысл координаты и импульса j-й частицы. Переходя аналогичным образом к вигнеровскому представлению для производящего функционала $\mathcal{L}(f,\ g)$ (90), можно получить

$$\mathcal{L}(f,\ g) \to \mathcal{L}(f) = \sum_{n\in\mathbf{Z}_+}(n!)^{-1}\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x_1 d^3p_1 \times$$
$$\times \int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x_n d^3p_n \prod_{j=1}^{n}\{\exp[\mathrm{i}f(x_j,\ p_j)] - 1\}\times$$
$$\times F_n(x_1,\ p_1; \ldots; x_n,\ p_n), \tag{95}$$

где, по определению, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^6; \mathbf{R}^1)$ и при $\hbar \to 0$

$$\exp[\mathrm{i}f(x,\ p)] \simeq \hbar^3\int_{\mathbf{R}^3} d^3\beta\delta(\hbar\beta)\left\{\exp\left[\mathrm{i}f\left(x - \frac{\hbar\beta}{2}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\mathrm{i}\xi\left(x - \frac{\hbar\beta}{2}\ ;\ g\right)\right]\right\}\exp(\mathrm{i}\beta p). \tag{96}$$

Таким образом, согласно (94) — (96) для производящего функционала (90) имеем его вигнеровское представление в виде

$$\mathscr{L}(f) = (\Omega, \exp[iw(f)]\,\Omega), \tag{97}$$

где $w(f) = \int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x\, d^3p\, f(x, p)\, w(x, p)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^6; \mathbf{R}^1)$. Гамильтониан $\mathbf{H}\colon \Phi \to \Phi$ (17) в вигнеровском представлении (93) дается выражением [6, 8]

$$\mathbf{H} = \int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x d^3p T(p)\, w(x, p) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x d^3p \int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3y d^3\xi V(x, y) : w(x, p)\, w(y, \xi):, \tag{98}$$

где $T(p) = p^2/2m$, $p \in \mathbf{R}^3$.

С целью изучения динамики по эволюционной переменной $t \in \mathbf{R}^1$ функционала $\mathscr{L}(f)$ (97) заметим, что справедливы следующие формулы, понимаемые все в слабом смысле:

$$\left.\begin{aligned} &[w(x, p), w(y, \xi)] \simeq 0, \ \hbar \to 0;\\ &:w(x, p)\, w(y, \xi): = w(x, p)\,[w(y, \xi) - \delta(x-y)\,\delta(p-\xi)];\\ &\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}_0, w(x, p)] \overset{\hbar\to 0}{\simeq} \left\{\frac{p^2}{2m}, w(x, p)\right\}^{(1)};\\ &\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}-\mathbf{H}_0, w(x, p)] \overset{\hbar\to 0}{\simeq} \int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3y d^3\xi \times\\ &\times \{V(x, y), :w(x, p), w(y, \xi):\}^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

где $\{\cdot, \cdot\}^{(j)}$ — соответствующая каноническая классическая скобка Пуассона на многообразии переменных $\mathbf{R}^{3j} \times \mathbf{R}^{3j}$, $j \in \mathbf{Z}_+$. Оператор импульса (локальный) в вигнеровском представлении имеет вид

$$J(g) \overset{\hbar\to 0}{\simeq} \int\limits_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} d^3x d^3p g(x, p)\, p w(x, p), \tag{100}$$

где $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^6; \mathbf{R}^3)$. Свойства (99) вигнеровских операторов $w(x, p)$, $(x, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, дают возможность провести полную алгебраизацию всех основных соотношений динамической теории при $\hbar \to 0$. Для этой цели рассмотрим алгебру A самосопряженных операторов вида

$$\mathbf{K}_n = \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3q_1 \ldots \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3q_n K_n(q_1, \ldots, q_n) : w(q_1) \ldots w(q_n):, \tag{101}$$

где $q_j = (x_j, p_j) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $j = \overline{1, n}$; $K_n \in \mathrm{sym}\,[\mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}; \mathbf{R}^1]$ — пространству действительных симметрических функций, $n \in \mathbf{Z}_+$. Множество A операторов вида (101) и их линейных комбинаций над $\mathbf{R}^1$ образует, очевидно, алгебру Ли относительно обычной коммутаторной скобки $[\cdot,\ \cdot]\ \frac{i}{\hbar}$, причем легко убедиться, что

$$\frac{i}{\hbar}[A_j,\ A_k] \subset \sum_{l=\max(j,\ k)}^{j+k-1} A_l, \tag{102}$$

где $A_j = \{K_j \in A\}$, $j \in \mathbf{Z}_+$, $A = \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} A_j$. Используя формулы вида (99) и их обобщения, можно при $\hbar \to 0$ получить из $\frac{i}{\hbar}[\cdot,\ \cdot]$ новую скобку $[\cdot,\ \cdot]_0$ при помощи правила

$$[\cdot,\ \cdot]_0 = \lim_{\hbar\to 0} \frac{i}{\hbar}[\cdot,\ \cdot], \tag{103}$$

где предел в (103) рассматривается в слабом смысле. В частности, для операторов $K_j \in A_j$, $j \in \mathbf{Z}_+$, имеем

$$[\mathbf{K}_j,\ \mathbf{K}_n]_0 = \sum_{l=1}^{\min(j,\ n)} \int_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3q_l {:} w(q_1) \ldots w(q_l) \times$$
$$\times \left\{\frac{\delta^l \mathbf{K}_j}{\delta w(q_1)\ldots\delta w(q_l)},\ \frac{\delta^l \mathbf{K}_n}{\delta w(q_1)\ldots\delta w(q_l)}\right\}^{(l)}{:}. \tag{104}$$

