«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1987, ТОМ 18, ВЫП. 5

УДК 539.12

СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В ТЕОРИЯХ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА

Д. П. Сорокин, В. И. Ткач
Харьковский физико-технический институт АН УССР, Харьков

В обзоре рассматриваются механизмы спонтанной компактификации дополнительных измерений и возникающие в результате их действия вакуумные конфигурации в многомерных теориях Эйнштейна — Янга — Миллса, $N = 1$, $d = 11$ и $N = 2$, $d = 10$ СГ, $N = 1$, $d = 10$ СГ$+SO\,(32)$ и $E_8 \times E_8$ ЯМ (являющихся низкоэнергетическими пределами теорий суперструны). Особое внимание уделено рассмотрению механизма сопоставления калибровочной и спиновой связностей, как наиболее привлекательного с геометрической и физической точек зрения, обеспечивающего возможность образования в перечисленных теориях Калуцы — Клейна компактных вакуумных конфигураций, топологические и геометрические свойства которых могут обеспечить реалистический спектр и динамику взаимодействий полей в эффективной 4-мерной теории.

The spontaneous compactification mechanisms of extra dimensions and arising vacuum configurations in manydimensional Einstein—Yang—Mills theories, $N = 1$, $d = 11$ and $N = 2$, $d = 10$ supergravities, $d = 10$ $SO\,(32)$—and $E_8 \times E_8$—super Yang—Mills theories (being lowenergy limits of the superstrings) are considered in the review. Particular attantion is given to the mechanism of embedding of gauge connection into spin connection and vice versa, as the most attractive mechanism from the geometrical and physical points of view. In the theories listed above this mechanism provides the emergence of vacuum configurations which topological and geometrical properties can ensure the realistic spectara, dynamics and interactions of the fields in effective 4-dimensional theory.

ВВЕДЕНИЕ

Основополагающей тенденцией в физике на протяжении всего времени ее развития является стремление теоретиков понять и описать все возможные физические процессы исходя из фундаментальных принципов, объединяющих на первый взгляд различные явления. После открытия слабых и сильных взаимодействий элементарных частиц, а также их калибровочной природы фундаментальной задачей стало создание единой теории всех известных взаимодействий, включая и гравитацию. Первые успешные шаги на пути построения такой теории уже сделаны. Создана единая калибровочная теория электромагнитных и слабых взаимодействий, правильность которой вряд ли у кого-нибудь вызывает сомнения после замечательных экспериментов в ЦЕРН, результатом которых явилось открытие $W^{\pm}$- и Z^0-бозонов — массивных партнеров фотона по переносу электрослабых взаимодействий. Подвергается интенсивному изучению целый ряд моделей Великого Объединения, в которых сильные и электрослабые взаимодействия возникают вследствие спонтанного нарушения симметрии единого фундаментального взаимодействия, характеризующегося одной константой связи и калибровочной группой, которая содержит в качестве подгруппы группу симметрий $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ стандартной модели.

Развитие современной физики элементарных частиц (как теоретической, так и экспериментальной) в значительной степени определило построение в 70-х годах релятивистских моделей теории поля, инвариантных относительно преобразований суперсимметрии (т. е. симметрии между частицами, обладающими различными статистиками,— бозонами и фермионами), позволившей нетривиальным образом объединить пространственно-временные и внутренние симметрии. Суперсимметрия (далее — СУСИ) обладает рядом удивительных свойств. Эффекты СУСИ, как следует из многих теоретических построений, могут проявляться уже в допустимой для современных ускорителей области энергий (около 100 ГэВ). Существование суперпартнеров элементарных частиц с массами $M \sim 100 \div 200$ ГэВ, как полагают, может решить проблему иерархии масс в электрослабой схеме. На поиск суперпартнеров нацелены в настоящее время многие эксперименты: такой поиск, в частности, уже ведется на протон-антипротонном ускорителе в ЦЕРН. Наличие СУСИ может привести к сокращению расходимостей в квантовых теориях. Примером полностью конечной теории является $N = 4$ СУСИ теория Янга — Миллса (ЯМ). Поэтому именно с СУСИ-теориями, и в первую очередь с расширенными вариантами супергравитации (СГ), а в последние годы — с теориями суперструны, связывают основные надежды как с прообразами будущей единой теории.

Построение расширенных СГ с $N \geqslant 4$ в 4-мерном пространстве-времени методами, использовавшимися для построения $N = 2$ и $N = 3$ СГ, столкнулось со значительными трудностями [1]. Это привело к построению СГ в $d = 4 + n$-мерных пространствах, в частности $d = 11$ и $d = 10$ СГ [2—7], после чего супергравитации с $N \geqslant 4$ были получены из многомерных теорий методом размерной редукции [8—10]. В таком подходе был обнаружен ряд интересных свойств расширенных СГ, в частности наличие скрытых внутренних симметрий. Может оказаться, что многомерные варианты СГ являются не просто удобным описанием 4-мерных теорий, а имеют более фундаментальное значение и именно исходя из многомерных теорий нужно строить единую теорию гравитационного, сильного и электрослабого взаимодействий. Поэтому в настоящее время значительно возрос интерес к многомерным единым теориям гравитационного и калибровочных полей типа Калуцы — Клейна.

В настоящем обзоре рассматриваются механизмы спонтанной компактификации дополнительных измерений и возникающие в результате их действия вакуумные конфигурации в многомерных теориях Эйнштейна — Янга — Миллса, $N = 1$, $d = 11$ и $N = 2$, $d = 10$ СГ, $N = 1$, $d = 10$ СГ $+ SO(32)$ — и $E_8 \times E_8$ ЯМ (являющихся низкоэнергетическими пределами теорий суперструны). Особое внимание уделено рассмотрению механизма сопоставления калибровочной и спиновой связностей, как наиболее привлекательного с геометрической и физической точек зрения, обеспечивающего возможность образования в перечисленных теориях Калуцы — Клейна компактных вакуумных конфигураций, топологические и геометрические свойства которых могут обеспечить реалистический спектр и динамику взаимодействий полей в эффективной 4-мерной теории.

В разд. 1 приводится краткая история развития идей Калуцы — Клейна, обсуждаются основные проблемы, возникающие на пути построения единой многомерной теории.

В разд. 2 рассмотрены механизмы спонтанной компактификации многомерных теорий Эйнштейна — Янга — Миллса: механизм Креммера — Шерка и механизм сопоставления связностей. Устанавливаются взаимосвязь и различие этих механизмов.

В разд. 3 на примере 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла демонстрируется принципиальная возможность построения единой теории Калуцы — Клейна.

Раздел 4 посвящен рассмотрению механизмов спонтанной компактификации и вакуумных конфигураций $N = 1$, $d = 11$ СГ. Компактификация в $d = 10$ СГ и взаимосвязь компактных вакуумных конфигураций $N = 1$, $d = 11$ и некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ обсуждаются в разд. 5.

В разд. 6 рассматривается возможность реалистической спонтанной компактификации $N = 1$, $d = 10$ СГ, взаимодействующей с $N = 1$СУСИ полями $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ Янга — Миллса.

В обзоре используются следующие обозначения:

Сигнатура $4+n$-мерной метрики $(-, +, \ldots, +)$;

X^M (M, $N = 1, \ldots, 4+n$)-координаты $4+n$-мерного пространства-времени M^{4+n}; $\hat{X}^M$ — координаты 11-мерного пространства-времени $d = 11$ СГ;

x^μ (μ, $\nu \ldots = 1, 2, 3, 4$) — координаты 4-мерного пространства M^{1+3} (пространство Минковского, антидеситтеровское пространство AdS^4);

Y^m (l, m, n, $p \ldots = 1, \ldots, n$) — координаты n-мерного пространства K^n;

$\hat{Y}^m$ — координаты 7-мерного компактного подпространства в 11-мерной СГ;

Индексы в скобках: (M), (n), (i) и т. д. являются индексами касательного пространства;

∇_m — ковариантная производная, содержащая риманову связность;

Γ^L_{MN} — символы Кристоффеля

$\hat{D}_M$ — ковариантная производная, содержащая риманову Γ^L_{MN} и калибровочную A^α_M связности;

A^α_M — калибровочные поля группы G; α, β, γ . . . — индексы, нумерующие генераторы группы G;

A, B, C, D — индексы подгруппы H, группы G;

$F^\alpha_{MN} = \partial_M A^\alpha_N - \partial_N A^\alpha_M + C_{\beta\gamma}{}^\alpha A^\beta_M A^\gamma_N$ — тензор напряженностей калибровочных полей $A^\alpha_M(X)$;

$R_{MNL}{}^P$ — тензор кривизны Римана;

$R_{MNL}{}^M = R_{NL}$ — тензор Риччи, $R = R^M{}_M$ — скалярная кривизна пространства M^{4+n}.

Переход от мирового базиса (индексы M, N, . . .) к ортогональному [индексы (M), (N) . . .] осуществляется с помощью филбайнов $e^{(M)}_N(X)$ (задающих компоненты подвижного репера на пространстве M^{4+n}) и обратных филбайнов $e^N_{(M)}(X)$, например $R_{(M)(N)} = R_{LP} e^L_{(M)} e^P_{(N)}$;

$e^{(M)}_N e^{(L)}_P \eta_{(M)(L)} = g_{NP}(X)$ — метрика M^{4+n}, $\eta_{(M)(L)}$ — $4+n$-мерная метрика Минковского

$$E = \det e^{(M)}_N = \sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{MN}}.$$

1. ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА: КРАТКАЯ ИСТОРИЯ И ПРОБЛЕМЫ

В 2х0- годах нашего столетия Калуца и Клейн [11, 12] предложили единую теорию, в которой гравитационное и электромагнитное взаимодействия в 4-мерном пространстве-времени представляют собой различные проявления гравитационного взаимодействия в 5-мерном пространстве-времени, одно из пространственных измерений которого является окружностью малого радиуса (S^1-сфера) и недоступно, таким образом, непосредственному наблюдению. Группой симметрии S^1-сферы является группа $U(1)$.

С точки зрения наблюдателя, живущего в 4-мерном пространстве-времени, эта группа является внутренней калибровочной группой, обусловливающей существование электромагнитного взаимодействия в $d = 4$. Наличие пятого измерения, образующего S^1-сферу, обусловливает также квантование масс и электрических зарядов полей эффективной 4-мерной теории.

Идеи, выдвинутые Калуцой и Клейном, развивались рядом известных физиков, в частности Эйнштейном, Бергманом [13], Румером [14]. После создания Янгом и Миллсом теории неабелевых калибровочных полей были предприняты попытки единого описания гравитационного и калибровочных взаимодействий с использованием пространств высших размерностей (см. [15, 16] и ссылки в них) в духе теории Калуцы — Клейна (К — К). Однако подпространства дополнительных измерений в таких теориях играли лишь вспомогательную роль, обусловливая существование внутренних калибровочных симметрий в 4-мерном пространстве-времени, и не могли рассматриваться как реальные физические измерения, так как вид метрики многомерного пространства выбирался «руками» и не удовлетворял многомерным уравнениям Эйнштейна.

Для того чтобы можно было рассматривать дополнительные измерения, имеющие такой же физический смысл, как и пространственные измерения в 4-мерном пространстве-времени, нужно предположить, что эти измерения (вследствие определенных причин, обусловленных взаимодействием полей исходной теории) образуют компактные пространства K^n малых размеров, так что их существование не противоречит повседневному опыту. Существуют модели, в которых дополнительными являются как пространственные, так и временные измерения [17, 30], а также модели, в которых могут образовываться некомпактные подпространства малого объема [18]. Включение в рассмотрение времениподобных и некомпактных подпространств дополнительных измерений приводит к новым возможностям решения проблемы малости космологического члена и существования киральных фермионов (т. е. асимметрии между левыми и правыми фермионами, требуемой электрослабой схемой) в эффективном 4-мерном секторе К — К-теории. Однако это порождает и ряд новых трудностей: а) существование дополнительных временны́х измерений ведет к появлению духов и тахионов в $d = 4$, избавиться от которых в безмассовом секторе можно ограничением на возможную топологическую и геометрическую структуру времениподобных подпространств [17]; б) некомпактность дополнительных измерений порождает трудность получения дискретного спектра масс 4-мерных полей, преодолеть которую можно путем выбора для решений такого типа подходящих граничных условий [19]. Мы ограничимся рассмотрением К—К-теорий, в которых дополнительные измерения пространственные и образуют компактные подпространства малых размеров. Проявляют себя такие пространства через свойства симметрий полей физического 4-мерного сектора теории (в качестве обзоров современного подхода к К—К-теориям см. [20—22]). Поля в 4-мерном пространстве-времени возникают как возбуждения над основным состоянием с компактным подпространством дополнительных измерений (вакуумом Калуцы — Клейна) $4 + n$-мерной теории. Последовательный учет таких возбуждений осуществляется путем разложения волновых функций полей многомерной теории в ряд по собственным функциям оператора масс на пространстве K^n, соответствующим (когда K^n обладает группой движений G) неприводимым представлениям группы движений компактного пространства. Коэффициенты разложения и будут представлять волновые функции полей в эффективной 4-мерной теории. После подстановки такого разложения в лагранжиан многомерной теории и интегрирования по объему компактного пространства можно получить лагранжиан, описывающий систему бесконечного числа взаимодействующих полей в 4-

мерном пространстве-времени. Только некоторые из этих полей (например, гравитационное и калибровочные поля группы G) являются безмассовыми. Отсутствие массы у таких полей гарантируется симметрией К—К-вакуума. (Если компактная вакуумная конфигурация допускает сохранение СУСИ в эффективной $d = 4$ теории, то безмассовыми будут также и суперпартнеры гравитационного и калибровочных полей). Остальные же поля имеют массы, обратно пропорциональные размеру компактного пространства ($M \sim 1/l$). Если $l \sim 10^{-33}$ см (планковская длина), то массивные поля имеют массы порядка планковской ($\sim 10^{19}$ ГэВ) и, вообще говоря, не могут наблюдаться при энергиях, достижимых в настоящее время. При рассмотрении низкоэнергетических явлений в теориях, где 4-мерное пространство-время основного состояния является пространством Минковского, ограничиваются, как правило, безмассовыми модами. (Дело обстоит гораздо сложнее, когда 4-мерное пространство-время есть антидеситтеровское (AdS^4) пространство, например, в $d = 11,10$ СГ. В этом случае даже «безмассовые» моды имеют антидеситтеровские массы и последовательный учет вклада различных полей в низкоэнергетический сектор затруднен [23].)

Обычно не требуется, чтобы безмассовые поля удовлетворяли уравнениям движения исходной многомерной теории, так как предполагается, что эти уравнения будут выполняться при учете всего спектра массивных полей, т. е. после построения полной эффективной $d = 4$ теории. Однако если рассматривать низкоэнергетический сектор (безмассовые поля плюс ограниченное число массивных полей) как замкнутый, не взаимодействующий со всем массивным спектром, то требование удовлетворения волновых функций полей низкоэнергетического сектора как 4-мерным уравнениям движения, так и уравнениям полной теории приобретает особое значение и приводит к ограничению на возможный вид анзаца Калуцы — Клейна. На это было обращено внимание в работах [24—26] в связи с трудностями, возникшими при выделении $d = 4$ теорий СГ из $d = 11$ СГ с компактифицированным 7-мерным подпространством, и в частности $N = 8$, $d = 4$ СГ при компактификации в S^7 [22]. Проблема самосогласованного анзаца Калуцы — Клейна тесно связана и с проблемой выбора истинного основного состояния многомерной теории [22].

