«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1987, ТОМ 18, ВЫП. 1

УДК 530.15

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ СО СКАЛЯРНЫМ КОНДЕНСАТОМ И ПРОБЛЕМА СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ

В. В. Власов, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, С. Ю. Хлебников, М. Е. Шапошников

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

В рамках канонического квантования рассмотрен вопрос о построении физических переменных в калибровочных теориях. Показано, что последовательное рассмотрение требует задания класса функций для лагранжева множителя A_0 — временной компоненты вектор-потенциала. В теориях с нетривиальным минимумом скалярного потенциала вырождение вакуума возможно только при определенных ограничениях на A_0. Однако это вырождение не имеет никакого отношения к появлению массы векторных бозонов и вообще никак не проявляется в теории возмущений. В неабелевых теориях учет граничных условий для A_0 необходим для выяснения реализации алгебры глобальных зарядов.

In the framework of canonical quantization we discuss t e construction of physical quantities in gauge theories. It is shown that to treat the problem consistently one needs first to specify the class of functions for Lagrange multiplier A_0— timelike component of vector potential. There are just the certain restrictions on A_0 functions that may give rise to the vacuum degeneracy in the theories with non-trivial minimum of the scalar potential. However, this degeneracy has nothing to do with the vector boson mass generation and, besides, never reveals itself in the perturbation theory. In non-Abelian theories the boundary conditions on A_0 are to be carefully taken into account when the realization of global charges algebra on physical states is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению ряда общих проблем квантовой теории калибровочных полей. В центре нашего внимания будут вопросы калибровочно-инвариантной формулировки и возможности вырождения вакуума в калибровочных теориях.

В основе рассмотрения лежит формализм канонического квантования систем со связями, развитый Дираком [1]. В частности, к [1] восходит понятие физической, т. е. калибровочно-инвариантной, величины, а также идея формулировки теории в терминах калибровочных инвариантов.

Хотя квантованию калибровочных теорий посвящена обширная литература [2—18], на наш взгляд, целый ряд проблем требует дальнейшего обсуждения.

1. Традиционная схема квантования [3] рассматривает нулевую компоненту векторного поля A_0 как множитель Лагранжа. Возникает вопрос о классе функций, из которого выбирается A_0.

2. При каноническом квантовании класс функций A_0 совпадает с классом калибровочных преобразований, относительно которых должны быть инвариантны все физические величины. Иными словами, само понятие калибровочной инвариантности опирается на заданный класс A_0. Так, если считать A_0 совершенно произвольной функцией, то физическими будут локально- и глобально-инвариантные, т. е. незаряженные или бесцветные состояния. С другой стороны, в электродинамике оперируют заряженными состояниями. Следует ли отсюда, что лагранжев множитель A_0 не может быть произвольным?

3. Пусть на A_0 наложены некоторые ограничения. Например, можно рассмотреть теорию в конечном объеме и потребовать обращения A_0 в нуль на границе. Это соответствует требованию локальной калибровочной инвариантности всех физических состояний. Такое ограничение на A_0 допускает существование физических переменных на границе объема дополнительных к обычным степеням свободы. Возможны ли какие-либо реальные проявления таких переменных? Вообще, зависит ли физика от граничных условий для A_0?

4. В калибровочных теориях появление массы у векторных полей часто связывается со спонтанным нарушением симметрии и вырождением вакуума по соответствующим зарядам [8, 9]. Вместе с тем имеются свидетельства в пользу того, что возникновение массивных векторных частиц никак не связано с феноменом спонтанного нарушения [12—14]. Чтобы прояснить ситуацию, необходимо найти калибровочно-инвариантную характеристику механизма Хиггса. К каким заключениям относительно нарушения симметрии вакуума мы придем в этом случае? Действительно ли появление массивных векторных бозонов невозможно без спонтанного нарушения симметрии?

Все перечисленные вопросы могут быть исследованы до конца в теориях со слабой связью. Это и составляет предмет данной работы. Мы увидим, что в рамках теории возмущений выбор граничных условий для A_0 не влияет на физические процессы. В частности, в формализме с произвольным A_0 удается воспроизвести обычные электродинамические результаты. Вырождение вакуума по зарядам в теориях хиггсовского типа возможно благодаря наличию дополнительных, не связанных с локальными полями, переменных, однако оно никак не проявляется в рамках теории возмущений. Кроме того, оно не имеет никакого отношения к появлению массы у векторных частиц.

Раздел 1 посвящен описанию формализма. Часть его, по существу, является стандартной. Заслуживает обсуждения лишь ограничение случаем конечного объема. Известно, что в бесконечном объеме существуют трудности в определении зарядов (в качестве обзора см. [16]). Рассмотрение же в конечном объеме позволяет не заботиться о сходимости ряда несобственных интегралов, в число которых входят заряд, гамильтониан и др. Разумеется [9], в конечном объеме спонтанное нарушение симметрии (СНС) как наличие унитарно неэквивалентных представлений алгебры наблюдаемых вообще невозможно. Поэтому всюду в дальнейшем под СНС мы будем понимать, как обычно, наличие вырождения вакуума по соответствующим зарядам в пределе бесконечного объема.

В разд. 2 мы рассматриваем скалярную электродинамику с нулевыми граничными условиями на A_0.

Раздел 3 посвящен той же теории, но A_0 считается теперь совершенно произвольной функцией. Обсуждение неабелевых теорий со скалярным потенциалом хиггсовского типа содержится в разд. 4. Основное внимание уделяется здесь исследованию реализации алгебры неабелевых зарядов в пространстве физических состояний в зависимости от граничных условий, налагаемых на $A_0(x)$.

1. ОПИСАНИЕ ФОРМАЛИЗМА

В этом разделе мы излагаем классическую теорию калибровочных моделей, обращая основное внимание на изменение свойств физических величин в зависимости от постулированного класса допустимых калибровочных преобразований. Как уже отмечалось, мы рассматриваем теорию в конечном объеме V, что снимает проблему сходимости интегралов, задающих заряды.

Будем исходить из лагранжиана произвольной калибровочной теории со скалярными полями:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - \mathrm{i}gT^aA^a_\mu\varphi)^2 - V(\varphi). \tag{1}$$

Здесь без ограничения общности для скалярных полей выбрано действительное, вообще говоря, приводимое представление. Кроме того, как обычно

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu;$$
$$[T^a, T^b] = \mathrm{i}f^{abc}T^c.$$

Функцию Лагранжа $L = \int \mathcal{L}(x)\, d^3x$ можно представить в виде, характерном для обобщенной гамильтоновой системы * [3]:

$$L = \int d^3x\,(\mathbf{p}\cdot\dot{\varphi} + B^a_i\dot{A}^a_i) - H - \int d^3x\,(B^a_i\partial_i A^a_0 + J^a_0 A^a_0), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{p} = \partial_0\varphi - \mathrm{i}gT^aA^a_0\varphi; \quad B^a_i = F^a_{0i}; \tag{3}$$

$$H = \int d^3x\left(\frac{1}{2}(B^a_i)^2 + \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi - \mathrm{i}gT^aA^a_i\varphi)^2 + V(\varphi)\right). \tag{4}$$

---

* Индексы i и j принимают только пространственные значения: 1, 2, 3.

J_0^a представляют собой нулевые компоненты нетеровских токов, связанных с глобальными цветовыми вращениями:

$$J_0^a = ig(\mathbf{p}T^a\varphi) + gf^{abc}B_i^bA_i^c. \tag{5}$$

Соответствующие заряды есть

$$Q^a = \int d^3xJ_0^a. \tag{6}$$

Как видно из (2), величины (φ, p), (A , B_i^a) являются канонически сопряженными парами, H — гамильтониан, а

$$\xi(A_0) = \int d^3x\,(-B_i^a\partial_iA_0^a - J_0^aA_0^a) \tag{7}$$

— связь на динамические переменные, причем функции A_0 играют роль множителей Лагранжа.

Следуя Дираку [1], мы запишем связь (7) в виде слабого условия

$$\xi(A_0) \approx 0. \tag{8}$$

Такие условия могут использоваться только после вычисления скобок Пуассона:

$$\{f(p, q), g(p, q)\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}.$$

Связи (7) удовлетворяют соотношению

$$\{\xi(A_0), \xi(A_0')\} = g\xi(A_0''), \tag{9}$$

где

$$A_0''^a = f^{abc}A_0^bA_0'^c.$$

Подчеркнем, что в запись слабого условия (8) явно входят величины A_0. Поскольку мы рассматриваем A_0 как лагранжевы множители, то возникает вопрос о классе функций Ω, из которого они выбираются. Этот класс функций играет центральную роль во всем дальнейшем рассмотрении.

Схема Дирака [1] предполагает введение обобщенного гамильтониана

$$H_{\text{т}} = H + \xi(A_0). \tag{10}$$

Эволюция динамической переменной X определяется как

$$\dot{X} = \{X, H_{\text{т}}\}$$

и не зависит от выбора $A_0 \in \Omega$, только если

$$\{X, \xi(A_0)\} \approx 0.$$

В этом случае величина X называется физической [1].

Заметим, что $\xi(A_0)$ есть не что иное, как генератор калибровочных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} &\{\xi(A_0),\, A_i^a(x)\} = \partial_i A_0^a(x) + gf^{abc}A_i^b A_0^c; \\ &\{\xi(A_0),\, \varphi(x)\} = \mathrm{i}gA_0^a(x)\,T^a\varphi(x). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Поэтому физическими являются величины, инвариантные относительно калибровочных преобразований с параметрами, задаваемыми классом функций для A_0.

В частности, если A_0 считаются совершенно произвольными, то, полагая в (8) $A_0 = \mathrm{const}$, получаем для зарядов

$$Q^a \approx 0. \tag{12}$$

Отметим, что точно такие же результаты получаются, если буквально следовать методу, предложенному Дираком [1], в котором A_0 считается полноправной динамической переменной.

Отсутствие в лагранжиане производных от A_0 по времени приводит к связи на сопряженный импульс

$$B_0^a\lambda^a\ (x)\, d^3x \approx 0,$$

где λ^a — произвольные функции.

