

Коллективные модели ядра, основанные на динамической $SU(6)$ -симметрии

Р. В. Джолос, Г. Кырчев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В. Паар

Университет, Загреб, Югославия

Дан анализ различных путей построения двух популярных моделей ядра: модели квадрупольных фононов (МКФ) и модели взаимодействующих бозонов (МВБ-1). Изложены основные результаты работ, исследовавших возможность установления эквивалентности МКФ и МВБ-1. Дан обзор работ по новейшему развитию и применению МКФ к описанию нечетных и нечетно-нечетных ядер на основе метода динамических симметрий и суперсимметрий.

The way in which the Truncated Quadrupole Phonon Model (TQM) and the Interacting Boson Model (IBM) have been introduced is analyzed. A review of the works in which the relationship between TQM and IBM has been studied and the IBM-TQM equivalence has been established is given. The results of the recent developments and applications of TQM to the description of odd and odd-nuclei on the base of dynamical symmetries and supersymmetries are presented.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории структуры ядра считается общепризнанным, что свойства низколежащих состояний средних и тяжелых ядер определяются в основном квадрупольными колебаниями среднего поля [1]. Это утверждение лежит в основе феноменологической модели Бора и Моттельсона [2, 3], в рамках которой традиционно рассматривались квадрупольные возбуждения ядер.

В последние 10 лет в результате весьма успешного описания свойств коллективных состояний средних и тяжелых ядер очень популярной стала модель взаимодействующих бозонов (МВБ). Исходная физическая концепция МВБ — та же, что и у коллективной модели Бора и Моттельсона: выделяется только квадрупольная степень свободы. Одна из характерных черт МВБ — наличие четкой алгебраической структуры у гамильтониана: он построен из генераторов унитарной унимодулярной группы в шестимерном пространстве $SU(6)$. Таким образом, с появлением МВБ в ядерную спектроскопию вошла и стала играть важную роль $SU(6)$ -симметрия. Следует подчеркнуть, что эта симметрия является динамической [4]. Она нарушается гамильтонианом МВБ до группы симметрии $SO(3)$ (физическая группа вращений). Группы динамических симметрий (точнее, их унитарные неприводимые представления) оказываются

очень полезными не только для явного нахождения спектров возбуждения, но и для матричных элементов других физических операторов (например, вероятностей переходов), т. е. всей динамики системы.

Что касается истории создания МВБ, то двумя разными группами были предложены две версии этой модели. Сначала в результате сотрудничества Дубна — Россендорф [5—7] был построен микроскопический вариант МВБ, известный в литературе как модель квадрупольных фононов (МКФ), гамильтониан которой выражался только с помощью операторов квадрупольных бозонов. Позже в результате коллаборации Токио-Грөнинген [8—10] была предложена $s-d$ -версия МВБ, которая и дала название модели (помимо квадрупольных d -бозонов был введен дополнительно скалярный s -бозон). Этот вариант модели (МВБ-1) был введен чисто феноменологически: постулировалось, что гамильтониан — это самый общий вращательный инвариант, построенный из генераторов $SU(6)$ -алгебры.

Что касается микроскопического обоснования гамильтониана МВБ-1, а также и МВБ-2 (вариант, в котором делаются различия между протонными и нейтронными бозонами), то такие попытки предпринимались в работах [11—14]. Однако эти попытки обоснования МВБ-1 и МВБ-2 не являются последовательно микроскопическими, и, по нашему мнению, критика и возражения, высказанные в [15], вполне справедливы.

В такой ситуации, когда в теории ядерной структуры сосуществуют две модели, построенные независимо для описания одного и того же круга явлений, вполне закономерно возникает необходимость в их сопоставлении, в первую очередь, между собой, а также и с моделью Бора — Моттельсона. И действительно, с момента появления МВБ-1 в физической литературе стал обсуждаться вопрос о том, в каком соотношении она находится с МКФ [8, 9, 16, 17] и с моделью Бора — Моттельсона [18—22].

Как уже отмечалось, микроскопические версии МКФ и МВБ-1 в корне различны. Но можно сравнивать феноменологические гамильтонианы обеих моделей, считая параметры моделей абсолютно свободными. Тот факт, что МКФ и МВБ-1 идентичны в самом существенном пункте — обе они основаны на одной и той же динамической симметрии — наводит на мысль, что на феноменологическом уровне обе модели могут оказаться эквивалентными, и их можно рассматривать как две формы МВБ. Если к установлению эквивалентности МКФ и МВБ-1 подойти строго, то возникает ряд сложных вопросов, требующих детального математического исследования.

Впервые сами авторы МКФ и МВБ-1 указали на эквивалентность своих моделей. Они показали [9, 23], что матричные элементы гамильтонианов и электрических квадрупольных операторов (в соответствующих базисах) обеих моделей равны между собой. В [16] утверждалось, что гамильтонианы МКФ и МВБ-1 (как операторы, безотносительно к базису) точно совпадают. Эквивалентность «на

уровне операторов» строго доказана в [24]. В [17] было замечено, что в МКФ используется для построения бозонного образа гамильтониана холстейн-примаковская (ХП) реализация $SU(6)$ -алгебры, тогда как в МВБ-1 используется бозонное представление швингеровского (ПШ) типа. Это обстоятельство и то, что МКФ и МВБ-1 основаны на динамической $SU(6)$ -симметрии, дали, по-видимому, основание авторам [17] рассматривать МКФ и МВБ-1 как две реализации единой «феноменологической $SU(6)$ -бозонной модели», т. е. МВБ в нашей терминологии. Такое объединение, строго говоря, правомерно тогда и только тогда, когда доказано, что ХП и ПШ — изоморфные (эквивалентные) реализации $SU(6)$ -алгебры. Это было доказано в [25] с помощью аппарата теории представлений абстрактных алгебр. Сейчас установление эквивалентности МКФ и МВБ-1, которое потребовало выполнения серии работ [9, 16, 17, 23—25], можно считать полностью завершенным.

Результатам анализа различных путей построения коллективной модели ядра, основанной на динамической $SU(6)$ -симметрии, по нашему мнению, следует уделить серьезное внимание. Важность такого анализа объясняется тем, что, во-первых, он способствует более глубокому пониманию содержания двух моделей, прочно вошедших в арсенал средств теории ядерной структуры, во-вторых, эквивалентность МКФ и МВБ-1 существенно используется при рассмотрении соотношения между этими моделями и моделью Бора — Моттельсона [21, 26, 27], в-третьих, приобретенный опыт применения алгебраического аппарата теории динамических симметрий может быть использован для расширения рамок МВБ, на необходимость чего указывает эксперимент.

Задача настоящей статьи — изложить основные результаты работ, исследовавших возможность установления эквивалентности МКФ и МВБ-1, и некоторые результаты новейшего развития МКФ в применении к описанию нечетных и нечетно-нечетных ядер на основе метода динамических симметрий и суперсимметрий.

В обзоре принят следующий порядок изложения.

Построен микроскопический гамильтониан МКФ. Особое внимание обращено на возникновение динамической $SU(6)$ -симметрии (разд. 1). Изложены основные положения, на основе которых был постулирован феноменологический гамильтониан МВБ-1.

Обсуждены алгебраический и геометрический аспекты МВБ-1. Приведены доказательства эквивалентности МКФ и МВБ-1 на уровне матричных элементов, операторов и представлений. Правомерность объединения МКФ и МВБ-1 обоснована в разд. 2. Там же приведено доказательство эквивалентности МКФ и МВБ-1 в классическом пределе. Соотношение между МКФ и МВБ-1 при описании реакций двухнуковых передач обсуждено в разд. 3. Новейшему развитию МКФ в применении к нечетным и нечетно-нечетным ядрам посвящен разд. 4. Выводы сформулированы в разд. 5.

1. АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПУТЕЙ ПОСТРОЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ МКФ И МВБ-1

Модель взаимодействующих бозонов* с большим успехом использовалась при описании коллективных состояний средних и тяжелых ядер (см., например, [28]). Разработка математического аппарата для единого описания коллективных состояний ядер — существенное теоретическое достижение МВБ [5—10, 29, 30]. Физическому обоснованию МВБ и ее интенсивным применениям посвящен обзор [31]. Однако следует подчеркнуть, что достижения МВБ складываются из независимых достижений двух версий МВБ: МКФ и МВБ-1, которые развивались по своему собственному пути.

Микроскопический подход к построению коллективного квадрупольного гамильтониана МКФ. Модель квадрупольных фононов была развита Р. В. Джолосом, Дэнау и Янссеном [5, 6]. Физические предположения, лежащие в основе МКФ, и явное построение ее гамильтониана подробно рассмотрены в [5, 6, 29, 31]. Ниже мы будем следовать работам [5, 29], уделяя основное внимание возникновению $SU(6)$ как группы динамической симметрии семейства квадрупольных возбуждений. Как отмечалось во введении, квадрупольные степени свободы играют определяющую роль в формировании свойств низколежащих коллективных состояний. Поэтому только они и были учтены при построении МКФ, при этом основная задача состояла в том, чтобы в микроскопическом гамильтониане ядра явно выделить зависимость от коллективных квадрупольных переменных. В [5, 29] эта задача была решена введением обобщенных координат и импульсов:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_{\kappa LM} &= \frac{1}{2} \sum_{ab} q_{ab}^{\kappa L} [A_{LM}^{\dagger}(ab) + (-1)^{L-M} A_{L-M}(ab)]; \\ \hat{p}_{\kappa LM} &= -\frac{i}{2} \sum_{ab} p_{ab}^{\kappa L} [A_{LM}(ab) - (-1)^{L-M} A_{L-M}^{\dagger}(ab)], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$A_{LM}^{\dagger}(ab) = \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | LM \rangle a_{m_a}^{\dagger} a_{m_b}^{\dagger};$$

κ — дополнительное квантовое число, различающее операторы с одинаковыми L, M .

С помощью операторов $\hat{p}_{\kappa LM}, \hat{q}_{\kappa LM}$ и их коммутаторов можно получить выражения для любых бифермионных операторов ($\alpha_a^{\dagger} \alpha_b^{\dagger}, \alpha_a^{\dagger} \alpha_b, \alpha_b \alpha_a$). Операторы \hat{q}, \hat{p} и все их коммутаторы образуют алгебру $SP(2\Omega)$, где Ω — число одночастичных состояний. Структурные константы для этой алгебры являются суммами произведений четырех

* Хотя МКФ и МВБ-1 эквивалентны (см. разд. 2), они имеют свои, специфические черты. Когда нет необходимости в том, чтобы различать МКФ и МВБ-1, мы будем использовать общее название МВБ.

амплитуд, определяющих двухквазичастичную структуру операторов обобщенных координат и импульсов.

Среди операторов обобщенных координат и импульсов для построения МКФ интерес представляют только операторы с $L = 2$. Они подразделяются на коллективные ($\kappa = 1$), характеризующиеся заметным вкладом большого числа двухквазичастичных компонент, и неколлективные (близкие к двухквазичастичным) операторы. Для построения МКФ используются (в духе всех коллективных моделей) только коллективные операторы $\hat{q}_{12\mu}$, $\hat{p}_{12\mu}$ и их коммутаторы. Но этот набор операторов не образует замкнутой алгебры: двойные коммутаторы коллективных операторов $\hat{q}_{12\mu}$ и $\hat{p}_{12\mu}$ содержат наряду с коллективными операторами слагаемые, пропорциональные неколлективным операторам. Поскольку интерес представляют матричные элементы от операторов и их коммутаторов, взятые только между коллективными состояниями, а такие матричные элементы от неколлективных операторов малы, то приближенно во всех коммутаторах коллективных операторов можно пренебрегать неколлективными слагаемыми. Это приближение подкрепляется еще и малостью структурных констант, стоящих перед неколлективными операторами. В результате мы замыкаем алгебру коллективных операторов. Поскольку при этом нарушается эквивалентность наборов операторов $(\alpha_{\alpha}^{\pm}, a_{\beta}, a_{\alpha}^{\pm}a_{\beta}, a_{\beta}a_{\alpha})$ и $(\hat{q}, \hat{p}, [\hat{q}, \hat{p}], [\hat{q}, \hat{q}], [\hat{p}, \hat{p}])$, то структурные константы, характеризующие алгебру коллективных операторов, перестают автоматически удовлетворять тождествам Якоби. Если потребовать строгого выполнения тождеств Якоби, то возникнут дополнительные ограничения на амплитуды, характеризующие квазичастичную структуру коллективных операторов.

Таким образом, мы приходим к следующей алгебре коллективных квадрупольных операторов (ККА):

$$\left. \begin{aligned}
 [\hat{q}_{\mu}, \hat{p}_{\mu'}] &= (-1)^{\mu+\mu'} [\hat{q}_{-\mu'}, \hat{p}_{-\mu}]; \\
 [\hat{p}_{\mu}, \hat{p}_{\mu'}] &= (-1)^{\mu+\mu'} [\hat{q}_{-\mu}, \hat{q}_{-\mu'}]; \\
 [[\hat{q}_{\mu}, \hat{p}_{\mu'}], \hat{q}_{\mu''}] &= -2\delta_{\mu\mu''} (-1)^{\mu''} \hat{p}_{-\mu''} - \\
 &\quad - \delta_{\mu''-\mu} (-1)^{\mu} p_{-\mu'} - \delta_{\mu'\mu''} (-1)^{\mu} \hat{p}_{-\mu}; \\
 [[\hat{q}_{\mu}, \hat{p}_{\mu'}], \hat{p}_{\mu''}] &= 2\delta_{\mu\mu''} (-1)^{\mu''} \hat{q}_{-\mu''} + \\
 &\quad + \delta_{\mu'-\mu''} (-1)^{\mu'} \hat{q}_{\mu} + \delta_{\mu\mu''} (-1)^{\mu'} \hat{q}_{-\mu'}; \\
 [[\hat{q}_{\mu}, \hat{q}_{\mu'}], \hat{q}_{\mu''}] &= \delta_{\mu'-\mu''} (-1)^{\mu'} \hat{q}_{\mu} - \delta_{\mu''-\mu} (-1)^{\mu} \hat{q}_{\mu'}; \\
 [[\hat{q}_{\mu}, \hat{q}_{\mu'}], \hat{p}_{\mu''}] &= \delta_{\mu'\mu''} (-1)^{\mu} \hat{p}_{-\mu} - \delta_{\mu\mu''} (-1)^{-\mu'} \hat{p}_{-\mu'};
 \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\begin{aligned}
 & [[\hat{q}_\mu, \hat{p}_{\mu'}], [\hat{q}_{\mu''}, \hat{p}_{\mu'''}]] = \delta_{\mu-\mu''} (-1)^{\mu'+\mu''+\mu'''} [\hat{q}_{-\mu'''}, \hat{q}_{-\mu'}] + \\
 & + \delta_{\mu''-\mu'} (-1)^{\mu'} [\hat{q}_{\mu''}, \hat{q}_\mu] + \delta_{\mu'\mu''} (-1)^{\mu'''} [\hat{q}_{-\mu'''}, \hat{q}_\mu] + \\
 & + \delta_{\mu\mu''} (-1)^{\mu'} [\hat{q}_{\mu''}, \hat{q}_{-\mu'}]; \\
 & [[\hat{q}_\mu, \hat{p}_{\mu'}], [\hat{q}_{\mu''}, \hat{q}_{\mu'''}]] = \delta_{\mu-\mu''} (-1)^\mu [\hat{q}_{\mu'''}, \hat{p}_{\mu'}] - \\
 & - \delta_{\mu-\mu'''} (-1)^\mu [\hat{q}_{\mu''}, \hat{p}_{-\mu'}] + \delta_{\mu'\mu''} (-1)^{\mu'''} [\hat{q}_\mu, \hat{p}_{-\mu''}] - \\
 & - \delta_{\mu'\mu'''} (-1)^{\mu''} [\hat{q}_\mu, \hat{p}_{-\mu''}]; \\
 & [[\hat{q}_\mu, \hat{q}_{\mu'}], [\hat{q}_{\mu''}, \hat{q}_{\mu'''}]] = \\
 & = \delta_{\mu'-\mu''} (-1)^{\mu'} [\hat{q}_\mu, \hat{q}_{\mu'''}] + \delta_{\mu'-\mu'''} (-1)^\mu [\hat{q}_{\mu'}, \hat{q}_{\mu''}] - \\
 & - \delta_{\mu-\mu''} (-1)^{-\mu} [\hat{q}_{\mu'}, \hat{q}_{\mu''}] - \delta_{\mu'-\mu''} (-1)^{\mu'} [\hat{q}_\mu, \hat{q}_{\mu''}],
 \end{aligned}$$

где $\hat{q}_\mu \equiv \hat{q}_{12\mu}/\sqrt{L}$; $\hat{p}_\mu \equiv \hat{p}_{12\mu}/\sqrt{K}$. Константы K и L определены в [5, 29] и не понадобятся в дальнейшем. Можно показать, что среди операторов, фигурирующих в (2), линейно независимых и с нулевым следом — 35. Следовательно, ККА изоморфна алгебре Ли группы $SU(6)$.

Таким образом, исходя из предположения, что коллективная ветвь возбуждений слабо связана с другими степенями свободы, было показано, что скрытой симметрией квадрупольной моды является группа $SU(6)$.

Используя эквивалентность наборов операторов (a^+a^+, aa, a^+a) и $(\hat{q}, \hat{p}, [\hat{q}, \hat{p}], [\hat{q}, \hat{q}], [\hat{p}, \hat{p}])$, можно выразить микроскопический гамильтониан ядра через операторы \hat{q}, \hat{p} и их коммутаторы. А затем, сохраняя только коллективные операторы \hat{q} и \hat{p} , выделить коллективную часть микроскопического гамильтониана ($H_{\text{колл}}$):

$$\begin{aligned}
 H_{\text{колл}} = & ie \sum_{\mu} [\hat{q}_\mu, \hat{p}_\mu] + u \sum_{\mu} (-1)^\mu \hat{q}_\mu \hat{q}_{-\mu} + v \sum_{\mu} (-1)^\mu \hat{p}_\mu \hat{p}_{-\mu} + \\
 & + \frac{1}{2} iw \sum_{\mu} (-1)^\mu \hat{q}_\mu ([\hat{q}, \hat{p}]_{(2-\mu)}) - \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{L=0}^4 \frac{1}{2} (1 + (-1)^L) t_L \sum_{M_L=-L}^L (-1)^M ([\hat{q}, \hat{p}])_{(LM)} ([\hat{q}, \hat{p}])_{(L-M)} + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{L=0}^4 \frac{1}{2} (1 - (-1)^L) t_L \sum_{M=-L}^L (-1)^M ([\hat{q}, \hat{q}])_{(LM)} ([\hat{q}, \hat{q}])_{(L-M)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Символ $(\)_{(LM)}$ обозначает векторную связь; $\hat{p}_\mu \equiv (-1)^\mu \hat{p}_{-\mu}$. Можно показать, что $H_{\text{колл}}$ ротационно инвариантен и инвариантен относительно отражения времени. Информация о среднем поле и остаточном взаимодействии заключена в девяти константах e, u, v, w, t_L .

Для генераторов ККА справедлива ХП-реализация:

$$\left. \begin{aligned} q_\mu^{\text{ХП}} &= \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} (-1)^\mu d_{-\mu} + d_\mu^+ \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu}; \\ p_\mu^{\text{ХП}} &= i \left[(-1)^\mu d_{-\mu}^+ \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} - \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} d_\mu \right]; \\ i [q_\mu, p_{\mu'}]^{\text{ХП}} &= d_\mu^+ d_{\mu'} + (-1)^{\mu+\mu'} d_{-\mu}^+ d_{-\mu} - 2\delta_{\mu\mu'} (N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu); \\ [q_\mu, q_{\mu'}]^{\text{ХП}} &= (-1)^{\mu'} d_\mu^+ d_{-\mu'} - (-1)^\mu d_{\mu'}^+ d_{-\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где N — квантовое число линейного оператора Казимира группы $SU(6)$, характеризующего полностью симметричное представление $SU(6)$; d_μ^+, d_μ — операторы рождения и уничтожения квадрупольного бозона с проекцией μ на ось z лабораторной системы.