Скобка (104) — естественное обобщение известной скобки Пуассона — Власова [8, 30] в теории кинетических уравнений. Ввиду своей структуры алгебру Ли $A = \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} A_j$ будем называть «иерархической», если скобка Пуассона в ней задается по формуле (104). В силу записи (104) имеет смысл рассматривать на множестве операторов A новую алгебру Ли $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}_+} A_j, \tag{105}$$

в которой структура алгебры Ли задается скобкой $[\![\cdot,\ \cdot]\!]$, для которой справедливо

$$[\![\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}]\!] = \bigoplus_{l\in\mathbf{Z}_+} \sum_{j,\ k\in\mathbf{Z}_+} [A_j,\ A_k]_0^{(l)}, \tag{106}$$

где, по определению, $[A_j,\ A_k]_0^{(l)} \in A_l$, причем согласно (104) $[A_j,\ A_k]_0 = \sum_{l\in\mathbf{Z}_+} [A_j,\ A_k]_0^{(l)}$, $j,\ k \in \mathbf{Z}_+$.

Рассмотрим теперь следующее линейное отображение $\alpha\colon \mathfrak{A} \to A$, где для любого элемента $(\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_j \ldots) \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство

$$\alpha(\mathbf{K}_1,\ \ldots,\ \mathbf{K}_j\ \ldots) = \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} \mathbf{K}_j \in A, \tag{107}$$

причем сумма в (107) подразумевается как оператор в исходном гильбертовом пространстве Ф. Прямыми вычислениями убеждаемся, что отображение $\alpha\colon \mathfrak{A} \to A$ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{A}$ и A

со скобками $[\![\cdot, \cdot]\!]$ и $[\cdot, \cdot]_0$ соответственно. Наряду с отображением α: $\mathfrak{A} \to A$ рассмотрим дуальное ему отображение α^*: $A^* \to \mathfrak{A}^*$, где, по определению,

$$\mathfrak{A}^* = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}_+} A_j^*, \tag{108}$$

$$A^* = \{F \in \mathcal{D}(A) : F\mathbf{K} = \operatorname{tr}(\mathcal{P}\mathbf{K}),\ \mathbf{K} \in A\},$$

и $\mathcal{P}$ — статистический оператор нашей «квазиклассической» системы при $\hbar \to 0$, удовлетворяющий уравнению Лиувилля. Легко проверить, что для элемента $F \in A^*$ выражение

$$\alpha^* F = (F_1, \ldots, F_j, \ldots) = \mathcal{F} \in \mathfrak{A}^* \tag{109}$$

задает отображение на многообразие $\mathfrak{A}^*$ функций распределения $F_j = \operatorname{tr}(\mathcal{P}: w(q_1), \ldots, w(q_j) :),\ j \in \mathbf{Z}_+$, причем для любого $\mathbf{k} \in \mathfrak{A}$

$$\mathcal{F}\mathbf{k} = (F_1, F_2, \ldots, F_j, \ldots) \circ (K_1, K_2, \ldots, K_j, \ldots) =$$
$$= \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} \int_{\mathbf{R}^3} d^3q_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3q_j F_j(q_1, \ldots, q_j) K_j(q_1, \ldots, q_j). \tag{110}$$

Пусть $B(F),\ C(F) \in \mathcal{D}(A^*)$, где A^* — функционалы над сопряженным пространством A^*. Тогда на $\mathcal{D}(A^*)$ определена скобка Ли — Пуассона [30] $\{\cdot, \cdot\}_0$ по правилу

$$\{B(F), C(F)\}_0 = F \cdot [\mathbf{B}, \mathbf{C}]_0, \tag{111}$$

где $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in A$ таковы, что $F \cdot \mathbf{B} = B(F)$, $F \cdot \mathbf{C} = C(F)$. Аналогичным образом на множестве функционалов $\mathcal{D}(\mathfrak{A}^*)$ над сопряженным пространством $\mathfrak{A}^*$ (108) определена дуальная скобка Ли — Пуассона $\{\{\cdot, \cdot\}\}$ по правилу

$$\{\{\mathcal{B}(\mathcal{F}), \mathcal{C}(\mathcal{F})\}\} = \mathcal{F} \cdot [[\mathbf{b}, \mathbf{c}]], \tag{112}$$

где $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathfrak{A}$ таковы, что $\mathcal{F} \cdot \mathbf{b} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \cdot \mathbf{c} = \mathcal{C}(\mathcal{F})$ для всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}^*$.

Определение 3.1. Будем говорить, что отображение алгебр Ли $\alpha: \mathfrak{A} \to A$ является каноническим (или пуассоновским [30, 31]), если для всех $B(F)$, $C(F)$ выполнено равенство

$$\alpha^* \{B(F), C(F)\}_0 = \{\{\alpha^* B(\mathcal{F}), \alpha^* C(\mathcal{F})\}\}, \tag{113}$$

где $\mathcal{F} = \alpha^* F \in \mathfrak{A}^*$.

Справедливо следующее [30] полезное для нас

Утверждение 3.2. Пусть A и $\mathfrak{A}$ — две произвольные алгебры Ли и α: $\mathfrak{A} \to A$ — линейное отображение. Тогда дуальное α^*: $\mathcal{D}(A^*) \to \mathcal{D}(\mathfrak{A}^*)$ является каноническим тогда и только тогда, когда α: $\mathfrak{A} \to A$ — гомоморфизм алгебр Ли.

Так как отображение α: $\mathfrak{A} \to A$ в силу его явного построения является гомоморфизмом алгебр Ли, то согласно утверждению 3.2 нами установлено

Утверждение 3.3. Дуальное отображение α^*: $\mathcal{D}(A^*) \to \mathcal{D}(\mathfrak{A}^*)$ является каноническим.