Связь (8) рассматривается при таком подходе как вторичная, она получается из анализа условия непротиворечивости

$$\frac{d}{dt}\int B_0^a(x,\, t)\,\lambda^a(x)\,d^3x \approx 0.$$

Поэтому в (8) допускаются также совершенно произвольные функции. Отсюда следует глобальная инвариантность всех физических величин.

В абелевой теории — скалярной электродинамике это сводится к обращению в нуль электрического заряда всех физических величин:

$$Q = 0. \tag{13}$$

Скалярная электродинамика с произвольным A_0 рассматривается в разд. 3.

Чтобы сохранить в теории отличные от нуля заряды Q^a, достаточно с самого начала ограничить класс функций, из которого выбираются A_0, таким образом, чтобы исключить из него все отличные от нуля константы. В дальнейшем мы сосредоточимся на случае, когда это достигается наложением на A_0 нулевых граничных условий

$$A_0^a(x) = 0, \quad x \in S. \tag{14}$$

Выполнив в (7) интегрирование по частям, получим связь в виде

$$\int (\partial_i B_i^a - J_0^a)\, A_0^a d^3x \approx 0, \tag{15}$$

т. е.

$$\xi^a(x) = \partial_i B_i^a - J_0^a \approx 0$$

для всех внутренних точек.

Подробное обсуждение теорий с граничным условием (14) мы начнем с простейшей модели — скалярной электродинамики.

2. СКАЛЯРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ A_0

Этот раздел посвящен построению квантовой теории скалярной электродинамики в том случае, когда $A_0(x)$ обращается в нуль на границе объема:

$$A_0(x) = 0, \quad x \in S. \tag{16}$$

Лагранжиан скалярной электродинамики с действительным представлением скалярных полей

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \varphi^+ = \varphi^T$$

и генератором

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

получается из общего выражения (1).

Нас будут интересовать выражения для асимптотических состояний в моделях с различной формой скалярного потенциала, а также возможность вырождения вакуума по заряду

$$Q = \int J_0 d^3x; \quad J_0 = \mathrm{i}g\,(\mathbf{p}T\varphi). \tag{17}$$

Важным шагом в решении этих вопросов будет формулировка классической теории в терминах калибровочно-инвариантных, физических величин. Для этого достаточно найти каноническое преобразование от переменных (φ, р) и (A_r, B_r) к некоторым новым так, чтобы связь

$$\int (\partial_i B_i - J_0)\, A_0 d^3x \approx 0 \tag{18}$$

в новых переменных записывалась только через координату и импульс, соответствующие какой-либо одной степени свободы («диагонализация» связи). При этом все остальные координаты и импульсы заведомо будут физическими.

Подчеркнем с самого начала, что существуют различные канонические преобразования, диагонализующие связи. При этом соответствующие наборы новых переменных, разумеется, сами канонически эквивалентны. Прежде всего обсудим формулировку теории в терминах переменных, предложенных Дираком [2].

Дираковские переменные вводятся следующим каноническим преобразованием:

$$\left.\begin{aligned}&(\varphi,\ \mathbf{p},\ A_r,\ B_r)\to(\Phi,\ \mathbf{P},\ \bar{A}_r,\ \bar{B}_r);\\&\Phi=\exp\left(ig\int g_i(y,x)\,A_i(y)\,d^3yT\right)\varphi;\\&\mathbf{P}=\exp\left(ig\int g_i(y,x)\,A_i(y)\,d^3yT\right)\mathbf{p};\\&\bar{A}_i^{\rm tr}=A_i^{\rm tr},\quad \bar{A}_i^{\rm l}=A_i^{\rm l};\\&\bar{B}_i^{\rm tr}=B_i^{\rm tr};\\&\bar{B}_i^{\rm l}=B_i^{\rm l}(x)-\int g_i(x,y)\,J_0(y)\,d^3y.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Здесь использована функция $g_i(x, y)$, которая является градиентом функции Грина оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями:

$$g_i(x,\ y)=-\partial_i G(x,\ y);\tag{20}$$

$$\partial_i^x g_i(x,\ y)=-\Delta^x G(x,\ y)=\delta^3(x-y);\tag{21}$$

$$G(x,\ y)\,|_{y\in S}=0.\tag{22}$$

Эта же функция g_i используется при выделении продольной и поперечной компонент векторного поля, например;

$$\left.\begin{aligned}&A_i=A_i^{\rm l}+A_i^{\rm tr}\\&A_i^{\rm l}=\int g_i(x,\ y)\,\partial_k A_k(y)\,d^3y,\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

причем в силу граничного условия (22)

$$\int d^3x A_i^{\rm l}(x)\,A_i^{\rm tr}(x)=0.$$

Связь (18) записывается только через продольную компоненту поля $\bar{B}_i$:

$$\int \partial_i\bar{B}_i^{\rm l}A_0(x)\,d^3x\approx 0.$$

Поэтому переменные Φ, $\mathbf{P}$, $\bar{A}_r^{\rm tr}$, $\bar{B}_r^{\rm tr}$ являются физическими. Продольная компонента $\bar{A}_i^{\rm l}(x)$, очевидно, не является физической при x, находящемся внутри объема. Вместе с тем, поскольку на границе связь отсутствует, в принципе можно построить физическую величину из граничных значений поля $\bar{A}_i^{\rm l}$. Достаточно взять проекцию этой продольной компоненты на касательную к поверхности плоскость, т. е.

$$\bar{A}_i^1(x) - n_i(x)\,(n\cdot\bar{A}^1)(x), \quad x\in S,$$

где $n(x)$ — нормаль к поверхности в точке x. Однако при нашем выборе граничного условия — см. (22) — она просто обращается в нуль. Иными словами, мы так определили продольную компоненту векторного поля, что она целиком оказалась нефизической. Поэтому никаких локально калибровочно-инвариантных величин дополнительно к Φ, $\mathbf{P}$, $\bar{A}_r^{\mathrm{tr}}$, $\bar{B}_r^{\mathrm{tr}}$ не возникает.

При глобальных преобразованиях исходных полей изменяются только Φ и $\mathbf{P}$, поэтому их можно назвать заряженными, в то время как $\bar{A}^{\mathrm{tr}}$ и $\bar{B}^{\mathrm{tr}}$ — нейтральными.

Перепишем обобщенный гамильтониан теории через переменные (19). С учетом свойств (20)—(22) функции g_i его можно привести к виду

$$H_{\mathrm{T}} = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}(\bar{B}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \frac{1}{4}(\bar{F}_{ij})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}(\partial_k\Phi - \mathrm{i}gT\bar{A}_k^{\mathrm{tr}}\Phi)^2 + V(\Phi)\right\} + $$
$$+ \frac{1}{2}\int d^3x d^3y J_0(x)\, G(x, y)\, J_0(y) +$$
$$+ \int d^3x\partial_i\bar{B}_i\left[A_0 - \int d^3y G(x, y)\left(J_0(y) + \frac{1}{2}\partial_i\bar{B}_i\right)\right]. \qquad (24)$$

Поскольку последний интеграл слабо равен нулю, то для физических величин гамильтониан выражается только через Φ, $\bar{A}^{\mathrm{tr}}$ и сопряженные импульсы. Кулоновское взаимодействие локализованных объектов обеспечивается известной асимптотикой $G(x, y)$ при больших V:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\,|x-y|} + O\left(\frac{|x| + |y|}{V^{1/3}}\right).$$

Отметим, что вместо диагонализации связи для выделения физических переменных можно воспользоваться схемой с фиксацией калибровочных условий. Эта схема сводится к выбору произвольного калибровочно-неинвариантного функционала $\chi(A_0)$, зависящего от обобщенных координат и импульсов. Вследствие калибровочной неинвариантности $\chi(A_0)$, т. е. [3]

$$\det\{\chi(A_0),\ \ \xi(A_0')\} \neq 0, \qquad (25)$$

можно при помощи калибровочного преобразования перейти к таким переменным, для которых одновременно

$$\chi(A_0) = 0; \quad \xi(A_0) = 0. \qquad (26)$$

Первое из условий (26) есть условие калибровки. Ввиду (25) система (26) является системой сильных, по терминологии Дирака, связей и разрешается единственным образом. В результате обобщенная гамильтонова система сводится к обычной, содержащей на одну степень свободы меньше, причем все оставшиеся переменные являются физическими. Можно убедиться, что переменные (19) совпадают с полями в кулоновской калибровке

$$\int (\partial_i A_i)\, A_0(x)\, d^3x = 0. \tag{27}$$

Бесцветные переменные. Второй набор переменных, который мы обсудим, представляет особенный интерес по следующим соображениям. В ряде работ, появившихся в последнее время [12—14], приведены аргументы в пользу того, что асимптотические состояния в теории с нетривиальным минимумом скалярного потенциала инвариантны относительно глобальных зарядовых преобразований, т. е. являются бесцветными.

Бесцветные переменные могут быть введены посредством канонического преобразования

$$\left.\begin{aligned}
&(\varphi, \mathbf{p}, A_i, B_i) \to (\rho, p_\rho, \theta, p_\theta, \widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i);\\
&\varphi = \exp(\mathrm{i}\theta t)\begin{pmatrix}0\\ \rho\end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{\varphi^2};\\
&p_\rho = \frac{1}{\rho}(\mathbf{p}\varphi);\\
&p_\theta = \frac{1}{g}\left(J_0 - \partial_i B_i + \int ds_i(y)\, B_i(y)\, \delta(x-y)\right);\\
&\widetilde{A}_i = A_i - \frac{1}{g}\partial_i\theta;\\
&\widetilde{B}_i = B_i.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Отметим, что для обеспечения канонического характера преобразования всюду, включая границу, в выражении для p_θ использован поверхностный интеграл $\int ds_i(y)\, B_i(y)\, \delta(x-y)$. При этом импульс p_θ становится сингулярным на границе. Связь в новых переменных записывается как

$$\int p_\theta(x)\, A_0(x)\, d^3x \approx 0,$$

т. е. $p_\theta(x)$ обращается в нуль всюду внутри объема. Если $p_\theta(x)$ непрерывен на границе, то имеем $p_\theta \approx 0$ во всем замкнутом объеме. Вообще говоря, нет причин распространять связь на точки поверхности, так что в общем случае

$$p_\theta(x) \approx \int ds(y)\, \gamma(y)\, \delta(x-y). \tag{29}$$

Форма сингулярности фиксируется из соображений интегрируемости p_θ. Поскольку из (17), (28), (29) заряд выражается как

$$Q = g \int p_\theta d^3x \approx g \int ds\,(y)\,\gamma\,(y),$$

то γ приобретает смысл поверхностной плотности заряда.