Используя (4), легко получить из (3) знакомую форму гамильтониана МКФ [5, 29]:

$$\begin{aligned} H_{\text{МКФ}} &= h_0 + h_1 \sum_{\mu} d_\mu^+ d_\mu + \\ &+ h_2 \sum_{\mu} (-1)^\mu \left(d_\mu^+ d_{-\mu}^+ \sqrt{(N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu)(N - 1 - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu)} + \text{h.c.} \right) + \\ &+ h_3 \sum_{\mu} (-1)^\mu \left(d_\mu^+ (d_2^+ \tilde{d}_2)_{(2-\mu)} \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} + \text{h.c.} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{L=0, 2, 4 \\ M=-L}}^L h_{4L} (-1)^M (d_2^+ d_2^+)_{(LM)} (\tilde{d}_2 \tilde{d}_2)_{(L-M)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{d}_\mu \equiv (-1)^{-\mu} d_{-\mu}$. Набор коэффициентов $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_{4L}\}$ и квантовое число N связаны с коэффициентами в (3) [6]. Явные выражения этих величин через одночастичные энергии и матричные элементы остаточного взаимодействия приведены в [5].

В рамках МКФ электрический квадрупольный оператор определяется как тензор второго ранга, построенный из генераторов ККА (2):

$$\hat{Q}_{\text{колл}} = m_1 \hat{q}_\mu + m_2 [\hat{q}_2, \hat{p}_2]_{(2\mu)}, \quad (6)$$

где m_1 и m_2 однозначно выражаются через амплитуды q_{ab}^{i2}, p_{ab}^{i2} [5].

После подстановки (4) в (6) для $\hat{Q}_{\text{колл}}$ получается выражение

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{\text{МКФ}} &= m_1 \left(d_\mu^+ \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} + (-1)^\mu \sqrt{N - \sum_{\nu} d_\nu^+ d_\nu} d_{-\mu} \right) + \\ &+ m_2 (d^+ \tilde{d})_{(2\mu)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, были построены микроскопически $H_{\text{МКФ}}$ и $Q_{\text{МКФ}}$, имеющие замкнутый и удобный для практических расчетов вид. Появление квадратного корня $\sqrt{N - \sum_{\nu} d_{\nu}^{\dagger} d_{\nu}}$ связано с использованием ХП-реализации ККА.

Основное отличие микроскопической МКФ от других микроскопических теоретико-групповых подходов к описанию коллективного движения в ядрах [32—36] состоит в том, что в последних задача, как правило, формулируется в терминах координат нуклонов, а не в формализме вторичного квантования, и более строго выполняются законы сохранения.

Основываясь на гамильтониане (5) и квадрупольном операторе (7) были исследованы свойства ряда переходных ядер. Были также получены $SU(3)$ - и $SU(5)$ -пределы $H_{\text{МКФ}}$ [7, 29].

Феноменологическое описание коллективных состояний в рамках МВБ-1. МВБ-1 была предложена Аримой и Якэлло. Основываясь на анализе экспериментальных данных, авторы МВБ-1 предположили, что фундаментальную роль в модели должна играть группа $SU(6)$, содержащая ряд важных подгрупп, таких, как $SU(5)$, $SU(3)$ и $SO(6)$, которые можно связать с конкретной формой ядра. Характерным отличием гамильтониана МВБ-1 от гамильтониана МКФ является введение наряду с квадрупольными бозонами (d_{μ}^{\dagger} , d_{μ}) скалярного s -бозона (s^{\dagger} , s). Гамильтониан МВБ-1 постулировался как самый общий вращательный инвариант, который можно построить из генераторов группы $SU(6)$ [8, 9]:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{МВБ-1}} = & \epsilon_s s^{\dagger} s + \epsilon_d \sum_{\mu} d_{\mu}^{\dagger} d_{\mu} + v_2 [((d_2^{\dagger} d_2^{\dagger})_2 \tilde{d})_{(00)} s + \text{h.c.}] + \\
 & + \frac{v_0}{\sqrt{2}} [(d_2^{\dagger} d_2^{\dagger})_{(00)} s s + \text{h.c.}] + \frac{1}{2} u_0 s^{\dagger} s^{\dagger} s s + u_2 (d^{\dagger} \tilde{d})_{(00)} s^{\dagger} s + \\
 & + \sum_{L=0, 2, 4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} c_L ((d^{\dagger} d^{\dagger})_L (\tilde{d} \tilde{d})_L)_{(00)}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Гамильтониан (8) содержит 9 свободных параметров: ϵ_s , ϵ_d , v_2 , v_0 , u_0 , u_2 и c_L ($L = 0, 2, 4$).

Оператор квадрупольного момента записывался следующим образом:

$$\hat{Q}_{\text{МВБ-1}} = m_1 [d_2^{\dagger} s + \text{h.c.}] + m_2 (d^{\dagger} \tilde{d})_{(2\mu)}. \quad (9)$$

Существенным шагом на пути становления МВБ-1 явилось систематическое и интенсивное применение теоретико-группового подхода к описанию спектров сложных ядер как авторами МВБ-1 [8—10, 30], так и другими авторами [29, 36—38]. Полный анализ групповой структуры гамильтониана МВБ-1 дан в [30], где показано, что нарушение $SU(6)$ -симметрии до физической группы вращений $SO(3)$ возможно

только по трем редукционным цепочкам:

$$\begin{aligned} & \nearrow SU(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset O(2); & (I) \\ SU(6) & \rightarrow SU(3) \supset SO(3) \supset O(2); & (II) \\ & \searrow SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset O(2). & (III) \end{aligned}$$

Каждая из этих цепочек задает полный базис, который характеризуется квантовыми числами «вложенных» подгрупп. В [37] было показано, что гамильтониан (8) может быть записан в виде суммы операторов Казимира группы $SU(5)$, $SO(5)$, $SO(3)$ и $SU(3)$:

$$\begin{aligned} H_{\text{МВБ-1}} = \varepsilon C_{1v5} + \alpha C_{2v5} + \beta C_{2SO(5)} + \gamma C_{2SO(3)} + \delta C_{2SU(3)} \\ + \eta C_{2SO(6)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) содержит не все инварианты, а только представляющие спектроскопический интерес. Здесь ε , α , β , γ , δ и η — свободные параметры. Индексы 1 и 2 (перед символом группы) указывают, какой оператор Казимира используется: линейный или квадратичный. Эта форма записи гамильтониана удобна тем, что с ее помощью могут быть найдены все возможные частные случаи, когда задача на собственные значения может быть решена аналитически. Когда это происходит, говорят [30], что возникает динамическая симметрия*. Такие случаи возникают, когда $H_{\text{МВБ-1}}$ выражается в терминах операторов Казимира только одной из редукционных цепочек (I) — (III). Они связаны с обращением в нуль некоторых коэффициентов в (10). На существование связи редукционных цепочек (I) — (III) с характером фазового перехода от сферических ядер к деформированным указывалось в [36].

Один из первых успехов МВБ-1 был связан с предсказанием, что в ядрах реализуется $SO(6)$ -предел [42]. В этом пределе $\varepsilon = \alpha = \delta = 0$ и

$$\begin{aligned} \langle SO(6) | H_{\text{МВБ-1}} | SO(6) \rangle = \beta 2\tau(\tau + 3) + \gamma 2L(L + 1) \\ + \eta 2\sigma(\sigma + 4), \end{aligned}$$

где τ , σ , L — квантовые числа, характеризующие представления $SO(6)$. Такой спектр был обнаружен в ^{198}Pt [43]. Встречаются и другие ядра, спектры которых близки к реализующимся в предельных случаях (I) (^{110}Cd) и (II) (^{158}Gd), но большинство ядер имеет спектры, промежуточные между этими предельными случаями.

Наряду с алгебраическими свойствами МВБ-1 в [30] рассмотрены и геометрические свойства модели, которые описываются в терминах переменных формы ядерной поверхности. Изучение геометрических свойств МВБ-1 позволило связать предельные случаи (I) — (III)

* Следует подчеркнуть, что это несколько условное определение. Обычно динамическая симметрия определяется [39—41] в терминах таких понятий, как алгебра, генерирующая спектр, обертывающая алгебра, неприводимое представление и т. д.

с определенной формой ядра *. Было показано, что предельному случаю (I) отвечает сферическая форма, (II) — аксиально-деформированная вытянутая форма, (III) — деформированное ядро с независщей от γ потенциальной энергией.

2. УСТАНОВЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МКФ И МВБ-1

Установление эквивалентности МКФ и МВБ-1 при сравнении матричных элементов гамильтониана и квадрупольного операторов. Рассмотрим матричные элементы гамильтониана и квадрупольного оператора соответственно в базисах МКФ и МВБ-1.

Собственные функции $H_{\text{МВБ-1}}$ можно разложить по состояниям $|s^n_s d^n_d [N] \kappa LM \rangle$, образующим полный базис в 6-мерном гильбертовом пространстве. Здесь N — собственное значение оператора полного числа бозонов:

$$\hat{N} = s^+ s + \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} \equiv \hat{n}_s + \hat{n}_d,$$

а κ — дополнительное квантовое число, необходимое для полной характеристики базисных состояний. Гамильтониан $H_{\text{МКФ}}$ диагоналізується в базисе квадрупольных бозонов $|d^n \kappa LM \rangle$, где $n \leq N$.

Поскольку $H_{\text{МКФ}}$ содержит семь параметров (если исключить N) то удобно для взятия матричных элементов преобразовать и $H_{\text{МВБ-1}}$ от стандартной 9-параметрической к 7-параметрической форме. Так как оператор \hat{N} является линейным оператором Казимира для алгебры $SU(6)$, то

$$n_s + n_d = N = \text{const.} \tag{11}$$

С учетом этого факта, а также используя тождество

$$\hat{n}_d^2 \equiv \sum_{L=0, 2, 4} \sqrt{2L+1} ((d_2^+ d_2^+)_{(2\mu)} (\tilde{d}_2 \tilde{d}_2)_{(2-\mu)})_{(00)} + \hat{n}_d,$$

$H_{\text{МВБ-1}}$ можно преобразовать к виду [30, 47]

$$\begin{aligned} H_{\text{МВБ-1}} = & \epsilon_0 + \epsilon_d \hat{n}_d + v_2 [((d_2^+ d_2^+)_{(2\mu)} (\tilde{d}_2 \tilde{s})_{(2-\mu)})_{(00)} + \text{h.c.}] + \\ & + \frac{v_0}{\sqrt{2}} [(d_2^+ d_2^+)_{(00)} (\tilde{s} \tilde{s})_{(00)} + \text{h.c.}] + \\ & + \sum_{L=0, 2, 4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} c_L ((d_2^+ d_2^+)_{(L, M)} (\tilde{d}_2 \tilde{d}_2)_{(L-M)})_{(00)}, \end{aligned} \tag{12}$$

* Группа Ли $SU(6)$ помимо алгебраической имеет также и геометрическую структуру [44]: точки фактор-пространства $SU(6)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с когерентным состоянием $SU(6)$, которое может быть параметризовано с помощью переменных форм и углов Эйлера.

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &\equiv \epsilon_s N + \frac{1}{2} u_0 N (N-1); \\ \epsilon' &\equiv \epsilon_d - \epsilon_s + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} u_2 - u_0 \right) (N-1); \\ c'_L &= c_L + \frac{1}{2} u_0 - u_2 / \sqrt{5}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Обратимся к сравнению матричных элементов $H_{\text{МКФ}}$ и $H_{\text{МВБ-1}}$ в соответствующих базисах. Для краткости обозначения будем сохранять только символы, характеризующие число s - и d -бозонов в базисных векторах:

$$\begin{aligned} \langle d^{n_d} | H_{\text{МКФ}} | d^{n_d} \rangle &= h_0 \delta_{n_d n_d} + h_1 n_d \delta_{n_d n_d} + \\ &+ h_2 [\sqrt{(N-n_d)(N-n_d-1)} \langle d^{n_d} | (d_2^+ d_2^+)_{(00)} | d^{n_d} \rangle + \text{h.c.}] + \\ &+ h_3 [\sqrt{N-n_d} \langle d^{n_d} | (d_2^+ (d_2^+ \tilde{d}_2)_2)_{(00)} | d^{n_d} \rangle + \text{h.c.}] + \\ &+ \sum_{L=0, 2, 4} h_{4L} \sqrt{2L+1} \langle d^{n_d} | ((d_2^+ d_2^+)_3 (\tilde{d}_2 \tilde{d}_2)_2)_{(00)} | d^{n_d} \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее

$$\begin{aligned} \langle d^{n_d} s^{N-n_d} | H_{\text{МВБ-1}} | s^{N-n_d} d^{n_d} \rangle &= \epsilon_0 \delta_{n_d n_d} + \epsilon'_d n_d \delta_{n_d n_d} + \\ &+ \frac{v_0}{\sqrt{2}} [\sqrt{(N-n_d)(N-n_d-1)} \langle d^{n_d} s^{N-n_d} | (d_2^+ d_2^+)_{(00)} | s^{N-n_d-2} d^{n_d} \rangle + \\ &+ \text{h.c.}] + v_2 [\sqrt{N-n_d} \langle d^{n_d} s^{N-n_d} | ((d_2^+ d_2^+) d_2)_{(00)} | s^{N-n_d-1} d^{n_d} \rangle + \text{h.c.}] + \\ &+ \sum_{L=0, 2, 4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} c'_L \langle d^{n_d} s^{N-n_d} | ((d_2^+ d_2^+)_2 (d_2 d_2)_L)_{00} | s^{N-n_d} d^{n_d} \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Видно, что вследствие ортонормированности базиса зависимость от s -бозонов в (15) исчезает и при условии

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \epsilon_s N + \frac{1}{2} v_0 N (N-1); \\ h_1 &= \epsilon_d - \epsilon_s + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} u_2 - v_0 \right) (N-1); \\ h_2 &= v_0 / \sqrt{10}; \\ h_3 &= v_2 / \sqrt{5}; \\ h_{4L} &= c_L + \frac{1}{2} u_0 - u_2 / \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

правые части (14) и (15) тождественно совпадают. Аналогично можно доказать совпадение матричных элементов операторов $Q_{\text{МКФ}}$ и $Q_{\text{МВБ-1}}$ при совпадающих значениях m_1 , и m_2 . Таким образом, можно считать доказанной эквивалентность МКФ и МВБ-1 «в слабом смысле».

Операторная эквивалентность МКФ и МВБ-1. В [16] сформулировано более сильное утверждение. Гамильтонианы МКФ и МВБ-1 как операторы (безотносительно к базису) точно совпадают. Для доказательства этого необходимо устранить причину, маскирующую эквивалентность операторов обеих моделей (они имеют различные бозонные образы). Один из возможных путей решения этой задачи — получение представления Швингера для операторов МКФ и последующее сравнение их с соответствующими операторами МВБ-1 [24]. (На возможность использования ПШ для генераторов $SU(6)$ -алгебры введением монополярных бозонов β^+ , β^- авторы МКФ указывали в [6, 23].)

Генераторы коллективной квадрупольной алгебры (ККА) $\{\hat{q}_\mu, \hat{p}_\mu, i[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\mu], [\hat{q}_\mu, \hat{q}_\mu']\}$ будем в дальнейшем для краткости обозначать $\{\hat{q}_\lambda\}$. Алгебра $SU(6)$ имеет 35 генераторов, и ее фундаментальное представление является шестимерным. Как и для любой Ли алгебры

$$[\hat{g}_\lambda, \hat{g}_\rho] = \gamma_{\lambda\rho}^\tau \hat{g}_\tau \quad (17)$$

по τ выполняется суммирование), где λ_τ, ρ, τ принимают значения 1, 2, ..., 35, а $\gamma_{\lambda\rho}^\tau$ — структурные константы ККА.

Пусть множество шестимерных матриц $\{g_\lambda\}$ генерирует фундаментальное представление ККА. По определению ПШ этой алгебры порождается операторами [48]

$$g_\lambda^{\text{ПШ}} \equiv x^+ g_\lambda x; \quad x^+ = (s^+ d_{-2}^+ d_{-1}^+ \dots d_2^+); \quad x = \begin{pmatrix} s \\ d_{-2} \\ d_{-1} \\ \vdots \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Используя (17), (18) и бозевские коммутационные соотношения операторов s, s^+, d_μ, d_μ^+ , можно показать, что

$$[g_\lambda^{\text{ПШ}}, g_\rho^{\text{ПШ}}] = \gamma_{\lambda\rho}^\tau g_\tau^{\text{ПШ}},$$

т. е. $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$ есть реализация ККА.

Покажем, что если параметры $H_{\text{колл}}$ из (3) и $H_{\text{МВБ-1}}$ из (8) связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= -10e + 5(u + v + t_0) + d; \\ \epsilon_d &= 2e + u + v + \frac{1}{5} \sum_{L=0}^4 (2L + 1) t_L + d; \\ u_0 &= 10t_0; \\ u_2 &= 2\sqrt{5}(u + v - t_0); \\ v_0 &= \sqrt{10}(u - v); \\ v_2 &= \sqrt{5}w; \\ c_L &= 2 \sum_{L=0}^4 t_l (-1)^l (2l + 1) \begin{Bmatrix} 22L \\ 22l \end{Bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

то будут справедливы равенства

$$H_{\text{колл}}^{\text{III}} \equiv H_{\text{МКФ}}^{\text{III}} = H_{\text{МВБ-1}}; \quad Q_{\mu(\text{МКФ})}^{\text{III}} = Q_{\mu(\text{МВБ-1})}. \quad (20)$$

Впервые связь параметров обеих моделей в форме (19) была выведена в [49]. Она обладает некоторыми преимуществами по сравнению с другими формами связи, включающими квантовое число N явно. В [49] подчеркнута выделенность роли квантового числа N среди остальных свободных параметров МКФ. Кроме того, соотношения связывают одинаковое число параметров обеих моделей [в отличие от соотношений (16)], соответствие между которыми взаимно однозначное (см. [49]). Параметр d в правой части (19) появляется, если дополнить (3) девятым членом $d \cdot \hat{N}$ (\hat{N} — 36-й генератор $U(6)$).

Алгебра Ли группы $SU(6)$ относится к классическим алгебрам Ли [50—52] (это — A_5 в обозначениях Картана). При построении $\{g_{\lambda}^{\text{III}}\}$ воспользуемся мощным аппаратом теории классических алгебр Ли.

Известно, что $SU(6)$ -алгебра ранга 5, т. е. среди 35 генераторов 5 взаимно коммутирующих [53]. Известны каноническая форма перестановочных соотношений $SU(6)$ -алгебры и явный вид матриц определяющего представления. Приведем несколько формул, которые будем использовать в дальнейшем. Стандартная форма $SU(6)$ -алгебры следующая [51—53]:

$$[H_k, H_l] = 0, \quad (k, l = 1, 2, \dots, 5); \quad (21)$$

$$[H_k, E_{\pm\alpha}] = r_k(\pm\alpha) E_{\pm\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 15); \quad (22)$$

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \sum_{k=1}^5 r_k(\alpha) H_k; \quad (23)$$

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha\beta}^{\delta} E_{\delta}. \quad (24)$$

В (24) нет суммирования.

Поясним обозначения. Шестимерные матрицы $\{H_h\}$ — элементы максимальной картановской абелевой подалгебры. Они диагональны и могут быть выбраны в виде [53]

$$H_h = [12k(k+1)]^{-1/2} \text{diag} \left(\begin{array}{cccccc} \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} 6 \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ 1, \dots, 1, -k, 0, \dots, 0 \\ \overleftarrow{\hspace{1.5cm}} \leftarrow k \rightarrow \end{array} \right); \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \text{Tr}(H_h H_e) = \delta_{he}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

Повышающие и понижающие канонические генераторы имеют вид

$$E_\alpha = \sqrt{\frac{1}{12}} \begin{pmatrix} 0 & j \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} i; \quad E_{-\alpha} = E_\alpha^\dagger, \quad (26)$$

причем $j > i = 1 \div 6$.