Рассмотрим теперь производящий функционал $\mathcal{L}(f)$ в виде (97). Чтобы получить для него эволюционное функциональное уравнение Боголюбова [1], применим разработанную выше алгебраическую технику к вычислению следующей величины:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(f)(\mathcal{F})}{\partial t} = \operatorname{tr}\left(\mathcal{P}\,[\mathbf{H},\ \exp[\mathrm{i}w(f)]]\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right) \tag{114}$$

при $\hbar \to 0$, $t \in \mathbf{R}^1$.

Согласно формулам (95) и (104) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(f)(\mathcal{F}) = \operatorname{tr}(\mathcal{P}\,[\mathbf{H},\ :\exp[w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}f}-1)]:]_0) =$$

$$= \alpha^*\{H(\mathcal{F}),\ \mathcal{L}(f)(\mathcal{F})\}_0, \tag{115}$$

где мы воспользовались тем фактом, что для функционала $\mathcal{L}(f)(\mathcal{F})$ выполнено тождество

$$\mathcal{L}(f)(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_B(u)(\mathcal{F}), \tag{116}$$

где формально $u = \exp(\mathrm{i}f) - 1$ и

$$\mathcal{L}_B(u) = \operatorname{tr}(\mathcal{P}:\exp[w(u)]:) \tag{117}$$

— функционал Боголюбова из работы [1] при $\hbar \to 0$. Кроме того, для функционала $H(F) \in \mathcal{D}(A^*)$ справедливо равенство

$$H(F) = \operatorname{tr}(\mathcal{P}\mathbf{H}) = \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q T(p) F_1(q) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_2 V(x_1-x_2) F_2(q_1,q_2), \tag{118}$$

причем, очевидно, $\alpha^*\mathcal{L}(f)(F) = \mathcal{L}(f)(\mathcal{F})$, $\alpha^*H(F) = \mathcal{H}(\mathcal{F}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}^*)$. Учитывая согласно утверждению 3.3 каноничность (113) отображения α: $\mathfrak{A} \to A$, получаем важную теорему о гамильтоновости:

Теорема 3.4. Производящий функционал Боголюбова $\mathcal{L}(f)$ (97) удовлетворяет на фазовом пространстве $\mathcal{D}(\mathfrak{A}^*)$ гамильтоновой динамической системе вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(f)(\mathcal{F}) = \{\{\mathcal{H}(\mathcal{F}),\ \mathcal{L}(f)(\mathcal{F})\}\} \tag{119}$$

со скобкой Ли — Пуассона (112) и функцией Гамильтона $\mathcal{H}(\mathcal{F}) = H(F)$ (118).

Учитывая далее, что для скобки Ли — Пуассона (113) на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{A}$ справедлива запись

$$\{\{\mathcal{B}(\mathcal{F}),\ \mathcal{C}(\mathcal{F})\}\} = \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 F_1(q_1)\left\{\frac{\delta\mathcal{B}(\mathcal{F})}{\delta F_1(q_1)},\ \frac{\delta\mathcal{C}(\mathcal{F})}{\delta F_1(q_1)}\right\}^{(1)} +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_2 F_2(q_1,\ q_2)\left[2\left\{\frac{\delta\mathcal{B}(\mathcal{F})}{\delta F_1(q_1)},\ \frac{\delta\mathcal{C}(\mathcal{F})}{\delta F_2(q_1,\ q_2)}\right\}^{(1)} +\right.$$

$$\left.+2\left\{\frac{\delta\mathcal{B}(\mathcal{F})}{\delta F_2(q_1,\ q_2)},\ \frac{\delta\mathcal{C}(\mathcal{F})}{\delta F_1(q_1)}\right\}^{(1)} + \left\{\frac{\delta\mathcal{B}(\mathcal{F})}{\delta F_2(q_1,\ q_2)},\ \frac{\delta\mathcal{C}(\mathcal{F})}{\delta F_2(q_1,\ q_2)}\right\}^{(2)}\right] +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \ldots \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_3 F_3(q_1, \ldots, q_3)\left[3\left\{\frac{\delta\mathscr{B}(\mathscr{F})}{\delta F_1(q_1)}, \frac{\delta\mathscr{C}(\mathscr{F})}{\delta F_3(q_1, q_2, q_3)}\right\}^{(1)} +\right.$$
$$+3\left\{\frac{\delta\mathscr{B}(\mathscr{F})}{\delta F_3(q_1, q_2, q_3)}, \frac{\delta\mathscr{C}(\mathscr{F})}{\delta F_1(q_1)}\right\}^{(1)} + 3\left\{\frac{\delta\mathscr{B}(\mathscr{F})}{\delta F_3(q_1, \ldots, q_3)}, \frac{\delta\mathscr{C}(\mathscr{F})}{\delta F_2(q_1, q_2)}\right\}^{(2)} +$$
$$+\left\{\frac{\delta\mathscr{B}(\mathscr{F})}{\delta F_3(q_1, q_2, q_3)}, \frac{\delta\mathscr{C}(\mathscr{F})}{\delta F_3(q_1, q_2, q_3)}\right\}^{(3)} +$$
$$\left.+4\left\{\frac{\delta\mathscr{B}(\mathscr{F})}{\delta F_2(q_1, q_2)}, \frac{\delta\mathscr{C}(\mathscr{F})}{\delta F_2(q_1, q_2)}\right\}^{(1)}\right] + \ldots, \tag{120}$$

где $\mathscr{B}(\mathscr{F}),\ \mathscr{C}(\mathscr{F}) \in \mathscr{D}(\mathfrak{A}^*)$, $\mathscr{F} \in \mathfrak{A}^*$, из (119) получаем следующее функциональное уравнение Боголюбова [6]:

$$\frac{\partial\mathscr{L}(f)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q \left\{T(p), \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(q)}\right\}^{(1)} +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_2 \left\{V(x_1 - x_2), :\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(q_1)}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(q_2)}:\right\}^{(2)} \mathscr{L}(f). \tag{121}$$

Из (121) легко находим функциональное уравнение для функционала (117):

$$\frac{\partial\mathscr{L}_B(u)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q\,[1 + u(q)]\left\{T(p), \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta\mathscr{L}_B(u)}{\delta u(q)}\right\}^{(1)} + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^3} d^3q_2\,[1 + u(q_1)]\,[1 + u(q_2)]\left\{V(x_1 - x_2), \frac{\delta^2\mathscr{L}_B(u)}{\delta u(q_1)\,\delta u(q_2)}\right\}^{(2)}, \tag{122}$$

впервые полученное Н. Н. Боголюбовым [1] в 1946 г.