В силу граничного условия (22) продольная компонента ортогональна поверхности, поэтому, учитывая, что, вообще говоря, $B_i^1\,(S) \neq \lim_{x\to S} B_i^1\,(x)$, получаем

$$\partial_i B_i\,(x) = \partial_i B_i^{\mathrm{reg}}(x) + \int ds\,(y)\,(B_i n_i - \beta)\,(y)\,\delta\,(x-y);$$

$$\beta = \lim_{x\to S}\,(B_i \cdot n_i).$$

Здесь $\partial_i B_i^{\mathrm{reg}}$ — регулярная часть, которую можно считать непрерывной изнутри.

Из числа переменных (28) физическими, т. е. локально калибровочно-инвариантными, являются ρ, $\widetilde{A}_i$ вместе с сопряженными импульсами, а также $\theta\,(y)$, $\gamma\,(y)$, если $y \in S$. Причем

$$\{\theta\,(y),\ \gamma\,(y')\} = \delta_S\,(y-y'),\ y,\ y' \in S,$$

где δ_S — поверхностная δ-функция:

$$\int \delta_S\,(y-y')\,ds\,(y') = 1, \quad y \in S.$$

При глобальных преобразованиях изменяется только $\theta\,(y)$:

$$\theta\,(y) \to \theta\,(y) + \mathrm{const}.$$

Гамильтониан теории можно записать, используя только перечисленные физические переменные:

$$H \approx \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\widetilde{B}_i^2 + \frac{1}{4}\widetilde{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2}p_\rho^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2 + \frac{1}{2}g^2\rho^2\widetilde{A}_i^2 + \right.$$
$$\left. + V\,(\rho) + \frac{1}{2g^2\rho^2}\left(\partial_i\widetilde{B}_i^{\mathrm{reg}} + \int ds\,(y)\,(g\gamma\,(y) - \beta\,(y))\,\delta\,(x-y)\right)^2 \right\}. \quad (30)$$

Видно, что выражение (30) содержит зависимость от переменных на границе. Поэтому можно ожидать, что энергия состояний зависит от их заряда. Детально эта проблема исследуется ниже.

Поскольку все сингулярности уже учтены при выводе (30), в дальнейшем речь пойдет только о регулярных частях соответствующих выражений, и мы будем опускать значок reg, считая, что это не вызовет недоразумений.

Отметим, что, подобно тому как дираковские переменные предыдущего пункта совпадали с полями в кулоновской калибровке, переменные (28) совпадают с полями в унитарной калибровке

$$\int \theta(x) A_0(x)\, d^3x = 0. \tag{31}$$

Необходимо подчеркнуть, что калибровочное условие (31) явно содержит зависимость от выбора класса функций для величины A_0. В частности, при

$$A_0(S) = 0$$

условие (31) не накладывает никаких ограничений на значения на границе. За счет введения A_0 в калибровочное условие обеспечивается полная эквивалентность схемы с фиксацией калибровки и подхода с использованием слабых условий.

Если же фиксировать унитарную калибровку условием [13, 14]

$$\theta(x) = 0, \quad x \in \overline{V} \tag{32}$$

независимо от допустимых функций A_0, то эта эквивалентность теряется. Кроме того, в этом случае отсутствует каноническая связь между переменными в различных калибровках. Это видно уже из того, что в калибровке (32) нет никаких заряженных величин, в то время как, например, в кулоновской калибровке они, вообще говоря, есть.

Подведем итоги. В нашем распоряжении имеются два набора переменных, причем в обоих связь записывается только через один из обобщенных импульсов. Как следствие достигнута калибровочно-инвариантная формулировка теории — гамильтониан переписывается целиком через физические степени свободы. Между указанными наборами переменных существует каноническая эквивалентность. Нашей следующей задачей будет квантование теории и нахождение ее основного состояния в рамках приближения слабой связи. Как мы увидим, различные наборы переменных неодинаково приспособлены для построения теории возмущений.

Теория возмущений и преобразование Боголюбова. При квантовании систем со слабыми связями фиксируются обычные коммутационные соотношения [1]:

$$[q, p] = i\{q, p\}.$$

Слабые связи превращаются в условия, выделяющие физические состояния, в частности

$$\xi(A_0) \mid \Phi > = 0.$$

В абелевой калибровочной теории с малыми константами связи применима теория возмущений. Обсудим вопрос, какие переменные наиболее приспособлены для построения теории возмущений при той или иной форме скалярного потенциала. Вопрос о выборе переменных тесно связан с проблемой построения асимптотических полей в рассматриваемой модели.

В рамках теории возмущений одним из необходимых требований к выбору переменных является возможность интерпретации квадратичной части гамильтониана, записанного через эти переменные, как гамильтониана свободных частиц. Иными словами, эти переменные должны классифицироваться по представлениям группы Пуанкаре в соответствии с массами, полученными из квадратичного гамильтониана. В дальнейшем мы будем называть это условие требованием диагональности квадратичной части гамильтониана. Выясним, как выполняется это условие в тех или иных переменных при различной форме скалярного потенциала.

Рассмотрим сначала случай, когда скалярный потенциал имеет тривиальный минимум $\varphi = 0$. Выделим из выражений (24) и (30) квадратичные части. В дираковской картине получим диагональное выражение

$$H_0 = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\bar{B}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \frac{1}{4} \bar{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \, \partial \Phi_j} \bigg|_{\Phi=0} \Phi_i \Phi_j \right\}.$$

В то же время бесцветные переменные приводят к выражению, сингулярному при $\rho = 0$. Следовательно, в случае тривиального минимума скалярного потенциала асимптотическим состояниям могут соответствовать дираковские поля *.

Определяя теоретико-возмущенческий вакуум обычным способом с использованием операторов уничтожения, построенных по полям Φ и $\bar{A}_i^{\mathrm{tr}}$, получаем спектр, состоящий из заряженного, вообще говоря, массивного скаляра и нейтральной безмассовой векторной частицы с двумя поляризациями.

Перейдем теперь к рассмотрению потенциала с нетривиальным минимумом $\varphi^2 = v$. Начнем с анализа гамильтониана (24) в дираковских переменных. Положим

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \equiv \mathbf{v}.$$

Важно подчеркнуть, что сам по себе такой выбор не имеет ничего общего со спонтанным нарушением симметрии. Мы фиксируем лишь точку классического равновесия, в окрестности которой будет проводиться квантование.

Выделим из (24) билинейную часть в терминах $\Phi' = \Phi - \mathbf{v}$:

$$H_0 = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\bar{B}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \frac{1}{4} \bar{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \Phi')^2 + \frac{1}{2} g^2 v^2 (\bar{A}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \, \partial \Phi_j} \bigg|_{\Phi=\mathbf{v}} \Phi_i' \Phi_j' \right\} + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y g^2 v^2 P_1(x) \, G(x, y) \, P_1(y).$$

* Интересно отметить, что переменные, аналогичные (19), были получены в [15] из требования инфракрасной конечности теории возмущений.

Это выражение недиагонально, но диагонализуется линейным преобразованием

$$\widetilde{A}_i^1 = \frac{\partial_i \Phi_1'}{gv},$$

$$P_1 = \frac{1}{gv}\left(\partial_i \overline{B}_i^1 + \int ds(y)\,(g\gamma(y) - \beta(y))\,\delta(x-y)\right),$$

которое фактически представляет собой преобразование Боголюбова [20]. Гамильтониан принимает вид

$$H_0 = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}(\overline{B}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \frac{1}{4}\overline{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2}g^2v^2(\widetilde{A}_i^1)^2 + \frac{1}{2}g^2v^2(\overline{A}_i^{\mathrm{tr}})^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}(\widetilde{B}_i^1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_2^2}\bigg|_{\Phi_2 = v}(\Phi_2')^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \Phi_2)^2 + \frac{1}{2}P_2^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{2g^2v^2}\left(\partial_i \widetilde{B}_i^1 + \int ds(y)\,(g\gamma(y) - \beta(y))\,\delta(x-y)\right)^2\right\}.$$

Это совпадает с билинейной частью гамильтониана (30) в бесцветных переменных, если положить еще

$$\widetilde{A}_i^{\mathrm{tr}} = \overline{A}_i^{\mathrm{tr}}, \quad \widetilde{B}_i^{\mathrm{tr}} = \overline{B}_i^{\mathrm{tr}},$$
$$\rho = \Phi_2, \quad p_\rho = P_2.$$

Таким образом, в случае потенциала хиггсовского типа асимптотическими могут являться бесцветные поля. Мы видели, однако, что при наложении на A_0 нулевых граничных условий дополнительно к бесцветным полям появляются физические переменные на границе, которые являются заряженными. Поэтому физическое пространство состояний в теории возмущений может быть представлено в виде произведения фоковского пространства, построенного при помощи бесцветных полей, и пространства состояний квантовомеханической системы $(\theta(S), \gamma(S))$:

$$|\,\mathrm{ph}\,\rangle = |\,\mathrm{Fock}\,\rangle \times F(\theta(S)).$$

Перейдем к обсуждению структуры вакуума. Поставим задачу так: найти собственные состояния гамильтониана с минимальной энергией в секторе, где оператор поверхностной плотности заряда $\gamma(S)$ принимает определенное значение, скажем, $(1/g)\,f(S)$. Если для состояний квантовой системы (θ, γ) выбрать координатное представление, т. е. представление функционалами от граничных значений $\theta(x)$, то наиболее общее состояние этого сектора можно записать в виде

$$|\,\Phi\rangle_f = \exp\left[\frac{i}{g}\int f(S)\,\theta(S)\,ds\right]|\,\mathrm{Fock}\rangle. \tag{33}$$

Вопрос состоит теперь в том, какое фоковское состояние надо выбрать, чтобы вектор $|\,\Phi\,\rangle$ был собственным для полного гамильтониана. Проще всего сделать это, рассуждая вначале на классическом уровне.