Имеет место следующая связь между α и $(10i + j)$:

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$10i + j$	12	13	14	15	16	23	24	25	26	34	35	36	45	46	56

Операторы $\{H_h\}$ и $\{E_{\pm\alpha}\}$ называют каноническими генераторами Картана — Вейля. Пятимерные корневые векторы $r(\alpha)$ подчинены условиям

$$r(-\alpha) = -r(\alpha); \quad \sum_{\pm\alpha} r_h(\alpha) r_i(\alpha) = \delta_{hi}.$$

Вернемся к задаче нахождения $\{g_\lambda\}^{\text{III}}$. Используем чисто алгебраический способ нахождения 35 шестимерных матриц, удовлетворяющих ККА. Он основан на общей теореме Картана, согласно которой интересующую нас алгебру ККА можно перевести в каноническую форму, для которой матричная реализация известна: (25), (26). Сущность этого метода состоит в следующем: составим такие линейные комбинации из $\{g_\lambda\}$, которые удовлетворяют соотношениям (21) — (24). Следовательно, эти комбинации можно ассоциировать с $\{H_h\}$ и $\{E_{\pm\alpha}\}$, а для них известно представление в виде матриц. Совершая обратное преобразование, найдем в явном виде матрицы $\{g_\lambda\}$.

1. Фиксируем базис в ККА:

$$\begin{aligned} \{g_\lambda\} = & \{[q_\mu q_{-\mu}], (\mu = 1, 2); \quad i[q_\mu, p_\mu], (\mu = 0, 1, 2); \\ & q_\mu, p_\mu, (\mu = 0, \pm 1, \pm 2); \quad i[q_\mu, p_{-\mu}], (\mu = \pm 1, \pm 2); \\ & i[q_{-2}, p_1], (i[q_0, p_\mu], \mu = 1, 2); \quad i[q_1, p_0], i[q_1, p_2]; \end{aligned}$$

$$(i[q_2, p_\mu], \mu = 0, \pm 1); ([q_{-2}, q_\mu], \mu = 0, \pm 1); \\ ([q_2, q_\mu], \mu = 0, \pm 1); [q_0, q_{-1}], [q_0, q_1].$$

2. Найдем картановскую подалгебру в ККА. Воспользовавшись коммутационными соотношениями (2), легко показать, что она состоит из следующих пяти генераторов:

$$\{i[q_\mu, p_\mu], (\mu = 0, 1, 2); [q_\mu, q_{-\mu}], (\mu = 1, 2)\}.$$

Они взаимно коммутируют и могут быть одновременно приведены к диагональному виду. Введем обозначения

$$H' \equiv \begin{pmatrix} [q_1, q_{-1}] \\ [q_2, q_{-2}] \\ i[q_0, p_0] \\ i[q_1, p_1] \\ i[q_2, p_2] \end{pmatrix}; \quad H \equiv \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Ясно, что H' и H связаны линейным преобразованием

$$H' = MH, \quad (28)$$

где M — пятимерная, пока неизвестная матрица.

3. В качестве операторов $E_{\pm\alpha}$ можно выбрать следующие 30 операторов:

$$\left. \begin{aligned} \{(\hat{q}_\mu \pm i\hat{p}_{-\mu}), \mu = 0, \pm 1, \pm 2; (i[\hat{q}_\mu, \hat{p}_{-\mu}], \mu = \pm 1, \pm 2); \\ ([\hat{q}_\mu, \hat{q}_{-\mu}] \pm i[\hat{q}_\mu, p_{-\mu}])\}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Можно показать, что операторы (29) удовлетворяют коммутационным соотношениям (22)–(24).

4. Найдем точное соответствие $\{\mu_1(\mu, \mu')\} \leftrightarrow \{\pm\alpha\}$. Решение задачи существенно облегчает знание матрицы M . Опуская детали [24], приводим конечный результат рассмотрения:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{5}{8}\sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{15}} & \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{15}} & \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{15}} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}} & \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{10}} & \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{10}} & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{10}} \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{15} & 0 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & \frac{1}{15}\sqrt{15} & -\frac{6}{5}\sqrt{10} \\ -2\sqrt{6} & -2\sqrt{2} & -8 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{6} & -4\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{15} & 0 \\ -3\sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & -\frac{1}{5}\sqrt{15} & -\frac{6}{5}\sqrt{10} \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} q_2 + ip_{-2} &= 2\sqrt{12} E_1; \\ q_1 - ip_{-1} &= -2\sqrt{12} E_2; \\ q_0 + ip_0 &= 2\sqrt{12} E_3; \\ q_{-1} - ip_1 &= -2\sqrt{12} E_4; \\ q_{-2} + ip_2 &= 2\sqrt{12} E_5. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Другие пять комбинаций можно получить, взяв эрмитовое сопряжение (32).

Поскольку явный вид матриц M^{-1} и M известен, легко найти соответствие между операторами из (29) и $\{E_{\pm\alpha}\}$.

5. Совершая обратное преобразование, находим $\{g_\lambda\}$, выраженные через $\{H_k, E_{\pm\alpha}\}$.

Окончательный результат следующий:

$$\left. \begin{aligned} q_{-2} &= \sqrt{12}(E_{-1} + E_5); & p_{-2} &= i\sqrt{12}(E_{-5} - E_1); \\ q_{-1} &= \sqrt{12}(E_{-2} - E_4); & p_{-1} &= -i\sqrt{12}(E_{-4} + E_2); \\ q_0 &= \sqrt{12}(E_3 + E_{-3}); & p_0 &= i\sqrt{12}(E_{-3} - E_3). \\ i[q_1, p_{-1}] &= 2\sqrt{12} E_{-11}; \\ i[q_2, p_{-2}] &= 2\sqrt{12} E_{-9}; \\ i[q_{-2}, p_1] &= \sqrt{12}(E_8 - E_{12}); & i[q_1, p_2] &= \sqrt{12}(E_{15} - E_6); \\ i[q_0, p_1] &= \sqrt{12}(E_{13} - E_{10}); & i[q_2, p_0] &= \sqrt{12}(E_{-14} + E_{-7}); \\ i[q_0, p_2] &= \sqrt{12}(E_{14} + E_7); & i[q_2, p_1] &= \sqrt{12}(E_{-12} - E_{-8}); \\ i[q_1, p_0] &= \sqrt{12}(E_{-13} - E_{-10}); & i[q_2, p_1] &= \sqrt{12}(E_{-15} - E_{-6}); \\ [q_{-2}, q_0] &= \sqrt{12}(E_7 - E_{14}); & [q_2, q_{-1}] &= -\sqrt{12}(E_{-6} + E_{-15}); \\ [q_{-2}, q_{-1}] &= -\sqrt{12}(E_8 + E_{12}); & [q_2, q_1] &= -\sqrt{12}(E_{-8} + E_{-12}); \\ [q_{-2}, q_1] &= -\sqrt{12}(E_6 + E_{15}); & [q_0, q_{-1}] &= -\sqrt{12}(E_{-10} + E_{-13}). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Остальные матрицы можно получить, используя свойства эрмитового сопряжения операторов.

Соотношения (33) дают искомую матричную реализацию ККА. Соответствующее ПШ, полученное с помощью (18), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} q_{\mu}^{\text{ПШ}} &= s d_{\mu}^{+} + (-1)^{\mu} d_{-\mu} s^{+}; \\ p_{\mu}^{\text{ПШ}} &= i((-1)^{\mu} s d_{-\mu}^{+} - s^{+} d_{\mu}); \\ i[q_{\mu}, p_{\mu'}]^{\text{ПШ}} &= d_{\mu}^{+} d_{\mu'} + (-1)^{\mu+\mu'} d_{-\mu}^{+} d_{-\mu'} - 2\delta_{\mu\mu'} s^{+} s; \\ [q_{\mu}, q_{\mu'}]^{\text{ПШ}} &= (-1)^{\mu'} d_{\mu}^{+} d_{-\mu'} - (-1)^{\mu} d_{\mu}^{+} d_{-\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из (10) и (34) следует, что

$$[N^{\text{ПШ}}, q_{\lambda}^{\text{ПШ}}] = 0 \quad (35)$$

при любых λ , т. е. $N^{\text{ПШ}}$ — оператор Казимира $SU(6)$ -алгебры.

Подставляя (34) в (3) и (6), получаем выражения, по своей бозонной структуре совпадающие с соответствующими выражениями МВБ-1. Параметры обеих моделей оказываются связанными соотношениями (19).

Итак, мы показали, что гамильтонианы и квадрупольные операторы обеих моделей тождественно совпадают.

Унитарная эквивалентность МКФ и МВБ-1 в физическом подпространстве. Вопрос об эквивалентности МКФ и МВБ-1 можно сформулировать как вопрос о том, являются ли швингеровская и холстейн-примаковская реализации ККА изоморфными * и, в частности, унитарно-эквивалентными. Вопросы такого рода возникали в различных областях теоретической физики [55—57]. Центральную роль при этом играет некоторая абстрактная алгебра, конкретным реализациям которой отвечают конкретные физические теории.

Эта абстрактная алгебра может иметь изоморфные (\cong , т. е. эквивалентные) и неизоморфные представления. Физические теории, соответствующие неэквивалентным представлениям, могут сильно отличаться. Однако если представления изоморфны, то имеется сходство между физическими теориями. Если, наконец, представления унитарно-эквивалентны, физические теории тождественны.

Введем в рассмотрение пространства — носители, т. е. пространства, в которых действуют генераторы $\{g_{\lambda}^{\text{ПШ}}\}$ и $\{g_{\lambda}^{\text{ХП}}\}$ [заданные с помощью (4) и (34) как операторы в соответствующих гильбертовых пространствах] коллективной квадрупольной алгебры, рассматриваемой как абстрактная алгебра. Известно [54, 58], что множество векторов

$$\{[N] n_s \{n_v\}_{\text{ПШ}}\} = \prod_{v=-2}^2 (n_v!)^{-1/2} (d_v^+)^{n_v} (n_s!)^{-1/2} (s^+)^{n_s} |0\rangle, \quad (36)$$

* Изоморфизм — обобщение унитарной эквивалентности [см. (43)].

таких, что

$$n_d = \sum_{\nu=-2}^2 n_\nu; \quad n_s + n_d = N, \quad (37)$$

образует базис для полностью симметричного представления $SU(6)$, размерность которого $\frac{(N+5)!}{N!5!}$. В (36) $|0\rangle$ — вакуум s - и d -бозонов.

Из явного вида генераторов ККА в ПШ (34) видно, что множество векторов $\{|[N]n_s = \{n_\nu\}\rangle\}$ инвариантно по отношению к действию $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$. По определению пространство, образуемое векторами $\{|[N]n_s \{n_\nu\}\rangle_{\text{ПШ}}\}$, называется пространством-носителем.

Пусть $\{M\}$ — множество векторов (36). Генераторы $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$ хорошо определены на $\{M\}$. Пусть N — фиксировано: $N = N_0$, т. е. мы находимся в заданном полностью симметричном представлении $SU(6)$. Любое подмножество векторов $\{|[N']n_s \{n_\nu\}\rangle_{\text{ПШ}}\}$, такое, что

$$n_s + n_d = N' < N_0, \quad (38)$$

образует подпространство в $\{M\}$, остающееся инвариантным при действии $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$. В терминах $\{M\}$ и $\{|[N']n_s \{n_\nu\}\rangle_{\text{ПШ}}\}$ пространство-носитель швингеровского представления ККА есть фактор-пространство [44]:

$$\begin{aligned} & \{|[N_0]n_s \{n_\nu\}\rangle_{\text{ПШ}}\} = \\ & = \{M\} / \{|[N']n_s \{n_\nu\}\rangle_{\text{ПШ}}\}, \end{aligned} \quad (39)$$

т. е. из множества векторов (36) с $N = N_0, N_0 - 1, \dots, 1$ или 0 все векторы, для которых справедливо (38), исключаются и остаются только те, для которых $N = N_0$. Поскольку пространство (39) инвариантно относительно действия $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$, то это и есть пространство-носитель для ПШ.

Введем пространство-носитель для XII-представления. Множество векторов

$$\{|[N_0]\{n_\nu\}\rangle_{\text{XII}} = \prod_{\nu=-2}^2 (n_\nu!)^{-\frac{1}{2}} (b_\nu^\dagger)^{n_\nu} |\tilde{0}\rangle\}; \quad (40)$$

$$n_b = \sum_{\nu=-2}^2 n_\nu \leq N_0 \quad (41)$$

формирует базис для полностью симметричного неприводимого представления $[N_0]$ группы $SU(6)$ [59, 60]. Здесь $|\tilde{0}\rangle$ — вакуум b -бозонов. Для удобства при рассмотрении генераторов в XII-представлении будем использовать не операторы d_{μ^-}, d_{μ^+} , как в (4), а b_μ^+, b_μ . Легко убедиться, что генераторы $\{g_\lambda^{\text{XII}}\}$, действуя на векторы (40), не выводят их из этого подпространства. Базисные состояния (40) следует называть физическими, а векторы с $n_b > N_0$ — нефизическими,

так как генераторы q_μ^{XII} , p_μ^{XII} имеют смысл, только если выполняется условие (41).

Введем оператор, отображающий пространство-носитель PIII на пространство-носитель XII -представления:

$$P_{N_0} = \sum_{\{n_\nu\}} \{[N_0] \{n_\nu\}\}_{\text{XII}} \text{PIII} \langle \{n_\nu\} n_s [N_0] \rangle. \quad (42)$$

Будем доказывать унитарную эквивалентность МКФ и МВВ-1, используя сплетающие операторы. Предварительно напомним некоторые понятия из теории представлений алгебр Ли [63, 64].

Пусть g^k и g^L — два представления некоторой абстрактной алгебры A , действующие в пространствах M^k и M^L соответственно. Говорят, что g^k и g^L частично изоморфны (эквивалентны), если существует непрерывное линейное отображение $P: M^k \rightarrow M^L$, такое, что

$$P g_\lambda^k = g_\lambda^L P; \quad g_\lambda^k \in A; \quad g_\lambda^L \in A. \quad (43)$$

Отображение с этим свойством называется сплетающим оператором для представления g^k и g^L . Если к тому же P имеет непрерывный обратный оператор, то представления g^k и g^L называются изоморфными (эквивалентными). В случае если P — изометрический, т. е. сохраняет норму, говорят, что g^k и g^L унитарно-эквивалентны. Множество точек M^k , которые отображаются в нулевой вектор M^L , называется ядром отображения P и обозначается символом $\ker P$. Множество точек $\{M^L\}$, получающихся действием P на $\{M^k\}$, называется образом P .

Нетрудно проверить, что оператор P_{N_0} обладает свойством (43), т. е. сплетает PIII - и XII -представления коллективной квадрупольной алгебры

$$P_{N_0} g^{\text{PIII}} = g^{\text{XII}} P_{N_0} \quad (44)$$

для любого генератора из $\{g^{\text{PIII}}\} \equiv (q_\mu^{\text{PIII}}, p_\mu^{\text{PIII}}, i [q_\mu, p_\mu]^{\text{PIII}}, [q_\mu, q_\mu']$ и $\{g^{\text{XII}}\} \equiv (q_\mu^{\text{XII}}, p_\mu^{\text{XII}}, i [q_\mu', p_\mu']^{\text{XII}}, [q_\mu, q_\mu']^{\text{XII}}$.

Исследуем нули P_{N_0} . Из (36), (37), (40), (42) следует, что вне физического подпространства, где $\sum_\nu n_\nu > N_0$, $P_{N_0} \rightarrow 0$, и, следовательно, обратный оператор не существует. Значит, P_{N_0} хорошо определен только в физическом подпространстве.

Найдем множество точек, которые отображаются на нулевой вектор множества $\{[N_0] \{n_\nu\}\}_{\text{XII}}$. Используя $n_s + n_d = N' < N_0$ и (42), получаем

$$P_{N_0} \{[N'] n_s \{n_\nu\}\}_{\text{PIII}} = 0. \quad (45)$$

Откуда следует, что P_{N_0} имеет нетривиальное ядро. В этом случае естественно ввести соответствующее фактор-пространство:

$$\{M\} / \{[N'] n_s \{n_\nu\}\}_{\text{PIII}} \equiv \{M\} / \ker P_{N_0}$$

и переписать (39) следующим образом:

$$\{[N_0] n_s \{n_\mu\}\} = \{M\}/\ker P_{N_0}.$$

Фактор-пространство состоит из классов $\{|m\rangle + \ker P_{N_0}\}$ эквивалентных элементов множества $\{M\}$. [Два элемента называются эквивалентными, т. е. принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $(|m_1\rangle - |m_2\rangle) \in \ker P_{N_0}$.] В этом фактор-пространстве можно определить [65] оператор $P_{N_0}^f$, полагая

$$P_{N_0}^f (|m\rangle + \ker P_{N_0}) \equiv P_{N_0} |m\rangle, \quad (46)$$

где $|m\rangle \in \{M\}$.

Соотношение (46) означает, что $P_{N_0}^f$ отображает изоморфно $\{M\}/\ker P_{N_0}$ на физическое подпространство $\{[N_0] \{n_\mu\}\}$ ХП. Для оператора P_{N_0} это не так, поскольку он имеет нетривиальное ядро.

Пусть $g_f^{\text{ПШ}}$ — швингеровское представление ККА, индуцированное $g^{\text{ПШ}}$ в фактор-пространстве $\{M\}/\ker P_{N_0}$. Рассмотрим выражение

$$P_{N_0}^f g_f^{\text{ПШ}} (|m\rangle + \ker P_{N_0}),$$

где $|m\rangle$ — любое состояние из $\{M\}$. Принимая во внимание, что $\ker P_{N_0}$ инвариантен относительно действия $g_f^{\text{ПШ}}$, и учитывая (46), получаем

$$P_{N_0}^f (g^{\text{ПШ}} |m\rangle + \ker P_{N_0}) = P_{N_0} g^{\text{ПШ}} |m\rangle.$$

Мы воспользовались тем, что в силу (45) P_{N_0} «не замечает» элементов своего ядра. Используя тот факт, что P_{N_0} сплетает $g^{\text{ПШ}}$ и $g^{\text{ХП}}$ [см. (44)], можно написать

$$P_{N_0} g^{\text{ПШ}} |m\rangle = g^{\text{ХП}} P_{N_0} |m\rangle \equiv g^{\text{ХП}} P_{N_0}^f (|m\rangle + \ker P_{N_0}). \quad (47)$$

Для того чтобы написать второе равенство, мы снова воспользовались определением (46). Кроме того, можем написать, что

$$P_{N_0}^f (|m\rangle + \ker P_{N_0}) \in \{[N_0] \{n_\mu\}\}_{\text{ХП}},$$

поскольку образ оператора $P_{N_0}^f$ есть не что иное, как физическое подпространство. Таким образом, правая часть (47) может быть переписана так:

$$g_{\text{физ}}^{\text{ХП}} P_{N_0}^f (|m\rangle + \ker P_{N_0}),$$

где $g_{\text{физ}}^{\text{ХП}}$ — сужение ХП-представления на физическое подпространство. Таким образом, для любого $|m\rangle \in \{M\}$

$$P_{N_0}^f g_f^{\text{ПШ}} (|m\rangle + \ker P_{N_0}) = g_{\text{физ}}^{\text{ХП}} P_{N_0}^f (|m\rangle + \ker P_{N_0}), \quad (48)$$

откуда следует $P_{N_0}^f g_f^{\text{ПШ}} = g_{\text{физ}}^{\text{ХП}} P_{N_0}^f$. Учитывая, что

$P_{N_0}^f$ имеет хорошо определенный обратный оператор, соотношение (48) означает, что швингеровская реализация ККА $\{g_f^{\text{ПШ}}\}$, индуцированная представлением $\{g^{\text{ПШ}}\}$ в фактор-пространстве $\{M\}/\ker P_{N_0}$, эквивалентна ХП-реализации ККА, ограниченной на физическое подпространство.