Существование компактных подпространств не должно противоречить уравнениям движения исходной многомерной теории. Это оказывается возможным, если в многомерном пространстве-времени помимо гравитационного присутствуют поля материи (например, калибровочные или скалярные поля) [27—32]. В этом случае компактификация дополнительных измерений может быть обусловлена взаимодействием гравитационного поля с нетривиальными вакуумными средними этих полей, т. е. иметь спонтанный характер. Здесь необходимо отметить, что хотя образование риччиплоских компактных пространств (например, в $SO(32)$ — и $E_8 \times E_8$-теориях суперструны [33]) может происходить и без участия полей материи, однако вряд ли можно надеяться без их участия получить реалистический спектр 4-мерных полей. Например, наличие вакуумного конденсата исходных калибровочных полей с нетривиальной топологической структурой (монополи, инстантоны и т. д.) оказывается важнейшим условием существования в эффективной 4-мерной теории киральных фермионов, преобразующихся по различным представлениям калибровочной группы в зависимости от их киральности, что является необходимым условием согласования К—К-теории со стандартной электрослабой схемой (левые фермионы — дублеты $SU(2) \times U(1)$-группы, правые — синглеты) [33 — 37].

В качестве примеров можно привести 6- и 10-мерные теории Эйнштейна — Максвелла, компактификация дополнительных измерений в которых происходит при взаимодействии гравитации с исходным абелевым калибровочным полем. Как было показано [35], существуют решения уравнений движения $d = 6$ теории Эйнштейна — Максвелла, отвечающие спонтанной компактификации двумерного подпространства в S^2-сферу (имеющую группу симметрий $SU(2)$), квадрат радиуса которой пропорционален отношению гравитационной и калибровочной констант $\varkappa_4^2/e_4^2$ эффективной 4-мерной теории. Таким образом, если считать, что e_4^2 и $\varkappa_4^2$ принимают экспериментально наблюдаемые значения, то компактное подпространство имеет размеры порядка планковской длины $l_P \sim 10^{-33}$ см. Эффективная $d = 4$ теория, возникающая в результате такой компактификации, описывает гравитационное и калибровочные поля группы $SU(2) \times U(1)$. Отметим, что константы e_4^2 и $\varkappa_4^2$ связаны с исходными калибровочной e^2 и гравитационной $\varkappa^2$ константами многомерной теории соотношениями $e_4^2 \sim e^2/V$, $\varkappa_4^2 \sim \frac{\varkappa^2}{V}$, где V — объем компактного пространства. В случае 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла после компактификации можно получить эффективную $d = 4$ теорию, описывающую гравитацию и калибровочные поля $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-группы [38—41]. Интересно, что в обеих теориях фермионы могут преобразовываться по киральным представлениям калибровочных групп.

Однако с включением в многомерную теорию калибровочных полей, казалось бы, теряется основной смысл привлечения высших размерностей для единого описания различных взаимодействий. Эта проблема разрешается в рамках многомерных вариантов СГ, супермультиплеты которых с необходимостью содержат помимо гравитационного различные типы калибровочных и скалярных полей. Поэтому именно с многомерными ($d = 10$; 11) теориями СГ, а в последние годы в основном с теми из них, которые возникают как низкоэнергетические пределы безаномальных $SO(32)$ (тип 1 [42]) и $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ гетеротических (гибридных) теорий суперструны, связывается основная надежда построения реалистической К — К-теории.

Возможно, что именно спонтанная компактификация дополнительных измерений в этих теориях обусловливает определенную

9—01278

групповую структуру внутренних симметрий, киральность фермионов, число поколений и т. д., она может также дать ключ к пониманию последовательного спонтанного нарушения внутренних симметрий и суперсимметрии, определяя таким образом феноменологию всех известных взаимодействий.

В связи с этим большое внимание уделяется изучению различных механизмов спонтанной компактификации в $(4+n)$-мерных теориях Эйнштейна — Янга — Миллса, $d = 11{,}10$ СГ, суперструнах, а также свойств возникающих К — К-вакуумов, что является первым этапом на пути построения реалистической теории. Вторым этапом является изучение спектров полей эффективных 4-мерных теорий, динамики их взаимодействий и возможности сопоставления этих теорий с реальной физикой элементарных частиц.

Отметим, что до 1984 г. основное внимание теоретиков, изучающих К — К-теории, привлекали $N = 1$, $d = 11$ [22] и $N = 2$, $d = 10$ СГ киральный [7] и некиральный [5, 6] варианты, как, по-видимому, наиболее общие из СГ-теорий, которые могут быть построены. Супермультиплеты этих теорий содержат только абелевы калибровочные поля. Поэтому основная задача при изучении спонтанной компактификации $N = 2$, $d = 10$ и $N = 1$, $d = 11$ СГ состояла в том, чтобы обнаружить такие механизмы спонтанной компактификации, когда взаимодействие гравитационного поля с **минимальным** числом калибровочных полей обеспечивало бы образование компактных 6- и 7-мерных пространств с максимально возможными группами симметрий, так чтобы полная группа симметрии К — К-вакуума содержала группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, соответствующую группе симметрий сильного и электрослабого взаимодействий [34, 38, 41].

В 1984 г. было обнаружено замечательное свойство сокращения калибровочных и гравитационных аномалий в $SO(32)$- и $E_8 \times E_8$-теориях суперструны [42—45] и выдвинуты серьезные аргументы в пользу их конечности. Низкоэнергетическим пределом этих теорий является $N = 1$, $d = 10$ СГ, взаимодействующая с $N = 1$, $d = 10$ суперполями Янга — Миллса ($N = 1$, $d = 10$ СГ + ЯМ) с калибровочными группами $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$. Действие $N = 1$, $d = 10$ СГ + ЯМ с произвольной калибровочной группой было построено Чаплином и Мэнтоном [4] и обобщено Грином и Шварцем [44] добавлением членов с высшими производными (лоренцевские члены Черна — Саймонса), возникающих в низкоэнергетическом пределе суперструны. Выделенность $SO(32)$- и $E_8 \times E_8$-суперструн стимулировало интенсивные исследования этих теорий [в особенности гетерозисной струны [43] с группой $E_8 \times E_8$] как наиболее вероятных претендентов на роль реалистической К — К-теории, в рамках которых, по-видимому, могут быть решены такие важные проблемы $N = 2$, $d = 10$ и $N = 1$, $d = 11$ СГ, как, например, киральность фермионов. Так как исходные калибровочные группы безаномальных версий суперструны очень высоки, то в теориях такого типа не требуется, чтобы спонтанная компактификация приводила к образованию компактных пространств с высокой симметрией. Напротив, механизмы спонтанной компактификации должны действовать так, чтобы подходящим образом **нарушать** исходную калибровочную группу SO (32)- или $E_8 \times E_8$ [например, одну из E_8 до E_6 или SU (5)] и приводить к реалистической эффективной теории Великого Объединения [33].

Несмотря на различие требований, предъявляемых к действию механизмов спонтанной компактификации в $N = 2$, $d = 10$, $N = 1$, $d = 11$ СГ и в SO (32)-, $E_8 \times E_8$-теориях суперструны, их объединяет то, что в обоих подходах фундаментальную роль играет механизм сопоставления калибровочных и спиновых связностей на компактифицированном подпространстве [29—31].

Напомним кратко десятилетнюю историю изучения механизмов спонтанной компактификации.

Первый механизм спонтанной компактификации в $(4 + n)$-мерной теории Эйнштейна — Янга — Миллса был предложен Креммером и Шерком [27] для компактификации в S^n-сферы и затем обобщен Лучиани [28] на случай симметрических пространств G/H (G — группа симметрий, H — группа голономии этих пространств). В этом механизме калибровочные поля, участвующие в компактификации, сопоставлялись векторам Киллинга симметрического пространства и преобразовывались, таким образом, по группе G.

Более универсальный механизм спонтанной компактификации был предложен в [29, 30], а позднее — в [31]. Он основан на сопоставлении вакуумных значений калибровочных полей, участвующих в компактификации, компонентам спиновой связности компактного пространства *. Таким образом, например, формирование компактного симметрического пространства G/H обеспечивают калибровочные поля группы H. В случае, когда H является прямым произведением групп $H = H_0 \times H_1 \times \ldots \times H_s$, образование пространства G/H может быть обеспечено взаимодействием гравитационного поля с калибровочными полями, преобразующимися по одной из инвариантных подгрупп группы H [46]. Например, если H содержит абелеву инвариантную подгруппу, то для образования пространства G/H достаточно участия одного абелевого поля, компоненты которого сопоставляются компонентам формы спиновой связности G/H, преобразующейся по абелевой инвариантной подгруппе H. Как показали исследования, механизм сопоставления калибровочной и спиновой связностей играет определяющую роль в формировании физически интересных вакуумных конфигураций в К — К-теориях, мультиплеты которых содержат различные типы (векторных и тензорных) калибровочных полей, и в частности в $d = 10$, 11 СГ [38, 41, 47—51] и безаномальных версиях суперструны [33].

* Механизм сопоставления связностей использовался ранее в [51] для изучения влияния гравитации на топологию полей Янга — Миллса.

Отметим, что монопольный и инстантонный механизмы спонтанной компактификации, рассматривавшиеся в [35, 36], являются частными случаями механизма сопоставления связностей.

Известны также и другие механизмы спонтанной компактификации подпространств многомерных теорий. Один из них основан на учете энергии Казимира материальных полей, которая возникает после образования компактного пространства как проявление квантовых эффектов и может обеспечивать его стабильность [52, 53]. Возможен также механизм компактификации, приводящий к образованию параллелизуемых компактных пространств (т. е. пространств, обладающих нулевой кривизной, но в общем случае отличным от нуля кручением), таких, например, как групповые многообразия и 7-мерная сфера. В этом случае спонтанная компактификация является результатом взаимодействия гравитационных полей с тензорными калибровочными полями A_{MN} и A_{MNL}, которые играют роль кручения параллелизуемых многообразий [54—56]. Спонтанная компактификация может иметь место и при взаимодействии гравитационного поля со скалярными σ-модельными полями [32].

Для устранения большой (по абсолютной величине) космологической постоянной Λ, возникающей в $d = 4$ после компактификации дополнительных измерений во многих вариантах К — К-теории, были предложены механизмы, в которых малость Λ обеспечивается вакуумным конденсатом фермионов [57, 58].

Наиболее популярным механизмом спонтанной компактификации в $d = 11$ СГ является механизм Фройнда — Рубина [59], в котором 11-мерное пространство-время компактифицируется в прямое произведение 4-мерного антидеситтеровского пространства (AdS^4) и 7-мерного компактного пространства K^7. Однако и здесь механизм сопоставления связностей оказывает свое влияние, обеспечивая в ряде случаев последовательную компактификацию 11-мерного пространства-времени [48—50]. С помощью механизма Фройнда — Рубина был получен ряд интересных вариантов К — К-теории, основанной на 11-мерной СГ [22, 47—50, 60]. Отметим, что в ряде случаев одновременное действие нескольких механизмов спонтанной компактификации может приводить к образованию новых вакуумных конфигураций, не возникающих, когда работает только один из них. Например, одновременное действие в $N = 1$, $d = 11$ СГ механизмов Фройнда — Рубина [59], Энглерта [54] и сопоставления связностей [69, 70] приводит к возникновению вакуумной конфигурации, названной «stretch» S^7-сферой, с группой симметрий $SU(4)$ [71].

Класс возможных К — К-вакуумов и эффективных $d = 4$ теорий значительно расширяется, если включить в рассмотрение вакуумные конфигурации с метрикой

$$g_{MN}^{4+n} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(Y)\, g_{\mu\nu}^{M^{1+3}}(x) & 0 \\ 0 & g_{mn}^{K^n}(Y) \end{pmatrix},$$

соответствующей пространству-времени основного состояния, которое не есть прямое произведение $M^{1+3} \times K^n$ [72, 73].

Классическая стабильность вакуумов Калуцы — Клейна исследовалась в [74—78].

Состав (супер)мультиплетов полей эффективных $d = 4$ теорий, возникающих из $d = 11$ СГ в результате компактификации Фройнда — Рубина, изучался в [23, 79—84].

Очень интересным с физической точки зрения является спектр безмассовых 4-мерных полей, возникающих как возбуждения над компактифицированным основным состоянием $E_8 \times E_8$-суперструны, включающей калибровочные поля E_6-группы и четыре поколения киральных фермионов [32].

Реализация красивых и заманчивых идей Калуцы — Клейна содержит, однако, много важных вопросов, которые должны быть решены прежде, чем единую теорию, базирующуюся на представлениях о существовании дополнительных измерений, можно будет назвать реалистической. Подчеркнем еще раз упоминавшиеся выше основные проблемы:

1. В реалистической эффективной $d = 4$ теории (как следует из опыта) космологическая константа Λ должна быть равна нулю или очень мала по абсолютному значению. При компактификации $N = 2$, $d = 10$ и $N = 1$, $d = 11$ СГ в физически интересных случаях, как правило, возникает большая космологическая константа антидеситтеровского типа. Вместе с тем спонтанное нарушение суперсимметрии, а также учет квантовых поправок [85] может привести к появлению равной по значению, но противоположной по знаку космологической константы.

С другой стороны, в $N = 2$, $d = 6$ СГ + ЯМ [86] и аномально свободных $N = 1$, $d = 10$ $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ СГ + ЯМ феноменологическое требование сохранения $N = 1$ СУСИ в 4-мерном пространстве приводит к выбору таких вакуумных конфигураций, в которых 4-мерное пространство-время является пространством Минковского без подгонки каких-либо параметров [33]. Основная проблема в этом случае — найти такой механизм спонтанного нарушения $N = 1$, $d = 4$ СУСИ, который не приводил бы к появлению большой положительной плотности энергии вакуума (т. е. к большому Λ деситтеровского типа).

Таким образом, общее решение проблемы космологического члена тесно связано с решением проблемы спонтанного нарушения суперсимметрии.

2. Проблема киральности. Как было отмечено Виттеном [34], в $d = 11$ СГ нет классических решений с $M^{11} = M^{1+3} \times K^7$, которые могли бы обеспечить появление киральных фермионов в $d = 4$. Однако киральные фермионы могут, по-видимому, возникнуть, если спонтанная компактификация M^{11} сопровождается образованием в M^{1+3} монополей Калуцы — Клейна [87]. Трудности с получением киральных фермионов существуют и в $N = 2$, $d = 10$ СГ где нет

минимального взаимодействия спинорных полей с абелевым калибровочным полем.

Из известных вариантов решения этой проблемы (некомпактность дополнительных измерений [18], К — К-монополи [87], квазиримманова геометрия в многомерии [88] и т. д.) наиболее привлекательным в настоящее время является механизм сопоставления связностей, обеспечивающий возможность появления киральных фермионов в тех К — К-теориях, которые допускают минимальное взаимодействие спинорных полей с калибровочными полями (многомерные теории Эйнштейна — Янга — Миллса, $N = 2$, $d = 6$ СГ + ЯМ, безаномальные $N = 1$, $d = 10$ СГ + ЯМ).

3. Важной задачей является отбор истинных К — К-вакуумов на основе проверки классической (отсутствие духов и тахионов) и квантовой (туннельные переходы) стабильности возможных вакуумных конфигураций. Сложность учета квантовых гравитационных эффектов затрудняет изучение квантовой стабильности вакуумов во многих физически интересных случаях.

4. Проблема бесконечностей в теориях (супер)гравитации и (супер)струны. Есть основания надеяться, что $SO(32)$- и $E_8 \times E_8$-суперструны свободны от расходимостей, и на их основе может быть построена последовательная квантовая теория гравитации.

2. МЕХАНИЗМЫ СПОНТАННОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ В $(4 + n)$-МЕРНОЙ ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА — ЯНГА — МИЛЛСА

В разд. 2—5 мы будем придерживаться классической идеологии Калуцы — Клейна (назовем ее условно «принципом экономности»), господствовавшей до 1985 г. (пока не были открыты безаномальные $SO(32)$- и $E_8 \times E_8$-версии суперструны) и исходящей из предположения, что многомерная теория должна содержать минимальное число негравитационных полей ($d = 11$ и $N = 2$, $d = 10$ СГ), а большинство (или все) калибровочных полей, наблюдаемых в 4-мерном пространстве-времени, возникают вследствие спонтанной компактификации дополнительных измерений в пространства с достаточно высокой группой симметрий. Именно исходя из этих предположений были обнаружены механизмы спонтанной компактификации в теориях Эйнштейна — Янга — Миллса [27—31].