Поскольку в (30) квадрат δ-функции представляет собой неинтегрируемую бесконечность, то для состояний с конечной энергией следует положить разность $\beta - g\gamma$ равной нулю. Таким образом, мы будем искать теперь точку классического минимума для гамильтониана (30) с учетом граничного условия

$$\widetilde{B}_i n_i\,|_S = f\,(S).$$

Этой точке соответствуют, очевидно, нулевые значения всех бесцветных переменных, за исключением продольной компоненты поля $\widetilde{B}_i$. Подставляя эту компоненту в виде

$$\widetilde{B}_i^1 = \partial_i u$$

для «потенциала» u, получаем, исходя из минимальности квадратичного гамильтониана, уравнение

$$\Delta u - m^2 u = 0; \quad m^2 = g^2 v^2 \tag{34}$$

с граничным условием

$$\partial_n u\,|_S = f\,(S). \tag{35}$$

Действительно, интересующая нас часть квадратичного гамильтониана есть

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\widetilde{B}_i^1)^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \widetilde{B}_i)^2 \right\} = \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i u)^2 + \frac{1}{2m^2} (\Delta u)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Варьируя по u с фиксированными условиями (35) на границе, придем к уравнению (34).

Решение граничной задачи (34), (35) есть

$$\begin{aligned} u\,(x) &= \int F\,(x,\, y)\, \psi\,(y)\, ds\,(y), \\ F\,(x,\, y) &= \frac{\exp\,(-m\,|\,x - y\,|)}{4\pi\,|\,x - y\,|}, \end{aligned} \tag{37}$$

где функция ψ определяется из интегрального уравнения, соответствующего граничному условию (35) [19]. Подставив (37) в (36), получим для энергии рассматриваемой классической конфигурации

$$\Delta H = \int ds\,(y)\, ds\,(y')\, f\,(y)\, \psi\,(y')\, F\,(y,\, y'). \tag{38}$$

Это выражение допускает простую интерпретацию. Речь идет об энергии юкавского взаимодействия поверхностного заряда с плотностью $f\,(S)$ с потенциалом простого слоя с плотностью $\psi\,(S)$.

В главном по $mV^{1/3}$ порядке

$$\psi(y) = f(y),$$

так что получаем возможность оценить ΔH в зависимости от полного заряда

$$Q = \int ds f(S).$$

Ограничиваясь, например, $f(S) = \text{const}$, имеем

$$\Delta H \sim Q^2/(mV^{2/3}) \tag{39}$$

с точностью до членов более высокого по $mV^{1/3}$ порядка.

Проведенное классическое исследование позволяет немедленно восстановить фоковское состояние в (33). В координатном представлении для продольного векторного поля имеем

$$|\Phi\rangle_f = \exp\left(\frac{i}{g}\int f(S)\,\theta(S)\,ds\right)\exp\left(i\int \tilde{A}_i^1(x)\,\partial_i u(x)\,d^3x\right)|\Phi\rangle_{f=0},$$

где u определено в (37). Классическая энергия (38) отождествляется с разностью энергий «вакуума» с заданным значением $f(S)$ и вакуума с $f(S) = 0$, вычисленной в древесном приближении. Поскольку при $f(S) \neq 0$ энергия (38) заведомо положительна, вырождение вакуума в конечном объеме отсутствуют. Однако если мы вначале перейдем к бесконечному объему, а потом займемся выбором вакуума, то, как видно, например, из (39), возникает вырождение вакуума по заряду.

Традиционно [8, 9] вырождение вакуума и спонтанное нарушение симметрии считаются неотъемлемым признаком теорий с массивными векторными бозонами. Мы видим, однако, что, строго говоря, вырождение вакуума и наличие массы у векторных частиц никак не связаны [12—14]. Действительно, полученное нами вырождение вакуума при $V \to \infty$ прямо связано с существованием физических переменных на границе, а оно, в свою очередь, с постулированным классом функций для A_0. Для формализма с произвольным A_0 вырождение вакуума по формальному заряду, очевидно, невозможно.

Вместе с тем, независимо от того, есть какие-либо дополнительные заряженные физические переменные или их нет, бесцветное фоковское пространство состояний над вакуумом $|0\rangle$ обеспечит наличие в спектре массивного векторного бозона и скалярной частицы.

Хиггсовский режим характеризуется образованием вакуумного конденсата бесцветной величины ρ [14]:

$$\langle \text{vac}\,|\,\rho\,|\,\text{vac}\rangle = v \neq 0,$$

что само по себе, конечно, не свидетельствует о нарушении симметрии.

Тем не менее вырождение вакуума по заряду в теориях с определенными ограничениями на A_0 заслуживает самостоятельного изучения. Естественный вопрос, который возникает в этом случае,— вопрос о том, приводит ли существование многих вакуумов к новым физическим эффектам по сравнению с теорией, где используется один из них. Примерами могут служить вырождение по топологическому числу в неабелевых теориях и связанная с ним θ-структура вакуума.

Ясно, что в нашем случае переходы между различными вакуумами отсутствуют, поскольку оператор γ коммутирует с гамильтонианом. Кроме того, в рамках теории возмущений в пределе бесконечного объема динамика бесцветных полей не зависит от выбора вакуумного состояния. Это является очевидным следствием того факта, что все взаимодействия в теории с массивными векторными бозонами исчезают экспоненциально с расстоянием, и поэтому влиянием удаленной поверхностной плотности заряда на физические процессы можно пренебречь.

На этом мы заканчиваем обсуждение теории с A_0, обращающимся в нуль на границе, и переходим к случаю произвольных A_0.

3. СКАЛЯРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ A_0

Отличительной особенностью теории с произвольным A_0 является, как уже отмечалось, обращение в нуль глобального электрического заряда всех физических состояний:

$$Q = \int J_0 d^3x \approx 0. \tag{40}$$

В том случае, когда скалярный потенциал имеет нетривиальный минимум, никаких проблем с калибровочно-инвариантной формулировкой не возникает. Теория формулируется целиком в терминах бесцветных переменных, вырождение вакуума отсутствует. Векторные бозоны приобретают массу за счет образования конденсата $\langle 0 \mid \rho \mid 0 \rangle$, где поле ρ введено в (28).

Поэтому в дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на теории с тривиальным минимумом скалярного потенциала. Здесь возникает весьма интересная ситуация.

В разд. 2 для формулировки теории без конденсата использовались дираковские переменные (19), среди которых были заряженные поля **Φ** и **P**. Однако теперь эти выражения не являются физическими. Поэтому возникает проблема отыскания переменных, пригодных для построения теории возмущений в случае тривиального скалярного потенциала.

Мы покажем сейчас, что любой выбор локально- и глобально-инвариантных переменных, зависящих только от одной пространственной координаты, приводит к сингулярностям в уравнениях движения. Проще всего увидеть это в формализме с фиксацией калибровки.

Рассмотрим связь (40) и выберем некоторую функцию $\chi(\varphi, A_i \ldots)$, так чтобы условие невырожденности

$$\{Q, \chi\} \neq 0 \tag{41}$$

выполнялось хотя бы вблизи точки классического равновесия $\varphi = 0$, Из (41) получим

$$\int d^3x \left(\frac{\delta\chi}{\delta\varphi_2(x)} \varphi_1(x) - \frac{\delta\chi}{\delta\varphi_1(x)} \varphi_2(x) \right) \neq 0,$$

т. е. χ неаналитична в точке $\varphi = 0$:

$$\frac{\delta\chi}{\delta\varphi_2} \sim \frac{1}{\varphi_1}, \quad \frac{\delta\chi}{\delta\varphi_1} \sim \frac{1}{\varphi_2}.$$

Сингулярность калибровочного условия приводит к неаналитичности в точке $\varphi = 0$ уравнений движения для переменных, претендующих на роль бесцветного «электрона» или «позитрона» [17]. Таким образом, калибровочно-инвариантная формулировка теории в терминах локальных, т. е. зависящих только от одной пространственной координаты, величин, имеющих несингулярные уравнения движения, невозможна. В конечном счете это связано с тем, что глобальные преобразования никак не поворачивают точку классического равновесия.

Вместе с тем, существуют физические переменные, зависящие от нескольких пространственных координат, для которых сингулярностей в уравнениях движения не возникает. Рассмотрим, например,

$$u(x, y, t) = \varphi(x, t) \times$$
$$\times \exp\left[-ig\int g_i(x, y, z) A_i(z, t)\, d^3z\right] \varphi^*(y, t), \tag{42}$$

где

$$\varphi = i\varphi_1 + \varphi_2;$$
$$g_r(x, y, z) = \partial_i^z G(x, y, z);$$
$$\Delta^z G(x, y, z) = -\delta^3(x - z) + \delta^3(y - z);$$
$$g \cdot n(z)\,|_{z\in S} = 0.$$

Выражение (42) может рассматриваться как пара частица — античастица в точках x и y соответственно.

Нашей следующей задачей будет получение ряда обычных электродинамических результатов в схеме, где отсутствует понятие заряженной частицы. Идея дальнейшего состоит в том, что при разнесении пространственных координат x и y величина (42) сохранит свою формальную незаряженность, а вместе с тем в игру вступит принцип ослабления корреляции *. Определим вакуум условиями:

$$Q\,|\,\text{vac}\,\langle\, 0; \quad H\,|\,\text{vac}\,\rangle = 0.$$

* Разумеется, представленные ниже рассуждения не претендуют на строгое построение квантовой теории. Речь, идет, скорее, о сценарии такого построения.

Отметим, что вакуум, введенный таким образом, совпадает с вакуумом в формализме с $A_0(S) = 0$.