Заметим, что если мы работаем в физическом подпространстве (т. е. при $n_b < N_0$, $n_s > 0$), то оператор $P_{N_0}^f$ сохраняет норму в $\{| \rangle_{\text{ПШ}}\}$, а $(P_{N_0}^f)^+$ — в $\{| \rangle_{\text{ХП}}\}$:

$$\begin{aligned} & \| P_{N_0}^f | [N_0] n_s \{n_\nu\} \rangle_{\text{ПШ}} \| = \\ & = {}_{\text{ПШ}} \langle \{n_\nu\} n_s [N_0] | (P_{N_0}^f)^+ P_{N_0}^f | [N_0] n_s \{n_\nu\} \rangle_{\text{ПШ}} = \\ & = {}_{\text{ХП}} \langle \{n_\nu\} [N_0] | [N_0] \{n_\nu\} \rangle_{\text{ХП}} = 1 = {}_{\text{ПШ}} \langle \{n_\nu\} n_s [N_0] | [N_0] n_s \{n_\nu\} \rangle_{\text{ПШ}} = \\ & = \| [N_0] n_s \{n_\nu\} \rangle_{\text{ПШ}} \|; \\ & \| (P_{N_0}^f)^+ | [N_0] \{n_\nu\} \rangle_{\text{ХП}} \| = \| [N_0] \{n_\nu\} \rangle_{\text{ХП}} \|. \end{aligned}$$

Изометричность $P_{N_0}^f$ и изоморфность $g_f^{\text{ПШ}}$ и $g_{\text{Физ}}^{\text{ХП}}$, вместе взятые, означают, что $g_f^{\text{ПШ}}$ и $g_{\text{Физ}}^{\text{ХП}}$ унитарно-эквивалентны:

$$\left. \begin{aligned} g_f^{\text{ПШ}} &= (P_{N_0}^f)^{-1} g_{\text{Физ}}^{\text{ХП}} P_{N_0}^f; \\ g_{\text{Физ}}^{\text{ХП}} &= P_{N_0}^f g_f^{\text{ПШ}} (P_{N_0}^f)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Из унитарной эквивалентности швингеровской и хольстейн-примаксовской реализаций ККА непосредственно вытекает унитарная эквивалентность МВБ-1 и МКФ, так как

$$H_{\text{МКФ}} = P_{N_0}^f H_{\text{МВБ-1}} (P_{N_0}^f)^{-1}; \quad (50)$$

$$Q_{\text{МКФ}} = P_{N_0}^f Q_{\text{МВБ-1}} (P_{N_0}^f)^{-1}. \quad (51)$$

На это обстоятельство уже было обращено внимание в [66, 67]. Смысл доказанных утверждений (50), (51), действительно, весьма прозрачен. Однако унитарная эквивалентность обеих моделей имеет место только в физическом подпространстве. [В противном случае $\{g_\lambda^{\text{ПШ}}\}$ и $\{g_\lambda^{\text{ХП}}\}$ лишь частично изоморфны, а оператор P_{N_0} частично изометрический (он обращает в нуль ортогональное дополнение к физическому подпространству).] Отметим, что то, что нужно рассматривать МКФ и МВБ-1 в физическом пространстве, ранее подразумевалось и именно это послужило основой для установления эквивалентности на уровне матричных элементов. Здесь же область, где унитарная эквивалентность МКФ и МВБ-1 имеет место — физическое подпространство, получается в результате вывода основного соотношения (48).

Объединение МКФ и МВБ-1: феноменологическая $SU(6)$ -бозонная модель (МВБ). Объединяющим началом обеих моделей является коллективная квадрупольная алгебра (2). Убедившись, что гамильтониан и физические операторы МКФ и МВБ-1 возникают в результате холстейн-примаковской и швингеровской бозонизацией ККА соответственно, мы приписали ей фундаментальное значение и изучили эти два представления ККА в их взаимосвязи. Поскольку в силу (50) и (51) МКФ и МВБ-1 унитарно-эквивалентны (если, конечно, операторам из $\{g_{\lambda}^{XII}\}$ и $\{g_{\lambda}^{XIII}\}$ придавать один и тот же смысл), эти модели неразличимы. Тем самым установлено, что МКФ и МВБ-1 являются двумя унитарно-эквивалентными формами единой феноменологической $SU(6)$ -бозонной модели — МВБ — с гамильтонианом (3) и квадрупольным оператором (6), т. е.

$$\hat{H}_{\text{МВБ}} = \hat{H}_{\text{колл}}; \quad \hat{Q}_{\text{МВБ}} = \hat{Q}_{\text{колл}}, \quad (52)$$

причем операторы $\{\hat{q}, \hat{p}, i[\hat{q}, \hat{p}], [\hat{q}, \hat{q}]\}$, фигурирующие в $\hat{H}_{\text{колл}}$ и $\hat{Q}_{\text{колл}}$, замыкают $SU(6)$ -алгебру (2) ККА.

Таким образом, выбранный нами подход к установлению эквивалентности МВБ-1 и МКФ (рассмотрение представлений ККА в их взаимной связи), по существу, унифицирует обе модели в одну — МВБ (см. примечание на с. 1176). Можно взглянуть и с диаметрально противоположной стороны: возьмем за основу МВБ, задаваемую (52). Построим ПШ, и, подставив его в (52), получим МВБ-1 с гамильтонианом $H_{\text{МВБ-1}}$ (8) и квадрупольным оператором $Q_{\text{МВБ-1}}$ (9). Затем построим XII-реализацию ККА (см. [25]), задаваемую (4), подставим ее в (52) и получим $H_{\text{МКФ}}$ (5) и $Q_{\text{МКФ}}$ (7). Таким образом, выбранный подход изучения реализаций ККА в их взаимосвязи позволяет дать дедуктивный вывод МКФ и МВБ-1. Более того, в рамках этого метода удастся вывести новую коллективную модель [также основанную на динамической $SU(6)$ -симметрии], соответствующую дайсоновской бозонной реализации ККА. Вывод этой «конечной модели квадрупольных фононов» (КМКФ) дан в [68] (см. также [25]). Дайсоновская реализация ККА явно построена с использованием обобщенных когерентных состояний и корневых векторов $SU(6)$ -алгебры. Явный вид дайсоновского представления ККА в терминах квадрупольных бозонов следующий:

$$\left. \begin{aligned} q_{\mu}^{\text{ДР}} &= b_{\mu}^{+} \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{+} b_{\nu} \right) + (-1)^{\mu} b_{\mu}; \\ p_{\mu}^{\text{ДР}} &= i \left[(-1)^{\mu} b_{-\mu}^{-} \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{+} b_{\nu} \right) - b_{\mu} \right]; \\ i [q_{\mu}, p_{\mu'}] &= b_{\mu}^{+} b_{\mu'} + (-1)^{\mu+\mu'} b_{-\mu}^{+} b_{-\mu'} - 2\delta_{\mu\mu'} \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{+} b_{\nu} \right); \\ [q_{\mu}, q_{\mu'}] &= (-1)^{\mu} b_{\mu}^{+} b_{-\mu'} - (-1)^{\mu} b_{\mu}^{+} b_{-\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

В результате подстановки в (52) возникает гамильтониан КМКФ, имеющий вид

$$\begin{aligned}
 H_{\text{КМКФ}} = & 2e \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} - 10e (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) + \\
 & + d_0 (5 - 2 \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) + \sum_L d_L (-1)^{L-M} (b_{\frac{1}{2}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}})_{LM} (b_{\frac{1}{2}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}})_{L-M} + \\
 & + (s-v) [\sum_{\mu} (-1)^{\mu} b_{\mu}^{\dagger} b_{-\mu}^{\dagger} (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} - 1) + \\
 & + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} b_{\mu} b_{-\mu}] + (s+v) [(5 + 2 \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) + \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}] + \\
 & + w [\sum_{\mu} (b_{\frac{1}{2}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}}^{\dagger})_{2\mu} b_{\mu} (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}) + \text{h.c.}]. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в дополнение к существующим $SU(6)$ -гамильтонианам $H_{\text{МКФ}}$ и $H_{\text{МВБ-1}}$ мы получили $SU(6)$ -гамильтониан $H_{\text{КМКФ}}$, построенный как вращательный инвариант из генераторов в дайсоновском представлении (53) ККА. Гамильтониан такого типа обсуждался в [69] в связи с группой $O(8)$, а не в контексте динамической $SU(6)$ -симметрии.

Несмотря на неэрмитовость $H_{\text{КМКФ}}$ при $s \neq v$ и $w \neq 0$, он обладает тем преимуществом, что он конечен и на него возлагают надежды и разрабатывают методы решений [45], особенно в связи с микроскопическим обоснованием бозонных моделей [70].

Поскольку конечная модель квадрупольных фононов все еще разрабатывается, она не добилась на сегодняшний день популярности МВБ. Поэтому вопрос о соотношении КМКФ и МВБ не актуален. Интерес представляет другой вопрос: сохраняется ли унитарная эквивалентность МКФ и МВБ-1, имеющая место в квантовом случае и в классическом пределе, или, иначе говоря, будут ли классические пределы МКФ и МВБ-1 производить идентичные энергетические поверхности и, следовательно, приводить к одинаковым классическим траекториям? Покажем, что ответ на этот вопрос положительный.

Установление эквивалентности МВБ-1 и МКФ в классическом пределе. Напомним, что классический предел квантомеханического оператора определяется как его среднее значение в обобщенном когерентном состоянии (ОКС) [44, 71]. ОКС — удобный инструмент для построения классических пределов квантовых наблюдаемых, позволяющий тем не менее оставаться при этом в квантовой области [71].

ОКС для канонической $SU(6)$ -алгебры (21)–(24) определяется [44, 71] действием представителей фактор-пространства $SU(6)/U(5)$ на старший вектор $|j\rangle$ полностью симметричного представления $SU(6)$:

$$|c, j\rangle \equiv \exp \left\{ \sum_{r(\alpha)j>0} c_{\alpha}^* E_{\alpha} \right\} |j\rangle. \quad (55)$$

Здесь $\{c_\alpha^*\}$ — набор комплексных параметров с индексом, соответствующим номеру корневого вектора $\mathbf{r}(\alpha)$; j есть старший вес; остальные обозначения даны после коммутационных соотношений (21)—(24). Для получения классических пределов $H_{\text{МКФ}}$ и $H_{\text{МВБ-1}}$ мы должны сконструировать в явном виде когерентные состояния, соответствующие МКФ и МВБ-1. ОКС $|c, j\rangle_{\text{МКФ}}$ и $|c, \alpha\rangle_{\text{МВБ-1}}$ можно построить, конкретизируя (55) с учетом того, что:

1) в случае $SU(6)$ -алгебры (21)—(24) вклад в экспоненциальный множитель дают только пять понижающих операторов $\{E_{-\beta}\}$ ($\beta = 1, \dots, 5$), соответствующих простым корневым векторам $\mathbf{r}(\beta)$ (см. приложение А в [25]);

2) явный вид $\{E_{-\beta}^{\text{ПП}}\}$ и $\{E_{-\beta}^{\text{ХП}}\}$ нетрудно найти с помощью соотношений (32)—(34) и (4);

3) $|j\rangle_{\text{ПП}}$ и $|j\rangle_{\text{ХП}}$ — вакуумы для d - и b -бозонов соответственно и имеют вид $|j\rangle_{\text{ПП}} = (N!)^{-1/2} (s^+)^N |0\rangle$ (конденсат из Ns -бозонов), $|j\rangle_{\text{ХП}} = |\tilde{0}\rangle$ из (40). Вводя дополнительный a -бозон [25, 46], $|j\rangle_{\text{ХП}}$ тоже можно представить в форме конденсата: $|j\rangle_{\text{ХП}} = (N)^{-1/2} (a^+)^N |0\rangle$ (см. также разд. 3):

$$\begin{aligned} |c_\mu, j\rangle_{\text{МКФ}} = & \left(1 + \frac{1}{12} \sum_{\mu=-2}^2 |c_\mu|^2\right)^{-N/2} \left\{1 + \sum_{l=1}^N (l)^{-1} [N(N-1) \dots \right. \\ & \left. \dots (N-l+1)]^{1/2} \prod_{m=1}^l \left(\frac{1}{\sqrt{12}} c_{\mu m}^* b_{\mu m}^+\right)\right\} (N!)^{-1/2} (a^+)^N |0\rangle; \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |c_\mu, j\rangle_{\text{МВБ-1}} = & (N!)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{12} \sum_{\mu=-2}^2 |c_\mu|^2\right)^{-1/2} \left(s^+ + \right. \\ & \left. + \sum_{\mu=-2}^2 c_\mu^* \frac{1}{\sqrt{12}} d_\mu^+\right)^N |0\rangle. \quad (57) \end{aligned}$$

С помощью этих выражений, используя явные выражения для $H_{\text{МКФ}}$ (5) и $H_{\text{МВБ-1}}$ (8), можно вычислить средние значения последних в состояниях (56) и (57) соответственно. Нетрудно проверить, что равенство

$$\text{МКФ} \langle c_\mu, j | H_{\text{МКФ}} | c_\mu, j \rangle_{\text{МКФ}} = \text{МВБ-1} \langle c_\mu, j | H_{\text{МВБ-1}} | c_\mu, j \rangle_{\text{МВБ-1}} \quad (58)$$

будет выполняться, если соответствующие параметры связаны соотношениями (16). Следовательно, эквивалентность МКФ и МВБ-1 имеет место и в классическом пределе при том же соотношении между параметрами, которое использовалось при установлении эквивалентности на уровне матричных элементов. Отметим, что если мы воспользуемся связью между параметрами $H_{\text{МКФ}}$ (5) и $H_{\text{нодл}}$ (3),

которая имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 5N(u + v + Nt_0 - 2e); \\ h_1 &= 12e + (2N - 6)(u + v) + t_0 \left(\frac{36}{5} - 12N \right) + \frac{1}{5} \sum_{L=1} (2L + 1)t_L; \\ h_2 &= u - v; \\ h_3 &= w; \\ h_{4L} &= c_L - 2(u + v) + 7t_0, \end{aligned} \right\} (59)$$

получим, что эквивалентность в классическом пределе, выражаемая (58), имеет место при связи параметров в форме (19).

3. СОГЛАСОВАННОСТЬ МВБ-1 И МКФ ПРИ ОПИСАНИИ РЕАКЦИЙ ДВУХНУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ

Изучая соотношение между МКФ и МВБ-1, следует различать две ситуации.

1. Гамильтониан и физические операторы построены из генераторов ККА. Это означает, что описываются физические свойства и процессы в заданном ядре, например спектры и вероятности электромагнитных переходов. В этой ситуации при теоретическом описании, рассчитываются только матричные элементы между состояниями, принадлежащими фиксированному полностью симметричному представлению $SU(6)$ -алгебры. Как мы показали в разд. 2, в этом случае имеет место унитарная эквивалентность. Физически это означает, что все численные результаты, относящиеся к спектрам и электромагнитным переходам, так же как и аналитические формулы для динамических симметрий [$SU(3)$, $SU(5)$, $SO(6)$], будут совпадать.

2. Физические операторы не являются тензорными операторами, построенными из генераторов ККА.

Это означает, что рассматриваются физические процессы, связывающие разные ядра, такие, например, как двухнуклонные передачи. Операторы передачи двух нуклонов, которые используются в МВБ-1, не являются генераторами $SU(6)$ -алгебры [72, 73] (см. ниже). Кроме того, в МКФ нет s -бозона, а квадрупольные бозоны не меняют числа нуклонов. Может создаться поверхностное впечатление, что в рамках МКФ-1 нельзя описывать реакции двухнуклонных передач.

В [46] исходя из соответствующих операторов, используемых в рамках МВБ-1, удалось построить их МКФ-аналоги и показать, что двухнуклонные амплитуды, вычисляемые в МВБ-1, можно выразить через матричные элементы, которые являются стандартными для МКФ. Это значит, что и в случае (II) МКФ и МВБ-1 согласуются.

В рамках МВБ-1 передача двух нуклонов в первом приближении трактуется как добавление или удаление одного бозона. В соответствии с этим операторы передачи двух связанных нуклонов ($\rho_{\tau}^{(L)}$)

и $p_{-\tau}^{(L)}$ предполагаются пропорциональными базисными операторами МВБ-1:

$$\left. \begin{aligned} p_{-\tau}^{(0)} &= A_0 s, \quad p_{+\tau}^{(0)} = A_0 s^+ \quad (\text{передача с } L=0); \\ p_{-\tau}^{(2)} &= A_2 d_{\mu}, \quad p_{+\tau}^{(2)} = A_2 d_{\mu}^+ \quad (\text{передача с } L=2), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где A_L — нормировочные константы. Верхний индекс L обозначает переданный угловой момент, нижний индекс относится к протонам ($\tau = p$) или нейтронам ($\tau = n$).

Идея построения в рамках МКФ операторов двухнуклонной передачи очень проста: попытаться выразить s - и d -бозоны через базисные операторы МКФ, воспользовавшись связью между швингеровской и ХП-реализациями ККА. Нетрудно выразить квадрупольные бозоны МКФ через s - и d -бозоны МВБ-1:

$$\left. \begin{aligned} b_{\mu}^+ &= (s^+ s + 1)^{-1/2} s d_{\mu}^+ \equiv E_s d_{\mu}^+; \\ b_{\mu} &= d_{\mu} s^+ (s^+ s + 1)^{-1/2} \equiv d_{\mu} E_s^+. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Можно убедиться непосредственной проверкой, что при замене b_{μ} и b_{μ}^+ в соответствии с (61) ХП-реализация (4) переходит в швингеровскую. Однако нам необходимо обратное преобразование. Найти его не совсем тривиально. Трудность состоит в том, что в МКФ степень свободы, связанная с сохранением N [см. (11)] становится несущественной и заморожена. Ясно, что для построения обратного преобразования $\{d, d^+, s, s^+\} \rightarrow \{b, b^+\}$ необходимо ввести дополнительный a -бозон. В [46] этот бозон был введен следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a^+ &= \left(s^+ s + \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} \right)^{1/2} E_s^+; \\ a &= E_s \left(s^+ s + \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Соотношения (62) более строго обоснованы в [25]. Теперь можно выразить $\{d, d^+, s, s^+\}$ через $\{b, b^+, a, a^+\}$. Обратное преобразование имеет следующий вид [46]:

$$\left. \begin{aligned} s^+ &= E_a^+ \left(a^+ a - \sum_{\nu} b_{\nu}^+ b_{\nu} + 1 \right)^{1/2}; \\ s &= \left(a^+ a - \sum_{\nu} b_{\nu}^+ b_{\nu} + 1 \right)^{1/2} E_a; \\ d_{\mu}^+ &= b_{\mu}^+ E_a^+ d_{\mu} = E_a b_{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где $E_a^+ = a^+ (a^+ a + 1)^{1/2}$; $E_a = (E_a^+)^+$.

Следует отметить, что при выводе обратного преобразования мы снова сталкиваемся с наличием нефизического ортогонального подпространства в области определения ХП-реализации (4). Операторы $\{E_s^+, E_s\}$ и $\{E_a^+, E_a\}$, как было показано, строго говоря, являются частично изометрическими, вследствие чего возникают проекционные операторы. Это усложняет рассмотрение, но как было показа-

но в [46], если оставаться в физическом подпространстве, их эффект точно равен нулю. Если мы подставим выражения для b_μ , b_μ^+ из (61) в (40) и учтем, что $|\tilde{0}\rangle = (N!)^{-1/2} (a^+)^N |0\rangle$, то нетрудно проверить, что (40) переходит в (36). Наоборот, если в (36) заменить s , s^+ , d_μ , d_μ^+ с помощью (63), то (36) перейдет в (40), т. е. прямое и обратное преобразования таковы, что базисные пространства МКФ и МВБ-1 переходят друг в друга. Это обстоятельство существенно используется при вычислении амплитуд реакций двухнуклонных передач. Обратимся к амплитудам. Как отмечалось в разд. 2, проблема собственных значений в рамках МКФ решается диагонализацией $H_{\text{МКФ}}$ в базе квадрупольных бозонов $|d^{n_b} [N] \kappa IM\rangle$, где $n_b \leq N$. Это базис типа (40), но полный угловой момент является хорошим квантовым числом. Собственные векторы МВБ-1 разлагаются, как отмечалось тоже, по базису типа (36), в котором d -бозоны связаны в угловой момент I . Собственные векторы $H_{\text{МКФ}}$ и $H_{\text{МВБ-1}}$ будем обозначать $|E, I; N_{\text{МКФ}}\rangle$ и $|E, I; N\rangle_{\text{МВБ-1}}$ соответственно.