Рассмотрим теперь проблему интегрирования функциональных уравнений Боголюбова (121), (122). Из представления (97) легко найти, что [38]

$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[(t - t_0)\, V\{\delta\}\right]\mathscr{L}_0(f). \tag{123}$$

Здесь мы воспользовались явным операторным решением уравнения Лиувилля (81) в виде

$$\mathscr{P}(t) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(t_0 - t)\,\mathbf{H}\right]\overline{\mathscr{P}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(t - t_0)\,\mathbf{H}\right],\quad \mathrm{tr}\,\overline{\mathscr{P}} = 1, \tag{124}$$

где $\overline{\mathscr{P}} = \mathscr{P}(t)\,|_{t=t_0}$ — начальное значение статистического оператора в момент времени $t_0 \in \mathbf{R}^1$, а также ввели обозначения

$$\mathscr{L}_0(f) = \mathrm{tr}\left(\mathscr{P}_0 \exp\left[\mathrm{i}w(f)\right]\right) \tag{125}$$

— производящий функционал невзаимодействующей системы частиц и

$$V\{\delta\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_1 \int\limits_{\mathbf{R}^6} d^3q_2 \left\{V(x_1 - x_2), :\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(q_1)}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(q_2)}:\right\}^{(2)}. \tag{126}$$

Формула (123) является очень полезной для различных приложений [30—32], в частности в случае выполнения условия ослабления корреляций [1] Боголюбова

$$| F_n (q_1, \ldots, q_n) - \prod_{j=1}^{n} F_1 (q_j) | \to 0$$

при $t \to -\infty$, $n \in \mathbf{Z}_+$, из явного выражения для $\mathscr{L}_0 (f)$ вида

$$\mathscr{L}_0 (f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^6} d^3 q_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^6} d^3 q_n \prod_{j=1}^{n} \left\{ \exp [i f (q_j)] - 1 \right\} \times$$
$$\times \overline{F}_n \left(x_1 - \frac{p_1}{m} (t - t_0),\ p_1;\ \ldots;\ x_n - \frac{p_n}{m} (t - t_0),\ p_n \right), \tag{127}$$

где $\overline{F}_n (q_1, \ldots, q_n) = \mathrm{tr}\, (\mathscr{P} \colon w (q_1) \ldots w (q_n) \colon)$, $q_n = (x_n, p_n) \in \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $n \in \mathbf{Z}_+$, получаются нелинейные уравнения гидродинамики [1, 31] в любом порядке «кластерной» теории возмущений, получаемой из выражения (123) разложением экспоненты в ряд. На вопросах дальнейших приложений полученных результатов мы надеемся остановиться более подробно в другом исследовании.

Приложение

Пусть изучаемой нами системой будет свободный ферми-газ при нулевой температуре. Чтобы получить в явном виде функционал $\mathscr{L}_0 (f)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^1)$ и функциональное уравнение (77), рассмотрим предварительно N-частичную функцию $\Omega_F^{(N)} \in \Phi$ основного состояния системы (в равновесном случае), $N \in \in \mathbf{Z}_+$. Имеем [8, 11]

$$\Omega_F^{(N)} (x_1, \ldots, x_N) = (N!)^{-1/2} \det \| f_n (x_m) \|_{n,\, m=1}^{N}, \tag{П.1}$$

где $f_n (x) = \Lambda^{-1/2} \exp (i k_n x)$, $x \in \Lambda \subset \mathbf{R}^3$; $N/\Lambda = \bar{\rho}$; $k_n = (2\pi/l) \in \mathbf{R}^3$ и числа $\alpha_n \in \mathbf{Z}^3$ таковы, что $| k_n | \leqslant k_F$, где

$$\left(\frac{1}{2\pi} k_F \right)^3 \frac{4}{3} \pi = \bar{\rho}, \quad N = \sum_{|k_n| \leqslant k_F} 1; \tag{П.2}$$

$k_F \in \mathbf{R}^1_+$ — так называемый импульс Ферми [3, 8] (мы для удобства не различаем записи объема $\Lambda \subset \mathbf{R}^3$ и его численного значения $| \Lambda | = l^3 \in \mathbf{R}^1_+$, что, очевидно, не приведет к недоразумению). Таким образом, в силу формул (109), (110) получаем из (П.1)

$$F_n^{(N)} (x_1, \ldots, x_N) = \frac{(N!)}{(N-n)!} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 x_{1+n} \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3 x_N \, | \Omega_F^{(N)} |^2 =$$
$$= \det \| K_N (x_j, x_i) \|_{i,\, j=1}^{N}, \tag{П.3}$$

где $K_N (x, y) = \sum_{j=1}^{N} f_j (x) f_j (y)$; $\int_{\mathbf{R}^3} d^3 x f_j^* (x) f_i (x) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, N}$. Из (П.3), следовательно, можно найти, что

$$F_n^{(N)} (x_1, \ldots, x_N) = \det \| G_N (x_j - x_i) \|_{i,\, j=1}^{n}, \tag{П.4}$$

где $G_N (x) = \Lambda^{-1} \sum_{| k_n | \leqslant k_F} \exp (i k_n x)$, $x \in \Lambda \subset \mathbf{R}^3$, $N \in \mathbf{Z}_+$. При $\lim\limits_{\substack{N \to \infty \\ \Lambda \nearrow \mathbf{R}^3}} N/\Lambda = \bar{\rho}$