Покажем теперь, как можно определить полный пропагатор «электрона», хотя асимптотических полей, соответствующих одной частице, в теории нет. Рассмотрим функцию Грина

$$G(x, x', y, y', t_1, t_2) = \\ = \langle \mathrm{vac} \mid Tu(x, x', t_1)\, u(y', y, t_2) \mid \mathrm{vac} \rangle.$$

Утверждение о расцеплении корреляций [20, 21] состоит в следующем:

$$G(x, x', t_1, y, y', t_2) \to G_1(x, y, t_1, t_2) \times \\ \times G_2(x', y', t_1, t_2) \text{ при } |x - x'| \to \infty, \ |y - y'| \to \infty. \quad (43)$$

Переход расстояний в (43) к бесконечности понимается в том смысле, что точки x и y остаются фиксированными, а их «партнеры» x' и y' стремятся к границе объема, так что (43) справедливо с точностью до членов $O(V^{-1/3})$. Утверждение (43) может быть проверено явно в рамках теории возмущений. Определим теперь полный пропагатор электрона, полагая

$$\Pi(x, t_1, y, t_2) = G_1(x, y, t_1, t_2). \quad (44)$$

Аналогично можно определить любые другие функции Грина. Можно показать [17], что они совпадают с функциями Грина с $A_0(S) = 0$ в пределе большого объема. Указанное совпадение имеет место, разумеется, только в том случае, когда вычисления в теории с $A_0(S) = 0$ и в теории с произвольным A_0 проводятся в одной и той же калибровке. Например, полный пропагатор электрона, определяемый в (44), совпадает с аналогичной функцией Грина для дираковских переменных (19), так как и в (19), и в (42) функции g_i выбраны в чисто продольном виде (кулоновская калибровка).

Таким образом, наличие связи (40) не приводит к трудностям при вычислении наблюдаемых величин, так как этой связи можно удовлетворить, вводя «компенсирующие» заряды в очень удаленной области, так что их влияние на физику в обычных масштабах будет ничтожно.

Следуя этой же идеологии, определим физический заряд:

$$Q_{\mathrm{ph}} = \int\limits_{V_0} J_0 d^3x,$$

где V_0 — некоторая макроскопическая внутренняя область. Смысл такого определения весьма прозрачен: Q_{ph} — это заряд, содержащийся в области V_0. Физический заряд $Q_{\rm ph}$ не обращается слабо в нуль и обладает рядом необходимых с точки зрения практики свойств:

$$1.\ [Q_{\rm ph}(t),\ u(x,\ y,\ t)] = \begin{cases} gu, & x \in V_0,\ y \notin V_0, \\ -gu, & x \notin V_0,\ y \in V_0, \\ 0, & x,\ y \in V_0. \end{cases}$$

Напомним, что коммутатор «формального» заряда Q с величиной u равен нулю независимо от x и y.

2. Для вычисления физического заряда можно пользоваться теоремой Гаусса

$$Q_{\rm ph} = \int\limits_{S_0} ds_i B_i.$$

3. $Q_{\rm ph}$, вообще говоря, не сохраняется, но это несохранение целиком связано с возможностью вытекания частиц из области V_0:

$$\dot{Q}_{\rm ph} = \frac{g}{2\mathrm{i}} \int\limits_{S_0} ds_i\, (D_i\varphi^* \cdot \varphi - D_i\varphi \cdot \varphi^*).$$

Отметим, что состояния с ненулевым физическим зарядом существуют и в теории со скалярным конденсатом. Рассмотрим, например, состояние

$$|\Psi\rangle = \exp\left\{\mathrm{i}g \int d^3y g_i\,(y,\ x)\, A_i\,(y)\right\} |\,0\,\rangle \equiv \Psi\,(x)\,|\,0\,\rangle,$$

которое представляет собой когерентную суперпозицию продольных компонент массивного векторного поля с кулоновским поведением напряженности электрического поля

$$\langle\Psi\,|\,B_i\,(z)\,|\,\Psi\rangle \sim \frac{(z-x)_i}{|\,z-x\,|^3}$$

и при $x \in V_0$ $|\,\Psi\,\rangle$ имеет физический заряд, равный g.

Однако, поскольку $|\,\Psi\,\rangle$ не является собственным состоянием свободной части гамильтониана, такое состояние нестабильно. Кроме того, амплитуда рождения таких состояний в локальных соударениях экспоненциально подавлена из-за массивности векторного поля. Действительно, пусть вектор $|\,\mathrm{in}\rangle$ обозначает набор бесцветных частиц, вступающих в реакцию вблизи начала координат. Вычислим средний физический заряд состояния рассеяния в момент времени t:

$$\langle \mathrm{in}\,|\,\exp\,(\mathrm{i}Ht)\, Q_{\rm ph} \exp\,(-\mathrm{i}Ht)\,|\,\mathrm{in}\rangle =$$
$$= \int ds_i\,(y)\,\langle \mathrm{in}\,|\,B_i\,(y,\ t)\,|\,\mathrm{in}\rangle \sim \frac{\exp\,(-mr)}{r},$$

где r — размер области V_0, а m — масса векторной частицы.

Резюмируя содержание этого раздела, подчеркнем еще раз, что обращение в нуль генератора Q на всем физическом пространстве не противоречит существованию локального электрического заряда $Q_{\rm ph}$. Важно отметить, что возможность определить $Q_{\rm ph}$ в абелевой теории связана с тем, что нулевая компонента тока J_0 калибровочно-инвариантна. В неабелевых теориях, к обсуждению которых мы переходим, величины J_0^a не инвариантны даже относительно локальных преобразований. Это приводит к определенным трудностям при введении «физических» неабелевых зарядов. Мы не будем, однако, останавливаться на этом вопросе, поскольку в дальнейшем обсуждаются исключительно неабелевы теории со слабой связью, где вылетающий заряд всегда является абелевым.

4. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

В этом разделе мы рассматриваем неабелевы теории со слабой связью, так что применимы все методы, использовавшиеся ранее для скалярной электродинамики. Слабая связь в неабелевых моделях обеспечивается образованием большого скалярного конденсата

$$\langle \varphi^+\varphi \rangle \gg \Lambda^2,$$

где Λ — обратный радиус конфайнмента, например, за счет выбора скалярного потенциала, имеющего нетривиальный минимум [4]. Кроме того, необходимо, чтобы «выживающие» безмассовые векторные бозоны принадлежали абелевой подгруппе.

Хотя последнее требование сильно ограничивает класс теорий, попадающих в поле нашего зрения, обобщение абелевых результатов все же не является вполне непосредственным из-за возможного присутствия в неабелевом случае безмассовых векторных бозонов. Теории с безмассовыми векторными бозонами и будут для нас основным объектом рассмотрения. Конкретнее, нас будет интересовать реализация алгебры неабелевых зарядов Q^a:

$$\{Q^a,\ Q^b\} = gf^{abc}Q^c \tag{45}$$

в физическом пространстве состояний.

Поскольку в формализме с произвольными A_0 имеем

$$Q^a \approx 0,$$

то реализация алгебры (45) нетривиальна только при определенных ограничениях на A_0. Как и в абелевом случае, мы наложим на A_0 нулевые граничные условия. Отметим, что заряды Q^a локально калибровочно-инвариантны. При этом справедливость (45), как мы увидим, обеспечивается наличием физических переменных на границе объема.

Обсуждение неабелевых теорий полезно начать с общего теоретико-группового анализа.

Общее рассмотрение. В этом пункте мы в основном следуем работе Вайнберга [5], но обращаем особое внимание на роль принятых ограничений на величины A_0. Если скалярный потенциал $V(\varphi)$ имеет нетривиальный минимум, то в силу симметрии этот минимум обязательно вырожден. Выберем какой-либо вектор φ_0, минимизирующий $V(\varphi)$. Вырождение проявляется в том, что в пространстве векторов φ существуют направления, движение в которых из точки φ_0 не сопровождается изменением $V(\varphi)$. Эти плоские направления задаются векторами $T^a\varphi_0$, где $a = 1, \ldots, N$, N — размерность группы. В принципе не исключено, что не все такие векторы линейно независимы. Иными словами, можно составить такие ортогональные линейные комбинации θ_i из генераторов T^a, что

$$\begin{aligned} \theta_i\varphi_0 &\neq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \\ \theta_i\varphi_0 &= 0, \quad i = m+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{46}$$

Проекции произвольного $\varphi(x)$ на первые m векторов (46)

$$\Pi_i = (\varphi\theta_i\varphi_0) \tag{47}$$

при x строго внутри объема представляют собой калибровочно-неинвариантные величины —«голдстоуновские» поля. Поэтому можно подобрать локальное калибровочное преобразование

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = U\varphi,$$

так что всюду внутри объема

$$(\varphi(x)\,\theta_i\varphi_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{48}$$

Это эквивалентно фиксации унитарной калибровки для всех внутренних точек.

Напротив, при x, лежащем на границе, поля Π_i, не затрагиваются локальным калибровочным преобразованием и, таким образом, попадают в число физических переменных. Введем теперь аналогично абелеву случаю векторное поле

$$\left.\begin{aligned} \hat{\tilde{A}}_i &= U(\varphi)\left(\hat{A}_i - \frac{1}{ig}\partial_r\right)U^{-1}(\varphi), \\ \hat{A} &= A^n\theta^n \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

при помощи матрицы U. Массовая матрица векторных полей есть [5]

$$M_{ab} = g^2(\theta_a\varphi_0, \theta_b\varphi_0),$$

т. е. m полей являются массивными, остальные — безмассовыми.

В абелевой теории поле (49) было инвариантно относительно как локальных, так и глобальных преобразований. Теперь же выделяются два случая:

1. Матрица $U(\varphi)$ для данного φ определяется единственным образом. Тогда для любой матрицы Λ из калибровочной группы

$$U(\Lambda\varphi)\Lambda\varphi = \tilde{\varphi},$$

т. е.

$$U(\Lambda\varphi)\Lambda = U(\varphi). \tag{50}$$

Из (50) получаем, что $\tilde{A}_i$ инвариантно относительно любых преобразований.

2. Имеется целое семейство $U(\varphi, \alpha)$, таких, что при любом α

$$(U(\varphi, \alpha)\varphi(x), \theta_i\varphi_0) = 0, \quad x \in V\setminus S, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для существования нетривиального множества α необходимо и достаточно, чтобы у калибровочной группы была не равная единице подгруппа, переводящая φ_0 в себя. Генераторами этой подгруппы являются те θ_i, для которых [5]:

$$\theta_i\varphi_0 = 0,$$

т. е. как раз те $N - m$ генераторов, которым соответствуют безмассовые векторные бозоны. Наличие безмассовых векторных бозонов является, таким образом, критерием реализации данного случая.