В целях дальнейшего рассмотрения выделим явно зависимость от a -бозона в волновых функциях МКФ:

$$|E, I; N\rangle_{\text{МКФ}} = (N!)^{-1/2} (a^+)_\Omega^N |E, I; N\rangle_{\text{МКФ}}, \quad (64)$$

где $|E, I, N\rangle_{\text{МКФ}}$ — стандартное пространство МКФ, т. е. без a -бозона. Имея в виду соотношения (60), (63) и (64), нетрудно выразить матричные элементы $P_{+\tau}^{(L)}$ в базе МВБ-1 через стандартные матричные элементы МКФ. Имеем

$$\begin{aligned} & \text{МВБ-1} \langle E_f, I_f; N+1 | P_{+\tau}^0 | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МВБ-1}} = \\ & = \text{расш}_{\text{МКФ}} \langle E_f, I_f; N+1 | \tilde{P}_{+\tau}^0 | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МКФ}} = \\ & = A_0 \langle 0 | [(N+1)!]^{-1/2} a^{N+1} (a^+)^{-1/2} a^+ (N!)^{-1/2} (a^+)^N | 0 \rangle \times \\ & \times \text{МКФ} \langle E_f, I_f; N | (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^+ b_{\nu} + 1)^{1/2} | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МКФ}} = \\ & = A_{0\text{МКФ}} \langle E_f, I_f; N | (N - \sum_{\nu} b_{\nu}^+ b_{\nu} + 1)^{1/2} | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МКФ}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Аналогично (65) получаем

$$\begin{aligned} & \text{МВБ-1} \langle E_f, I_f; N+1 | P_{+\tau}^{(2)} | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МВБ-1}} = \\ & = A_{2\text{МКФ}} \langle E_f, I_f; N+1 | b_{\mu}^+ | E_i, I_i; N \rangle_{\text{МКФ}}. \end{aligned} \quad (66)$$

Мы видим, что матричные элементы оператора двухнуклонной передачи в базе МВБ-1 выражены через матричные элементы в правых частях (65) и (66), являющиеся стандартными для МКФ: они связывают волновые функции МКФ, вычисленные при разных N ($\Delta N = 1$). В случае передачи двух нуклонов с $L = 0$ соответствующая амплитуда (65) содержит «весовой оператор» $(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^+ b_{\nu} + 1)^{1/2}$, отражающий эффект s -бозона. Единственный оператор, который меняет число нуклонов на два, это a -бозон [см. (61) и (62)]. В МВБ-1 s и s^+

трактуются как нуклонные пары, связанные до нулевого момента. Однако в силу факторизации (64) a -бозон естественным образом был устранен из амплитуд (65) и (66).

В качестве примера рассмотрим амплитуду $0_1^+ \rightarrow 0_1^+$ двухнуклонной передачи в $SU(5)$ - и $SU(3)$ -пределах МКФ.

В рамках МКФ волновая функция основного состояния в $SU(5)$ -пределе есть состояние без квадрупольных бозонов и, конечно, с нулевым спином:

$$|E=0, I=0; N\rangle_{\text{МКФ}} = |n_b = 0, 1 = 0\rangle.$$

Тогда амплитуда $0_1^+ \rightarrow 0_1^+$ передачи двух нуклонов в $SU(5)$ -пределе равна:

$$\begin{aligned} A_{0\text{МКФ}} \langle E=0, I=0; N | \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} + 1 \right)^{1/2} | E=0, I=0; N \rangle_{\text{МКФ}} = \\ = A_0 (N+1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (67)$$

В $SU(3)$ -пределе МКФ основное состояние можно приближенно представить следующим образом [74]:

$$\begin{aligned} |E=0, I=0; N\rangle_{\text{МКФ}} = \\ = \sum_{n_b} [N! / (N - n_b)!]^{1/2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n_b/2} 3^{-(N-n_b)/2} |n_b, 0\rangle, \end{aligned}$$

где $|n_b, 0\rangle$ — базисное состояние типа (40) с $I=0$, для которого квантовое число сеньорити минимально для данного n_b . В рассматриваемом пределе амплитуда $0_1^+ \rightarrow 0_1^+$ двухнуклонной передачи равна:

$$\begin{aligned} A_{0\text{МКФ}} \langle E=0, I=0; N | \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} + 1 \right)^{1/2} | E=0, I=0; N \rangle_{\text{МКФ}} = \\ = A_0 [(N+1)/3]^{1/2} \sum_{n_b} [N! / n_b! (N - n_b)!] \left(\frac{2}{3}\right)^{n_b} 3^{-N+n_b} = \\ = A_0 [(N+1)/3]^{1/2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Из (67) и (68) следует, что отношение квадратов амплитуд двухнуклонных передач с $L=0$ в $SU(5)$ - и $SU(3)$ -пределах МКФ равно трем. Точно такой же результат получается и в МВБ-1 [72, 73].

Таким образом, и при описании реакций двухнуклонных передач МКФ и МВБ-1 дают идентичные численные результаты и аналитические выражения в случае точных симметрий $SU(3)$ и $SU(5)$.

4. НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КВАДРУПОЛЬНЫХ ФОНОНОВ

Основанные на динамической $SU(6)$ -симметрии коллективный гамильтониан (3) и квадрупольный оператор (6) в двух их эквивалентных формах [(5), (8) и (7), (9) соответственно] широко применялись при расчете конкретных свойств многих ядер, принадлежащих

к разным областям таблицы Менделеева [28, 29, 31]. В результате успешного описания в целом экспериментальных данных МВБ зарекомендовала себя как весьма удачный вариант феноменологии, так называемая «новая феноменология». Вместе с тем проведенные расчеты выявили и ряд расхождений между теоретическими предсказаниями МВБ и экспериментом. Эти расхождения связаны, в первую очередь, с исходными ограничениями модели. Авторами МВБ-1, а также другими авторами был предложен ряд обобщений и модификаций МВБ-1, позволивших выйти за рамки ограничений, присущих МВБ-1 в ее первоначальной формулировке. Необходимость во введении помимо квадрупольной других коллективных степеней свободы осознавалась с момента создания МВБ-1. Соответственно были введены дополнительные бозоны: дипольные p , октапольные f^* и гексадекапольные g . Вводились в рассмотрение и дополнительные s' и d' слабоколлективизированные бозоны для учета эффектов взаимодействия коллективных степеней свободы с неколлективными. Обзор работ по обобщению МВБ-1 путем включения новых бозонов (коллективных и слабоколлективизированных) дан в [75] (см. также [49]). Авторами МВБ-1 с сотрудниками был развит вариант модели — МВБ-2, содержащий протонные и нейтронные бозоны [12, 13]. Интересным примером модификации МВБ-2, связанным с отказом от сохранения полного числа бозонов [49], является учет смешивания различных бозонных конфигураций с целью объяснения в рамках МВБ-2 сосуществующих коллективных структур [76].

Следует отметить, что как оригинальные версии МКФ и МВБ-1, так и все перечисленные выше модификации МВБ-1 могут быть использованы только для описания четно-четных ядер. Важным шагом в развитии МВБ является ее обобщение на случай нечетных ядер, нашедшее воплощение в так называемой модели взаимодействующих бозонов и фермионов (МВБФ) [77]. В последние годы широким фронтом ведется детальное экспериментальное изучение структуры нечетных ядер, в результате чего накоплен обширный материал об их низколежащих коллективных состояниях. Разработка МВБФ была вызвана необходимостью дать теоретическую интерпретацию данных эксперимента в рамках сравнительно простой модели, каковой является МВБФ. Модель применялась для описания нечетных ядер в работах [78—81], в которых гамильтониан МВБФ диагонализировался численно. Несколько позднее были разработаны различные варианты МВБФ, основанные на динамических симметриях и суперсимметриях. Обзор теоретических и экспериментальных аспектов этого направления дан в [82, 83] соответственно.

Модификации и усовершенствования МВБ, о которых говорилось выше, относятся к МВБ-1, т. е. к МВБ в s -, d -представлении. Резуль-

* Недавно была сформулирована модель многих взаимодействующих бозонов [104]. В качестве примера была рассмотрена модель взаимодействующих $spdf$ -бозонов.

таты этих исследований нашли достаточно полное отражение в [31, 75, 82, 83].

Параллельно и независимо группой теоретиков из Загребского университета был выполнен цикл работ по дальнейшему развитию и расширению области применения МКФ. Эта серия работ включает:

1) формулировку модификации МКФ, приспособленной для описания нечетных ядер, которая была названа Particle Truncated Quadrupole Phonon Model (PTQM) [74]. Было показано [74], что PTQM эквивалентна МВБФ [74];

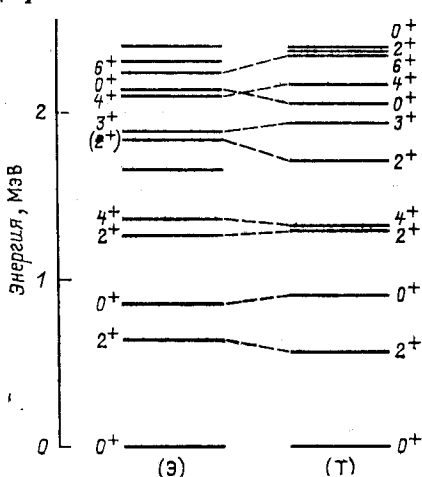
2) применение PTQM к описанию конкретных свойств нечетных ядер [84, 85];

3) разработку схематической модели, основанной на $SU(3)$ -бозонно-фермионной динамической симметрии, с помощью которой можно описывать на единой основе ротационные свойства четно-нечетных и нечетных ядер [86]. В рамках $SU(3)$ -бозонно-фермионной модели [$SU(3)$ -БФМ] [86, 87] найдены предельные случаи, являющиеся аналогами слабой и сильной связи МВБ и промежуточной связи в модели ротационного выстраивания [88]. Найдено также аналитическое решение $SU(3)$ -БФМ с суперсимметричными свойствами, которое не имеет аналога в МБМ;

4) построение модификации МКФ, приспособленной для феноменологического описания нечетно-нечетных ядер [89—91];

5) изучение роли обрезания фононного базиса [92]. В этот перечень не включены работы по построению Загребской группной физических операторов МВБ-1 и МКФ для реакций однонуклонных передач, так как эти работы выходят за рамки настоящей статьи. Перечисленные работы по развитию и применению МКФ не нашли отражения в обзорной литературе и будут изложены в данном разделе.

Расчет структуры низколежащих состояний $^{76}_{34}\text{Se}_{41}$ и протонно-дырочных состояний ^{64}Co на основе PTQM. Явный вид гамильтониана



PTQM приведен в [74]. Изученное в реакции $^{74}\text{Se}(n, \gamma)$ ядро $^{76}_{34}\text{Se}_{41}$ [84] рассматривается в PTQM как четно-четный остов $^{74}_{34}\text{Se}_{40}$, с которым связана нейтронная квазичастица. Соответственно на первом этапе вычислений в рамках МКФ с гамильтонианом (5) был рассчитан спектр ^{74}Se . Параметры $\{h\}$ в (5) были подобраны так, чтобы

Рис. 1. Спектр возбужденных состояний ^{76}Se :

экспериментальные (Э) данные — слева и результаты расчета на основе МКФ (Т) — справа

лучшим образом воспроизвести экспериментальный спектр ^{74}Se . Из рис. 1 видно, что спектр ^{74}Se описывается вполне удовлетворительно. Затем гамильтониан РТQM был диагонализирован в базе $|j\pi KI; \mathcal{J}\rangle$, где j — угловой момент нейтронной квазичастицы, πKI — квантовые числа состояния из квадрупольных n -фоонов, \mathcal{J} — полный угловой момент. Результаты расчета спектра возбужденных состояний положительной и отрицательной четностей ^{76}Se приведены на рис. 2.

Дополнительные (по отношению к четно-четному остову) параметры, использованные при описании нечетной системы, приведены в [84]. Несмотря на некоторое расхождение в значениях энергий состояний (достигающее для состояний положительной четности 300—450 кэВ) и в порядке следования уровней, в целом достигнуто удовлетворительное согласие с экспериментом.

С помощью волновых функций, полученных при диагонализации гамильтониана, были рассчитаны вероятности $E2$ -, $M1$ - и $E1$ -переходов между низколежащими состояниями ^{78}Se .

Из табл. 1 видно, что согласие между экспериментальными данными и теоретическими результатами вполне удовлетворительное. Свободные параметры фиксировались так, чтобы точно воспроизвести экспериментальное значение I_γ для перехода $(5/2^-)_1 \rightarrow (3/2^-)_1$. Вероятности $E1$ -переходов $(5/2^-)_1 \rightarrow (5/2^+)_1$ и $(5/2^-)_1 \rightarrow (7/2^+)_1$ рассчитывались без свободных параметров и находятся в хорошем согласии с экспериментом, хотя значения $B(E1)_{\text{эксп}}$ для этих переходов очень малы. Расчеты выполнены как с перенормировкой (2), так и без перенормировки эффективного заряда (1).

В рамках РТQM были рассчитаны спектроскопические факторы для реакции $^{62}\text{Ni}(d, ^3\text{He})^{61}\text{Co}$. Расчет энергетического спектра ^{61}Co был выполнен в предположении, что протонная квазичастица связана с четно-четным остовом ^{62}Ni , который описывался в предположении, что реализуется $SU(5)$ -предел. На рис. 3 и 4 результаты расчета сравниваются с экспериментальной схемой уровней. На рис. 3 приведены также результаты расчета по оболочечной модели. Параметры, использованные в расчетах, приведены в [85]. С помощью волновых функций низколежащих состояний ^{61}Co , найденных в РТQM, и волновой функции основного состояния ^{62}Ni , найденной в предположении, что реализуется $SU(5)$ -предел, были вычислены спектроскопические факторы для реакции $^{62}\text{Ni}(d, ^3\text{He})^{61}\text{Co}$. На рис. 5 приведены усредненные спектроскопические факторы для однонуклонных передач с $l = 0, 1, 2$ и 3 в зависимости от энергии возбуждения. Теоретические результаты получены в РТQM и в рамках оболочечной модели. Расчеты по РТQM очень хорошо согласуются с экспериментом, тогда как модель оболочек плохо описывает экспериментальные данные для $l = 1$ и $l = 3$.

Приближенная суперсимметрия и новая схема связи в $SU(3)$ -бозонно-фермионной модели. $SU(3)$ -БМФ, предложенная и исследованная в [86, 87], наиболее подробно изложена в [93]. Как известно

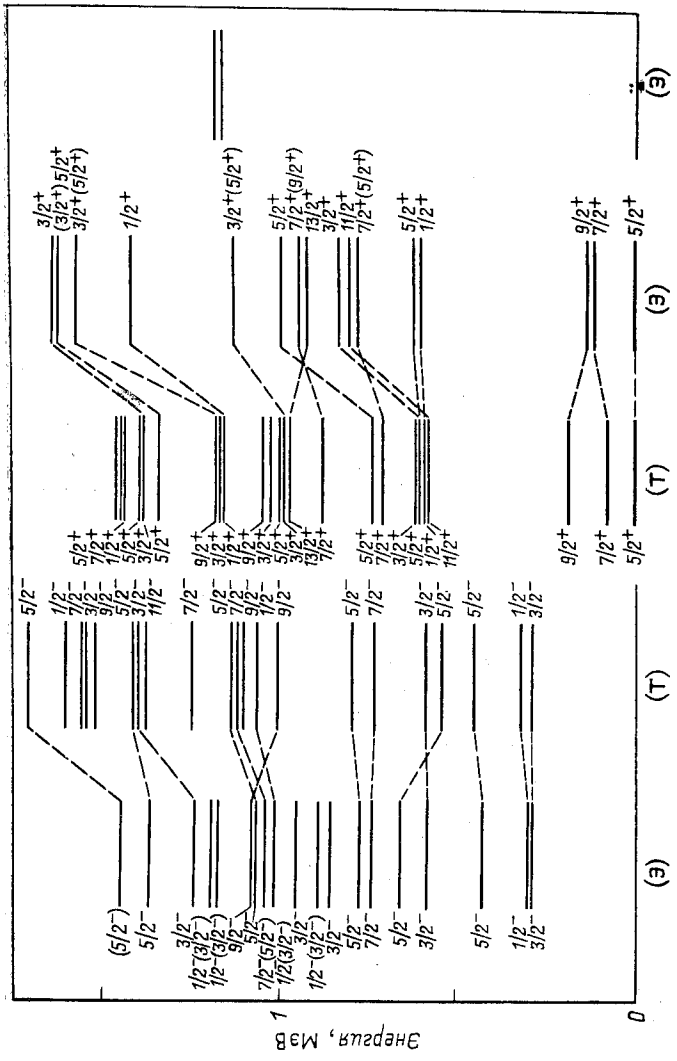


Рис. 2. Теоретические (PTQM) и экспериментальные значения энергии возбужденных состояний ^{76}Se

Таблица 1. Сравнение теоретических и экспериментальных значений вероятностей $E2$ -, $M1$ - и $E1$ -переходов между низколежащими состояниями ^{76}Se

Переход	$B(E2)$		$B(M1)$		$B(E1)$		I_γ		
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория		Эксперимент	
						(1)	(2)		(1)
$(\frac{7^+}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	$0,40 \pm 0,08$	0,400	$0,032 \pm 0,005$	0,124	—	—	—	—	—
$(\frac{9^+}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	0,075	0,076	—	—	—	—	—	—	1,0
$(\frac{9^+}{2})_1 (\frac{7^+}{2})_1$	—	0,340	0,084	0,085	—	—	—	—	0,3
$(\frac{3^-}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	—	—
$(\frac{1^-}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,0001	0,18	0,238	—	—	—	—	—
$(\frac{5^-}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	$1 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$	2,9	1,2
$(\frac{5^-}{2})_1 (\frac{7^+}{2})_1$	—	—	—	—	$5 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$	0,5	0,5
$(\frac{5^-}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,371	—	0,038	—	—	—	4,5	4,5
$(\frac{3^-}{2})_2 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	$5 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$	$7,8 \cdot 10^{-9}$	0,4	0,06
$(\frac{3^-}{2})_2 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,028	—	0,034	—	—	—	0,7	4,7
$(\frac{3^-}{2})_2 (\frac{1^-}{2})_1$	—	0,168	—	0,039	—	—	—	6,0	6,0
$(\frac{1^+}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	—	0,014	—	—	—	—	—	6,0	6,0
$(\frac{1^+}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_1$	—	—	—	—	$9 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	0,02	0,004

Продолжение табл. 1

Переход	V (E2)		V (M1)		V (E1)		I _γ			
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория		
								(1)	(2)	(1)
$(\frac{1^+}{2})_1 (\frac{1^-}{2})_1$	—	—	—	—	$3 \cdot 10^{-7}$	$0,8 \cdot 10^{-8}$	$0,7 \cdot 10^{-8}$	0,6	0,02	(0,02)
$(\frac{5^+}{2})_2 (\frac{5^+}{2})_1$	—	0,006	—	0,007	—	—	—	0,6	1,1	—
$(\frac{5^+}{2})_2 (\frac{7^+}{2})_1$	—	0,012	—	0,039	—	—	—	2,8	2,8	—
$(\frac{5^+}{2})_2 (\frac{9^+}{2})_1$	—	0,001	—	—	—	—	—	0,2	0,01	—
$(\frac{5^+}{2})_2 (\frac{3^-}{2})_1$	—	—	—	—	$5 \cdot 10^{-7}$	$5,6 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	0,09	0,001	(0,0003)
$(\frac{5^+}{2})_2 (\frac{5^-}{2})_1$	—	—	—	—	—	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-11}$	—	0,000	(0,000)
$(\frac{5^-}{2})_2 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	$0,8 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	0,03	0,40	(0,51)
$(\frac{5^-}{2})_2 (\frac{7^+}{2})_1$	—	—	—	—	$9 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	0,2	0,06	(0,06)
$(\frac{5^-}{2})_2 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,011	—	0,002	—	—	—	2,5	2,5	—
$(\frac{5^-}{2})_2 (\frac{1^-}{2})_1$	—	0,0001	—	—	—	—	—	0,01	0,01	—
$(\frac{5^-}{2})_2 (\frac{5^-}{2})_1$	—	0,020	—	0,001	—	—	—	0,5	0,35	—
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	$6 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	0,06	0,01	(0,01)