Калибровочные поля в механизмах спонтанной компактификации. Рассмотрим систему взаимодействующих полей Эйнштейна и калибровочных полей, задаваемых лагранжианом в $(4 + n)$-мерном пространстве-времени M^{4+n}:

$$L = -E\left(\frac{1}{4\varkappa^2} R + \frac{1}{4e^2} F^{\alpha'}_{MN} F^{MN\alpha'} + \lambda\right), \qquad (1)$$

где λ — космологическая постоянная, которая введена в лагранжиан многомерной теории, чтобы после компактификации 4-мерное пространство-время осталось плоским (в многомерных вариантах супергравитации, в частности в $N=2$, $d=6$ СГ + ЯМ [86], роль λ может играть вакуумное значение потенциала взаимодействия скалярных полей), α' — индекс калибровочной группы G'.

Уравнения движения, возникающие при варьировании лагранжиана (1), имеют вид

$$R_{MN}-\frac{1}{2}g_{MN}R=-2\varkappa^2\left[\frac{1}{e^2}F^{\alpha'}_{ML}F^{L\alpha'}_{N}-\left(\frac{1}{4e^2}F^{\alpha'}_{LP}F^{LP\alpha'}+\lambda\right)g_{MN}\right]; \tag{2а}$$

$$(\hat{D}_M F^{MN})^{\alpha'}=\frac{1}{E}D_M(EF^{ML})^{\alpha'}=0. \tag{2б}$$

При рассмотрении спонтанной компактификации дополнительных измерений $(4+n)$-мерной теории Эйнштейна — Янга — Миллса, как правило, ищутся решения уравнений (2), для которых пространство M^{4+n} представляет собой прямое произведение 4-мерного пространства Минковского M^{1+3} и n-мерного компактного пространства K^n*. Метрика такого пространства имеет блочно-диагональный вид:

$$g_{MN}(X)=\begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{mn}(Y)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Предполагается, что компактификация происходит в результате взаимодействия гравитационного поля с вакуумными (в классическом смысле) средними калибровочных полей:

$$\langle A^{\alpha'}_{\mu}\rangle=0; \tag{4а}$$

$$\langle A^{\alpha'}_{m}\rangle=A^{\alpha'}_{m}(Y). \tag{4б}$$

Условие (4а) обеспечивает сохранение лоренц-инвариантности в M^{1+3}. Основная задача состоит в том, чтобы установить минимальное число полей Янга — Миллса и найти вид вакуумных средних калибровочных потенциалов $\langle A^{\alpha}_{m}\rangle$, обеспечивающих спонтанную компактификацию пространства M^{4+n} и образование компактного подпространства K^n с достаточно высокой группой симметрии G, включающей в качестве подгруппы, например, $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, соответствующую калибровочной группе сильного и электрослабого взаимодействий. К таким пространствам относятся однородные пространства $K^n=G/H$, где G — группа движений; H — группа изотропии (стационарная подгруппа G), действие которой оставляет неподвижным начало координат пространства G/H. Для простоты мы ограничимся рассмотрением n-мерных **симметрических** пространств G/H, обладающих в классе однородных пространств K^n максимально возможными группами симметрий. Обобщение приводимых здесь резуль-

* Как уже отмечалось, изучаются и более общие возможности, когда M^{4+n} не является пространством прямого произведения подпространств [72, 73] или K^n некомпактно.

татов на весь класс однородных пространств K^n не содержит принципиальных трудностей и подробно изложено в [90].

Группа изотропии H симметрического пространства совпадает с его группой голономии, что обеспечивает простоту и наглядность действия механизмов спонтанной компактификации, приводящих к образованию пространств такого типа.

Тензор кривизны симметрического пространства удовлетворяет условию ковариантного постоянства

$$\nabla_m R_{lnpq} = 0, \tag{5}$$

и в ортогональном базисе имеет вид

$$R_{(m)(n)(l)}{}^{(p)} = kC_{(m)(n)}{}^{A} C_{A(l)}{}^{(p)}, \tag{6}$$

где k — средняя кривизна, характеризующая размер компактного пространства, $C_{(m)(n)}{}^{A}$ — структурные константы группы G. Переход к естественному базису (с локальными координатами Y^m) осуществляется с помощью филбайнов $e_n^{(m)}(Y)$ пространства G/H. В зависимости от того, группа каких преобразований G или H сопоставляется группе локальных преобразований вакуумных средних (4б) калибровочных полей, имеют место два механизма спонтанной компактификации подпространств дополнительных измерений при взаимодействии полей Эйнштейна с калибровочными полями.

В механизме, предложенном Креммером и Шерком [37] и в дальнейшем обобщенном Лучиани [28], вакуумные значения (4) калибровочных полей, преобразующиеся по группе G, сопоставлялись векторам Киллинга $K_m^{\alpha}(Y)$ симметрического пространства. Было показано, что при таком сопоставлении подбором калибровочных и космологической констант можно удовлетворить уравнениям движения как для калибровочных полей (4), так и для полей Эйнштейна, задаваемых метрикой (3). Напряженность калибровочного поля $\langle A_m^{\alpha}\rangle = K_m^{\alpha}(Y)$, отвечающая компактифицированному решению, имеет следующие отличные от нуля компоненты в ортогональном базисе:

$$\langle F^{\alpha}_{(m)(n)}\rangle = -kC_{(m)(n)}{}^{A} D^{\alpha}{}_{A}(Y), \tag{7}$$

где $D^{\alpha}_{\beta}(Y) \equiv D^{\alpha}_{\beta}(K_Y)$ — компоненты матрицы присоединенного представления группы G, K_Y — преобразование группы G, принадлежащее пространству смежных классов G/H.

Более экономный механизм спонтанной компактификации был предложен в [29—31]. В этом механизме только калибровочные поля группы H участвуют в формировании симметрического пространства G/H. Для отыскания нетривиальных решений (4) уравнений (2), обладающих достаточно высокой симметрией (чтобы их можно было рассматривать как вакуумные решения), в [29] было предложено наложить на вакуумные значения калибровочных полей (4) ($G' = H$)

условие параллелизуемости (ковариантного постоянства), аналогичное условию (5):

$$(\hat{D}_m \langle F_{nl} \rangle)^A = 0, \tag{8}$$

при выполнении которого уравнения Янга — Миллса тождественно удовлетворяются. * Чтобы найти решения (8) на заданном симметрическом пространстве G/H, рассмотрим условие интегрируемости этих уравнений:

$$[\hat{D}_l, \hat{D}_m] \langle F^A_{np} \rangle = 0. \tag{9}$$

Решение уравнений (9)

$$\langle F^A_{(m)(n)} \rangle = -kC_{(m)(n)}{}^A, \tag{10}$$

вследствие структурных уравнений Маурера — Картана группы G является также и решением уравнений (8) и отвечает спонтанному переходу из плоской вакуумной конфигурации в компактную с метрикой (3). При этом константы λ и k, так же как и в первом механизме, принимают следующие значения:

$$\lambda = \frac{1}{4e^2} \langle F^A_{mn} \rangle^2, \quad k = \frac{e^2}{2\varkappa^2}.$$

Можно показать [30, 91], используя структурные уравнения группы G, что вакуумные значения $\langle A^B_m \rangle$, характеризующиеся тензором напряженностей (10), совпадают (по виду) с компонентами форм Картана $\theta^B_m\,(Y)$ группы

$$\langle A^B_m \rangle = \theta^B_m\,(Y), \tag{11}$$

задающими риманову (спиновую) связность на симметрическом пространстве G/H ($\omega^{(l)}_{m(n)} = -\theta^B_m C^{(l)}_{B(n)}$). Таким образом, рассмотренный механизм спонтанной компактификации «работает» на основе сопоставления калибровочной и спиновой связностей.

Отметим, что при компактификации в однородные несимметрические пространства G/H условия (5) и (8) не удовлетворяются и справедливость выбора вакуумных значений калибровочных полей в виде компонент спиновой связности пространства K^n должна подтверждаться непосредственным решением уравнений движения (2).

Группой симметрии вакуумных конфигураций, возникающих в результате действия обоих механизмов, является группа $SO\,(3,1) \times \times G$, если исходная калибровочная группа G' многомерной теории

* Отметим, что условие параллелизуемости является обобщением условия постоянства вакуумных значений скалярных полей в теориях со спонтанным нарушением симметрии на случай искривленного пространства — времени и тензорных полей.

не превосходит G или H соответственно (принцип «экономности») *. Следовательно, при учете возбуждений над К — К-вакуумами [28, 35, 39, 40] в эффективной 4-мерной теории возникают калибровочные поля группы G. Подчеркнем, что исходная калибровочная группа G или H (в общем случае) нарушается при возникновении отличных от нуля вакуумных средних (4). (С точки зрения 4-мерного наблюдателя, $\langle A_m^{\alpha'} \rangle$ соответствует вакуумным средним скалярных полей в пространстве M^{1+3}.) Однако когда спонтанная компактификация происходит в результате действия механизма сопоставления связностей и группа H содержит абелеву инвариантную подгруппу H_0 либо совпадает с ней, то К — К-вакуум обладает дополнительной симметрией H_0, что соответствует появлению в физическом секторе теории калибровочных полей абелевой подгруппы H_0 [92].

Нужно отметить, что группа симметрий G неприводимого симметрического пространства является полупростой группой, поэтому в случае спонтанной компактификации Креммера — Шерка — Лучиани исходная калибровочная симметрия G всегда нарушена полностью.

Вследствие рассмотренного выше сходства между вакуумными конфигурациями, возникающими в результате действия двух возможных механизмов спонтанной компактификации, естественно рассмотреть вопрос об их связи. Такая связь действительно существует, т. е. в механизме Креммера — Шерка — Лучиани в спонтанной компактификации эффективно принимают участие не все калибровочные поля группы G, а только калибровочные поля ее подгруппы H. При этом дополнительные компоненты калибровочных полей группы G могут быть устранены калибровочным преобразованием, принадлежащим группе G и задаваемым матрицей $(D_\alpha^\beta)^{-1}$ из (7). После устранения таких чисто калибровочных степеней свободы механизм спонтанной компактификации Креммера — Шерка — Лучиани сводится к механизму сопоставления связностей [91].

Несмотря на такое сходство механизмов спонтанной компактификации и возникающих в результате их действия вакуумных конфигураций, между ними есть существенное различие, которое заключается в следующем. Важным критерием отбора действительных К — К-вакуумов является их стабильность относительно малых флуктуаций (т. е. отсутствие тахионных мод). Как показали Ранджбар — Дэми, Салам и Стрэтди [70], тахионные моды не возникают после компактификации в однородное пространство G/H, если исходная калибровочная группа многомерной теории Эйнштейна — Янга — Миллса изоморфна группе голономии или одной из ее подгрупп.

* Если же $G' \supset G$, то полной группой симметрии К — К-вакуума, возникающего в результате действия первого механизма, будет $SO(3,1) \times G \times N(G)$, а второго — $SO(3,1) \times G \times N(H)$, (где $N(G)$ и $N(H)$ — подгруппы G', коммутирующие с G или H соответственно). Такая ситуация реализуется, в частности, в $SO(32)$- и $E_8 \times E_8$-версиях суперструны.

Таким образом, возникающие в результате действия механизма сопоставления связностей вакуумные конфигурации классически стабильны. Если же исходная калибровочная группа шире, чем H, например G (как это имеет место при компактификации Креммера — Шерка — Лучиани), то соответствующие вакуумные конфигурации могут быть неустойчивыми. Следовательно, механизм сопоставления связностей предпочтительнее первого механизма спонтанной компактификации не только потому, что он более экономный, но и потому, что всегда приводит к образованию классически стабильных К — К-вакуумов $(4+n)$-мерной теории Эйнштейна — Янга — Миллса. Подробное исследование стабильности вакуумных конфигураций в многомерных теориях Эйнштейна — Янга — Миллса было проведено в [75]. Отметим также, что именно механизм сопоставления связностей является наиболее естественным при компактификации в пространства, не обладающие группой движений (отсутствуют векторы Киллинга), например, в пространства Калаби — Яу (см. разд. 6).

Спонтанная компактификация в пространства с группой голономии $H=\prod\limits_{i=1}^{s}\times H_i$. В максимальной степени принцип экономности осуществляется механизмом сопоставления связностей при образовании компактных пространств, группа голономии которых является прямым произведением простых и абелевых групп: $H=\prod\limits_{i=1}^{s}\times H_i$ (s — их число). К пространствам такого типа относится широкий класс симметрических пространств, в том числе с ортогональными, унитарными и симплектическими группами движения $\left(\frac{SO(p_1+p_2)}{SO(p_1)\times SO(p_2)},\ \frac{SU(p_1+p_2)}{SU(p_1)\times SU(p_2)\times U(1)},\ \frac{\mathrm{Sp}(p_1+p_2)}{\mathrm{Sp}(p_1)\times \mathrm{Sp}(p_2)}\right)$. Спонтанная компактификация в такие пространства может осуществляться калибровочными полями группы $H=\prod\limits_{i=1}^{s}\times H_i$ с независимыми константами связи e_i, соответствующими каждой подгруппе H_i и, в частности, только калибровочным полям какой-либо одной из подгрупп H_i, что приводит к дополнительному уменьшению числа калибровочных полей, участвующих в спонтанной компактификации [92].

Так как в этом случае значения полей Янга — Миллса, обеспечивающие компактификацию, совпадают со значениями компонент спиновой связности пространства G/H, преобразующимися только по подгруппе H_i, то действие механизма сопоставления связностей заключается в погружении калибровочной связности в спиновую. Например, вакуумные средние калибровочных полей, взаимодействие которых с гравитацией приводит к образованию симметрических пространств с $H=\prod\limits_{i=1}^{s}\times H_i$, имеют вид (10) и (11), где индекс A может принимать значения, соответствующие одной из групп H_i (см. подробно в [92]).

Максимальным образом принцип экономности реализуется, когда спонтанная компактификация осуществляется одним абелевым полем. Это имеет место в тех случаях, когда группа голономии компактного пространства содержит инвариантные абелевы подгруппы [92]. Последнее обстоятельство является весьма существенным для возможности образования физически интересных вакуумных конфигураций в $d = 11$ и $N = 2$, $d = 10$ СГ, так как супермультиплеты этих теорий содержат только абелевы (векторные и тензорные) калибровочные поля (см. разд. 4, 5).

Заметим, что в рассмотренном случае компактификации в симметрические пространства с группой голономии $H = \prod_{i=1}^{s} \times H_i$ механизм Креммера — Шерка — Лучиани не сводится к механизму сопоставления связностей, так как хотя калибровочную группу G первого механизма можно редуцировать до калибровочной группы H второго механизма локальными преобразованиями калибровочных полей, однако дальнейшая редукция группы H до одной из ее инвариантных подгрупп неосуществима.

3. ДЕСЯТИМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА

В качестве простого и наглядного примера рассмотрим действие механизма сопоставления связностей в 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла. Изучение этой теории представляет определенный интерес, так как, с одной стороны, теория Эйнштейна — Максвелла обладает элементами реалистической К — К-теории (возможна компактификация с образованием калибровочных полей $SU(3) \times \times SU(2) \times U(1)$-группы и реалистическими значениями констант связи; возникновение в $d = 4$ киральных фермионов), что указывает на принципиальную возможность реализации идей Калуцы — Клейна; с другой стороны, она является составной частью $N = 1$, $d = = 10$ СГ + ЯМ и некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ (которые, в свою очередь, являются низкоэнергетическими пределами суперструн) и, следовательно, указывает на возможность реалистической спонтанной компактификации в этих теориях.