$G_N (x) \to G (x)$, где

$$G (x) = (2\pi)^{-3} \int_{|k| \leqslant k_F} d^3 k \exp (i k x) = 3\bar{\rho}\, (\sin z - z \cos z)/z^3 |_{z = k_F |x|}. \tag{П.5}$$

При этом $F_n^{(N)}(x_1, \ldots, x_n) \to F_n(x_1, \ldots, x_n) = \det \| G(x_i - x_j)\|_{i,\,j=1}^n$, $n \in \in \mathbf{Z}_+$. Для производящего функционала $\mathscr{L}(f)$ из (60) находим

$$\mathscr{L}(f) = \sum_{n\in \mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \det \| G(x_k - x_j)\|_{k,\,j=1}^n \times \prod_{j=1}^n \{\exp[\mathrm{i}f(x_j)] - 1\}. \qquad (\Pi.6)$$

Чтобы получить кластерное разложение для (П.6) в виде Урселла — Майера [3, 7], заметим, что справедливо тождество

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_N (\det \| h_j^*(x_k)\|_{j,\,k=1}^N)(\det \| g_j(x_k)\|_{j,\,k=1}^N) = N!\left(\det \left\| \int_{\mathbf{R}^3} d^3x h_j^*(x) g_k(x) \right\|_{j,\,k=1}^N\right). \qquad (\Pi.7)$$

Тогда из (91), (П.1) и (П.7) получаем

$$\mathscr{L}^{(N)}(f) = (N!)^{-1} \int_\Lambda (d^3x_1/\Lambda) \ldots \int_\Lambda (d^3x_N/\ \ ) \times$$
$$\times (\det \| \exp(\mathrm{i}k_n x_m)\|_{n,\,m=1}^n)^* \prod_{j=1}^N \exp[\mathrm{i}f(x_j)] (\det \| \exp(\mathrm{i}k_n x_m)\|_{n,\,m=1}^N) =$$
$$= \det\left(\left\| \int_\Lambda (d^3x/\Lambda) \exp[\mathrm{i}f(x)] \exp[\mathrm{i}(k_n - k_m)x] \right\|_{n,\,m=1}^N\right) =$$
$$= \det \left\| \delta_{mn} + \int_\Lambda (d^3x/\Lambda) \{\exp[\mathrm{i}f(x)] - 1\} \exp[\mathrm{i}(k_n - k_m)x] \right\|_{n,\,m=1}^N. \qquad (\Pi.8)$$

Используя теперь разложение вида

$$\det(1 + A) = \exp[\operatorname{tr}\ln(1 + A)] = \exp\left[\sum_{n=1}^\infty n^{-1}(-1)^{n+1} \operatorname{tr} A^n\right], \qquad (\Pi.9)$$

где $A: \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$ — произвольная матрица, из (П.9) и (П.8) находим

$$\mathscr{L}^{(N)}(f) = \exp\left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}(-1)^{n+1} \int_\Lambda d^3x_1 \times \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \times \int_\Lambda d^3x_n \prod_{j=1}^n \{\exp[\mathrm{i}f(x_j)] - 1\} T_n^{(N)}(x_1, \ldots, x_n), \right. \qquad (\Pi.10)$$

где

$$T_n^{(N)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n-1)!}{\Lambda} \sum_{k_1} \ldots \sum_{k_n} \{\exp[\mathrm{i}(k_1 - k_2)x_1] \times$$
$$\times \exp[\mathrm{i}(k_2 - k_3)x_2] \ldots \exp[\mathrm{i}(k_n - k_1)x_n]\} =$$
$$= (n-1)!\, G_N(x_1 - x_2) G_N(x_2 - x_3) \ldots G_N(x_n - x_1). \qquad (\Pi.11)$$

В пределе $N/\Lambda \to \bar{\rho}$, $N \to \infty$, $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^3$, получаем

$$\mathcal{L}^{(N)}(f) \to \mathcal{L}(f) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^{n+1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \prod_{j=1}^{n} \{\exp[\mathrm{i} f(x_j)] - 1\} T_n(x_1, \ldots, x_n)\right], \qquad (\Pi.12)$$

где для всех $n \in \mathbf{Z}_+$

$$T_n(x_1, \ldots, x_n) = (n-1)!\, G(x_1 - x_2)\, G(x_2 - x_3) \ldots G(x_n - x_1), \qquad (\Pi.13)$$

причем, очевидно, величина

$$(n!)^{-1} \sum_{\sigma} T_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \qquad (\Pi.14)$$

— кластерная функция Урселла [7] функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

Аналогичным образом для функционала $\mathcal{L}(f, g)$ (90) можно получить [33]

$$\mathcal{L}(f, g) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_n \prod_{j=1}^{n} \delta(x_j - y_j) \{\exp[\mathrm{i} f(x_j)] \exp[\mathrm{i}\xi(x_j;\ g)] - 1\} \times$$

$$\times F_n(y_1, \ldots, y_n;\ x_1, \ldots, x_n), \qquad (\Pi.15)$$

где $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^1)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3;\ \mathbf{R}^3)$ и

$$F_n(y_1, \ldots, y_n;\ x_1, \ldots, x_n) = (\det \| G(x_m - y_k) \|_{k,\, m=1}^{n}), \qquad (\Pi.16)$$

$$\xi(x;\ g) = \frac{1}{2\mathrm{i}} [2g(x) \nabla_x + (\nabla g)(x)].$$

В кластерном виде Урселла функционал (П.15) имеет следующую запись [33]:

$$(f, g) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} (-1)^{n+1} \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3x_n \times \right.$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_1 \ldots \int_{\mathbf{R}^3} d^3y_n \prod_{j=1}^{n} \delta(x_j - y_j) \{\exp[\mathrm{i} f(x_j)] \times$$

$$\left. \times \exp[\mathrm{i}\xi(x_j;\ g)] - 1\} T_n(y_1, \ldots, y_n;\ x_1, \ldots, x_n)\right], \qquad (\Pi.17)$$