Продолжение табл. 1

Переход	V (F2)		V (M1)		V (E1)		I _γ			
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория		Эксперимент		
						(1)	(2)		(1)	(2)
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{7^+}{2})_1$	—	—	—	—	2·10 ⁻⁷	5,4·10 ⁻⁸	4,9·10 ⁻⁸	0,10	0,01	(0,01)
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{9^+}{2})_1$	—	—	—	—	—	3,6·10 ⁻⁸	3,1·10 ⁻⁸	—	0,02	(0,02)
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,141	—	—	—	—	—	0,21	0,57	—
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{5^-}{2})_1$	—	0,250	—	0,041	—	—	—	0,54	0,54	—
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_2$	—	0,031	—	—	—	—	—	—	0,0007	—
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_2$	—	—	—	—	—	3,3·10 ⁻⁹	1,6·10 ⁻¹²	—	0,000	(0,000)
$(\frac{7^-}{2})_1 (\frac{5^-}{2})_2$	—	0,001	—	0,008	—	—	—	0,01	0,001	—
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{5^+}{2})_1$	—	—	—	—	5·10 ⁻⁸	0,9·10 ⁻¹⁰	6,6·10 ⁻¹⁰	0,05	0,0001	(0,0007)
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{7^+}{2})_1$	—	—	—	—	—	1,2·10 ⁻¹¹	2,3·10 ⁻¹¹	—	0,000	(0,000)
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{3^-}{2})_1$	—	0,0005	—	0,006	—	—	—	0,76	0,18	—
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{1^-}{2})_1$	—	0,179	—	—	—	—	—	0,58	0,84	—
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{5^-}{2})_1$	—	0,0002	—	0,069	—	—	—	0,75	0,75	—

Продолжение табл. 1

Переход	B (E2)		B (M1)		B (E1)		I _γ		
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория		Эксперимент	
						(1)	(2)		(1)
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{3^-}{2})_2$	-	0,048	-	0,062	-	-	0,21	0,11	-
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{5^+}{2})_2$	-	-	-	-	1,5·10 ⁻⁹	4,5·10 ⁻¹²	-	0,000	(0,000)
$(\frac{5^-}{2})_3 (\frac{5^-}{2})_2$	-	0,077	-	0,002	-	-	0,03	0,001	-
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_1$	-	0,0001	-	0,058	-	-	3,7	3,7	-
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{7^+}{2})_1$	-	0,008	-	-	-	-	0,1	0,12	-
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_1$	-	-	-	-	4,4·10 ⁻¹¹	5,5·10 ⁻¹¹	-	0,000	(0,000)
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{1^-}{2})_1$	-	-	-	-	7,5·10 ⁻¹⁰	1,2·10 ⁻⁹	-	0,0001	(0,0002)
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{5^-}{2})_1$	-	-	-	-	3,9·10 ⁻¹⁰	2,9·10 ⁻¹⁰	-	0,000	(0,000)
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{3^-}{2})_2$	-	-	-	-	5,0·10 ⁻⁸	4,7·10 ⁻⁸	-	0,0008	(0,0007)
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{1^+}{2})_1$	-	0,071	-	0,284	-	-	0,4	0,37	-
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{5^+}{2})_2$	-	0,152	-	0,124	-	-	0,8	0,13	-
$(\frac{3^+}{2})_1 (\frac{5^-}{2})_2$	-	-	-	-	8,2·10 ⁻¹¹	8,3·10 ⁻¹¹	-	0,000	(0,000)

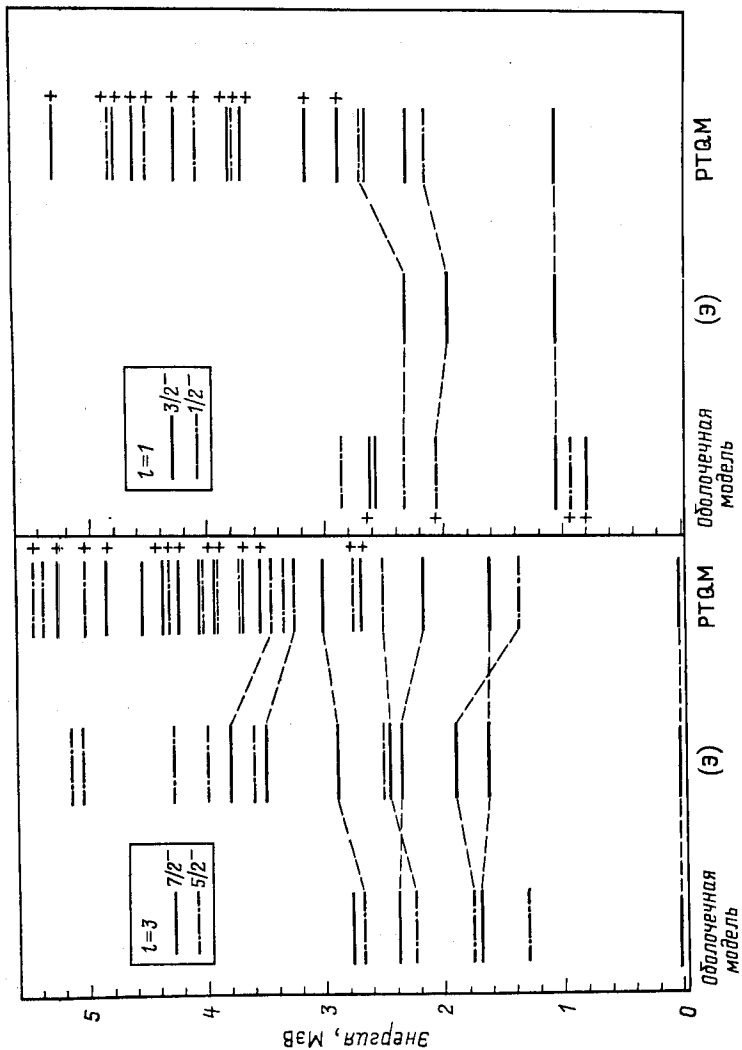


Рис. 3. Энергетические спектры ^{61}Co : рассчитанный по оболочечной модели, экспериментальный и рассчитанный по РТQM. Теоретические уровни, отмеченные (+), имеют спектроскопические факторы $(G) \leq 0,005$. Сопоставление экспериментальных уровней с теоретическими — предположительное

[7, 10, 29], описание ротационных свойств четно-четных ядер в рамках МВБ связано с так называемым « $SU(3)$ -пределом» $SU(6)$ -динамической симметрии [цепочка (II)]. $SU(3)$ -БФМ разработана для описания ротационных свойств нечетных ядер и по существу является $SU(3)$ -пределом РТQM. Эта простая модель содержит известные

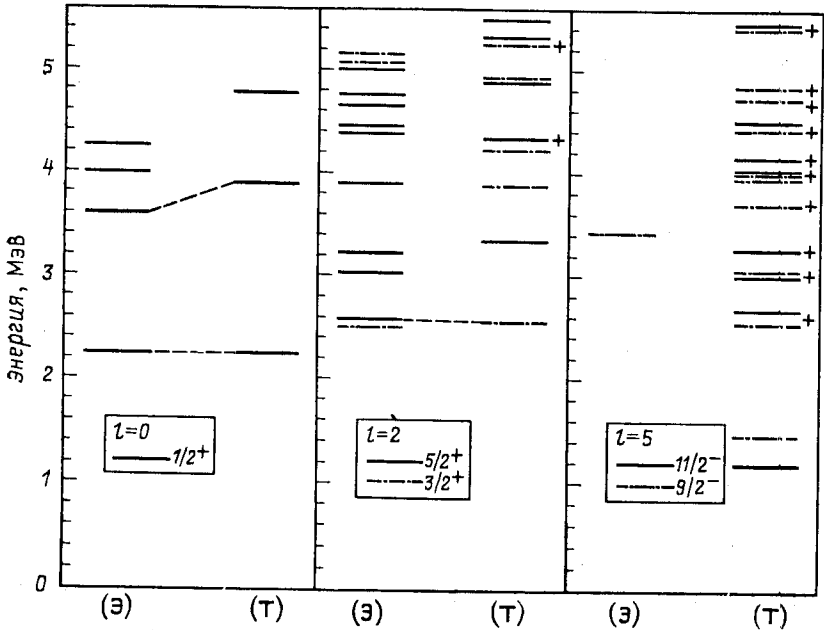


Рис. 4. Энергетические спектры состояний ^{61}Co с квантовыми числами $1/2^+$, $3/2^+$, $5/2^+$, $11/2^-$ и $9/2^-$:

рассчитанный по РТQM и экспериментальный. Теоретические уровни, отмеченные +, имеют спектроскопический фактор ($G \leq 0,005$). Сопоставление экспериментальных уровней с теоретическими предположительное

слабую, промежуточную и сильную схемы связи ротационной модели Бора — Моттельсона, а также новое аналитическое решение с суперсимметрическими свойствами.

Гамильтониан, описывающий частицу с угловым моментом j , связанную с четно-четным остовом, свойства которого определяются $SU(3)$ -пределом МКФ, можно представить в виде

$$h_{\text{РТQM}}(SU(3)) = h_{\text{МКФ}}(SU(3)) + \Gamma(G_2^B G_2^F)_{(00)} + \text{обменный член}, \quad (69)$$

где

$$h_{\text{МКФ}}(SU(3)) = -\alpha(G_2^B G_2^B)_{(00)} + \delta'(I^B I^B)_{00} = -\frac{\alpha}{2} C_2^B + \delta(I^B I^B)_{(00)}, \quad (70)$$

причем, поскольку рассматривается $SU(3)$ -предел МКФ, для операторов $G_{2\mu}^B$ и I_{1m}^B используется бозонная ХП-реализация:

$$G_{2\mu}^B = b_{\mu}^+ \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} \right)^{1/2} + \left(N - \sum_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu} \right)^{1/2} (-1)^{\mu} b_{-\mu} \pm \pm \frac{\sqrt{7}}{2} (b_2^{\dagger} \tilde{b}_2)_{(2\mu)}; \quad (71)$$

$$I_{1m}^B = \sqrt{10} (b^{\dagger} \tilde{b})_{(1m)}. \quad (72)$$

Известно [6, 71], что пять компонент массового квадрупольного оператора $\{G_{2\mu}\}$ [94] вместе с тремя компонентами оператора углового

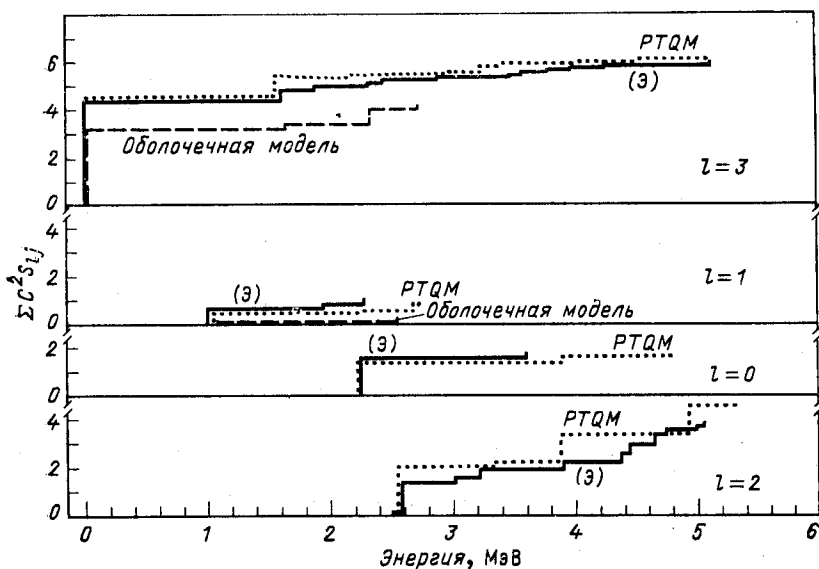


Рис. 5. Зависимость экспериментальных спектроскопических факторов $\sum C^2 S_{ij}$ (сплошные линии) от энергии возбуждения и предсказания: оболочечная модель (пунктирные линии) и PTQM (точечные линии)

момента $\{I_{1m}\}$ замыкают $SU(3)$ -алгебру. Положительный и отрицательный знаки в (71) соответствуют сплюснутой и вытянутой формам четно-четного остова соответственно.

Фермионный оператор, отвечающий взаимодействию частицы с остовом, имеет вид

$$G_{2m_j}^F = (c_j^{\dagger} \tilde{c}_j)_{(2m_j)}, \quad (73)$$

где c_2 — оператор Казимира второго порядка $SU(3)$ -алгебры. Обменный член в [86, 87, 93] не учитывался, так что полученные резуль-

таты следует сопоставлять с результатами модели частица — ротатор [1]. Авторы работ [86, 87, 93] сосредоточили свое внимание на состояниях нечетной системы, связанных с вращательной полосой основного состояния остова. Эти состояния можно получить проектированием $|jk\rangle|c\rangle$ на состояние с угловым моментом \mathcal{J} и его проекциями M и k [84, 85]:

$$|k\mathcal{J}M\rangle_{cy} = \sum_{I=0}^{2N} B_I^{-1} \langle jkIO|\mathcal{J}k\rangle |(jI)\mathcal{J}M\rangle; \quad (74)$$

$$|c\rangle = \exp\left\{\beta b_{2_0}^* \left(N - \sum_v b_{2_v}^* b_{2_v}\right)^{1/2}\right\} |0\rangle$$

когерентное состояние бозонной $SU(3)$ -группы с $\beta = \sqrt{2}(-\sqrt{2})$ для вытянутой (сплюснутой) формы остова, а $|jk\rangle$ — адиабатическое состояние нечетной системы (см. [96]). Состояния

$$|(jI)\mathcal{J}M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle jm_1 I m_2 | \mathcal{J} M \rangle |j m_1\rangle |I m_2\rangle, \quad (75)$$

формирующие удобный базис для диагонализации гамильтониана (69) при малых константах взаимодействия, являются аналогами базисных состояний коллективной ротационной модели в случае слабой связи, но с той разницей, что угловой момент I ограничен значением $I_{max} = 2N$ [см. (74)]. Из дальнейшего будет видно, что базис, задаваемый (74), обладает свойствами, характерными для случаев, когда реализуется динамическая суперсимметрия (отсюда — индекс су).

Состояния $|I\rangle$ разлагаются в базисе, построенном из квадрупольных бозонов следующим образом:

$$|I\rangle = B_I \sum_{n\kappa} A_{n\kappa I} |n\kappa I\rangle.$$

Явные выражения для величин B_I и $A_{n\kappa I}$ приведены в [84] (см. формулы (50)–(52)).

Если ограничить рассмотрение состояниями (74), то оператор C_2^B задает только постоянный сдвиг энергии, поэтому соответствующую часть гамильтониана (69) (при отбрасывании обменного члена) можно записать в виде

$$\delta h_{\text{БФМ}}(SU(3)) = \delta (I^B I^B)_{(00)} + \Gamma (G_2^B G_2^F)_{(00)}, \quad (76)$$

а волновые функции будут зависеть только от отношения Γ/δ .

Состояния (75) являются собственными состояниями гамильтониана $h_{\text{БФМ}}(SU(3))$ при $\Gamma/\delta = 0$. Как будет показано ниже, состояния $|k = j\mathcal{J}M\rangle_{cy}$ становятся собственными состояниями $h_{\text{БФМ}}(SU(3))$ при определенном значении Γ/δ , которое будем обозначать $(\Gamma/\delta)_{cy}$.

Состояния $|k\mathcal{J}M\rangle_{cy}$ с разными k неортогональны, поэтому их ортогонализуют с помощью процедуры Грамма — Шмидта [97]. Физический интерес представляют два ортогональных набора состояний $\{|k\mathcal{J}M\rangle_{cy}\}$.

а. Верхний ортогональный (ВО) набор. Для его построения

при фиксированном \mathcal{F} начинают с состояния $k = j$. Затем строится состояние с $k = j - 1$, ортогональное к состоянию с $k = j$, и так далее, завершается процесс ортогонализации состоянием с $k = 1/2$. Полученные в результате квантовые числа k обозначаются k_B , а соответствующие состояния — $|k_B \mathcal{F} M\rangle$. По построению состояние $|k_B = j \mathcal{F} M\rangle$ совпадает с $|k = j \mathcal{F} M\rangle_{\text{сy}}$.

б. Нижний ортогональный (НО) набор. Для его построения при фиксированном \mathcal{F} начинают (состояния с $k = 1/2$) и завершают процесс ортогонализации состоянием с $k = j$. Соответствующие квантовые числа k обозначаются k_H , а базисные состояния $|k_H \mathcal{F} M\rangle$. По построению состояние $|k_H = \frac{1}{2} \mathcal{F} M\rangle$ совпадает с состоянием $|k = \frac{1}{2} \mathcal{F} M\rangle_{\text{сy}}$. Матричные элементы $h_{\text{БФМ}}(SU(3))$ в базисе $|k \mathcal{F} M\rangle_{\text{сy}}$ можно вычислить явно, используя (74), (75), теорему Вигнера — Экарта и коэффициенты Вигнера для $SU(3)$ [98] и учитывая, что генераторы $\{I_1^B, \sqrt{\frac{8}{3}} G_{2\mu}^B\}$ преобразуются по октетному представлению (1, 1) [99]. Затем, зная коэффициенты, полученные в результате ортогонализации по Грамму — Шмидту, можно вычислить и матричные элементы

$$\langle k_B \mathcal{F} M | h_{\text{БФМ}}(SU(3)) | k'_B \mathcal{F} M \rangle. \tag{77}$$

Получить матричные элементы (77) в аналитическом виде затруднительно из-за сложного вида B_I и коэффициентов ортогонализации. Расчеты показали, что матрица (77) всегда тридиагональна, т. е. она имеет ненулевые элементы только по главной диагонали ($k_B = k'_B$) и при $|k_B - k'_B| = 1$ (табл. 2 и 3). Следует подчеркнуть, что тридиагональность гамильтоновой матрицы $SU(3)$ — БМФ имеет место только при использовании верхнего набора, что выделяет этот набор среди остальных.

Неудивительно, что матрица $I^B I^B$ оказалась тридиагональной, так как $\mathbf{I I} = (\vec{\mathcal{F}} - \mathbf{j})(\vec{\mathcal{F}} - \mathbf{j})$ содержит взаимодействие Кориоли-

Таблица 2. Матричные элементы $\langle k_B \mathcal{F} = 17/2 | I^B I^B | k'_B \mathcal{F} = 17/2 \rangle$

$k'_B \backslash k_B$	11/2	9/2	7/2	5/2	3/2	1/2
11/2	40,350	-17,821	0	0	0	0
9/2	-17,821	56,265	-26,719	0	0	0
7/2	0	-26,719	70,913	-32,760	0	0
5/2	0	0	-32,760	92,203	-28,278	0
3/2	0	0	0	-28,278	141,906	-9,980
1/2	0	0	0	0	-9,980	208,362

Таблица 3. Матричные элементы $\langle k_B \mathcal{T} = 17/2 | G_2^B \cdot G_2^F \rangle_0 | k'_B \mathcal{T} = 17/2 \rangle$

$k_B \backslash k'_B$	11/2	9/2	7/2	5/2	3/2	1/2
11/2	-2,121	0,385	0	0	0	0
9/2	0,385	-0,844	0,462	0	0	0
7/2	0	0,462	0,076	0,425	0	0
5/2	0	0	0,425	0,618	0,245	0
3/2	0	0	0	0,245	0,872	0,043
1/2	0	0	0	0	0,043	1,399

са $\vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{j}$, для которого выполняется правило отбора $\Delta k = 1$ [1]. Удивляет, что правило $\Delta k = 1$ справедливо и для матрицы взаимодействия $G_2^B G_2^F$. Казалось, явное присутствие фермионного оператора G_2^F должно привести к нарушению правил отбора, имеющих место в коллективном подпространстве.

Свойством тридиагональности матрицы (77) можно воспользоваться, чтобы построить специальное решение, имеющее свойства, характерные для гамильтонианов, основанных на динамических суперсимметриях.

Фиксируем Γ/δ так, чтобы

$$\langle k_B = j \mathcal{T} M | (I^B I^B)_{(00)} + (\Gamma/\delta)_{cy} (G_2^B G_2^F)_{(00)} | k_B = j - 1 \mathcal{T} M \rangle = 0. \quad (78)$$

Для частного случая $j = 11/2$ получается $(\Gamma/\delta)_{cy} = 46,3$. В реалистических случаях $\delta \approx 0,015$ МэВ. Откуда следует, что $\Gamma_{cy} \approx 1$ МэВ, что соответствует промежуточной силе связи. Было найдено также, что $(\Gamma/\delta)_{cy}$, получающееся из (78), не зависит как от максимального числа бозонов N , так и от \mathcal{T} . Это означает, что при $\Gamma/\delta = (\Gamma/\delta)_{cy}$ вся $k_B = j = 11/2$ -полоса будет точно описываться вектором (74). Действительно, если (78) выполняется, то нетрудно убедиться, что состояние $| k = \frac{11}{2} \mathcal{T} M \rangle$ становится собственным вектором гамильтоновой матрицы (см. табл. 4, 5). Как видно из рис. 6, вклад компоненты $k_B = j = 11/2$ в любое из состояний этой полосы в точности равняется 100 %. Следует отметить, что полоса $k_B = j = 11/2$ — идеальная ротационная полоса. Для других полос видны отклонения от правила \mathcal{T} ($\mathcal{T} + 1$), и тем более заметные, чем меньше k_B . Видны также эффекты сигнатуры, как и в МБМ [1].