Основные состояния с компактным 6-мерным подпространством. Как было показано в предыдущем разделе, взаимодействие гравитационного поля с абелевым калибровочным полем может привести к компактификации подпространств и образованию нетривиального К — К-вакуума, в котором $(4 + n)$-мерное пространство-время является прямым произведением 4-мерного пространства-времени M^{1+3} и n-мерного однородного компактного пространства $K^n = G/(H \times \times H_0)$, группа изотропии которого (для симметрических пространств совпадающая с группой голономии) содержит абелеву инвариантную подгруппу H_0. Таким образом, в $d = 10$ теории Эйнштейна — Максвелла подпространство дополнительных измерений вследствие действия механизма сопоставления связностей может компактифицироваться в следующие многообразия [38—41]:

$$\left.\begin{array}{c} K^6 = CP^3,\ S^4 \times S^2,\ CP^2 \times S^2,\ S^2 \times S^2 \times S^2, \\ \dfrac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)},\ \dfrac{\mathrm{Sp}(4)}{\mathrm{Sp}(2) \times U(1)},\ \dfrac{SU(3)}{U(1) \times U(1)}; \\ (\mathrm{Sp}(4) \sim SO(5),\ \mathrm{Sp}(2) \sim SU(2)). \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Группой симметрии К — К-вакуума с M^6 вида (12) является $G^{1+3} \times G \times H_0$, где G^{1+3} — группа движений M^{1+3}; G — группа движений M^6; H_0 — калибровочная группа исходного абелевого поля, которая не нарушается после компактификации (см. разд. 2).

Уравнения движения системы взаимодействующих полей Эйнштейна — Максвелла в $d = 10$ имеют вид (2), где $n = 6$, F_{MN} — тензор напряженностей абелева поля.

Наибольший физический интерес представляет изучение спонтанной компактификации 6-мерного пространства в прямое произведение проективного пространства $CP^2 = \dfrac{SU(3)}{SU(2) \times U(1)}$ и двумерной сферы $S^2 = SU(2)/U(1)$. Возникающее в результате такой компактификации основное состояние инвариантно относительно преобразований группы $G^{1+3} \times SU(3) \times SU(2) \times S(1)$. Таким образом, в эффективной $d = 4$ теории появляются калибровочные поля $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-группы [38—41].

Интересно отметить, что образование при компактификации K^6 пространства $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$ [см. (12)] может рассматриваться как топологическая деформация пространства $CP^2 \times S^2$, происходящая в результате появления инстантонных возбуждений над CP^2, нарушающих $SU(2)$-группу [39, 48]. С геометрической точки зрения возникновение инстантонов над CP^2 приводит к тому, что пространство $CP^2 \times S^2$ превращается в нетривиальное ассоциированное расслоенное пространство $E(CP^2, S^2, SU(2)) \sim \dfrac{SU(3)}{U(1) \times U(1)}$ с базой CP^2, стандартным слоем S^2, структурной группой $SU(2)$ и связностью, задаваемой полем $SU(2)$-инстантона на CP^2 [39, 48].

Метрика пространства основного состояния $M^{1+3} \times CP^2 \times S^2$ имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$g_{MN} = (g_{\mu\nu}(x),\ g_{ab}(y),\ g_{ik}(z)), \qquad (13)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$, $g_{ab}(y)$, $g_{ik}(z)$ — метрики, а x^μ, y^a и z^i — координаты пространств M^{1+3}, CP^2 и S^2 соответственно.

Тензоры кривизны симметрических пространств M^{1+3}, CP^2 и S^2 удовлетворяют условиям ковариантного постоянства и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} R^{M^{d'}}_{(\mu)(\nu)(\lambda)(\rho)} &= \frac{2\varkappa^2}{d'-1}\Lambda\left(g_{(\mu)(\nu)}g_{(\nu)(\rho)} - g_{(\nu)(\lambda)}g_{(\mu)(\rho)}\right); \\ R^{CP^2}_{(a)(b)(c)(d)} &= k_1\left(f_{(a)(b)}{}^A f_{A(c)(d)} + f_{(a)(b)}{}^8 f_{8(c)(d)}\right); \\ R^{S^2}_{(i)(j)(k)(l)} &= k_2 C_{(i)(j)}{}^3 C_{3(k)(l)}, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где Λ имеет смысл космологической постоянной в эффективной 4-мерной теории (при $\Lambda > 0$ M^{1+3} является пространством де Ситтера с группой движений $SO\,(4,1)$, при $\Lambda < 0$ M^{1+3} — антидеситтеровское пространство с группой движений $SO\,(3,2)$, при $\Lambda = 0$ M^{1+3} — пространство Минковского); $d' = 4$, $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ — средние кривизны, характеризующие размеры CP^2 и S^2-пространств, $f^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — структурные константы группы $SU\,(3)$ в базисе Гелл — Мана ($A = 1, 2, 3$ — индексы генераторов подгруппы $SU\,(2)$, 8 — индекс генератора подгруппы $U\,(1)$ группы $SU\,(3)$; (a), (b), (c), (d) — индексы генераторов, принадлежащих пространству смежных классов $\frac{SU(3)}{SU(2)\times U(1)}$, совпадающие с индексами касательного к CP^2 пространства в ортогональном базисе); C^C_{AB} — структурные константы группы $SU\,(2)$ (3 — индекс генератора подгруппы $U\,(1)$ группы $SU\,(2)$; (i), (j), (k), (l) — индексы генераторов, принадлежащих пространству смежных классов $SU\,(2)/U\,(1)$, совпадающие с индексами касательного к S^2-пространства в ортогональном базисе).

Генераторы группы $SU\,(3)$ и $SU\,(2)$ нормированы таким образом, что метрики Киллинга — Картана этих групп имеют вид:

$$g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}{}^{\delta} f_{\delta\beta}{}^{\gamma} = \frac{3}{2}\,\delta_{\alpha\beta}; \quad g_{AB} = C_{AC}{}^{D} C_{DB}{}^{C} = \delta_{AB}. \qquad (15)$$

При такой нормировке генераторов структурные константы f^C_{AB} и C^C_{AB} равны друг другу, что удобно для дальнейшего рассмотрения.

Переход к мировому от ортогонального базиса осуществляется с помощью филбайнов $e^{(\mu)}_{\nu}(x)$, $e^{(a)}_{b}(y)$ и $e^{(i)}_{k}(z)$ пространств M^{1+3}, CP^2 и S^2 соответственно.

Метрика (13) форминвариантна (т. е. имеет один и тот же функциональный вид в различных системах координат) относительно преобразований группы движений $G^{1+3} \times SU\,(3) \times SU\,(2)$ пространств $M^{1+3} \times CP^2 \times S^2$. Бесконечно малые преобразования координат под действием элементов этой группы имеют вид:

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^r K^{\mu}_r(x), \quad \delta y^a = \varepsilon^{\alpha} K^a_{\alpha}(y), \quad \delta z^i = \varepsilon^A \widetilde{K}^i_A(z), \qquad (16)$$

где $K^{\mu}_r(x)$, $K^a_{\alpha}(y)$ и $\widetilde{K}^i_A(z)$ — векторы Киллинга пространств M^{1+3}, CP^2 и S^2 соответственно; ε^r, ε^{α}, ε^A — параметры бесконечно малых преобразований группы движений $G^{1+3} \times SU(3) \times SU(2)$ (r — индекс G^{1+3}).

Так как мы изучаем спонтанную компактификацию K^6 в $CP^2 \times S^2$ вследствие действия механизма сопоставления связностей, то отличные от нуля вакуумные средние калибровочного поля имеют следующий вид:

$$\langle A_a \rangle = A_a(y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho_1}{k_1} \frac{e^2}{2\varkappa^2} \theta_a^8(y); \tag{17а}$$

$$\langle A_i \rangle = A_i(z) = \frac{\rho_2}{k_2} \frac{e^2}{2\varkappa^2} \theta_i^3(z), \tag{17б}$$

где ρ_1 и ρ_2 — числовые параметры; $\theta_a^8(y)$ и $\theta_i^3(z)$ — компоненты θ-форм Картана на пространствах CP^2 и S^2, относящиеся к $U(1)$ подгруппам $SU(3)$- и $SU(2)$-групп соответственно. Вид коэффициентов в (17) выбран для удобства дальнейших вычислений.

Соответствующие значения компонент $F_{ab}(y)$ и $F_{ik}(z)$ тензора напряженностей поля Максвелла находятся с помощью структурных уравнений Маурера — Картана для групп $SU(3)$, $SU(2)$ и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} F_{ab}(y) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\, \rho_1 \frac{e^2}{2\varkappa^2} f_{(c)(d)}{}^8 e_a^{(c)}(y)\, e_b^{(d)}(y); \\ F_{ik}(z) &= -\rho_2 C_{(j)(l)}{}^3 e_i^{(j)}(z)\, e_k^{(l)}(z). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Решения (17) в силу трансформационных свойств θ-форм Картана [20] инвариантны (с точностью до абелевых калибровочных преобразований) относительно преобразований (16). Отметим, что в отличие от неабелевых калибровочных полей, для которых значение коэффициентов в выражении (10) однозначно фиксировано членом в уравнениях движения, описывающим самодействие неабелевых калибровочных полей, в абелевом случае существует свобода выбора этих коэффициентов. Область значений параметров ρ (ρ_1, ρ_2) может быть ограничена только особенностями топологии компактных многообразий. Поле (17б) представляет не что иное, как поле монополя на S^2-сфере, поэтому $\frac{\rho_2 e^2}{2\varkappa^2 k_2}$ удовлетворяет условию квантования Дирака, а так как $k_2 = \rho_2 e^2/2\varkappa^2$ [см. (20)], то ρ_2 обратно пропорционально целому числу n ($\rho_2 = 2\sqrt{2}/n$) [35]. Ограничение на параметр ρ_1 возникает вследствие трудностей введения спиновой структуры на пространстве CP^2, связанных с глобальными свойствами этого пространства. Как было показано [41, 93], фермионы могут существовать на CP^2, если они взаимодействуют с абелевым полем (17а), параметр ρ_1 которого подчиняется условию квантования $\rho_1 = 6/(m + 1/2)$ (m — целое).

Подставляя в (2а) выражения (14) и (18) и воспользовавшись равенством $f_{(a)(c)}f^{(c)8}_{(b)} = \frac{1}{4}\delta_{(a)(b)}$, получаем следующие значения Λ, k_1 и k_2:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{4}\,\frac{e^2}{2\varkappa^2}\,(\rho_1^2+\rho_2^2) - \frac{1}{4}\,\lambda; \\ k_1 &= \frac{e^2}{16\varkappa^2}\,(3\rho_1^2-\rho_2^2) + \varkappa^2\lambda; \\ k_2 &= \frac{e^2}{16\varkappa^2}\,(7\rho_2^2-\rho_1^2) + \varkappa^2\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если $\lambda < \frac{e^2}{(4\varkappa^2)^2}\,(\rho_1^2+\rho_2^2)$, то $\Lambda > 0$ и пространство M^{1+3} — пространство де Ситтера; если $\lambda = \frac{e^2}{(4\varkappa^2)^2}\,(\rho_1^2+\rho_2^2)$, то $\Lambda = 0$ и M^{1+3} — пространство Минковского. При $\Lambda = 0$ соотношения (19) принимают вид:

$$\lambda = \frac{e^2}{(4\varkappa^2)^2}\,(\rho_1^2+\rho_2^2),\quad k_1 = \frac{e^2}{4\varkappa^2}\,\rho_1^2,\quad k_2 = \frac{e^2}{2\varkappa^2}\,\rho_2^2. \tag{20}$$

Таким образом, вакуумное состояние Калуцы — Клейна с метрикой (13) и отличными от нуля вакуумными значениями компонент калибровочного поля (17) инвариантно с точностью до $U(1)$-преобразования относительно группы движений $G^{1+3} \times SU(3) \times SU(2)$ пространства $M^{1+3} \times CP^2 \times S^2$.

Отметим, что все перечисленные в (12) возможности компактификации 10-мерного пространства реализуются в некиральном варианте $N = 2$, $d = 10$ СГ (см. разд. 5).

Возбуждения над вакуумом Калуцы — Клейна. Рассмотрим вклад в действие возбуждений над возможной конфигурацией основного состояния 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла с $K^6 = CP^2 \times S^2$ [40].

Для последовательного учета возбуждений над основным состоянием с компактным подпространством дополнительных измерений (К — К-вакуумом) надо разложить волновые функции полей многомерной теории в ряд по гармоникам, соответствующим неприводимым представлениям группы движений G компактного пространства [20, 94]. Например, разложение векторной волновой функции имеет вид $A_{\mu p}(x, Y) = \sum\limits_{n}\sum\limits_{q,l} D^n_{pl,q}(Y)A^n_{\mu ql}(x)$, где $D^n_{pl,q}$ — матрицы неприводимых представлений группы G; n — номер представления размерности d_n; p — матричный индекс, соответствующий ограничению представления $\mathbf{D}^n$ на группу изотропии H, являющуюся подгруппой группы G; l характеризует, сколько раз представление $\mathbf{D}(h)$ $(h \in H)$ встречается в представлении $\mathbf{D}^n(g)$ $(g \in G)$ [20, 94]. После подстановки такого разложения в действие многомерной теории

$$S = -\int E\left(\frac{1}{4\varkappa^2}\,R + \frac{1}{4e^2}\,F_{MN}F^{MN} + \lambda\right)d^{10}X \tag{21}$$

и интегрирования по объему компактного пространства можно получить лагранжиан, описывающий систему бесконечного числа взаимодействующих полей со спинами 2, 1, 0 в 4-мерном пространстве-времени. Только некоторые из этих полей (соответствующие, например, членам разложения, относящимся к тривиальному и присоединенному представлениям группы движений [94]) являются безмассовыми, остальные же имеют массы, значения которых зависят от размеров компактной области.

Ограничимся рассмотрением возбуждений, соответствующих в 4-мерном пространстве-времени безмассовым полям со спином 2 (гравитационное поле) и 1 (векторные калибровочные поля). При отыскании таких безмассовых возбуждений будем исходить из требования инвариантности возбужденного состояния относительно локальных преобразований SU (3)-, SU (2)-, U (1)-групп, параметры которых зависят от координат 4-мерного пространства-времени.

В рассматриваемом случае, когда 6-мерное подпространство основного состояния является пространством $CP^2 \times S^2$, безмассовые возбуждения над таким вакуумом соответствуют системе взаимодействующих гравитационного и калибровочных полей $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-группы в 4-мерном пространстве-времени.

Действительно, требование локальной $SU(3) \times SU(2)$-инвариантности может быть удовлетворено удлинением форм Картана групп SU (3) и SU (2) с помощью величин, преобразующихся так же, как и калибровочные поля SU (3)- и SU (2)-групп в 4-мерном пространстве-времени (аналогично тому, как это происходит при включении калибровочного взаимодействия в теории Янга — Миллса удлинением производных ($\partial_M \to \partial_M + A_M$)). Таким образом, будем рассматривать состояние 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла, в котором филбайны пространства M^{10} в обозначениях дифференциальных форм имеют вид (анзац Калуцы — Клейна):

$$e^{(\mu)} = dx^\nu e^{(\mu)}_\nu (x);$$

$$\left.\begin{aligned} e^{(a)} &= dy^b e^{(a)}_b (y) + \frac{1}{\sqrt{k_1}} G^{(a)}_\mu (x) D^a_\alpha (y)\, dx^\mu; \\ e^{(i)} &= dz^k e^{(i)}_k (z) + \frac{1}{\sqrt{k_2}} H^A_\mu (x) D^{(i)}_A (z) dx^\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

а поле A_M:

$$A(x,\ y,\ z) = dx^\mu A_\mu (x) + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\rho_1 e^2}{2\varkappa^2 k_1} \left(dy^a \theta^8_a (y) + dx^\mu G^\alpha_\mu (x) D^8_\alpha (y)\right) + $$
$$+ \frac{\rho_2 e^2}{2\varkappa^2 k_2} \left(dz^i \theta^3_i (z) + dx^\mu H^A_\mu (x) D^3_A (z)\right), \qquad (23)$$

где $G^\alpha_\mu (x)$ и $H^A_\mu (x)$ — калибровочные поля, а $D^\beta_\alpha (y)$, $D^B_A (z)$ — элементы матриц присоединенного представления SU (3)- и SU (2)-групп соответственно.