В простых примерах, которые мы дальше рассмотрим, существует единственный вектор $\tilde{\varphi}$, удовлетворяющий (48). В этом случае при любых α

$$U(\varphi, \alpha)\varphi = \tilde{\varphi},$$

и вместо (46) можно рассматривать эквивалентное условие

$$\theta_i\tilde{\varphi} = 0, \quad i = m + 1, \ldots, N. \tag{46a}$$

Вместо (50) теперь получаем

$$U(\Lambda\varphi, \alpha)\Lambda = U(\varphi, \alpha'), \tag{51}$$

где α и α', вообще говоря, различны. Как следствие, векторное поле (49) [без ограничения общности можно считать, что оно вводится посредством $U(\varphi) = U(\varphi, \alpha = 0)$] уже не будет ни глобально-, ни локально-инвариантным. При калибровочном преобразовании Λ оно изменяется при помощи матрицы $U(\varphi, \alpha')\,U^{+}(\varphi)$, где α' как функция Λ определяется из (51) с $\alpha = 0$.

В конкретных моделях, определив $\alpha'(\Lambda)$, удается построить затем физические (локально-инвариантные) поля, которые, вообще говоря, не будут бесцветными.

Говоря другими словами, при наличии безмассовых векторных бозонов число m отличных от нуля полей Π_i (47) меньше размерности группы, поэтому унитарная калибровка (48) не может фиксировать весь имеющийся произвол. Необходимо еще $N - m$ условий, которые уже могут накладываться только на векторные поля. Условия этого типа, как известно [14], не в состоянии обеспечить глобальную инвариантность.

Разумеется, заряженные переменные имеются и тогда, когда все векторные бозоны массивны. Однако в этом случае, как и в абелевой теории, весь заряд сосредоточен в переменных на границе — Π_i (S), не имеющих отношения к обычному фоковскому пространству.

Итак, в зависимости от группы и представления скалярных полей в неабелевых теориях возможно как полное обесцвечивание фоковского пространства, так и наличие в нем цветных состояний. В последующих пунктах этого раздела рассмотрим примеры, иллюстрирующие это.

SU **(2)-модель со скалярами в фундаментальном представлении.** Первый пример, который мы обсудим,— SU (2)-теория с комплексным дублетом — реализует случай полного обесцвечивания и во многом аналогичен абелевой теории.

Поскольку общее рассмотрение (как и в разд. 1) относилось к действительным представлениям скалярных полей, нам и здесь будет удобно принять несколько отличающуюся от обычной форму записи φ в виде четырехкомпонентного столбца (все компоненты действительны):

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы перешли в фундаментальное представление группы SO (4) и нас будет интересовать ее SU (2)-подгруппа с генераторами

$$\left.\begin{aligned}
&T^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{i}\\ \cdot & \cdot & -\mathrm{i} & \cdot\\ \cdot & \mathrm{i} & \cdot & \cdot\\ -\mathrm{i} & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix},\quad T^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \mathrm{i} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & -\mathrm{i} & \cdot & \cdot\end{pmatrix},\\
&T^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cdot & -\mathrm{i} & \cdot & \cdot\\ \mathrm{i} & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{i}\\ \cdot & \cdot & -\mathrm{i} & \cdot\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\}\qquad (52)$$

Три других генератора SO (4) также удовлетворяют алгебре SU (2). Соответствующая SU_f (2)-группа является группой глобальной симу метрии лагранжиана. Это связано с тем, что фундаментальное представление SU (2) является псевдореальным, т. е. эквивалентно своемсопряженному. В данном случае мы можем осуществить каноничесское преобразование к бесцветным переменным, аналогичное обсуждавшемуся в разд. 2 для случая скалярной электродинамики:

$$(\varphi,\ \mathbf{p},\ A^a_r,\ B^a_r) \to (\rho,\ \theta^a,\ p_\rho,\ \pi^a,\ \tilde{A}^a_r,\ \tilde{B}^a_r),$$

$$a = 1,\ 2,\ 3;$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \exp(2i\theta^a T^a)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\rho\end{pmatrix} \equiv U^+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\rho\end{pmatrix};\\ &p_\rho = (\mathbf{p}\varphi)/\rho;\\ &\hat{\tilde{A}}_r = \exp(-2i\theta T)\left(\hat{A}_r - \frac{1}{ig}\partial_r\right)\exp(2i\theta T);\\ &\hat{\tilde{B}}_r = \exp(-2i\theta T)(\hat{B}_r)\exp(2i\theta T)\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

θ^a определяется из уравнения

$$\frac{\theta^a}{|\theta|}\operatorname{tg}|\theta| = -\frac{\varphi_a}{\varphi_4},\quad a = 1,\ 2,\ 3,$$

$$|\theta| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \tag{54}$$

а π^a — из линейной системы:

$$f^{abc}\theta^b\pi^c - \frac{\theta^a(\pi^b\theta^b)}{|\theta|^2} + \frac{\theta^a(\pi^b\theta^b)}{|\theta|}\operatorname{ctg}|\theta| - \pi^a|\theta|\operatorname{ctg}|\theta| =$$

$$= \frac{1}{g}\left(\xi^a - \int ds_i(y)\,B_i(y)\,\delta(x-y)\right); \tag{55}$$

$$\xi^a = \partial_i B^a_i - J^a_0.$$

Вывод довольно громоздких формул (54), (55) содержится в приложении.

Подчеркнем в связи с предшествовавшим общим рассмотрением, что матрица $U(\varphi)$, переводящая φ в ρ:

$$U(\varphi) = \exp(-2i\theta T) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\varphi_4 & \varphi_3 & -\varphi_2 & -\varphi_1\\ -\varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_1 & -\varphi_2\\ \varphi_2 & -\varphi_1 & \varphi_4 & -\varphi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4\end{pmatrix}, \tag{56}$$

в данном случае является единственной, так что поля ρ, $\tilde{A}_r$ и сопряженные им импульсы являются бесцветными. Гамильтониан (4) может быть целиком переписан через переменные (52). Единственной и при том чисто технической трудностью здесь является запись через (52) импульсного вклада

$$\Delta H = \int \frac{1}{2}\,\mathbf{p}^2 d^3x. \tag{57}$$

Удобно перейти от импульсов p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) к импульсам p'_i:

$$\mathbf{p}' = U\mathbf{p}$$

[не путать p'_i с (p_ρ, π^a)!], так что ΔH имеет вид

$$\Delta H = \int d^3x \frac{1}{2} p_i'^2.$$

Вместо системы связей (7) можно ввести теперь эквивалентную систему связей $\tilde{\xi}^a$, где $\tilde{\xi}^a$ (φ,$'$ $\mathbf{p}'$, $\tilde{A}_r$, $\tilde{B}_r$)* есть те же самые функции (но других переменных), что и ξ^a (φ, $\mathbf{p}$, A_r, B_r). Эквивалентность этих систем связей обусловлена тем, что переход (φ, $\mathbf{p}$, A_r, B_r) $\to$ $\to$ (φ', $\mathbf{p}'$, $\tilde{A}_r$, $\tilde{B}_r$), осуществляемый матрицей U, является просто калибровочным преобразованием **. Поэтому $\tilde{\xi}$ есть более или менее сложные линейные комбинации величин ξ.

Используя теперь конкретный вид

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix},$$

из равенств

$$\tilde{\xi}^a = \partial_i \tilde{B}_i^a - g f^{abc} \tilde{B}_i^b \tilde{A}_i^c + \frac{g\rho}{2} p^{a\prime}$$

и

$$p_\rho = p'_4$$

получаем для ΔH (57):

$$\Delta H = \int d^3x \frac{1}{2} \frac{(\tilde{\xi}^a - \partial_i \tilde{B}_i^a + g f^{abc} \tilde{B}_i^b \tilde{A}_i^c)^2}{g^2 \rho^2} + \int d^3x \frac{1}{2} p_\rho^2,$$

где $\tilde{\xi}^a \approx 0$ внутри объема. Это полностью аналогично соответствующему вкладу в абелевой теории. Полный гамильтониан H таков:

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{B}_r^a)^2 + \frac{1}{4} (\tilde{F}_{ij}^a)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \rho)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} g^2 \rho^2 (\tilde{A}_i^a)^2 + V(\rho) \right\} + \Delta H. \qquad (58)$$

Физическими переменными в этой картине являются ρ, $\tilde{A}_r$ (и сопряженные импульсы), которые к тому же глобально-инвариантны, т. е.

* Для унификации обозначений мы ввели $\varphi' = (0\ 0\ 0\ \rho)T$. Подчеркнем, что φ' и $\mathbf{p}'$ не являются канонически сопряженными.

** Подчеркнем еще раз недопустимость отождествления этого **калибровочного** преобразования, введенного из чисто технических потребностей, с **каноническим** преобразованием (53)—(55).

бесцветны *, а кроме них, аналогично абелеву случаю, переменные θ и π на границе. Последние являются, вообще говоря, заряженными и приводят при $V \to \infty$ к вырождению вакуума. Вопрос о вырождении исследуется буквально так же, как это делалось в разд. 2 ввиду уже отмеченной аналогии (58) с соответствующим абелевым выражением.

Таким образом, $SU(2)$-модель со скалярами в фундаментальном представлении полностью аналогична скалярной электродинамике, и, не вдаваясь дальше в детали, мы сформулируем результаты. В рассматриваемой теории физические переменные, образующие фоковское пространство, являются бесцветными, так что все заряды в фоковском пространстве экранируются [14]. Имеются (в связи с выбором класса функций A_0) добавочные физические переменные, которые, вообще говоря, заряжены и приводят к вырождению вакуума при $V \to \infty$. Этот феномен, однако, никак не связан с появлением массы у векторных бозонов, так как механизм Хиггса характеризуется [14] наличием вакуумного конденсата точно бесцветной величины ρ:

$$\langle 0 \mid \rho \mid 0 \rangle \neq 0.$$

Чтобы обеспечить менее тривиальный случай неполного обесцвечивания, следует так выбрать группу и представление скалярных полей, чтобы число «фаз» скалярного поля было меньше числа параметров группы. Этого легко добиться простой модификацией уже рассмотренного примера. Именно мы собираемся расширить группу добавлением к ней инвариантного $U(1)$-фактора.

Неполное обесцвечивание в случае $SU(2) \times U(1)$-группы. Теория, которую мы теперь рассматриваем, представляет собой фактически бозонный сектор стандартной модели Вайнберга — Салама.