Рис. 6. Спектр, рассчитанный по формуле (76) для случая $j = 11/2$, $N = 7$, $\Gamma/\delta = (\Gamma/\delta)_{cy} = 46,3$. Гамильтониан был диагонализирован в базисе $\{| k_B \mathcal{T} M \rangle_{cy}\}$. Для угловых моментов использовалась шкала $\mathcal{T}(\mathcal{T} + 1)$. Рядом с каждым состоянием указан вклад в процентах доминирующей компоненты k_B в волновую функцию этого состояния. Энергия по оси ординат дана в единицах δ

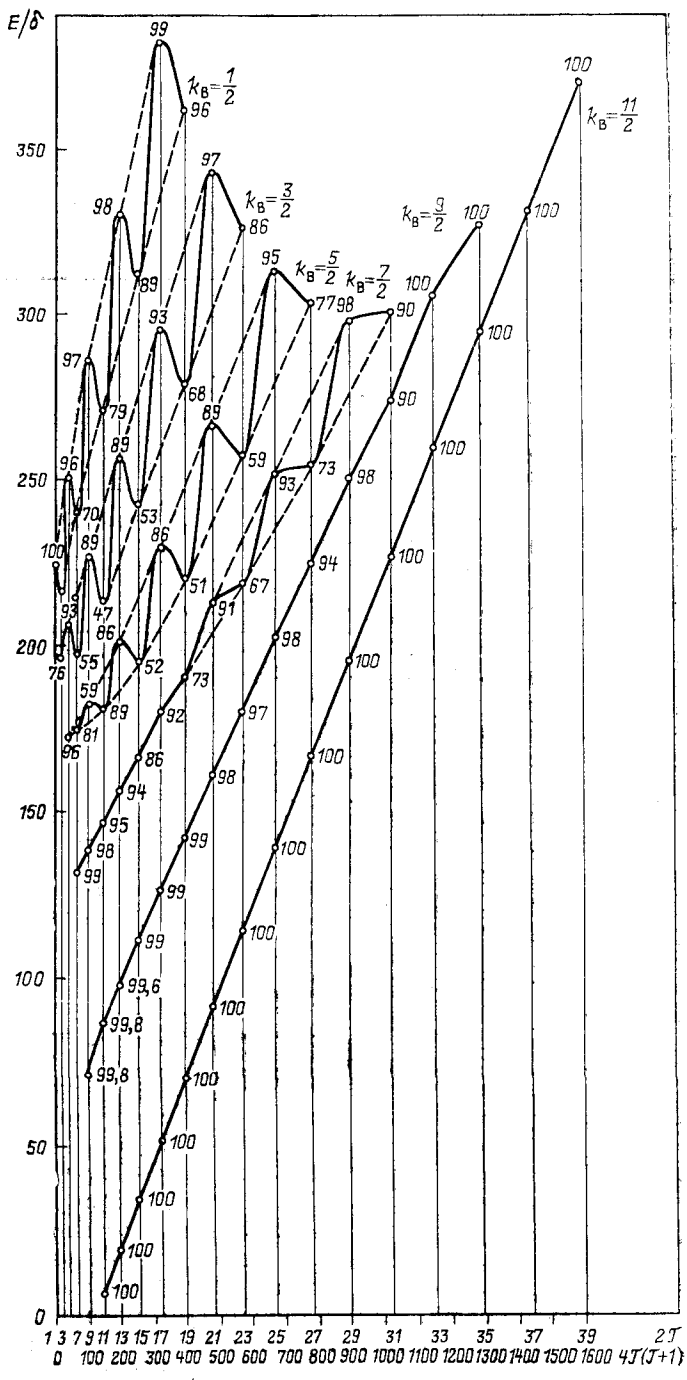


Таблица 4. Матричные элементы гамильтониана
 $H'_{\Gamma TQM} = I^B I^B + \left(\frac{\Gamma}{\delta}\right)_{cy} (G_2^B G_2^F)_0$ при $(\Gamma/\delta)_{cy} = 46,3$

$k_B \backslash k'_B$	11/2	9/2	7/2	5/2	3/2	1/2
11/2	-57,9	0	0	0	0	0
9/2	0	17,2	-5,3	0	0	0
7/2	0	-5,3	74,4	-13,1	0	0
5/2	0	0	-13,1	120,8	-17,0	0
3/2	0	0	0	-17,0	182,3	-8,0
1/2	0	0	0	0	-8,0	273,1

Таблица 5. Собственные значения и собственные функции гамильтониана из табл. 4

n	$E_{17/2, n}$	$n_{\mathcal{J}}^{k_B} = 17, 2, n$					
		$k_B = 11/2$	$k_B = 9/2$	$k_B = 7/2$	$k_B = 5/2$	$k_B = 3/2$	$k_B = 1/2$
1	-57,9	1,000	0	0	0	0	0
2	16,7	0	0,995	0,094	0,012	0,001	0,000
3	71,3	0	-0,094	0,958	0,267	0,041	0,002
4	120,0	0	0,014	-0,268	0,929	0,254	0,013
5	186,1	0	-0,001	0,030	-0,256	0,962	0,088
6	273,9	0	0,000	-0,001	0,010	-0,089	0,996

Таким образом, энергии состояний полосы с $k_B = 11/2$ даются формулой

$$E_{\mathcal{J}}(k_B = j = 11/2) = \delta \mathcal{J}(\mathcal{J} + 1), \tag{79}$$

где δ — тот же самый параметр, что и в выражении $E_I - \delta I(I + 1)$ для энергии состояний основной ротационной полосы четно-четного остова. Именно по этой причине базис (74) был назван суперсимметричным (четно-четная и нечетная системы описываются единым остовом, а моменты инерции совпадают).

Исследовались также свойства гамильтониана (76) при $\Gamma = -\Gamma_{cy}$. (Это соответствует частице, связанной с остовом, имеющим вытянутую форму, или дырке, связанной со сплюснутым остовом). В этом случае верхний набор оказался неудобным и использовался нижний набор. Как оказалось [93], в этом базисе даже матрица $I^B I^B$ не получается тридиагональной. Гамильтониан (76) смешивает полосы с разными k_n . Вклад k_n в процентах указан рядом с каждым состоянием на рис. 7. Из рисунка видно, что полоса с $k_n = 1/2$ является

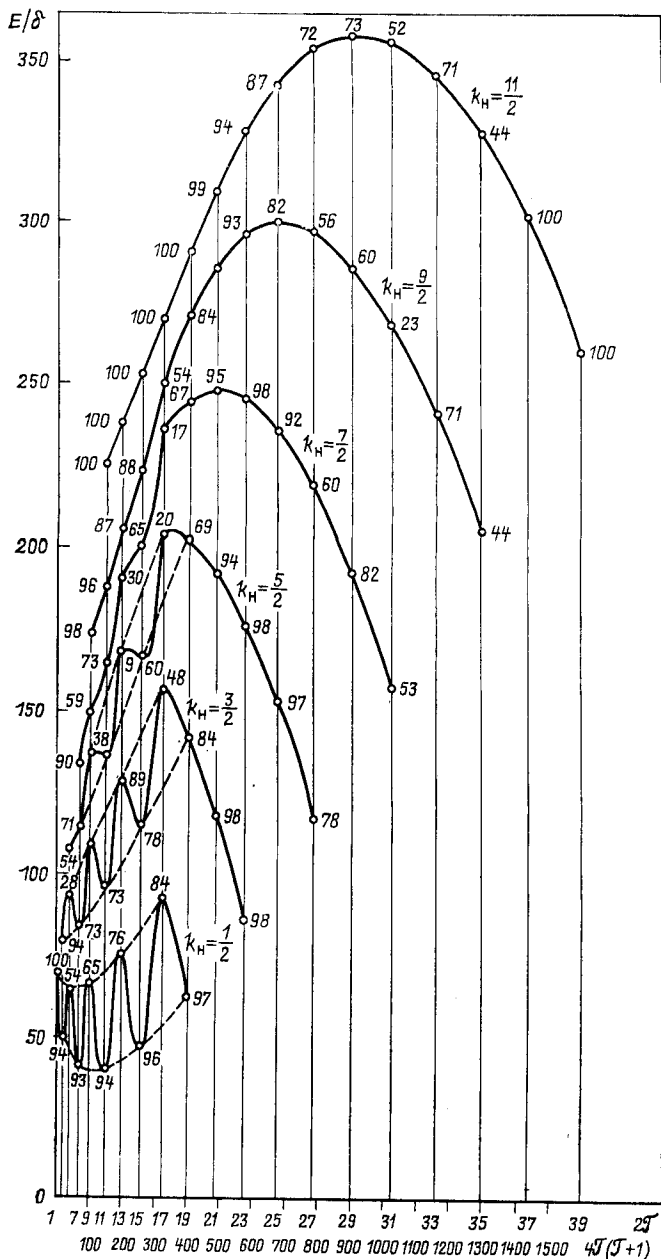


Рис. 7. Рассчитанный по формуле (76) спектр с теми же значениями параметров, что и на рис. 6, но с измененным знаком Γ , т. е. для $\Gamma/\delta = -(\Gamma/\delta)_{\text{сy}}$. Кроме того, использовался нижний набор $\{k_H \mathcal{F} M\}_{\text{сy}}$. Для каждого состояния дана в процентах доминирующая компонента k_H в волновой функции этого состояния. Энергия по оси ординат дана в единицах δ

нижайшей полосой и демонстрирует сильный сигнатурный эффект. Полоса с $k_H = 11/2$ расположена выше всех по энергии и имеет необычную параболическую форму [в шкале \mathcal{F} ($\mathcal{F} + 1$)]. В этой полосе наибольшую энергию имеет состояние с $\mathcal{F} = 29/2$. Последующее понижение состояний, по-видимому, связано с обрезанием по числу фононов N . Рассмотрим теперь ирраст-состояния (рис. 7), это все состояния в полосе с $k_H = 1/2$, затем состояния с $\mathcal{F} = 21/2$ и $\mathcal{F} = 23/2$ в полосе с $k_H = 3/2$ и т. д. до состояний с $\mathcal{F} = 37/2$ и $\mathcal{F} = 39/2$ в полосе $k_H = 11/2$. Значения $B(E2)$ для переходов между этими состояниями приведены на рис. 8. Видно, что состояния

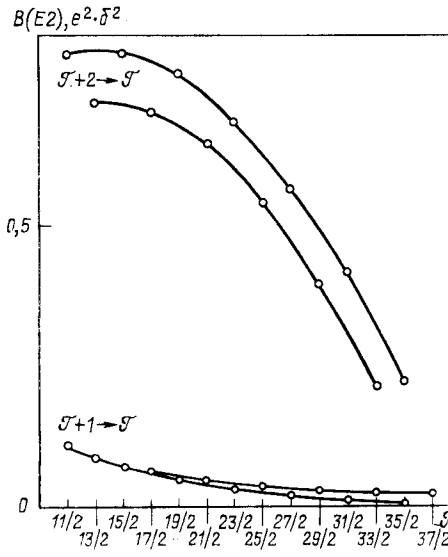


Рис. 8. Рассчитанные значения $B(E2)$ -переходов между состояниями нижней ветви (соответствующей $\alpha = j = 11/2$ развязанной полосе), между состояниями верхней ветви полосы с $k'_H = 1/2$ и между состояниями двух ветвей. Волновые функции соответствуют той же параметризации, что и на рис. 7, но использовался верхний набор $\{k_{\nu} \mathcal{F} M\}_{\text{су}}$. Эффективные заряды e одночаст = 1,5, $e_{\text{вибр}} = 2$, а радикальный матричный элемент $\langle r^2 \rangle = 1,44 A^{2/3}$, где $A = 100$

разделяются на две группы по зависимости $B(E2)$ от \mathcal{F} для переходов с $\Delta\mathcal{F} = 2$. $E2$ -переходы $\mathcal{F} + 1 \rightarrow \mathcal{F}$ между этими группами ослаблены по сравнению с $E2$ -переходами $\mathcal{F} + 2 \rightarrow \mathcal{F}$. Это послужило основой для новой классификации состояний, которая показана на рис. 9. Состояния распределены по растущим полосам, демонстрируя сигнатурный эффект, и тем сильнее, чем они ниже по энергии. Эти полосы обозначены квантовым числом k'_H . Как видно из рис. 9, полосы с $k'_H = 1/2, 3/2$ и $5/2$ имеют ветви разной сигнатуры, связанные пунктиром, и вдоль этих ветвей значения $B(E2)$ усилены. Нижняя ветвь полосы с $k'_H = 1/2$, включающая состояния с $\mathcal{F} = j, j + 2, j + 4, \dots, 39/2$, напоминает развязанную полосу модели ротационного выстраивания, для которой проекция момента на ось вращения равна j [88].

В этой модели выполняется следующее соотношение [88]:

$$E_{\mathcal{F}=I_{GSB}+j}(\alpha = j) = E_{I_{GSB}}(\text{остов}), \tag{80}$$

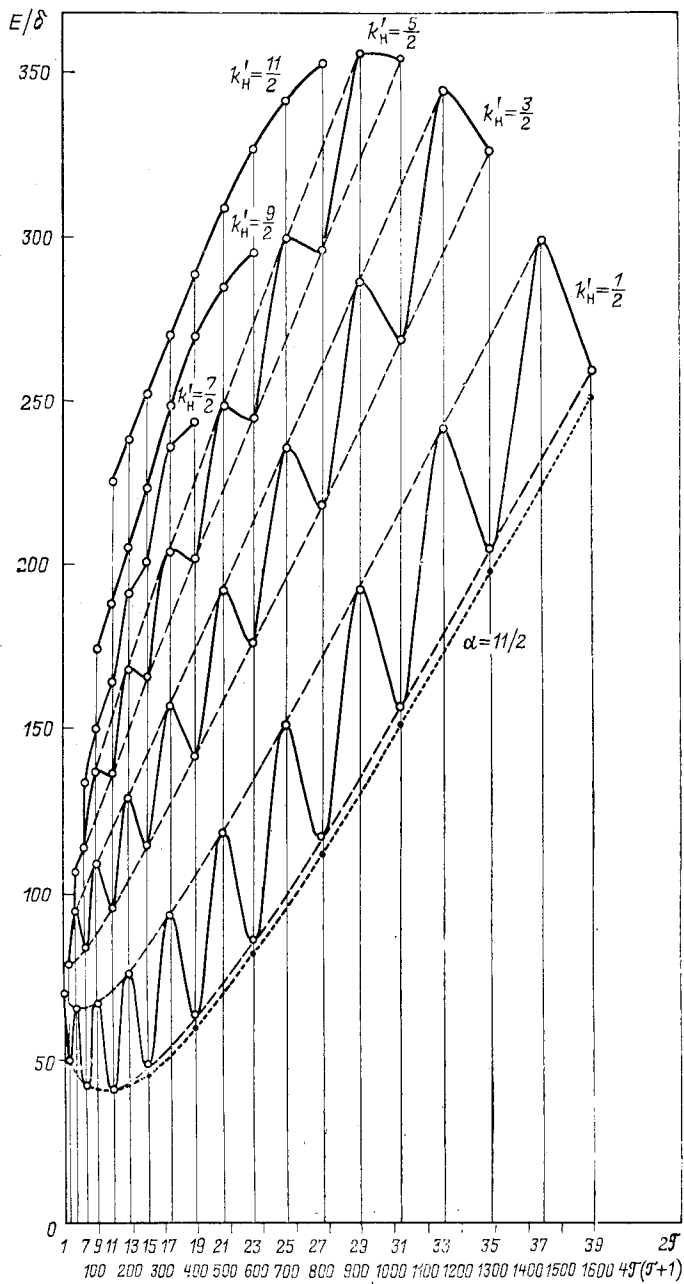


Рис. 9. Тот же самый спектр, что и на рис. 7, но используется классификация состояний в терминах k'_H . Развязанная полоса $\alpha = 11/2$ в модели ротационного выстраивания, рассчитанная по (80), (81), обозначена точечной кривой

где

$$E_{I_{GSB}}(\text{остов}) = \delta I_{GSB} (I_{GSB} + 1). \quad (81)$$

В нижней части рис. 9 точечная линия связывает состояния, энергии которых рассчитаны с помощью (80), (81) и значения $\delta = 0,015$. Видно, что эти состояния близки по энергии к точно рассчитанным состояниям нижней ветви полосы $k'_H = 1/2$.

Связь с моделью ротационного выстраивания была установлена и при сопоставлении волновых функций. Вместо функции $d_{k\alpha}^j \left(\frac{\pi}{2} \right)$ авторами [86] использовался коэффициент Клебша — Гордана $\langle 2N0jk | 2N + \alpha k \rangle$, который в асимптотическом пределе $2N \rightarrow \infty$ совпадает с $d_{k\alpha}^j \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Таким образом, в случае $\Gamma = -\Gamma_{cy}$ полоса с $k'_H = 1/2$ является аналогом развязанной полосы модели ротационного выстраивания, но в пространстве с ограниченным числом квадрупольных фононов.

Волновые функции (75) можно использовать в качестве базиса для построения в рамках $SU(3)$ -БМФ аналогов нильсоновских состояний. В общем случае можно написать

$$|k\mathcal{J}M\rangle = \sum_I f_{N\mathcal{J}}(I) \langle jkI0 | \mathcal{J}k \rangle | (jI_{0c}) \mathcal{J}M \rangle, \quad (82)$$

где характер квантового числа k определяется видом весовой функции $f_{N\mathcal{J}}(I)$. В двух рассмотренных выше случаях использовалась весовая функция:

$$f_{N\mathcal{J}}(I) = B_I^{-A}.$$

Для рассмотрения в рамках $SU(3)$ -БМФ предельного случая сильной связи по аналогии с ротационной БМФ весовую функцию следует взять в виде

$$f_{N\mathcal{J}}(I) = \left(\frac{4I+2}{2\mathcal{J}+1} \right)^{1/2}. \quad (83)$$

Этот предельный случай $SU(3)$ -БМФ подробно рассмотрен в [87]. Соответствующее преобразование имеет вид

$$|k\mathcal{J}M\rangle_{\text{сис}} = \sum_{I=0}^{2N} \left(\frac{4I+2}{2\mathcal{J}+1} \right)^{1/2} \langle jkI0 | \mathcal{J}k \rangle | (jI_{0c}) \mathcal{J}M \rangle. \quad (84)$$

Унитарность преобразования нарушается, если правила треугольника допускают значения $I \geq 2N + 2$. Максимальный угловой момент \mathcal{J} , для которого (84) унитарно, равен: $\mathcal{J}_{\text{макс}} = 2N - j + 1$. В общем случае максимальный угловой момент в k -полосе равен:

$$\mathcal{J}_{\text{макс}}^k = 2N - j + 2k. \quad (85)$$

Отсюда следует, что (84) унитарно для всех состояний $k = 1/2$ -полосы. В других k -полосах преобразование (84) не унитарно для тех угловых моментов, которые не появляются в $k = 1/2$ -полосе. Для этих состояний приходится использовать процедуру Грамма — Шмидта. В базисе (84) матрица $I^B I^B$ всегда тридиагональна при $\mathcal{J} < \mathcal{J}_{\text{макс}}$. Это свойство сохраняется и при $\mathcal{J} > \mathcal{J}_{\text{макс}}$, если использовать верхний набор. Однако матрица взаимодействия никогда не тридиагональна в базисе $|k, \mathcal{J} M\rangle_{\text{сис}}$. В этом смысле она ведет себя точно так же, как и в ротационной модели, где правило отбора $\Delta k = 1$, справедливое для $I^B I^B$, нарушается для члена, описывающего взаимодействие частицы с остовом. Поскольку матрица $G_2^B G_2^F$ не может быть сведена к тридиагональной форме в базисе (84), то не существует и конечной константы связи Γ , при которой состояния (84) будут собственными состояниями гамильтониана (76). [Исключение составляет тривиальный случай 2×2 -гамильтоновой матрицы (76).] По построению следует ожидать, что состояния (84) будут хорошо аппроксимировать собственные состояния гамильтониана $SU(3)$ -БМФ в пределе больших Γ и N . Было показано [87], что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{сис} \langle k, \mathcal{J} M | (G_2^B G_2^F)_{(0,0)} | k', \mathcal{J} M \rangle_{\text{сис}} = -2\sqrt{2} N \left[\frac{(2j-2)!}{(2j+3)!} \right]^{1/2} [3k^2 - j(j+1)] \delta_{kk'}. \quad (86)$$

Это означает, что при больших N источником отличных от нуля недиагональных матричных элементов может быть только кориолисово взаимодействие $I^B I^B$.