Свернутый тензор кривизны R, соответствующий (21), и компоненты тензора напряженностей поля (23) в ортогональном базисе имеют вид

$$R = R^{M^{1+3}} + R^{CP^2} + R^{S^2} + \frac{1}{4k_1} K_{\alpha a}(y) K^a_\beta(y) G^\alpha_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu\beta}(x) + \\ + \frac{1}{4k_2} \widetilde{K}_{Ai}(z) \widetilde{K}^i_B(z) H^A_{\mu\nu}(x) H^{\mu\nu B}(x); \tag{24}$$

$$F_{(M)(N)} = \Big(F_{(\mu)(\nu)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho_1 e^2}{2\varkappa^2 k_1} G^\alpha_{(\mu)(\nu)} D_\alpha{}^8(y) + \frac{\rho_2 e^2}{2\varkappa^2 k_2} H^A_{(\mu)(\nu)} D_A{}^3(z), \\ - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho_1 e^2}{2\varkappa^2} f_{(a)(b)}{}^8, \ - \frac{\rho_2 e^2}{2\varkappa^2} C_{(i)(k)}{}^3 \Big), \tag{25}$$

где

$$G^\alpha_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu G^\alpha_\mu - \partial_\nu G^\alpha_\mu + f^\alpha_{\beta\gamma} G^\beta_\mu G^\gamma_\nu; \ H^A_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu H^A_\nu - \\ - \partial_\nu H^A_\mu + C^A_{BC} H^B_\mu H^C_\nu; \ F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Подставляя (24) и (25) в действие (21) и интегрируя по объему компактного пространства с использованием интегральных свойств матриц $D^\beta_\alpha(y)$ и $D^B_A(z)$ (см. [20, 28]), можно получить лагранжиан, описывающий систему взаимодействующих полей Эйнштейна и калибровочных полей $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-группы в 4-мерном пространстве-времени:

$$L_4 = -(\det e^{(\mu)}_\nu(x)) \Big(\frac{1}{4\varkappa_4^2} R^{M^{1+3}} + \frac{1}{4g_1^2} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4g_2^2} (H^A_{\mu\nu})^2 + \\ + \frac{1}{4g_3^2} g_{\alpha\beta} G^\alpha_{\mu\nu} G^{\mu\nu\beta} \Big), \tag{26}$$

где $\varkappa_4^2 = \frac{\varkappa^2}{V}$; $g_1^2 = e^2/V$; $g_2^2 = \frac{3}{2}\rho_2^2 g_1^2$; $g_3^2 = \rho_1^2 g_1^2$($V = V^{CP^2} \cdot V^{S^2}$ — объем $CP^2 \times S^2$) — эффективные гравитационная и калибровочные константы связи $U(1)$-, $SU(2)$-, $SU(3)$-групп, соответственно. [Вид (26) соответствует случаю, когда $\Lambda = 0$ и k_1, k_2 имеют вид (19).] Интересно отметить, что константы связи в такой модели могут иметь значения, близкие к значениям констант связи стандартной модели сильного и электрослабого взаимодействий. Например, $\operatorname{tg}\theta_W = \sqrt{2} g_1/g_2 = n/\sqrt{6}$ (θ_W — угол Вайнберга, $\sqrt{2}$ возникает из-за выбранной нормировки $SU(2)$-генераторов) при $n = 2$ имеет значение $\sqrt{2/3}$, близкое к асимптотическому значению $\sqrt{3/5}$ $SU(5)$-модели Великого Объединения. После перенормировки констант связи к энергиям ~100 ГэВ, доступных современному эксперименту, $\sin^2\theta_W$ принимает значение, близкое к экспериментальному (0,22—0,23). Этот факт, впервые отмеченный в [20] при рассмотрении $d = 6$ теории Эйнштейна — Максвелла, указывает на принципиальную возможность возникновения реалистических параметров стандартной

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-модели как следствие спонтанной компактификации в К — К-теории.

Для того чтобы рассмотренная $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-вакуумная конфигурация $d = 10$ теории Эйнштейна — Максвелла могла претендовать на роль истинного К — К-вакуума, необходимо, чтобы она была стабильна. Вакуумная конфигурация классически нестабильна, если спектр возбуждений содержит тахионные моды. Результаты работ [74, 75] позволяют сделать вывод, что в рассмотренной модели тахионы отсутствуют.

Киральность фермионов. Как уже отмечалось, одной из важнейших проблем, возникающих при построении реалистической К — К-теории, является проблема получения в эффективной $d = 4$ теории спектра безмассовых вейлевских фермионов, преобразующихся по различным комплексным представлениям калибровочной группы — киральных фермионов. При компактификации M^{4+n} в $M^{1+3} \times K^n$ число безмассовых фермионов в M^{1+3} равно числу нулевых мод оператора Дирака, действующего на компактном подпространстве. Определяющим же условием возникновения киральных фермионов является существование на компактном подпространстве отличного от нуля индекса оператора Дирака. Это указывает (в силу теоремы Атьи — Зингера об индексе, см. [95]) на необходимость существования у вакуумных конфигураций полей нетривиальной топологической структуры. Как было показано Виттеном [96], киральные фермионы могут возникнуть в M^{1+3} ($M^{4+n} = M^{1+3} \times K^n$), только если исходная многомерная теория сама содержит киральные фермионы. Следовательно, размерность d многомерного пространства-времени должна быть четной.

Рассмотрим, например, 10-мерный лагранжиан для безмассового вейлевского фермионного поля, взаимодействующего минимальным образом с гравитационным и калибровочными полями $d = 10$ теории Эйнштейна — Максвелла:

$$L_F = \mathrm{i}E\overline{\Psi}\Gamma^M \hat{D}_M \Psi, \tag{27}$$

$$\Gamma^M \hat{D}_M = \Gamma^M (\partial_M + \omega_M + \mathrm{i}A_M), \quad \Psi = \Gamma_{11}\Psi.$$

Уравнение Дирака, возникающее при варьировании этого лагранжиана, имеет вид

$$\Gamma^M \hat{D}_M \Psi = 0. \tag{28}$$

В случае, когда в (28) дают вклад только поля, соответствующие основному состоянию с $M^{10} = M^{1+3} \times K^6$ [например, (14), (17)], решение уравнения (28) можно искать в виде

$$\Psi = \psi(x) \otimes \eta(Y), \tag{29}$$

где $\psi(x)$ — антикоммутирующий спинор в M^{1+3}, а $\eta(Y)$ — коммутирующий спинор в K^6. При этом Г-матрицы 10-мерного пространства удобно выбрать в виде

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes \mathrm{I},\ \Gamma_m = \gamma_5 \otimes \bar{\gamma}_m,\ \Gamma_{11} = \gamma_5 \otimes \bar{\gamma}_7 \tag{30}$$

(γ_μ, γ_5 — матрицы Дирака на M^{1+3}, $\bar{\gamma}_m$, $\bar{\gamma}_7$ — на K^6).

Уравнение Дирака (28) принимает вид

$$(\gamma^\mu \partial_\mu \psi) \otimes \eta(Y) + \gamma_5 \psi \otimes \bar{\gamma}^m \hat{D}_m \eta(Y) = 0, \tag{31}$$

из которого следует, что поле $\psi(x)$ будет безмассовым в $d = 4$, если и только если

$$\bar{\gamma}^m \hat{D}_m \eta(Y) = 0. \tag{32}$$

Отметим, что вследствие (30) вейлевский спинор Ψ может быть двумя способами представлен в виде (29):

$$\Psi = \psi_L(x) \otimes \eta_L(Y);\quad \Psi = \psi_R(x) \otimes \eta_R(Y), \tag{33}$$

где $\psi_{L,R}$ и $\eta_{L,R}$ — собственные функции операторов γ_5 и $\bar{\gamma}_7$.

Таким образом, для того чтобы в $d = 4$ возникли киральные фермионы, должно быть различное число ($N_L - N_R \neq 0$) левых (N_L) и правых (N_R) нулевых мод оператора (32), преобразующихся по эквивалентным представлениям группы симметрий основного состояния, так как все парные нулевые моды образуют векторные представления калибровочной группы. Разность $N_L - N_R$ называется индексом оператора Дирака $\bar{\gamma}^m \hat{D}_m$ и определяется с помощью теоремы Атьи — Зингера [95].

Если в оператор (32) дает вклад только спиновая связность $\omega^{(l)}_{m(n)}$, $N_L - N_R$ обращается в нуль для компактных пространств с любой топологией [96] и, следовательно, киральные фермионы не возникают. Однако если в основном состоянии отличны от нуля вакуумные средние калибровочных полей, значения которых сопоставляются значениям соответствующих компонент спиновой связности, $N_L - N_R$ становится отличной от нуля и в M^{1+3} могут возникнуть киральные фермионы.

Например, в рассмотренной нами модели 10-мерной К — К-теории с $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-симметричным вакуумом присутствие монополей на S^2 и CP^2 как бы «подавляет» часть нулевых мод одной из киральностей и обеспечивает образование киральных фермионов в эффективной $d = 4$ теории [11, 45, 50].

Подробно проблема киральности в теориях Калуцы — Клейна изучалась в [34—37, 96].

4. СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В $d = 11$ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Механизмы спонтанной компактификации в $d = 11$ СГ стали изучаться особенно интенсивно после работы Виттена [34], в которой качественно была рассмотрена возможность образования 7-мерного компактного подпространства с группой симметрий $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, соответствующей группе сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий физического сектора теории.

В данном разделе мы рассмотрим структуру компактных вакуумных конфигураций $d = 11$ СГ, возникающих в результате действия механизма спонтанной компактификации Фройнда — Рубина [51], а также механизма сопоставления связностей, обобщенного на случай антисимметричных калибровочных полей [47—49, 69, 70].

Супермультиплет $N = 1$, $d = 11$ СГ состоит из гравитационного поля $e^{(\hat{M})}_{\hat{N}}(\hat{X})$, майорановского поля Рарита — Швингера $\Psi_{\hat{M}}$ и антисимметричного абелева поля $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$ ($\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{L} = 1, \ldots, 11$), определяющего кручение 11-мерного пространства [97, 98].

Будем считать (как это обычно предполагается при рассмотрении компактификации на классическом уровне), что фермионные поля не участвуют в образовании компактных подпространств ($\langle\Psi_{\hat{M}}\rangle = \langle\bar{\Psi}\Psi\rangle = 0$), и будем рассматривать только бозонный сектор теории. Наложение такого условия приводит к изучению вакуумных конфигураций, обладающих наиболее высокими симметриями. Лагранжиан бозонного сектора 11-мерной СГ имеет вид [2]:

$$L = -E\Big(\frac{1}{4\varkappa^2}R + \frac{1}{48}(F_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}\hat{P}})^2 - \\ -\frac{2\varkappa}{(6\cdot 4!)^2 E}\,\varepsilon^{\hat{M}_1\ldots\hat{M}_{11}}F_{\hat{M}_1\ldots\hat{M}_4}F_{\hat{M}_5\ldots\hat{M}_8}A_{\hat{M}_9\hat{M}_{10}\hat{M}_{11}}\Big), \tag{34}$$

где $F_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}\hat{P}} = 4\partial_{[\hat{M}}A_{\hat{N}\hat{L}\hat{P}]}$ — тензор напряженностей антисимметричного калибровочного поля $A_{\hat{N}\hat{L}\hat{P}}$; [ ] — операция антисимметризации с делением на число перестановок индексов.

В лагранжиане (34) все взаимодействия определяются одной константой связи — гравитационной константой $\varkappa$, размерность которой $l^{\frac{d-2}{2}}$, где l — размерность длины. В последующих формулах мы будем полагать $\varkappa$ равной единице.

Уравнения движения для полей $e^{(\hat{M})}_{\hat{N}}$ и $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$, следующие из лагранжиана (34), имеют вид

$$R_{\hat{M}\hat{N}} - \frac{1}{2}g_{\hat{M}\hat{N}}R = -2T_{\hat{M}\hat{N}}; \tag{35}$$

$$\nabla_{\hat{M}}F^{\hat{M}\hat{L}\hat{N}\hat{P}} = -\frac{1}{(4!)^2 E}\,\varepsilon^{\hat{M}_1\ldots\hat{M}_8\hat{L}\hat{N}\hat{P}}F_{\hat{M}_1\ldots\hat{M}_4}F_{\hat{M}_5\ldots\hat{M}_8}, \tag{36}$$

где $T_{\hat{M}\hat{N}}$ — тензор энергии-импульса калибровочных полей $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{P}}$:

$$T_{\hat{M}\hat{N}} = \frac{1}{6}\left(F_{\hat{M}\hat{L}\hat{K}\hat{P}} F_{\hat{N}}^{\hat{L}\hat{K}\hat{P}} - \frac{1}{8}\left((F_{\hat{L}\hat{K}\hat{P}\hat{S}})^2 g_{\hat{M}\hat{N}}\right)\right). \tag{37}$$

Механизм спонтанной компактификации Фройнда — Рубина. Наиболее простым и естественным, а поэтому наиболее популярным механизмом спонтанной компактификации $d = 11$ СГ является механизм Фройнда — Рубина [59], в котором компактификация 11-мерного пространства в прямое произведение пространства-времени M^{1+3} и 7-мерного компактного пространства обеспечивается «вакуумным конденсатом» поля $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$, тензор напряженностей которого имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$\langle F_{\mu\nu\lambda\rho}\rangle = (\det e_{\delta}^{(\sigma)}(x))\, 3m\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{38}$$

где m — параметр, характеризующий размер компактифицированного подпространства. Отметим, что тензор напряженностей (38) удовлетворяет условию параллелизуемости ($\Delta_\mu F_{\nu\lambda\rho\sigma} = 0$), аналогичному (8). При этом решения уравнений движения полей бозонного сектора $d = 11$ СГ (35), (36) определяют вакуумную конфигурацию пространства-времени как прямое произведение 4- и 7-мерных пространств Эйнштейна, тензоры Риччи которых задаются равенствами

$$R_{\mu\nu} = 12m^2 g_{\mu\nu}(x), \tag{39}$$

$$R_{\hat{m}\hat{n}} = -6m^2 g_{\hat{m}\hat{n}}(\hat{Y}), \tag{40}$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрика 4-мерного пространства-времени, которое мы всегда будем считать антидеситтеровским пространством; $g_{\hat{m}\hat{n}}(\hat{Y})$ — метрика 7-мерного пространства с координатами $\hat{Y}$.

Отметим, что нет решений (39), отвечающих плоскому 4-мерному пространству-времени, кроме случаев, когда кривизна компактного подпространства равна нулю ($m = 0$). С другой стороны, если накладывается требование малости размеров компактного подпространства, это приводит к появлению большого космологического члена в эффективной 4-мерной теории. Указанное обстоятельство является важной, но еще не решенной проблемой теорий Калуцы — Клейна, основанных на $d = 10{,}11$ СГ, и связано с невозможностью включения в эти варианты СГ исходного космологического члена, который смог бы компенсировать эффективный 4-мерный космологический член так, как это имеет место в многомерной теории Эйнштейна — Янга — Миллса (см. разд. 2,3). Одно из возможных решений этого вопроса было предложено Даффом и Орзалези [57], а также Ву [58], Канделасом и Рейном [85] и связано с учетом ненулевых вакуумных средних билинейных комбинаций фермионных полей, дающих вклад в кручение компактифицированного подпространства и приводящих к уплощению 4-мерного пространства-времени.

Существует бесконечное множество решений Фройнда — Рубина, характеризуемых соотношениями (39) и (40). Основная задача состоит в том, чтобы из этого набора выделить кандидатов на наиболее содержательные вакуумные конфигурации теории. Отбор вакуумных конфигураций проводится в предположении, что основные состояния должны быть стабильными и обладать достаточно высокой симметрией. Заметим, однако, что истинный квантовомеханический вакуум может определяться суперпозицией различных вакуумных конфигураций с учетом возможных туннельных переходов из одной конфигурации в другую.

Было показано, что нестабильными являются решения, в которых 7-мерное пространство представляет собой прямое произведение пространств, например $CP^2 \times S^3$, $S^4 \times S^3$. [76]. Компактификация в такие пространства полностью нарушает суперсимметрию в эффективной 4-мерной теории. Напротив, компактные вакуумные конфигурации, сохраняющие СУСИ в $d = 4$, а также пространственные конфигурации, получающиеся из суперсимметричных путем изменения ориентации (т. е. замены филбайнов $e^{(\hat{m})}_{\hat{n}} \to -e^{(\hat{m})}_{\hat{n}}$) и нарушающие СУСИ, являются классически стабильными [76].