Вдобавок к трем генераторам (52) имеется еще генератор $U(1)$-подгруппы

$$Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cdot & -i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \end{pmatrix},$$

которому соответствует абелево калибровочное поле A_i^0. Это позволяет построить линейную комбинацию

$$Q = T^3 + Y,$$

* Относительно добавочной $SU_f(2)$-группы поле ρ является синглетом, а поля $\tilde{A}_r^a$ образуют триплет. Гамильтониан H $SU_f(2)$-инвариантен.

которая обращается в нуль на векторе

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \quad Q\tilde{\varphi} = 0,$$

т. е. имеет место (46).

Тем самым, матрица перехода от φ к $\tilde{\varphi}$ содержит однопараметрический произвол

$$U(\varphi, \alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha Q)\, U(\varphi),$$

где $U(\varphi)$ — матрица (56).

$U(\varphi, \alpha)$ факторизуется на множители

$$U(\varphi, \alpha) = U_1(\alpha)\, U_2(\varphi, \alpha),$$

так что $U_1(\alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha Y)$ принадлежит U (1)-подгруппе, а $U_2(\varphi, \alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha T^3)$ U — SU (2)-подгруппе.

Формулы перехода к новым переменным (49) необходимо модифицировать с учетом полупростой структуры группы

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_r &= U_2(\varphi, \alpha)\left(A_r - \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_r\right)U_2^+; \\ \tilde{A}_r^0 &= A_r^0 + \frac{1}{g'}\partial_r\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где g и g' — соответственно неабелева и абелева константы связи.

Перейдем к выяснению свойств переменных (59) при калибровочном преобразовании

$$\Lambda = \exp(\mathrm{i}T^a\lambda^a + \mathrm{i}Y\lambda_0). \tag{60}$$

Как указывалось, для этого необходимо определить $\alpha'(\lambda)$ из (51) (далее без ограничения общности $\alpha = 0$). Поскольку из (51)

$$\alpha' = \lambda_0,$$

то при преобразовании (60):

$$\tilde{A}_r^a T^a \to \exp(\mathrm{i}T^3\lambda_0)\left(\tilde{A}_r^a T^a - \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_r\right)\exp(-\mathrm{i}T^3\lambda_0), \quad a = 1,\ 2,\ 3;$$

$$\tilde{A}_r^0 \to \tilde{A}_r^0 + \frac{1}{g'}\partial_r\lambda_0.$$

Иными словами, переменные (59) полностью инвариантны относительно SU (2)-подгруппы, но не инвариантны относительно U (1) и поэтому оказываются нефизическими.

Заметим, что третья компонента $\widetilde{A}^3_r$, как и абелево поле $\widetilde{A}^3_r$ при (60), испытывает только градиентное удлинение

$$\widetilde{A}^3_r \to \widetilde{A}^3_r + \frac{1}{g}\,\partial_r\lambda_0,$$

так что линейная комбинация

$$Z_r = \frac{-g\widetilde{A}^3_r + g'A^0_r}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{61}$$

инвариантна относительно любых преобразований. Ортогональная (61) линейная комбинация

$$E_r = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,(g\widetilde{A}^0_r + g'\widetilde{A}^3_r)$$

изменяется по закону

$$E_r \to E_r + \frac{1}{e}\,\partial_r\lambda_0, \qquad e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{62}$$

При помощи полей (61), (62) удается построить набор физических переменных:

$$\left.\begin{aligned} &\rho,\ Z_r,\ E^{\text{tr}}_r; \\ &W^i_rT^i = V\,(\widetilde{A}^i_rT^i)\,V^+, \quad i=1,\ 2, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где

$$V = \exp\,[ie\int g_r\,(y,\ x)\,E_r\,(y)\,Qd^3y].$$

Здесь использована та же самая функция g_r, что и в разд. 2 при анализе абелевой теории. g_r есть градиент функции Грина оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями так, что

$$\partial^x_r g_r\,(x,\ y) = \delta\,(x-y).$$

Аналогично можно получить и сопряженные импульсы. Кроме того, набор (63) надо дополнить физическими переменными на границе.

Отметим, что величины (63) совпадают с полями в «унитарно-кулоновской» калибровке:

$$\varphi_1\,(x) = \varphi_2\,(x) = \varphi_3\,(x) = 0; \quad \partial_iE_i\,(x) = 0$$

для всех x строго внутри объема.

Перейдем к вопросу о зарядовых свойствах фоковских состояний, получаемых при квантовании теории в терминах переменных (63). Теоретико-возмущенческий спектр состоит из трех массивных калибровочных бозонов, одного безмассового и хиггсовской частицы. Заряды, соответствующие генераторам SU (2), полностью экранируются в фоковском пространстве. Отличен от нуля только заряд, соответствующий генератору Y. Он принимает единичное значение для линейных комбинаций

$$W^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1}-\mathrm{i}W^{2});\quad W^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1}+\mathrm{i}W^{2}).$$

Остальные частицы нейтральны. Следовательно, этот заряд можно отождествить с электрическим *.

Появление массы у $W^{\pm}$- и Z-бозонов объясняется только наличием конденсата $\langle 0|\rho|0\rangle$ и ничего общего со спонтанным нарушением симметрии не имеет.

Таким образом, в $SU(2)\times U(1)$-модели из четырех зарядов в фоковском пространстве выживает только один. Этот последний хорошо определен в теории возмущений и принимает определенные значения на фоковских состояниях. Вместе с тем такая картина во многом связана с упрощениями, возникающими из-за полупростой структуры группы. В некотором смысле наиболее общий сценарий реализуется в случае $SU(2)$-теории с триплетом скаляров.

$SU(2)$-теория с триплетом скаляров. Триплетному (действительному) представлению

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}$$

соответствуют генераторы

$$T_1=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&-\mathrm{i}\\ \cdot&\mathrm{i}&\cdot\end{pmatrix};\quad T_2=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\mathrm{i}\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ -\mathrm{i}&\cdot&\cdot\end{pmatrix};\quad T_3=\begin{pmatrix}\cdot&-\mathrm{i}&\cdot\\ \mathrm{i}&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Поскольку для стандартного вектора

$$\tilde{\varphi}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \rho\end{pmatrix},\quad \rho=\sqrt{\varphi^2}$$

имеет место

$$T_3\tilde{\varphi}=0,$$

* Традиционно электрический заряд связывается с генератором $Q=T^3+Y$. Мы видим, однако, что на фоковском пространстве это сводится к нашему определению.

то и в данном случае мы сталкиваемся с произволом в матрице перехода от φ к $\tilde{\varphi}$:

$$U(\varphi, \alpha) = \exp(\mathrm{i}T_3\alpha)\begin{pmatrix} \frac{\varphi_2^2}{l^2} + \frac{\varphi_1^2}{l^2}\frac{\varphi_3}{\rho} & \frac{\varphi_1\varphi_2}{l^2}\left(\frac{\varphi_3}{\rho} - 1\right) & -\frac{\varphi_1}{\rho} \\ \frac{\varphi_1\varphi_2}{l^2}\left(\frac{\varphi_3}{\rho} - 1\right) & \frac{\varphi_1^2}{l^2} + \frac{\varphi_2^2}{l^2}\frac{\varphi_3}{\rho} & -\frac{\varphi_2}{\rho} \\ \frac{\varphi_1}{\rho} & \frac{\varphi_2}{\rho} & \frac{\varphi_3}{\rho} \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \exp(\mathrm{i}T_3\alpha)\, B(\varphi),$$

$$l^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \tag{64}$$

α — произвольный параметр, поэтому величины, аналогичные (49)*:

$$\rho = \sqrt{\varphi^2}; \quad p_\rho = \frac{1}{\rho}(\mathbf{p}\boldsymbol{\varphi});$$

$$\hat{\tilde{A}}_r = B(\varphi)\left(\hat{A}_r - \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_r\right)B^+(\varphi);$$

$$\hat{\tilde{B}}_r = B(\varphi)\,\hat{B}_r B^+(\varphi) \tag{65}$$

имеют относительно калибровочной группы нетривиальные трансформационные свойства

$$\left.\begin{aligned} &\rho,\ p_\rho - \mathrm{inv};\\ &\hat{\tilde{A}}_r \to X(\varphi, \alpha')\left(\hat{\tilde{A}}_r - \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_r\right)X^+;\\ &\hat{\tilde{B}}_r \to X(\varphi, \alpha')\,\hat{\tilde{B}}_r X^+;\\ &X(\varphi, \alpha') = U(\varphi, \alpha')\,U^+(\varphi, \alpha = 0). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Из явного вида (64) непосредственно получаем $X(\varphi, \alpha') = e^{(\mathrm{i}T_3\alpha')}$, где α' определяется из условия (51):

$$U(\varphi, \alpha') = U(\Lambda\varphi, \alpha = 0)\,\Lambda. \tag{67}$$

Наиболее просто решить (67) для $\Lambda = \Lambda_3 = \exp(\mathrm{i}T_3\lambda_3)$. При этом

$$\alpha' = \lambda_3.$$

Когда $\Lambda = \Lambda_1 = \exp(\mathrm{i}T_1\lambda_1)$ или $\Lambda = \Lambda_2 = \exp(\mathrm{i}T_2\lambda_2)$, выражение для α' оказывается значительно более сложным. Для наших целей будет достаточно выписать его для малых λ_1 и λ_2, ограничиваясь первым приближением.

---

* Мы использовали для определения новых переменных матрицу U с $\alpha = 0$.

Получим соответственно:

$$\alpha' = -\lambda_1 \frac{\varphi_1\rho}{l^2}\left(-1+\frac{\varphi_3}{\rho}\right);$$

$$\alpha' = -\lambda_2 \frac{\varphi_2\rho}{l^2}\left(-1+\frac{\varphi_3}{\rho}\right).$$

Подчеркнем, что векторные поля в (65) не являются не только глобально-инвариантными, но даже инвариантными относительно локальных преобразований, т. е. не являются физическими. Однако физические переменные из них можно построить, повторяя процедуру предыдущего пункта. Заметим для этого, что переменная $\tilde{A}_r^3$ при преобразованиях (66) испытывает только градиентное удлинение:

$$\tilde{A}_r^3 \to \tilde{A}_r^3 + \frac{1}{g}\partial_r\alpha',$$

в то время как $\tilde{A}_r^{1/2}$ — только изотопическое вращение.