где

$$T_n(y_1, \ldots, y_n;\ x_1, \ldots, x_n) = (n-1)!\, G(x_1 - y_2)\, G(x_2 - y_3) \ldots G(x_n - y_1). \qquad (\Pi.18)$$

Рассмотрим теперь частный случай рассматриваемой нами системы — невзаимодействующий ферми-газ в одном пространственном измерении. Чтобы получить в явном виде функциональное уравнение (77), воспользуемся редукцией основного состояния $\Omega_n^{(N)}$ (П.1) для одномерного случая:

$$\Omega_F^{(N)} = (N!\, l^N)^{-1/2} \prod_{j>k=1}^{N} [2 \sin(\pi (x_j - x_k)/l)] =$$

$$= (N!\, l^N)^{-1/2} (\det \| \exp(\mathrm{i} k_j x_n) \|_{j,\, n=1}^{N}), \qquad (\Pi.19)$$

где $k_j = 2\pi j/l$, $j = -\frac{1}{2}(N-1), -\frac{1}{2}(N-3), \ldots, \frac{1}{2}(N-1)$, $N \in \mathbf{Z}_+$. Используя формулы (46) — (48), из (П.19) для коэффициентов $c_m \in \mathbf{R}^1$, $m = \overline{0, N}$ последовательно находим

$$\left.\begin{aligned} &c_0^{(N)} = \frac{1}{2} N(N-1)c + \text{const}; \quad c = \frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2} dx \ln|\sin(\pi x/l)|; \\ &c_1^{(N)} = \frac{1}{2} N(N-1)c; \quad c_n^{(N)} = 2\sum_{j>k\geqslant 1}^{N} \ln|\sin[\pi(x_j - x_k)/l]| + \\ &+ \frac{1}{2}(N-n)(N+n-1)c, \end{aligned}\right\} \tag{П.20}$$

откуда для оператора $A_0(x;\ \delta)$ в (77) имеем выражение (при $N \to \infty$, $l \to \infty$, $N/l \to \bar{\rho} = \text{const}$)

$$A_0(x;\ \delta) = 2\nabla_x \int_{\mathbf{R}^1} dy \ln|x-y| \colon \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)} \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)} \colon. \tag{П.21}$$

Аналогичное выражение [7] получается также для одномерной системы бозе-частиц на оси $\mathbf{R}^1$ с гамильтонианом $\mathrm{H}\colon \Phi \to \Phi$ в N-частичном представлении вида

$$\mathrm{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\hbar^2\lambda(\lambda-1)}{m}\sum_{j<k}^{N}[(l/\pi)\sin(\pi x/l)]^{-2}, \tag{П.22}$$

где $\lambda \in \mathbf{R}^1$ — произвольный числовой параметр. Так как основное состояние $\Omega_B^{(N)} \in \Phi$ для гамильтониана (П.22) дается явным выражением

$$\Omega_B^{(N)} = \text{const} \prod_{j>k=1}^{N} |2\sin[\pi(x_j - x_k)/l]|^{\lambda}, \tag{П.23}$$

то для чисел $c_j^{(N)} \in \mathbf{R}^1$, $j = \overline{0, N}$, соответственно находим [7] из (П.23):

$$\left.\begin{aligned} &c_0^{(N)} = \text{const} + \frac{1}{2}N(N-1)c(\lambda), \quad c_1^{(N)} = \frac{1}{2}N(N-1)c(\lambda); \\ &c_n^{(N)} = 2\lambda\sum_{j<k}^{N}\ln|\sin[\pi(x_j - x_k)/l]| + \frac{1}{2}(N-n)(N+n-1)c(\lambda); \\ &c(\lambda) = \frac{2\lambda}{l}\int_{-l/2}^{l/2} dx \ln|\sin(\pi x/l)|. \end{aligned}\right\} \tag{П.24}$$

Следовательно, согласно формулам (45) — (48) для оператора $A(x;\ \delta)$ в функциональном уравнении (37) получаем явное выражение в пределе $N \to \infty$, $\to \infty$, $N/l \to \bar{\rho}$:

$$A(x;\ \delta) = 2\lambda\int_{\mathbf{R}^1} dy \nabla_x \ln|x-y| \colon \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(x)}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f(y)}\colon. \tag{П.25}$$

Как следствие формы выражений (П.21) и (П.25), заключаем, что при $\lambda \to 1$ бозе-система частиц (П.22) переходит в невзаимодействующую ферми-систему. Причина этого явления здесь кроется в том, что соответствующие унитарные представления группы токов $\mathcal{S} \wedge \mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^1)$ оказываются унитарно-эквивалентными. Чтобы основное состояние $\Omega_F^{(N)} \in \Phi$ для ферми-системы с гамильтонианом (П.22) было определенным в N-частичном представлении, проведем следующие построения. Пусть $\mathbf{R}^1[<] \subset \mathbf{R}^1$ — область, для которой $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$. Пусть также $\sigma \in S_N$ — такая перестановка, что $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) \in \mathbf{R}^1[<]$. Положим теперь $\Omega_F^{(N)} = (-1)^6\, \Omega_B^{(N)}$; легко проверить, что состояние $\Omega_F^{(N)} \in \Phi$, $N \in \mathbf{Z}_+$, антисимметрично, действительно и удовлетворяет уравнению Шредингера $\mathrm{H}\Omega_F^{(N)} = E_0\Omega_F^{(N)}$, где $E_0 \in \mathbf{R}^1$ — энергия основного состояния. При этом число $N \in \mathbf{Z}_+$ должно быть нечетным, чтобы обеспечить периодичность основного состояния. Итак, как в случае бозе-, так и в случае ферми-системы частиц с гамильтонианом (П.22) функциональное уравнение (37) имеет вид

$$[\nabla_x - \mathrm{i}\nabla f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = 2\lambda \int_{\mathbf{R}^1} dy \nabla_x \ln|x-y| : \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(y)} : \mathcal{L}(f) \qquad (\text{П.26})$$