Число ненарушенных СУСИ в решениях Фройнда — Рубина характеризуется числом майорановских спиноров η (киллинговых спиноров) 7-мерного компактного подпространства, удовлетворяющих уравнению [60—63]

$$\left(\partial_{\hat{m}} - \frac{1}{4}\,\omega_{\hat{m}}{}^{(\hat{n})(\hat{l})}\Gamma_{(\hat{n})(\hat{l})} - \frac{1}{2}\,me^{(\hat{n})}_{\hat{m}}\,\Gamma_{(\hat{n})}\right)\eta = 0, \tag{41}$$

где $\Gamma_{(\hat{n})}$ — матрицы Дирака размерности 8×8. Уравнение (41) следует из требования инвариантности основного состояния относительно суперпреобразований. В частности, должна обращаться в нуль супервариация поля Рарита — Швингера:

$$\delta\langle\Psi_{\hat{M}}\rangle = \left(\nabla_{\hat{M}} + \frac{i}{144}\left(\Gamma_{\hat{M}}^{\hat{N}\hat{L}\hat{P}\hat{Q}} - 8\delta_{\hat{M}}^{[\hat{N}}\Gamma^{\hat{L}\hat{P}\hat{Q}]}\right)F_{\hat{N}\hat{L}\hat{P}\hat{Q}}\right)(\varepsilon \otimes \eta) = 0 \tag{42}$$

($\Gamma_{\hat{M}}$ — 11-мерные матрицы Дирака; $\varepsilon(x)$ — параметр суперпреобразований в $d = 4$). Из (41) видно, что изменение ориентации пространства K^7 эквивалентно изменению знака у параметра m. Условием интегрируемости (41) является уравнение

$$C_{(\hat{m})(\hat{n})}{}^{(\hat{l})(\hat{p})}\Gamma_{(\hat{l})}\Gamma_{(\hat{p})}\eta = \left(R_{(\hat{m})(\hat{n})}{}^{(\hat{l})(\hat{p})} - m^2\delta^{(\hat{l})}_{[(\hat{m})}\delta^{(\hat{p})}_{(\hat{n})]}\right)\Gamma_{(\hat{l})}\Gamma_{(\hat{p})}\eta = 0. \tag{43}$$

Матрицы $C_{(\hat{m})(\hat{n})} = C_{(\hat{m})(\hat{n})}^{(\hat{l})(\hat{p})}\Gamma_{(\hat{l})}\Gamma_{(\hat{p})}$ и все их коммутаторы генерируют группу голономии тензора $C_{(\hat{m})(\hat{n})}$, являющуюся подгруппой

Таблица 1. **Решения Фройнда—Рубина $d=11$ СГ**

Компактные 7-мерные пространства	Группа голономии тензора C_{mn}	Число СУСИ в $d=4$	Группа инвариантности вакуума
$T^7=T^6\times S^1$	I	$N=8$	Суперпуанкаре $\times$ $\times U(1)^7$
$S^7=P(CP^3,\ S^1)\sim U(4)/U(3)\sim$ $\sim P(E(S^4,\ S^2,\ SU(2)),\ S^1)\sim$ $\sim E(S^4,\ S^3,\ SU(2))\sim P(S^4, SU(2))$	I	$N=8$	$OSp(4,\ 8)$
$K3\times T^3=(K3\times T^2)\times S^1$	$SU(2)$	$N=4$	Суперпуанкаре $\times$ $\times U(1)^3$
$\frac{SU(3)}{U(1)}\sim P(E(CP^2,\ S^2,\ SU(2)), S^1)\sim$ $\sim E(CP^2,\ S^3,\ SU(2))\sim P(CP^2.$ $SU(2))\sim SU(3)\times SU(2)/SO(2)\times U(1)$	$SU(2)$	$N=3$	$OSp(4,3)\times SU(3)$
$\frac{SU(3)\times SU(2)\times U(1)}{SU(2)\times U'(1)\times U''(1)}\sim P(CP^2\times$ $\times S^2,\ S^1)$	$SU(3)$	$N=2$	$OSp(4,\ 2)\times$ $\times SU(3)\times SU(2)$
	$SO(7)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(3)\times$ $\times SU(2)\times U(1)$
$\frac{SO(5)\times SO(2)}{SO(3)\times SO(2)}\sim P\left(\frac{SO(5)}{SO(3)\times SO(2)},\right.$ $\left.S^1\right)$	$SU(3)$	$N=2$	$OSp(4,2)\times SO(5)$
$(SU(2)^3\times U(1))/U(1)^3\sim P(S^2\times S^2\times$ $\times S^2,\ S^1)$	$SU(3)$	$N=2$	$OSp(4,\ 2)\times SU(2)^3$
	$SO(7)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(2)^3\times$ $\times U(1)$
$CY\times S^1$*	$SU(3)$	$N=2$	Суперпуанкаре $\times$ $\times U(1)$
Squashed $S^7\sim P(E(S^4,\ S^2,\ SU(2)),$ $S^1)\sim E(S^4,\ S^3,\ SU(2))\sim P(S^4,$ $SU(2))\sim(SO(5)\times SU(2))/SU'(2)\times$ $\times SU''(2)$	G_2	$N=1$	$OSp(4,1)\times SO(5)\times$ $\times SU(2)$
Squashed $\frac{SU(3)}{U(1)}\sim P(CP^2,\ SU(2))\sim$ $\sim P(E(CP^2,\ S^2,\ SU(2)),\ S^1)\sim$ $\sim E(CP^2, S^3, SU(2))\sim\frac{SU(3)\times SU(2)}{SU'(2)\times U(1)}$	G_2	$N=1$	$OSp(4,1)\times SU(3)\times$ $\times SU(2)$

Продолжение табл. 1

Компактные 7-мерные пространства	Группа голономии тензора C_{mn}	Число СУСИ в $d=4$	Группа инвариантности вакуума
$\frac{SU(3)\times U(1)}{U'(1)\times U''(1)} \sim P\left(\frac{SU(3)}{U(1)\times U'(1)}, S^1\right)$	G_2	$N=1$	$OSp(4,1)\times SU(3)\times \times U(1)$
$S^4\times S^3 = P(S^4\times S^2, S^1)$	$SO(7)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SO(5)\times \times SO(4)$
$\frac{SU(3)}{SO(3)}\times S^2$	$SO(7)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(3)\times \times SO(3)$
$SO(5)/SO(3)$ max	G_2	$N=1$	$OSp(4,1)\times SO(5)$

* О пространствах Калаби — Яу см. в разд. 6.

группы Spin (7). Поэтому число решений уравнения (43) равно числу синглетных представлений этой подгруппы [99].

Примером суперсимметричных вакуумных конфигураций Фройнда — Рубина может служить 7-мерная сфера с группой симметрий $SO(8)$, сохраняющая $N = 8$ СУСИ в $d = 4$ теории (по предположению [22]) эквивалентной $N = 8$ СГ де Витта, Николаи [10]; «squashed» S^7-сфера (т. е. многообразие, которое топологически эквивалентно стандартной S^7-сфере, но имеет другую эйнштейновскую метрику) с симметрией $SO(5)\times SU(2) \sim \mathrm{Sp}(4)\times \mathrm{Sp}(2)$ и $N = 1$ СУСИ (обзор решений Фройнда — Рубина и Энглерта с топологией 7-мерной сферы дан в [4, 62]); пространства $\frac{SU(3)\times SU(2)\times U(1)}{SU(2)\times U'(1)\times U''(1)}$, подкласс которых допускает сохранение $N = 2$ СУСИ [63]; $\frac{SU(3)\times U(1)}{U'(1)\times U''(1)}$ — пространства с $N = 3{,}1$ СУСИ [47, 48, 64, 67, 68] и ряд других [47, 48, 65, 66, 100].

Перечень 7-мерных компактных пространств, являющихся решениями Фройнда — Рубина $d = 11$ СГ, приведен в табл. 1.

$AdS^5\times G/(H\times H_0)$-вакуумные конфигурации в $d = 11$ СГ. Помимо механизма Фройнда — Рубина в $d = 11$ СГ были обнаружены другие механизмы спонтанной компактификации подпространств. В частности, Энглерт [54] рассмотрел возможность участия в образовании компактного подпространства M^7 не только поля Фройнда — Рубина, но вакуумных средних поля $\langle A_{mnl}\rangle$ с индексами пространства K^7, которые играют роль кручения этих пространств. Подробно с результатами исследования 11-мерной СГ Калуцы — Клейна можно ознакомиться в обзоре [22].

Мы рассмотрим иной возможный механизм спонтанной компактификации $d = 11$ СГ, приводящий к вакуумным конфигурациям 11-

мерного пространства-времени, представляющих собой прямое произведение 5-мерного пространства AdS^5 и 6-мерного симметрического пространства $K^6 = \frac{G}{H \times H_0}$ [69, 70]. Компактификация в этом случае обеспечивается механизмом сопоставления связностей, обобщенным на случай антисимметричных калибровочных полей.

Решения уравнений (35) и (36) для $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$ или, что эквивалентно, для $F_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}\hat{P}}$, обеспечивающие спонтанную компактификацию, имеют отличные от нуля значения только для компонент с индексами компактного пространства и в ортогональном базисе выражаются через структурные константы группы G, один из индексов (0) которых отвечает абелевой подгруппе H_0, а другие — пространству $\frac{G}{H \times H_0}$:

$$F_{(m)(n)(l)(p)} = -\rho C_{[(m)(n)}{}^0 C_{(l)(p)]}{}^0; \tag{44}$$

примерами возможных пространств M^6 являются CP^3, $CP^2 \times S^2$, $S^4 \times S^2$, $\frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)}$.

Отметим, что в результате действия рассматриваемого механизма компактификации могут образовываться только симметрические пространства K^6, так как тензор напряженностей (44) должен удовлетворять уравнениям движения (36), что возможно, когда $\nabla_l C^0_{(m)(n)} = 0$, а это условие выполняется, только если пространство $K^6 = \frac{G}{H \times H_0}$ — симметрическое (см. разд. 2).

Возможность последующей компактификации пяти измерений в прямое произведение 4-мерного пространства Минковского и S^1-сферы связана с решением проблемы космологического члена и не может быть решена в рамках рассматриваемого механизма компактификации.

Рассмотрим подробнее случай, когда компактное пространство K^6 представляет собой прямое произведение пространства CP^2 и S^2-сферы. Группой симметрии такого К — К-вакуума является группа $SO(4, 2) \times SU(3) \times SU(2)$ [69, 70].

Для нахождения решений уравнений (35) и (36), для которых метрика имеет вид

$$g_{\hat{M}\hat{N}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 & 0 \\ 0 & g_{ab}(y) & 0 \\ 0 & 0 & g_{ik}(z) \end{pmatrix}, \tag{45}$$

(где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрика AdS^5, а 6-мерное подпространство дополнительных измерений является $CP^2 \times S^2$-симметрическим пространством со структурой, определяемой (14)), предположим, что отличными от нуля значениями тензора напряженностей $F_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}\hat{P}}$ калибровочных полей $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$ являются компоненты

$$\langle F_{abcd}\rangle = F_{abcd}(y); \qquad \langle F_{ikab}\rangle = F_{ikab}(y,\ z) \tag{46}$$

и эти компоненты удовлетворяют условию параллелизуемости, обобщающему условия (8) на случай тензорных калибровочных полей:

$$\nabla_f F_{abcd} = \nabla_d F_{ikab} = \nabla_j F_{ikcd} = 0. \tag{47}$$

Выполнение условия (47) приводит к тому, что уравнения движения (36) тождественно удовлетворяются.

Из (47) находим следующие значения для компонент (46) тензора напряженностей в ортогональном базисе:

$$\begin{aligned} F_{(a)(b)(c)(d)} &= -3\rho_1 f_{[(a)(b)}{}^8 f_{(c)(d)]}{}^8; \\ F_{(i)(k)(a)(b)} &= -\rho C_{(i)(k)}{}^3 f_{(a)(b)}{}^8, \end{aligned} \tag{48}$$

где ρ_1 и ρ_2 — произвольные параметры.

Используемый здесь метод основывается на нахождении явноковариантных величин, т. е. тензоров напряженностей. Переход к калибровочным полям, так же как в [29—31, 91], осуществляется стандартным образом с использованием форм Картана. Для компонент антисимметричного калибровочного поля A_{abc}, A_{abi} и A_{ika} получаем следующие выражения через $\theta_a^8\,(y)$- и $\theta_i^3\,(z)$-компоненты форм Картана, соответствующие $U\,(1)$-подгруппам $SU\,(3)$- и $SU\,(2)$-групп:

$$\left.\begin{aligned} A_{abc} &= \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{k_1} f_{(a)(b)}{}^8 e_{[a}^{(a)} e_b^{(b)} \theta_{c]}^8; \\ A_{ika} &= \frac{\rho_2}{k_1} C_{(j)(l)}{}^3 e_i^{(j)} e_k^{(l)} \theta_a^8\,(y); \\ A_{abi} &= \frac{\rho_3}{k_2} f_{(a)(b)}{}^8 e_a^{(a)} e_b^{(b)} \theta_i^3\,(z), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $\rho_2 + \rho_3 = \rho$ — параметр в определении напряженности F_{ikab}. Из уравнения (35), учитывая (14) и вклад в тензор энергии-импульса (37) вакуумных решений, получаем следующие значения для кривизн k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{1}{6}(\rho_1^2 + \rho^2); \; k_2 = \frac{1}{6}\left(4\rho^2 - \frac{1}{2}\rho_1^2\right). \tag{50}$$

Для того чтобы k_1 и k_2 были положительными, ρ и ρ_1 должны удовлетворять неравенству $\rho^2 > (1/8)\,\rho_1^2$. Из уравнения (35) следует, что 5-мерное пространство, задаваемое тензором кривизны (14а) ($d' = 5$), является антидеситтеровским пространством с Λ, зависящим от величин, характеризующих вакуумные решения (48):

$$\Lambda = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\rho_1^2 + \rho^2\right). \tag{51}$$

Таким образом, возможность спонтанной компактификации 11-мерного пространства в $AdS^5 \times CP^2 \times S^2$ вследствие взаимодействия гравитационного $e^{(\hat{M})}_{\hat{N}}$ и калибровочного $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$ полей (так же, как и в теориях Эйнштейна — Янга — Миллса, разд. 2,3) существенным образом связана со структурой группы голономии CP^2-пространства, позволяющей сопоставить определенным компонентам калибровочного поля $A_{\hat{M}\hat{N}\hat{L}}$ [см. (49)] только ту часть связности на CP^2-пространстве, которая задается $U(1)$-подгруппой группы $SU(3)$. Отметим еще раз, что последующее выделение в 5-мерном пространстве-времени M^{1+4} конфигурации основного состояния $M^{1+3} \times S^1$ не имеет последовательного решения без решения проблемы космологического члена в рассматриваемом варианте СГ. Однако в рамках предложенного механизма спонтанной компактификации можно изучать космологические модели, в которых расширение 5-мерной Вселенной происходит значительно быстрее в трех пространственных направлениях, чем в четвертом [70].

Теории Калуцы — Клейна, основывающиеся на $d = 11$ СГ, как уже отмечалось, сталкиваются с серьезной трудностью — отсутствием в 4-мерной теории киральных фермионов. Один из путей решения этой проблемы — рассмотрение преонных моделей на основе скрытых групп симметрий типа $SU(8)$ в $N = 8$ СГ [19, 22]. Такой путь в настоящее время представляется, однако, неперспективным ввиду больших сложностей, связанных с описанием динамики частиц составных моделей.

Другая возможность — изучение влияния на фермионный спектр монополей Калуцы — Клейна [101, 102]. Возникновение таких монополей приводит к более сложной (расслоенной) структуре пространства основного состояния (отличающейся от структуры прямого произведения пространств) и, как предполагается в [87], может обеспечить образование киральных фермионов.

5. СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ В $d = 10$ СУПЕРГРАВИТАЦИЯХ

В настоящее время известны три варианта супергравитации в 10-мерном пространстве-времени. Все они могут быть получены как низкоэнергетические пределы 10-мерных теорий суперструны [42]:

а) $N = 1$, $d = 10$ СГ, взаимодействующая с $N = 1$ полями Янга — Миллса, возникает как низкоэнергетический предел 10-мерных теорий взаимодействующих открытой и замкнутой суперструн [4, 44, 45] или гетерозисной струны [43];

б) киральный и в) некиральный варианты $N = 2$, $d = 10$ СГ могут быть получены из $d = 10$ теории замкнутой суперструны. Кроме того, некиральная $N = 2$, $d = 10$ СГ получается из $d = 11$ СГ методом размерной редукции [5—7].

В киральной $N = 2$, $d = 10$ СГ не найдено пока достаточно интересных с физической точки зрения К — К-вакуумов. Перечень известных решений можно найти в работах [103]. Отметим, что структура вакуумных конфигураций с $M^{10} = M^{1+4} \times K^5$ может быть исследована, так же как и в $d = 11$ СГ, с помощью механизма сопоставления связностей [48, 49].

Возможности реалистической спонтанной компактификации $N = 1$, $d = 10$ СГ, взаимодействующей с $N = 1$ полями Янга — Миллса, рассматриваются в следующем разделе.

В настоящем разделе мы рассмотрим варианты спонтанной компактификации некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ и связь 10-мерных компактных вакуумных конфигураций с решениями Фройнда — Рубина 11-мерной теории.

Спонтанная компактификация в некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ. $N = 2$, $d = 10$ СГ возникает вследствие компактификации одного измерения $d = 11$ СГ в S^1-сферу и требования независимости всех полей от координаты S^1. Супермультиплеты $N = 2$, $d = 10$ СГ содержат гравитационное поле $e_N^{(M)}$, антисимметричные поля A_{MNL}, B_{MN}, «максвелловское» поле A_M, скаляр $\phi = \exp\sigma$, майорановское поле Рарита — Швингера ψ_M и спинорное поле λ, которые могут быть разложены на вейлевские компоненты [5, 6].

Поля A_M и ϕ появляются в $d = 10$ вследствие выбора метрики $d = 11$ пространства в виде

$$g_{\hat{M}\hat{N}} = \begin{pmatrix} \phi^{-\frac{1}{4}} g_{MN}(X) + R_0^2\phi^2 A_M(X) A_N(X) & R_0\phi^2 A_M(X) \\ R_0\phi^2 A_N(X) & \phi^2(X) \end{pmatrix}, \qquad (52)$$

где $g_{MN}(X)$ — 10-мерная метрика; R_0 — радиус S^1-сферы.

Вид метрики (52) такой же, как и в классической 5-мерной К — К-теории.

Как обычно при нахождении классических вакуумных конфигураций, значения фермионных полей полагаются равными нулю и рассматриваются уравнения бозонного сектора $N = 2$, $d = 10$ СГ, которые имеют вид [5, 6]

$$R_{MN} = \frac{9}{8}\partial_M\sigma\partial_N\sigma + \frac{R_0^2}{2}\exp\left(\frac{9}{4}\sigma\right)\left[F_{MP}F_N^{\mathrm{P}} - \frac{1}{16}g_{MN}(F_{PQ})^2\right] +$$
$$+ \exp\left(-\frac{3}{2}\sigma\right)\left[H_{MPQ}H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{PQ}} - \frac{1}{12}g_{MN}(H_{PQR})^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3}\exp\left(\frac{3}{4}\sigma\right)\left[F'_{MPQR}F_N'^{PQR} - \frac{3}{32}g_{MN}(F'_{PQRS})^2\right]; \qquad (53)$$

$$-36\,\Box\,\sigma + 9\exp\left(\frac{9}{4}\sigma\right)(F_{MN})^2 R_0^2 - 8\exp\left(-\frac{3}{2}\sigma\right)(H_{MNP})^2 +$$
$$+ \exp\left(\frac{3}{4}\sigma\right)(F'_{MNPQ})^2 = 0, \qquad (54)$$

где $F'_{MNPQ} = F_{MNPQ} + 4R_0A_{[M}H_{NPQ]}$; $H_{NPQ} = \partial_{[N}B_{PQ]}$.

Кроме того, имеются уравнения Максвелла для полей A_{MNL}, B_{MN} и A_M, аналогичные уравнению (36) $d = 11$ СГ. Явный вид этих уравнений здесь не приводится, так как в рассматриваемом механизме спонтанной компактификации они удовлетворяются тождественно.

Из уравнений (53) и (54) видно, что для компактификации шести дополнительных координат $N = 2$, $d = 10$ СГ уже не достаточно присутствия одного вакуумного поля Фройнда — Рубина (38), как это имело место в 11-мерной теории. Необходимо также, чтобы поле A_M имело нетривиальные вакуумные значения на компактном пространстве. Это связано с тем, что уравнения движения скалярного поля σ (54) требуют выполнения следующего соотношения для вакуумных значений A_M и $A_{MNL}(\langle\sigma\rangle = \langle B_{MN}\rangle = 0)$:

$$\langle F_{MNLP}\rangle^2 + 9R_0^2\,\langle F_{MN}\rangle^2 = 0. \tag{55}$$

В разд. 3 были указаны возможности спонтанной компактификации 10-мерной теории Эйнштейна — Максвелла, являющейся составной частью некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ. Из уравнений (53)—(55) видно, что все эти возможности реализуются и в полной $N = 2$, $d = 10$ теории, когда F_{MNLP} выбраны в виде (38), а F_{MN} имеют вид

$$\langle F_{(\mu)(\nu)}\rangle = 0;\ \langle F_{(m)(n)}\rangle = -\frac{\rho}{R_0^2}\,C_{(m)(n)}{}^0, \tag{56}$$

где $C_{(m)(n)}{}^0$ — структурные константы группы симметрий $K^6 = \dfrac{G}{H\times H_0}$ (0 — индекс H_0); ρ — числовой параметр, область значений которого может быть ограничена топологией K^6. При этом соотношение (55) определяет связь параметра Фройнда — Рубина m^2 с параметром ρ^2, характеризующим масштаб компактификации подпространств абелевым полем (56). Таким образом, компактные пространства K^6, перечисленные в (12), являются решениями некиральной $N = 2$, $d = 10$ СГ. Однако в отличие от $d = 10$ теории Эйнштейна — Максвелла (см. разд. 3) в рассмотренном варианте супергравитации существуют трудности с образованием в 4-мерном пространстве киральных фермионов, так как отсутствует минимальное взаимодействие поля A_M с исходными спинорными полями.

Свойства известных вакуумных конфигураций $N = 2$, $d = 10$ СГ приведены в табл. 2.

Взаимосвязь $d = 11$ и $d = 10$ вакуумных конфигураций. Так как $N = 2$, $d = 10$ СГ получается в результате редукции $d = 11$ СГ, а перечисленные выше решения $d = 10$ теории возникают в результате действия комбинированного механизма компактификации, включающего поле Фройнда — Рубина и абелево калибровочное поле A_M (появляющееся в $d = 10$ СГ как следствие компактификации одного измерения в S^1 в духе Калуцы — Клейна), естественно предположить, что все $d = 10$ вакуумные решения такого типа должны быть свя-

Таблица 2. **Вакуумные конфигурации некиральной $N=2$, $d=10$ СГ**

Компактные подпространства K^6	Число СУСИ в $d=4$	Группа симметрий вакуума
T^6 $(m^2=0)$	$N=8$	суперпуанкаре $\times U(1)^7$
$CP^3=SU(4)/SU(3)\times U(1)$	$N=6$	$OSp(4,6)\times SU(4)\times U(1)$
$K3\times T^2$ $(m^2=0)$	$N=4$	суперпуанкаре $\times U(1)^3$
Squashed $CP^3=\dfrac{\mathrm{Sp}(4)}{\mathrm{Sp}(2)\times U(1)}=\dfrac{SO(5)}{SU(2)\times U(1)}$	$N=1$	$OSp(4,1)\times SO(5)\times U(1)$
$SU(3)/U(1)\times U'(1)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(3)\times SU(2)\times$ $\times U(1)$
$S^4\times S^2$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(5)\times SU(2)\times$ $\times U(1)$
$S^2\times S^2\times S^2$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(2)^3\times U(1)$
$O(5)/SO(3)\times SO(2)$	$N=0$	$SO(3,2)\times SO(5)\times U(1)$
$CP^2\times S^2$	$N=0$	$SO(3,2)\times SU(3)\times SU(2)\times$ $\times U(1)$
CY $(m^2=0)$	$N=1$	суперпуанкаре

заны с соответствующими решениями Фройнда — Рубина $d=11$ теории.

Такая связь была установлена в [5, 47—50] и заключается в том, что соответствующие $d=10$ решениям вакуумные конфигурации $d=11$ СГ могут быть представлены в виде расслоений $K^7=P(K^6, S^1)$ с базой K^6, структурной группой $U(1)\sim S^1$ и определенным выбором связности в расслоении, соответствующем вакуумным решениям для поля A_M в $d=10$ теории (см. табл. 1). С физической точки зрения это означает, что спонтанная компактификация в $d=11$ СГ может происходить последовательно: на первом этапе образуется S^1 цикл и поле A_M (как это было в классической К — К-теории), а на втором этапе поле A_M совместно с полем A_{MNL} обеспечивает компактификацию шести дополнительных измерений. Более того, в случае S^7 и $\frac{SU(3)}{U(1)}$ компактификация может происходить в три этапа: первый происходит так же, как описано выше, а на втором этапе A_M обеспечивает компактификацию 2-мерного подпространства в S^2 и образование калибровочных полей $SU(2)$-группы инстантонного типа, которые на третьем этапе обеспечивают компактификацию 4-мерного подпространства. Геометрически это означает, что K^6, в свою очередь, может быть ассоциированным расслоенным пространством E (K^4, S^2, SU (2)) с базой K^4, слоем S^2 и структурной группой SU (2).

Нужно подчеркнуть, что, несмотря на указанное соответствие между вакуумами обеих теорий, эффективные 4-мерные теории, возникающие в результате компактификации $d = 10$ и 11 СГ, будут различны, так как вследствие редукции $N = 2$, $d = 10$ СГ не содержит весь спектр полей $d = 11$ теории. Это различие проявляется уже при изучении суперсимметрий соответствующих 4-мерных теорий [49, 50].

Все вакуумные конфигурации $N = 2$, $d = 10$ СГ, соответствующие $d = 11$ вакуумам с $N > 1$ СУСИ и параметром Фройнда — Рубина, отличным от нуля ($m^2 \neq 0$), содержат на две суперсимметрии меньше (см. табл. 1, 2). Например, вакуумная конфигурация с $K^6 = CP^3$, соответствующая «круглой» сфере S^7 в $d = 11$ с $N = 8$ СУСИ, обладает $N = 6$ СУСИ, а основное состояние с $K^6 = CP^2 \times S^2$ (связанное с $K^7 = \frac{SU(3)\times SU(2)\times U(1)}{SU'(2)\times U'(1)\times U''(1)}$ и $N = 2$ СУСИ) не обладает суперсимметрией вовсе.

Число суперсимметрий, сохраняющихся в $d = 4$, одинаково для взаимосвязанных $d = 11$ и $d = 10$ вакуумов в том случае, если $d = 11$ вакуумные конфигурации обладают $N = 1$ СУСИ или компактное подпространство основного состояния является риччиплоским ($m^2 = 0$) (табл. 1, 2).

6. НА ПУТИ ПОСТРОЕНИЯ РЕАЛИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА

В предыдущих разделах мы рассматривали механизмы спонтанной компактификации в теориях Калуцы — Клейна (например, $N = 1$, $d = 11$ и $N = 2$, $d = 10$ СГ), основываясь на принципе «экономности», который заключается в том, что исходная теория должна содержать минимум негравитационных полей (в частности, калибровочных) и поэтому необходимо обеспечить возникновение более высокой группы внутренних симметрий за счет минимального числа калибровочных полей, участвующих в компактификации. Однако после того как в конце 1984 г. в «модернизированной» $N = 1$ $d = 10$ СГ, взаимодействующей с полями $N = 1$ СУСИ Янга — Милса SO (32)- и $E_8 \times E_8$-групп, а также в теории суперструны типа I с калибровочной группой SO (32) [44, 45] (низкоэнергетическим пределом которой является $N = 1$, $d = 10$ СГ + SO (32)ЯМ) было обнаружено сокращение всех аномалий, началось интенсивное изучение этих, содержащих большой набор калибровочных полей теорий в рамках подхода Калуцы — Клейна.

Так как группа $E_8 \times E_8$ не может быть калибровочной группой суперструны типа I [42], а $N = 1$, $d = 10$ СГ $+ E_8 \times E_8$ ЯМ является безаномальной квантовой теорией, было высказано предположение, что эта теория является низкоэнергетическим пределом новой теории струны, основой которой является бозонная струна в $d = 26$ [104]. Такая теория была построена [43] и названа гетерозисной (гибридной) струной (смесь бозонной 26-мерной и фермионной 10-мерной струн).

Калибровочные поля, которые возникают в такой теории как безмассовые колебания струны, могут преобразовываться только по группе SO (32) или $E_8 \times E_8$.

Основные преимущества SO (32)- и $E_8 \times E_8$-теорий по сравнению с рассматриваемыми ранее следующие:

1. Есть серьезные основания полагать [89], что суперструна типа I и новые гетерозисные струны с калибровочными группами SO (32) и $E_8 \times E_8$ могут оказаться теориями, полностью свободными от расходимостей (т. е. математически непротиворечивыми квантовыми теориями гравитации).

2. Низкоэнергетические пределы этих теорий ($N = 1$, $d = 10$ СГ $+$ SO (32) или $E_8 \times E_8$ ЯМ) содержат минимальное взаимодействие майоранавейлевских фермионов с калибровочными полями, что (как отмечалось выше) может в результате действия механизма сопоставления связностей привести к возникновению в $d = 4$ киральных фермионов, а это, в свою очередь, указывает на возможность построения реалистической с феноменологической точки зрения теории.

Рассмотрим, следуя работе [33], каким образом в $N = 1$, $d = 10$ СГ, взаимодействующей с $E_8 \times E_8$ теорией супер Янга — Миллса [есть основания полагать, что калибровочная группа $E_8 \times E_8$ более приемлема для феноменологии, чем SO (32)], может произойти спонтанная компактификация, приводящая к реалистической эффективной $d = 4$ теории. Отметим, что, рассматривая такую теорию, мы можем отказаться от принципа «экономности», так как исходная калибровочная группа велика. Более того, теперь одной из задач является нарушение этой группы таким образом, чтобы в результате возникла реалистическая 4-мерная теория Великого Объединения.

Состав супермультиплетов $N = 1$, $d = 10$ СГ $+$ ЯМ следующий: $(e_N^{(M)}, \psi_M, B_{MN}, \lambda, \phi)$ — гравитационный супермультиплет (см. разд. 5); $(A_M^\alpha, \chi^\alpha)$ — калибровочный супермультиплет (χ^α — майоранавейлевские поля, α — индекс присоединенного представления калибровочной группы, которое в случае группы $E_8 \times E_8$ совпадает с фундаментальным представлением).

Так же как и ранее, будем предполагать, что компактификация M^{10} осуществляется полями бозонного сектора, лагранжиан которого выбирается в виде

$$L = -\frac{E}{4\varkappa^2} R - \frac{E}{2\varkappa^2} \phi^{-2}\partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{E}{4e^2} \phi^{-1} (\mathrm{tr}\, F_{MN}F^{MN} - (R_{MNLP})^2) - \\ - \frac{3\varkappa^2 E}{2e^4} \phi^{-2} (H_{MNP})^2 + \frac{E\phi^{-1}}{4e^2} (R^2 - 4R_{MN}R^{MN}), \qquad (57)$$

где $H = H_{MNP} dX^M \wedge dX^N \wedge dX^P = dB - \omega_{3Y} + \omega_{3L}$; а $\omega_{3Y} = \mathrm{tr}\left(A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A\right)$, $\omega_{3L} = \mathrm{tr}\left(\omega \wedge R - \frac{1}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega\right)$ — чернсаймоновские добавки к напряженности поля B_{MN} [44] в обозначениях дифференциальных форм.