Поэтому набор физических переменных можно определить как

$$\left.\begin{aligned} &\rho,\ p_\rho; \\ &\hat{A}_r^{\mathrm{ph}} = W\left(\hat{\tilde{A}}_r - \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_r\right)W^+; \\ &\hat{\tilde{B}}_r^{\mathrm{ph}} = W(\tilde{B}_r^i T^i + (\tilde{B}_r^{\mathrm{tr}})^3 T^3)\,W^+, \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

где

$$W = \exp\left\{\mathrm{i}g\int g_r(y,x)\,\tilde{A}_r^3 T^3 d^3y\right\};$$

$$\hat{A}_r^{\mathrm{ph}} = A_r^{\mathrm{ph}^1}T^1 + A_r^{\mathrm{ph}^2}T^2 + (A_r^{\mathrm{ph}^3})^{\mathrm{tr}}\,T^3,$$

аналогично

$$\hat{\tilde{B}}_r^{\mathrm{ph}} = B_r^{\mathrm{ph}^1}T^1 + B_r^{\mathrm{ph}^2}T^2 + (B_r^{\mathrm{ph}^3})^{\mathrm{tr}}\,T^3.$$

Приведем еще выражение для тензора напряженностей «электромагнитного» поля:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{\mathrm{ph}^3} - \partial_\nu A_\mu^{\mathrm{ph}^3}$$

в терминах исходных полей. Этот тензор возникает в задаче о магнитном монополе [22]. Использовав матрицы (64) и (68), получим $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a\frac{\eta_a}{\rho} - \frac{1}{g}\varepsilon^{abc}\frac{\varphi^a}{\rho}D_\mu\frac{\varphi^b}{\rho}D_\nu\frac{\varphi^c}{\rho}$, что совпадает с формулой, предложенной в [22].

Перейдем к изучению глобальных (зарядовых) свойств переменных (68). Иными словами, мы интересуемся теперь случаем, когда λ_1, λ_2, λ_3 в (67) вообще не зависят от точки пространства. При таких глобальных преобразованиях для величин (68) получаем

$$\left.\begin{array}{l} \rho - \mathrm{inv}; \\ A_r^{\mathrm{ph}^i} T^i \to V\,(A_r^{\mathrm{ph}^i} T^i)\, V^+, \quad i = 1,\ 2; \\ (A_r^{\mathrm{ph}^3})^{\mathrm{tr}} - \mathrm{inv} \end{array}\right\} \tag{69}$$

и соответствующие формулы для обобщенных импульсов. Матрица V есть

$$V = \begin{cases} \exp\,(\mathrm{i}\lambda_3 T_3), & \Lambda = \Lambda_3; \\ \exp\left\{\mathrm{i}\left(\alpha'(x) - \int g_r(y, x)\,\partial_r \alpha'(y)\,d^3y\right) T_3\right\}, & \\ \qquad \Lambda = \Lambda_{1,\,2}. & \end{cases} \tag{70}$$

На квантовом языке (69) означает, что заряд Q_3 определен на фоковском пространстве, которое в данном случае строится из фурье-компонент полей (68). При этом хиггсовская частица и безмассовый векторный бозон нейтральны, а массивные бозоны имеют определенный заряд. Иначе обстоит дело с операторами Q_1 и Q_2. Показатель экспоненты (70), полученный для $\Lambda = \Lambda_{1,2}$, есть не что иное, как дополнительная физическая переменная на границе, которая не выражается через фоковские степени свободы. Поэтому Q_1 и Q_2 выводят из фоковского пространства и не могут рассматриваться в теории возмущений. Тем не менее их коммутатор

$$[Q_1,\ Q_2] = \mathrm{i}gQ_3 \tag{71}$$

оставляет фоковское пространство в целом инвариантным. Таким образом, алгебра (71) реализуется в данном случае весьма нетривиально. Подчеркнем, что невозможность определить Q_1 и Q_2 в теории возмущений не имеет ничего общего с хорошо известным фактом плохой определенности генераторов спонтанно нарушенных симметрий [11, 12]. Дело в том, что и в данной модели механизм Хиггса характеризуется наличием конденсата бесцветной величины

$$\langle 0\,|\,\rho\,|\,0\rangle \neq 0.$$

Это, очевидно, является свойством вообще всех теорий хиггсовского типа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, анализ калибровочных теорий в таких аспектах, как калибровочно-инвариантная формулировка, возможность вырождения вакуума, реализация алгебры зарядов, предполагает задание класса функций для лагранжевых множителей A_0.

Если A_0 — произвольные функции, то теория формулируется в терминах бесцветных переменных и вырождение вакуума по заряду невозможно.

Если же A_0 удовлетворяют нулевым граничным условиям, то существуют физические заряженные состояния. В моделях с нетривиальным минимумом скалярного потенциала заряженные переменные сосредоточены на границе объема и являются дополнительными по отношению к бесцветным фоковским степеням свободы. Наличие этих дополнительных переменных приводит к вырождению вакуума, которое, однако, никак не проявляется в рамках теории возмущений. Кроме того, оно не имеет никакого отношения к появлению массы у векторных бозонов. В неабелевых теориях переменные на границе существенны для обеспечения корректных коммутационных соотношений зарядов.

Авторы благодарны Н. Н. Боголюбову и А. А. Логунову за интерес к работе и полезные обсуждения. Мы признательны также сотрудникам теоретического отдела ИЯИ АН СССР за ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении получены формулы (54), (55) для нефизического сектора в модели SU (2) со скалярами в фундаментальном представлении.

Прежде всего выясним, какие ограничения налагаются на функции исходных переменных, являющиеся нефизическими координатами и импульсами. Эти ограничения проистекают, во-первых, из требования, чтобы преобразование от исходных координат и импульсов к новым (включая и физические, и нефизические величины) было каноническим. В частности, должна сохраниться алгебра связей (9).

Во-вторых, это преобразование должно диагонализовать связи в том смысле, что последние должны записываться исключительно через нефизические новые переменные.

Удобно выбрать следующую параметризацию скалярного поля (обозначения см. в разд. 4):

$$\varphi = \exp\,(2i\theta_a T_a)(000\rho)^T, \quad a = 1,\ 2,\ 3. \qquad (\text{П.1})$$

Импульс, сопряженный θ_a, обозначим p_θ^a. Связи имеют в терминах исходных переменных такую структуру:

$$\xi^a = F^a + G^a\,(\theta,\ p_\theta),$$

где функция F^a вообще не зависит от скалярных степеней свободы, а G^a есть нулевая компонента тока скалярных полей. В параметризации (П.1) G^a зависит только от θ_a и p_θ^a, так как ρ является зарядовым синглетом. Это обстоятельство позволяет записать связи ξ^a через новые переменные $(\tilde{\theta},\ \pi)$, используя ту же функцию G^a:

$$\xi^a = G^a\,(\tilde{\theta},\ \pi) + \int ds_i\,(y)\,B_i^a\,(y)\,\delta\,(x-y).$$

При этом из того, что F^a не зависела от скалярных переменных, следует, что можно непротиворечиво положить

$$\tilde{\theta}^a = \theta^a.$$

Если теперь найти G^a из теоремы Нётер, а θ выразить через $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, то придем к формулам (54), (55).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дирак П. А. М.** Лекции по квантовой механике: Пер. с англ. М.: Мир, 1968.
2. **Дирак П. А. М.** Принципы квантовой механики: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
3. **Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
4. **Higgs P. W.**//Phys. Lett. 1964. Vol. 12. P. 132—133; **Kibble T. W.**//Phys. Rev. 1967. Vol. 155. P. 1554—1561.
5. **Weinberg S.**//Phys. Rev. 1973. Vol. D7. P. 1068—1081.
6. **Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.**//Phys. Rev. 1973. Vol. D8. P. 4241—4285.
7. **Abers E.S., Lee B.W.**//Phys. Rep. 1973. Vol. 9. P. 1—73. (имеется перевод: **Аберс Е. С., Ли Б. В.** //Новости фундаментальной физики, № 8. М.: Мир, 1977, с. 241—433).
8. **Bernstein J.**//Rev. Mod. Phys. 1974. Vol. 46. P. 7—48. (имеется перевод: **Бернстейн Дж.**//Новости фундаментальной физики, № 8. М.: Мир, 1977. С. 120—240).
9. **Гриб А. А.** Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. М.: Атомиздат, 1978.
10. **Goldstone J., Jackiw R.**//Phys. Lett. 1978. Vol. 74B. P. 81—84; **Изергин А. Г., Корепин В. Е., Семенов-Тян-Шанский М. А., Фаддеев Л. Д.**//ТМФ. 1979. Т. 38. С. 3—14; **Новожилов Ю. В.**// ТМФ. 1984. Т. 60. С. 372—386.
11. **Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.**//Phys. Lett. 1979. Vol. 89B. P. 61—64.
12. **Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.**//Phys. Lett. 1980. Vol. 97B. P. 249—252; Nucl. Phys. 1981. Vol. B190. P. 553—582.
13. **Banks T., Rabinovici E.**//Nucl. Phys. 1979. Vol. B160. P. 349—379.
14. **Matveev V.A., Shaposhnikov M.E., Tavkhelidze A.N.** INR-preprint P-0325, Moscow, 1983; **Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н., Шапошников М.Е.**// ТМФ. 1984. Т. 59. С. 323—344.
15. **d'Emilio E., Mintchev M.**//Fortschr. Phys. 1984. Vol. 32. P. 473—523.
16. **Минчев М., Тодоров И. Т.**//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 59—100.
17. **Власов В. В., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н. и др.** Препринт ИЯИ АН СССР П-0418. М., 1985.
18. **Власов В. В., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н. и др.** Препринт ИЯИ АН СССР П-0424. М., 1985.
19. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
20. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды по статистической физике. М.: Наука, 1981.
21. **Araki H., Hepp K., Ruelle D.**//Helv. Phys. Acta. 1962. Vol. 35. P. 164—181.
22. **t'Hooft G.**//Nucl. Phys. 1974. Vol. B79. P. 276—284.