для всех $\lambda \in \mathbf{R}^1$. В силу результатов разд. 2 из формулы (64) извлекается следующее явное функционально-операторное решение уравнения (П.26):

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f) = W(f)/W(0);\\
&W(f) = \exp\left[\lambda \int_{\mathbf{R}^1} dx \int_{\mathbf{R}^1} dy \ln|x-y| : \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta f(y)} :\right] \mathcal{L}_0(f);\\
&\mathcal{L}_0(f) = \exp\left(\alpha \int_{\mathbf{R}^1} dx\,\{\exp[\mathrm{i}f(x)] - 1\}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.27})$$

где числовой параметр $\alpha \in \mathbf{R}^1_+$ определяется из следующего граничного условия: для всех $x \in \mathbf{R}^1$

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)}\bigg|_{f=0} = \bar{\rho} \in \mathbf{R}^1_+. \qquad (\text{П.28})$$

Чтобы его эффективизовать, заметим, что функционал $\mathcal{L}(f)$ (П.27) удовлетворяет [6] следующему уравнению типа Кирквуда — Зальцбурга — Симанзика:

$$\exp[\mathrm{i}f(x)]\,\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = \alpha\mathcal{L}(f(\cdot) + \mathrm{i}2\lambda \ln|\cdot - x|) \qquad (\text{П.29})$$

для всех $x \in \mathbf{R}^1$. В силу трансляционной инвариантности нашей системы частиц мы можем в (П.29) положить $f = 0$ и $x = 0$, откуда находим

$$\bar{\rho} \quad \alpha\mathcal{L}(2\mathrm{i}\lambda \ln|\cdot|). \qquad (\text{П.30})$$

Согласно (П.23) и равенству $\mathcal{L}(f) = \lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{L}^{(N)}(f)$, следующему из (87), где

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{(N)}(f) = \int_0^l dx_1 \ldots \int_0^l dx_N\, |\Omega^{(N)}|^2 \prod_{j=1}^N \exp[\mathrm{i}f(x_j)],\\
&\Omega^{(N)} = \{\Gamma^N(\lambda)/\Gamma(\lambda N)\, l^N\}^{1/2} \prod_{j>k}^N |2\sin[\pi(x_j - x_k)/l]|^\lambda
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.31})$$

[Γ (·) — гамма-функция Эйлера], немедленно получаем

$$\bar{\rho}=\alpha \lim_{N\to\infty}\{\Gamma^N(\lambda)/\Gamma(\lambda N)\, l^N\}\int_0^l dx_1 \ldots$$
$$\ldots\int_0^l dx_N \prod_{j>k}^{N} |2\sin[\pi(x_j-x_k)/l]|^{2\lambda}\prod_{j=1}^{N}|\sin(x_j\pi/l)|^{2\lambda}. \quad (\text{П.32})$$

Из (П.32), вычисляя предел $N\to\infty$, $l\to\infty$, $N/l=\bar{\rho}$, определяем параметр $\alpha\in R_+^1$ в явном виде, на чем здесь не будем останавливаться.

Чтобы вычислить функционал $\mathscr{L}(f)$ (П.27), воспользуемся тем, что в силу (П.31) для него существует следующее представление:

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}^N(f)=\exp\left[\lambda\int_0^l dx\int_0^l dy\ln|\sin[\pi(x-y)/l]|\times\right.\\&\left.\times :\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\right]\mathscr{L}_0^{(N)}(f),\\&\mathscr{L}_0^{(N)}(f)=\exp\left(\alpha\int_0^l dx\{\exp[if(x)]-1\}\right).\end{aligned}\right\} \quad (\text{П.33})$$

Разлагая экспоненту в первом равенстве (П.33) в ряд по степеням параметра $\lambda\in R_+^1$, немедленно [6, 7] получаем следующее диаграммное представление для функционала $\mathscr{L}^{(N)}(f)$:

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}^{(N)}(f)=W^{(N)}(f)/W^{(N)}(0);\\&W^{(N)}(f)=\exp\left[\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{G_N^{(c)}} w(G_N^{(c)})\right].\end{aligned}\right\} \quad (\text{П.34})$$

Здесь $G_N^{(c)}$ — это связный простой граф, состоящий из $N\in Z_+$ вершин $x_1,\ldots$ $\ldots, x_N\in[0, l]$ и из произвольно их соединяющих (без самоповторений) направленных линий, причем каждой вершине в графе $G_N^{(c)}$ сопоставляется фактор $\int_0^l dx\exp[if(x)]$, а каждой линии, соединяющей вершины x_j и x_k, сопоставляется фактор $\exp\{2\lambda\ln|\sin[\pi(x_j-x_k)/l]|\}-1$, $j, k=\overline{1, N}$. Результатом вычисления по указанному выше правилу для заданной диаграммы $G_N^{(c)}$ будет функционал $w(G_N^{(c)})$, суммирование по всем таким связным простым графам приводит после деления на фактор $N!$ к функционалу $W^{(N)}(f)$, задающему согласно формуле (П.34) искомый функционал $\mathscr{L}^{(N)}(f)$. Проводя вычисления по формуле (П.34) и выполняя затем предельный переход $N\to\infty$, $l\to\infty$, $N/l=\bar{\rho}$, окончательно можно определить производящий функционал $\mathscr{L}(f)=$ $=\lim_{N\to\infty}\mathscr{L}^{(N)}(f)$ в (П.27), а тем самым и функции распределения одномерного как бозе-, так и ферми-газа частиц, находящихся в основном состоянии $\Omega\in\Phi$ (при нулевой температуре). Этот же подход, согласно изложенным выше результатам, годится также для вычисления производящего функционала $\mathscr{L}(f)$, $f\in$ $\in\mathcal{S}(R^3; R^1)$ и в физическом пространстве R^3 в случае невзаимодействующего бозе- и ферми-газа частиц фиксированной плотности в основном состоянии при произвольных температурах. Отметим в заключение, что оригинальный подход к вычислению корреляционных функций одномерного ферми-газа был разработан в работе [34] на основе анализа изомонодромных деформаций специальной решеточной аппроксимации нелинейной вполне интегрируемой модели Шредингера. Объединение идей этой работы с подходом настоящего обзора по отношению к более общей нелинейной модели типа Шредингера [25] является в настоящее время интересной и актуальной проблемой.