Лагранжиан (57), как предполагается, возникает при рассмотрении низкоэнергетического предела гетерозисной струны [43]. В отличие от лагранжиана Чаплина — Мэнтона [4] он содержит члены с высшими производными от гравитационного поля (вида R^2), что в общем случае приводит к появлению в спектре полей духовых состояний. Однако в теории с лагранжианом (57) этого не происходит, так как члены с высшими производными входят в (57) в определенной комбинации ($L_{R^2} = R^2 - 4R_{MN}R^{MN} + R_{MNLP}R^{MNLP}$ [105]). Присутствие же таких членов в лагранжиане приводит к возможности обойти «*nogo*» теорему работы [106] (препятствующую осуществлению реалистической спонтанной компактификации в теории Чаплина — Мэнтона [4]) и удовлетворить всем уравнениям движения, вытекающим из лагранжиана (57) [33].

Основные требования, предъявляемые к компактифицированным вакуумным конфигурациям рассматриваемой теории, следующие:

1. Сохранение лоренцинвариантности в эффективной $d = 4$ теории. Как следствие этого M^{10} должно компактифицироваться в $M^{1+3} \times K^6$, где M^{1+3} — пространство-время с максимальной группой симметрий (пространство Минковского или (анти)де Ситтера).

2. Наличие $N = 1$ СУСИ в $d = 4$ (так как $N = 1$ СУСИ может решить проблему калибровочной иерархии масс).

3. Требование реалистичности спектра полей в $d = 4$ теории.

Оказывается, что перечисленные требования сильно ограничивают выбор возможных вакуумных конфигураций рассматриваемой теории, так как квантовые числа полей эффективной 4-мерной теории задаются топологическими характеристиками пространства K^6 и его группой симметрий, а также вакуумными значениями калибровочных полей группы $E_8 \times E_8$, определенных на K^6.

Требование сохранения $N = 1$ СУСИ ($\langle\psi\rangle = \delta_\varepsilon \langle\psi\rangle = 0$) приводит к тому, что:

а) M^{1+3}-пространство Минковского;

б) K^6 — риччиплоское кэлерово многообразие с группой голономии $SU(3)$ (пространство Калаби — Яу). Подробно о пространствах Калаби — Яу см. [33, 107]. Отказ от требования 2, напротив, значительно расширяет класс компактных пространств K^6. Например, возможна компактификация в пространства, перечисленные в табл. 2.

Требование 3 (и в частности существование киральных фермионов) приводит к тому, что:

в) вакуумные значения калибровочных полей должны быть равны компонентам спиновой связности K^6, преобразующимся по группе SU (3) (т. е. должен «работать» механизм погружения спиновой связности в калибровочную):

$$\langle A_m^\alpha \rangle = \omega_{m(l)}{}^{(p)} \, (\alpha = (l, \ p)),$$

при этом одна из групп E_8 нарушается до E_6 ($E_6 \times SU(3) \subset E_8$), киральные фермионы образуют 27-плет этой группы, а число поколений фермионов в такой теории равно половине эйлеровой характеристики пространства K^6 $\left(N = \frac{|\chi(K^6)|}{2}\right)$ [33].

В настоящее время известно значительное число пространств Калаби — Яу, среди которых есть пространства с $N = \chi/2 = 1, 2, 3, 4$ [33, 107]. Поля, преобразующиеся по представлениям другой (ненарушенной) группы E_8, взаимодействуют с полями E_6 только посредством гравитации и образуют «скрытый» сектор теории. Этот сектор может играть важную роль в механизме спонтанного нарушения $N = 1$ СУСИ [33, 116].

Заметим, что важнейшей задачей в рассматриваемой теории является обнаружение такого механизма спонтанного нарушения суперсимметрии, действие которого не приводило бы к образованию в спонтаннонарушенной фазе большой положительной плотности энергии вакуума, т. е. к превращению пространства M^{1+3} в пространство де Ситтера (что противоречило бы экспериментальным данным).

Таким образом, проблема космологического члена требует своего решения и в теории Калуцы — Клейна, основанной на теории струн.

Поиски реалистического варианта суперструнной К — К-теории продолжаются (см. например, [108]).

Нужно подчеркнуть, что рассмотренные в настоящем разделе компактные вакуумные конфигурации представляют возможные основные состояния $N = 1$, $d = 10$ теории СГ + ЯМ, возникающей из суперструнной теории в пределе, когда «размер» струны стремится к нулю ($\alpha' \to 0$). Однако вопрос о том, каково основное состояние полной струнной теории, почему и как в ней происходит спонтанная компактификация дополнительных измерений, пока остается открытым. Наиболее перспективным подходом к его решению представляется метод эффективного струнного действия, предложенный в [109].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что и в теориях струны предпринимаются попытки вернуться к традиционной идеологии Калуцы — Клейна, т. е. брать за основу многомерную теорию, в которой нет исходных калибровочных полей. В качестве такой теории рассматривается, например, 26-мерная бозонная струна [104, 110, 111]. Одним из возможных вариантов является теория гетерозисной струны, сформулированная в 26-мерном пространстве-времени [43]. В такой теории 16 измерений компактифицируются в 16-мерный тор T^{16} и, несмотря на то что группа симметрий T^{16} абелева, в $d = 10$ возникают калибровочные поля неабелевой группы SO (32) или $E_8 \times E_8$, что является спецификой именно струнной теории [43] и представляет собой пример нового механизма генерации калибровочных неабелевых симметрий, в корне отличающегося от механизма Калуцы — Клейна.

Дафф, Нилссон и Поуп [112] (см. также [104]) предлагают не останавливаться на 26 измерениях, а брать за основу теорию замкнутой бозонной струны в 506-мерном пространстве-времени. Такая теория будет непротиворечива с квантовой точки зрения, если 496 измерений компактифицированы и образуют групповое многообразие SO (32)- или $E_8 \times E_8$-группы [113]. В результате такой компактификации в $d = 10$ возникает бозонный сектор гетерозисной струны [112].

А может быть дополнительные измерения пространства-времени, в котором «живут» струны, имеют природу, аналогичную гармоническим координатам суперпространства [114, 115]?

На каком варианте единой теории остановиться? Мы надеемся, что проводимые в области теорий Калуцы — Клейна интенсивные исследования дадут ответ на этот вопрос.

Пониманием вопросов, затронутых в обзоре, авторы в значительной степени обязаны сотрудничеству с Д. В. Волковым, которому глубоко признательны. Мы также благодарны Р. Э. Каллош, В. И. Огиевецкому и В. Н. Первушину за обсуждения и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nieuwenhuizen van P.**//Phys. Repts. 1981. Vol. 68, P. 189—398.
2. **Cremmer E., JuliaB., Scherk J.**//Phys. Lett. B. 1978. Vol. 76. P. 409—412.
3. **Bergshoeff E. e.a.**//Nucl. Phys. 1982. Vol. B195. P. 97—136.
4. **Chapline G. F., Manton N. S.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 120, P. 105—109.
5. **Ciani F., Pernici M.**//Phys. Rev. D. 1984. Vol. 30, P. 325—333.
6. **Campbell I. C. G., West P .G.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 243, P. 111—124.
7. **Howe P. S., West P. C.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 238. P. 181—220.
8. **Cremmer E., Julia B.**//Phys. Lett. B. 1978. Vol. 80, P. 48—51.
9. **Cremmer E., Julia B.**//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 159. P. 141—212.
10. **De Wit D., Nicolai H.**//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 108, P. 285—289.
11. **Калуца Т.** К проблеме единства физики//Альберт Эйнштейн и теория относительности: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
12. **Klein O.**//Z. Phys. 1927. Bd 46, № 1. S. 188—203.
13. **Бергман П. Г.** Введение в теорию относительности: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
14. **Румер Ю. Б.** Исследование по 5-оптике. М.: Гостехиздат, 1956.
15. **Cho Y. M., Freund P. G. O.**//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 12 P. 1711—1720.
16. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980.
17. **Арефьева И. Я., Волович И. В.**//УФН. 1985. Т. 146, С. 655—682; Aref'eva I. Yu., Volovich I. V.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 164, P. 287—292.
18. **Wetterich C.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 244, P. 359—380; Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 253, P. 366—374.
19. **Nicolai H., Wetterich C.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 150, P. 347—351.
20. **Salam A., Strathdee J.**//Ann. Phys. 1982. Vol. 141, P. 316—352.

21. **Mecklenburg W.**//Forts. Der. Phys. 1984. Vol. 32. P. 207—260.
22. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Phys. Rep. 1986. Vol. 130. P. 1—142.
23. **D'Auria R., Fré P.**//Ann. Phys. 1985. Vol. 162, P. 372—412.
24. **Duff M. J. e.a.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 149. P. 90—94.
25. **Duff M. J., Pope C. N.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 255. P. 355—364.
26. **Coquereaux P., Jadczyk A.**//Commun. Math. Phys. 1985. Vol. 98. P. 79 — 104.
27. **Cremmer E., Scherk J.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 118. P. 61—73.
28. **Luciani I. F.**//Nucl. Phys. B. 1978. Vol 135, P. 111—130.
29. **Волков Д. В., Ткач В. И.**//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 681—684.
30. **Волков Д. В., Ткач В. И.**//ТМФ. 1982. Т. 51. С. 171—180.
31. **Randjbar-Daemi S., Percacci R.**//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 117. P. 41—44.
32. **Omero C., Percacci R.**//Nucl. Phys. B. 1980. Vol. 165. P. 351—364. **Gell-Mann M., Zwiebach B.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 141. P. 333—336.
33. **Candelas P. e.a.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 258. P. 46—74.
34. **Witten E.**//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 186. P. 412—428.
35. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 214. P. 491—512.
36. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 132. P. 56—60.
37. **Wetterich C.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 223. P. 109—124.
38. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 397—399.
39. **Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//УФЖ. 1984. Т. 29. С. 1605—1612.
40. **Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//УФЖ. 1984. Т. 29. С. 1765—1769.
41. **Watamura S.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 129. P. 188—192.
42. **Schwarz J. H.**//Phys. Repts. 1982. Vol. 89. P. 223—322.
43. **Gross G. J.e.a.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 256. P. 253—284; Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 267. P. 75—124.
44. **Green M. B., Schwarz J. H.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 149. P. 117—122.
45. **Witten E.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 149. P. 346—350.
46. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ТМФ. 1984. Т. 61. С. 241—253.
47. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 40. С. 356—359; **Sorokin D. P., Tkach V. I., Volkov D. V.**//Proceedings of the Third Seminar on Quantum Gravity. October 1984. Moscow. World Scientific Co. 1985.
48. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ЯФ. 1985. Т. 41. С. 1373 —1384; ЯФ. 1986. Т. 43. С. 222—230.
49. **Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Class. Quant. Gravity, 1984. Vol. 1. P. 499—516.
50. **Sorokin D. P., Tkach V. I., Volkov D. V.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 161. P. 301.
51. **Charap J. M., Duff M. J.**//Phys. Lett. B. 1977. Vol. 69. P. 445—447.
52. **Воронов Н. А., Коган Я. И.**//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 262—264.
53. **Candelas P., Weinberg S.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 237. P. 397—441.
54. **Englert F.**//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 119. P. 339—343.
55. **Tze C. H.** //Phys. Lett. B. 1983. Vol. 128. P. 160—164.
56. **Gürsey F., Tze C. H.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 127. P. 191—196.
57. **Duff M. J., Orzalesi C. A.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 122. P. 37—40.
58. **Wu X.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 144. P. 51—54.
59. **Freund P. G. O., Rubin M. A.**//Phys. Lett. B. 1980. Vol. 97. P. 233—235.
60. **Duff M.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 219. P. 389—411.
61. **Awada M. A., Duff M. J., Pope C. N.**//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 294—297.
62. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 233. P. 433—456.
63. **Castellani L., D'Auria R., Fré P.** //Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 239. 610—652.

64. **Castellani L., Romans L. J.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 238. P. 683—701.
65. **Castellani L., Romans L. J., Warner N. P.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 241. P. 429—462; **Василевич Д. В.**//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 282—286.
66. **D'Auria R., Fré P., Nieuwenhuizen van P.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 136. P. 347—353.
67. **Rajpoot S., Robb T., Taylor J. R.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 146.P. 318—322.
68. **Page D. N., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 147. P. 55—60.
69. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1306—1313.
70. **Dolan B.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 140. P. 304—306.
71. **Pope C. N., Warner N. P.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 150. P. 352—357.
72. **Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125. P. 139—143.
73. **Van Nieuwenhuizen P., Warner N. P.** New compactifications of ten and eleven dimensional supergravity on manifolds which are not direct products. Preprint ITP-SB-84-75, 1984; de Wit B., Nicolai H.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 148. P. 60—64.
74. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 124. P. 345—348.
75. **Schellekens A. N.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 248. P. 706—726.
76. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 139. P. 154—158.
77. **Page D. N., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 144. P. 346—350.
78. **Page D. N., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 145. P. 333—336.
79. **D'Auria R., Fré P.**//Ann. Phys. 1984. Vol. 157. P. 1—100.
80. **Biran B., Casher A., Englert F., Rooman M.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 134. P. 179—183.
81. **Yamagishi K.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 137. P. 165—168.
82. **Sezgin E.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 138. P. 57—62.
83. **Castellani L.** Preprint, ÇALT-68-1116, Pasadena, 1984.
84. **D'Auria R., Fré P.** Preprint CERN TH-3861. Geneva, 1984.
85. **Candelas P., Raine D. F.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 243. P. 157—172.
86. **Salam A., Sezgin E.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 147. P. 47—51.
87. **Dolan B. P.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 163. P. 131—134.
88. **Weinberg S.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 138. P. 47—51.
89. **Green M. B., Schwarz J. H.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 151. P. 21—22.
90. **Pilch K., Schpellekens A. N.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 256. P. 109—129.
91. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//ТМФ. 1983. Т. 56. С. 171—179.
92. **Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.**//Проблемы ядерной физики и космических лучей. Киев: Вища школа, 1985. вып. 24. С. 3—8.
93. **Hawking S. W., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1978. Vol. 73. P. 42—44.
94. **Palla L.** Preprint CERN TN 3614, Geneva, 1983. P. 20.
95. **Eguchi T. e. a.**//Phys. Repts. 1980. Vol. 66. P. 213—393.
96. **Witten E.** Fermion Quantum numbers in Kaluza—Klein theories. Princeton Preprint October, 1983.
97. **Kallosh R.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 143. P. 373—378.
98. **Bars I., Higuchi A.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 145. P. 329—332.
99. **Freund P. G. O.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 130. P. 265—266.
100. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 129. P.39—42.
101. **Sorkin R.**//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 87—90.
102. **Gross D. J.**//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 226. P. 29.
103. **Candelas P.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 256. P. 385—393; Romans L. J. //Phys. Lett. B. 1985. Vol. 153. P. 392—396.
104. **Freund P. G. O.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 151. P. 387—390.
105. **Zwiebach B.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 156. P. 315—317.
106. **Freedman D. Z., Gibbons G. W., West P. C.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 124. P. 491—492.

107. **Strominger A., Witten E.**//Comm. Math. Phys. 1985. Vol. 101. P. 341—362.
108. **Nepomechie R. I. Wu Y-S., Zee A.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 158. P. 311—315.
109. **Fradkin E. S., Tseytlin A. A.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 158. P. 316—322.
110. **Chapline G.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 158. P. 393—396.
111. **Englert F., Neveu A.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 163. P. 349—352.
112. **Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 163. P. 343—348; Duff M. J. e.a. Preprint CERN TH 4357/86, Geneva, 1986.
113. **Nemeshansky D., Ynkielowicz S.**//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 54. P. 620—623.
114. **Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S. e. a.**//Class Quantum Grav. 1984. Vol. 1. P. 469—482; Ibid. 1985. Vol. 2. P. 155—173.
115. **Kallosh R. E.** Preprint CERN TH 4188/85, Geneva, 1985.
116. **Dine M. e.a.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 156. P. 55—60.