Представляет также определенный интерес изучение топологической [39, 40] структуры множества решений функционального уравнения Боголюбова (37) в квантовом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946. 119 с.
2. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.** Препринт ИТФ АН УССР, № 144-85Р. Киев, 1985. 33 с.
3. **Фейнман Р.** Статистическая механика: Пер. с англ. М.: Мир, 1985, 348 с.
4. **Зубарев Д. Н.**— ДАН СССР, 1954, т. 95, № 4, с. 757—760.
5. **Юхновский И. Р., Головко М. Ф.** Статистическая физика равновесных систем. Киев: Наукова думка, 1980, 412 с.
6. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.**— Теорет. матем. физ, 1986, т. 66, № 3, с. 463—480.
7. **Menicoff R., Sharp D. H.**— J. Math. Phys,. 1975, v. 16, № 12, p. 2341—2360.
8. **Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)** Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984, 387 с.
9. **Wigner E.P., Hillery M., O'Connel R.F., Scully M.O.**— Phys. Repts, 1984, v. 106, № 3, p. 121—167.
10. **Goldin G.A., Grodnik J., Powers R.T., Sharp D.H.**— J. Math. Phys., 1974, v. 15, № 1, p. 88—100.
11. **Menicoff R.**— J. Math. Phys., 1974, v. 15, № 7, p. 1138—1152.
12. **Арефьева И. Я.**— Теорет. матем. физ, 1972, т. 10, № 2, с. 223—237.
13. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1960, 480 с.
14. **Borisov A.B.**— J. Phys. A., 1978, v. 16, № 11, p. 1057—1067.
16. **Goldin G.A., Menicoff R., Sharp D.H.**— J. Math. Phys., 1980, v. 21, № 4, p. 650—664.
16. **Рид М., Саймон Б.** Функциональный анализ: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 320 с.
17. **Newman Ch. M.**— Comm. Math. Phys., 1972, v. 26, № 3, p. 169—204.
18. **Araki H.**— Publ. RIMS, Kyoto University, 1969/70, № 5, p. 361—422.
19. **Goldin G.A., Sharp D.H.**— Comm. Math. Phys., 1983, v. 92, № 2, p. 217—228.
20. **Корнфельд Н. И., Синай Я. Г., Фомин С.В.** Эргодическая теория. М.: Наука, 1982, 408 с.
21. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984, 547 с.
22. **Araki H.**— J. Math. Phys., 1960, v. 1, № 3, p. 492—506.
23. **Вакарчук И. А., Юхновский И. Р.**— Теорет. матем. физ., 1980, т. 42, № 1, с. 112—123.
24. **Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.** — ЖЭТФ, 1955, т.8 №1, с. 129—137.
25. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.** Препринт Ин-та матем. АН УССР, № 84.53Р. Киев, 1984, 31 с.
26. **Боголюбов Н. М., Корепин В. Е.**— Теорет. матем. физ., 1984, т. 60, № 2, с. 262—269.
27. **Korepin V.E.**— Comm. Math. Phys., 1982, v. 86, № 2, p. 391—418.
28. **Kulish P.P., Sklanin E.K.**— Lect. Notes Phys., 1982, № 150, p. 65—78.
29. **Faddeev L.D.**— Sov. Sci. Rev. Sect. C, Math. Phys., 1980, N 1, p. 107—155.

30. **Marsden J.E., Morrison P.J., Weinstein A.**— Contemp. Math., 1984, v. 28, p. 115—124.

31. **Иноземцева Н. Г., Садовников Б. И.**— ДАН СССР, 1980, т. 252, № 4 с. 852—855.

32. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И.** Избранные вопросы статистической физики. М.: Высшая школа, 1975, 287 с.

33. **Menicoff R.**— J. Math. Phys., 1974, v. 15, № 8, p. 1394—1408.

34. **Jimbo M., Miwa T., Mori Y., Sato M.**— Physica, D, 1980, v. 1, № 1, p. 80—158.

35. **Белавкин В. П., Маслов В. П.** Метод униформизации в теории нелинейных гамильтоновых систем типа Власова — Хартри.— Теорет. матем. физ., 1977, т. 33, № 1, с. 17—31.

36. **Белавкин В. П.** Марковская динамика и кинетические уравнения в алгебраической статистической механике тождественных частиц.— В кн.: Математические модели статистической физики. Тюмень: Изд-во ТГУ, 1982, с. 3—12.

37. **Прикарпатский А. К.** —ДАН СССР, 1985, т. 285, №5, с. 1096—1101.

38. **Боголюбов Н. Н. (мл.). Прикарпатский А. К.**—ДАН СССР, 1985, т. 285, №6, с. 1365—1370.

39. **Назин Г. И.** —Теорет. матем. физ., 1980, т. 42, №2, с. 243—252.

40. **Назин Г. И.** —Теорет. матем. физ., 1980, т. 42, №3, с. 383—391.