Было также показано, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_{\text{сис}} \langle G_2^B G_2^F \rangle_{\text{сис}}}{\delta_{\text{сис}} \langle I^B I^B \rangle_{\text{сис}}} = \frac{\Gamma N}{\delta}, \quad (87)$$

т. е. при $N \gg 1$ член, описывающий взаимодействие фермионов с остовом, доминирует. Кроме того, оказалось, что сигнатурные эффекты проявляются только для полосы с $k = 1/2$ в полном соответствии с пределом сильной связи в ротационной модели Бора — Моттельсона.

Таким образом, для двух из рассмотренных в рамках $SU(3)$ -БМФ предельных случаев: $\Gamma = -\Gamma_{\text{св}}$ и $\Gamma \gg 1$, было установлено однозначное соответствие с промежуточной (ротационное выстраивание) и сильной связями ротационной модели.

Если $\Gamma = \Gamma_{\text{св}}$, то здесь возникает парадоксальная ситуация. Энергии развязанной $|k_{\text{в}} = j = \frac{11}{2} \mathcal{J} M\rangle$ полосы поразительно точно следуют правилу $\mathcal{J}(\mathcal{J} + 1)$, как и в ротационной модели. В то же время $\Gamma_{\text{св}} \approx 1$ МэВ, что совсем не соответствует пределу сильной связи. Более того, поскольку $\Gamma_{\text{св}}$ оказалась не зависящей

от N и \mathcal{T} , нет надежды на то, что с увеличением N она может подрасти и член взаимодействия станет доминирующим.

Обобщения МКФ на случай нечетно-нечетных ядер. В самые последние годы резко возрос интерес к нечетно-нечетным ядрам. Их спектроскопическое изучение может дать ценную информацию о протон-нейтронных остаточных взаимодействиях.

В работе [91] предложено обобщение МКФ на случай нечетно-нечетных ядер (OTQM). Гамильтониан OTQM имеет следующий вид:

$$H_{\text{OTQM}} = H_{\text{PTQM}}^{(\pi)} + H_{\text{PTQM}}^{(\nu)} - H_{\text{МКФ}} + H_{\text{ост}}^{(\pi\nu)}. \quad (88)$$

Здесь $H_{\text{PTQM}}^{(\pi)}$ ($H_{\text{PTQM}}^{(\nu)}$) — гамильтониан PTQM [74] нечетного ядра с нечетным протоном (нейтроном); $H_{\text{ост}}^{(\pi\nu)}$ — остаточное протон-нейтронное взаимодействие. Создана программа для диагонализации в базисе $|j_{\pi}j_{\nu}\rangle$, где j_{π} — протонный, а j_{ν} — нейтронный угловые моменты, связанные в угловой момент $j_{\pi\nu}$, который, в свою очередь, связан с I в полный угловой момент \mathcal{T} .

С помощью этой программы был рассчитан спектр нечетно-нечетной системы в предположении, что для четно-четного остова реализуется $SU(3)$ -предел МКФ. Обменные члены в H_{PTQM} не учитывались.

Полученный спектр состоит из двух низколежащих полос, основанных на состояниях с угловыми моментами $\Gamma = j_{\pi} + j_{\nu}$ и $\mathcal{T} = |j_{\pi} - j_{\nu}|$, и из полос, которые лежат выше по энергии.

Было показано, что волновые функции состояния с угловым моментом \mathcal{T} , принадлежащие $(j_{\pi} + j_{\nu})$ -полосе, могут быть представлены в той же самой форме, что и волновые функции (74) для нечетной системы, с той лишь разницей, что нужно сделать следующие замены:

$$\begin{aligned} |j\rangle &\rightarrow |(j_{\pi}j_{\nu})j_{\pi\nu}\rangle; \\ \text{полуцелые } k &\rightarrow \text{целые } k; \\ \text{полуцелые } \mathcal{T}M &\rightarrow \text{целые } \mathcal{T}M. \end{aligned}$$

Энергии состояний этой полосы пропорциональны $\mathcal{T}(\mathcal{T} + 1)$:

$$E(k = j_{\pi} + j_{\nu}, \mathcal{T}) = \delta \mathcal{T}(\mathcal{T} + 1), \quad (89)$$

где δ — тот же параметр, что и в случае четно-четной и нечетной систем. Было установлено, что эти две нижайшие полосы, т. е. $|k = j_{\pi} + j_{\nu}, \mathcal{T}\rangle$ и $|k = |j_{\pi} - j_{\nu}|, \mathcal{T}\rangle$, являются аналогами полос Галахера — Мошковского, основанных на $(\Omega_{\pi} = j_{\pi}, \Omega_{\nu} = j_{\nu})$. Полученные в рамках OTQM результаты указывают на чувствительность разности энергии оснований этих полос к остаточному спин-спиновому взаимодействию. Как и в случае параболического правила [100], спин-спиновое взаимодействие приводит к понижению оснований полос с $k = |j_{\pi} - j_{\nu}|$ или с $k = j_{\pi} + j_{\nu}$ для $\nu = 0$, или $|\nu| = 1$, соответственно, где $\nu = j_{\pi} - l_{\pi} + j_{\nu} - l_{\nu}$ — число Нордгейма.

Непосредственный анализ волновых функций состояний, принадлежащих полосе с $k = j_{\pi} + j_{\nu}$, показал, что их структура аналогич-

на структуре волновых функций (75). Этот факт, а также формула (89) указывают на то, что и в рассматриваемой нечетно-нечетной системе реализуется приближенная динамическая суперсимметрия, связанная с $SU(3)$ -симметрией четно-четного остова.

Концепция суперсимметрии является обобщением понятия симметрии на случай смешанных систем, состоящих из бозонов и фермионов. Впервые это понятие было введено в физику элементарных частиц [101, 102]. Математический аппарат теории суперсимметрии — это теория градуированных алгебр Ли [103] вместо обычных алгебр Ли. Следует отметить, что на сегодня ядерная физика, по-видимому, является единственной областью физики, где можно проверять, реализуются ли в природе суперсимметрии. Подход, основанный на динамических суперсимметриях, позволяет описывать на единой основе четно-четные, нечетные и нечетно-нечетные ядра. Первоначально в рамках МВБФ был развит подход к единому описанию четно-четных и нечетных ядер, использующий точные бозонно-фермионные симметрии, так называемые «спинорные» симметрии [105—110]. Несколько позже в работе [89] в рамках ОТQM этот подход был обобщен на случай нечетно-нечетных ядер. Основная идея обобщения метода на этот тип ядер заключается в построении максимальной группы преобразований для нечетных фермионов (π и ν) и в использовании таких вложенных цепочек, которые приводят к нужному спиновому составу рассматриваемой ядерной системы. После того как эта структура найдена, необходимо проанализировать все возможные связи двух нечетных фермионов с остовом. В результате такого анализа возникнут соответствующие массовые формулы для спектра нечетно-нечетной системы. В [89] рассмотрен случай, когда нечетные фермионы, находящиеся в конфигурациях с $j = 3/2$, связаны с коллективным остовом, описываемым в предположении, что реализуется $SO(6)$ -предел. Была рассмотрена следующая цепочка вложенных бозонно-фермионных групп:

$$\begin{array}{c}
 U^B(6) \otimes U^F \pi(4) \otimes U^F \nu(4) \\
 \cup \qquad \qquad \cup \\
 \cup \qquad \qquad SU^F \pi(4) \otimes SU^F \nu(4) \\
 \qquad \qquad \qquad \diagdown \quad \diagup \\
 SO^B(6) \otimes \qquad \qquad SU^F \pi \nu(4) \\
 \qquad \qquad \diagdown \quad \diagup \\
 \text{Spin} \quad BF_{\pi \nu}(6) \\
 \cup \\
 \text{Spin} BF_{\pi \nu}(5) \\
 \cup \\
 \text{Spin} BE_{\pi \nu}(3) \\
 \cup \\
 \text{Spin} BF_{\pi \nu}(2).
 \end{array} \tag{90}$$

При объединении бозонных и фермионных групп в бозонно-фермионные существенно использовался гомеоморфизм $SO(6) \approx SU(4)$. По аналогии со случаем нечетных ядер [105, 106] генераторы спинорных групп в цепочке (90) были получены при таком комбинировании генераторов бозонных и фермионных групп, при котором замыкается алгебра соответствующих спинорных групп. Базисные состояния, соответствующие цепочке (90), имеют следующий вид:

$$| [N], \{M_\pi = 1\}, \{M_\nu = 1\}, \Sigma, (\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)(n_\delta) \mathcal{T}, M \rangle,$$

где квантовые числа $N, M_\pi, M_\nu, \Sigma, (\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2), (n_\delta), \mathcal{T}$ и M характеризуют неприводимые представления групп, участвующих в цепочке (90): $U^B(6), U^{F\pi}(4), U^{F\nu}(4), SO^B(6), SU^{F\pi\nu}(4), Spin^{BF\pi\nu}(6), Spin^{BF\pi\nu}(5), Spin^{BF\pi\nu}(3)$ и $Spin^{BF\pi\nu}(2)$ соответственно. Используя теоретико-групповые методы, развитые в [44, 111, 112], авторы [89] построили представления каждой из подгрупп в (90), содержащейся в соответствующей более широкой группе.

В том случае, когда гамильтониан ОТQM (88) можно выразить через операторы Казимира подгрупп, фигурирующих в цепочке (90), его собственные значения, т. е. спектр нечетно-нечетной системы, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} E = E^{(0)}(N, M_\pi = 1, M_\nu = 1) - \\ - \frac{1}{4} A_1' [\xi_1(\xi_1 + 4) + \xi_2(\xi_2 + 2) + \xi_3^2] - \\ - \frac{1}{4} A_1 \Sigma(\Sigma + 4) - \frac{1}{4} A [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] + \\ + \frac{1}{6} B [\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1 + 3) + \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2 + 1)] + C\mathcal{T}(\mathcal{T} + 1). \end{aligned} \quad (91)$$

Параметры A_1, A_2, B, C были введены так, чтобы формула (91) напоминала по форме Spin(6)-массовую формулу для нечетных ядер [106]. Выражение $E^{(0)}(N, M_\pi, M_\nu)$ содержит линейные и квадратичные по N, M_π, M_ν члены, которые дают вклад только в энергию связи.

На рис. 10 приведен спектр собственных значений, рассчитанный по формуле (91), с параметрами [113], отвечающими типичному Spin(6)-спектру нечетных ядер.

На рис. 11 представлены ирраст-полосы: 0_1 -полоса, $3/2_1$ -полоса и 3_1 -полоса в четно-четной, нечетной и нечетно-нечетной системах соответственно, рассчитанные по $SO(6)$ -массовой формуле [30], Spin(6)-массовой формуле [105] и по формуле (91) соответственно. Полное число бозонов было взято равным 7, остальные параметры — те же, что и на рис. 10. Проявление Spin(6)-бозонно-фермионной симметрии следует ожидать в области Ir — Pt — Au, где в четно-нечетных ядрах реализуется $SO(6)$ -бозонная симметрия и где есть

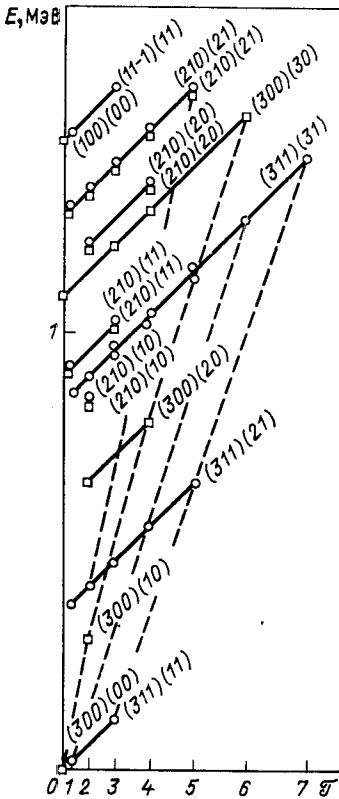


Рис. 10. Спектр возбужденных состояний нечетного ядра, рассчитанный по формуле (91). Параметры типичны для нечетных ядер, описываемых с помощью группы Spin (6):

$A_1 = 0$, $A/4 = 90$ кэВ, $B/6 = 60$ кэВ, $C = 10$ кэВ, $N = 2$, $A_1 = 0$. Для $\Sigma = 2$ состояния с $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ изображены квадратами и кружками соответственно. Каждая группа состояний с одинаковыми значениями (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и (τ_1, τ_2) связана прямой линией. Каждой группе приписаны квантовые числа $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и (τ_1, τ_2) . Состояния четырех полос, наиболее близких к ирради-полосе, соединены пунктирной линией

низколежащие $\tilde{\nu}d_{3/2}$, $\tilde{\nu}p_{3/2}$ — одноквартичные состояния. Если наложить определенные ограничения на константы бозон-бозонных, бозон-фермионных и протон-нейтронных остаточных взаимодействий, гамильтониан ОТQM (88) для $j_\pi = j_\nu = 3/2$ можно переписать в терминах операторов Казимира цепочки (90), что приведет к спектру, заданному формулой (91). Это означает, что в (91) учтено нейтрон-протонное остаточное взаимодействие, но с фиксированной определенным образом константой.

В [89] предполагалось, что оба нечетных фермиона — частицы. Новые возможности появляются, если принять во внимание тот

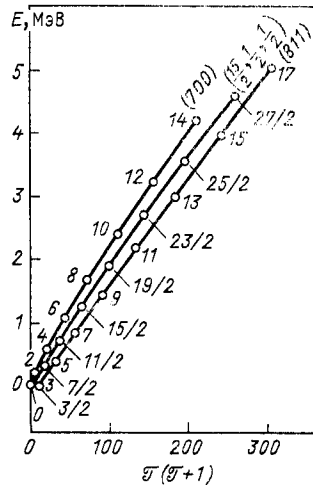


Рис. 11. Ирра-полосы, построенные на состояниях 0_1 , $(3/2)_1$ и 3_1 в четно-четной, нечетной и нечетно-нечетной системах:

полосы обозначены квантовыми числами $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (7, 0, 0)$, $(15/2, 1/2, 1/2)$ и $(8, 1, 1)$ для четно-четной, нечетной и нечетно-нечетной систем соответственно. Для каждого уровня указан его угловой момент

факт, что нечетный фермион может быть как частицей, так и дыркой. В [114] было показано, что для изотопов Au ($Z = 79$) с $N = 117$ и $N = 119$ можно достичь хорошего описания спектров возбужденных состояний, если предположить, что нечетный нейтрон — частица, а нечетный протон — дырка.

Рассмотренную в [89] Spin (6)-симметрию можно расширить, если вложить группу $U^B(6) \otimes U^{F\pi}(4) \otimes U^{F\nu}(4)$, с которой начинается цепочка (90), в градуированную алгебру Ли $U(6/4\pi + 4\nu)$. Это обобщение идеи, предложенной в [107], позволяет включить в единое описание наряду с четно-четными и нечетными ядрами и нечетно-нечетные ядра. В этом случае супералгебра имеет протонный и нейтронный подсекторы в своем ферми-секторе.

Об эффекте обрезания фононного пространства МКФ. Характерной особенностью МКФ является то, что она оперирует с конечно-мерным фононным пространством. Гамильтониан и физические операторы МКФ заданы в пространстве фононов, размерность которого не превышает N [см. (5) и (7)]. (Конечность N — это специфическая особенность и МВБ-1, в которой полное число бозонов N постулируют равным числу валентных пар нуклонов рассматриваемого ядра.) В [115] показано, что появление квадратного корня в операторах МКФ — результат приближений, сделанных при расчете норм многофермионных состояний. Там же продемонстрировано (табл. 6),

Таблица 6. Нормировочные коэффициенты коллективных фермионных состояний

N	$\overline{\mathcal{N}}_N$	$\overline{\mathcal{N}}_{N^{SU(6)}}$	N	$\overline{\mathcal{N}}_N$	$\overline{\mathcal{N}}_{N^{SU(6)}}$
1	1	1	8	0,060	0,018
2	0,90	0,90	9	0,028	0,004
3	0,73	0,72	10	0,012	0,0004
4	0,535	0,504	11	0,005	0
5	0,356	0,302	12	0,0019	—
6	0,215	0,151	13	0,0007	—
7	0,119	0,060			

что в общем случае решение рекуррентных уравнений для норм многофермионных состояний не совпадает с результатом $SU(6)$ -приближения. Из табл. 6 видно, что соответствующие нормировочные коэффициенты $\overline{\mathcal{N}}_N$ плавно убывают с ростом N , нигде не обращаясь в нуль [в отличие от $\overline{\mathcal{N}}_{N^{SU(6)}}$, найденных в $SU(6)$ -приближении], что соответствует неограниченному пространству коллективных состояний. Как следствие ограниченности фононного пространства в $SU(3)$ -пределе МКФ (МВБ-1), возникают ротационные полосы, обрывающиеся при $I = 2N$ [7, 10]. Такое обрезание на опыте не обнаружено. Изучению роли эффекта обрезания посвящена работа [92]. В ней показано, что возникновение ротационных полос — свойство, харак-

терное для широкого класса моделей квадрупольных фононов вне зависимости от $SU(3)$ -симметрии. Чтобы продемонстрировать это, авторы [92] ввели в рассмотрение коллективный гамильтониан, содержащий обрезанные факторы в виде произвольной функции от оператора числа квадрупольных бозонов:

$$H^f = h_1 \hat{N} + h_2 \{(b^+ b^+)_{(00)} f(\hat{N}) f(\hat{N} + 1) + \text{h.c.}\} + \\ + h_3 \{(b^+ b^+ \tilde{b})_{(00)} f(\hat{N}) + \text{h.c.}\} + \sum_{L=0, 2, 4} h_{4L} \{(b^+ b^+)_{L} (\tilde{b} \tilde{b})_{L}\}_{(00)}, \quad (92)$$

где $\hat{N} = \sum_{\mu} b_{\mu}^+ b_{\mu}$.

Так как

$$f(\hat{N}) |n\kappa I\rangle = f(n) |n\kappa I\rangle, \quad (93)$$

матричные элементы \hat{H}^f (92) в базисе $\{|n\kappa I\rangle\}$ отличаются от стандартных матричных элементов ангармонического квадрупольно-фононного гамильтониана четвертого порядка только факторами $f(n)$. Авторы [92] наложили два ограничения на $f(\hat{N})$:

$$f(\hat{N}) |n = N\kappa I\rangle = 0; \quad (94)$$

$$\int_0^N f(n) dn = \frac{2}{3} N^{3/2}. \quad (95)$$

Заметим, что условия (94) и (95) никак не связаны с соображениями симметрии. Были рассмотрены три частных выбора $f(\hat{N})$.

$$1) f(\hat{N}) = (N - \hat{N})^{1/2}. \quad (96)$$

В этом случае $\hat{H}^f \equiv \hat{H}_{\text{МРФ}}$ [см. (5)].

$$2) f(\hat{N}) = \frac{2}{3} \sqrt{N} \theta(N - \hat{N}), \quad (97)$$

где операторная ступенька $Q(N - \hat{N})$ определена как обычно:

$$\theta(N - \hat{N}) |n\kappa I\rangle = \begin{cases} |n\kappa I\rangle & \text{при } n < N; \\ 0 & \text{при } n \geq N. \end{cases} \quad (98)$$

Как отмечалось в [74], в этом случае \hat{H}^f точно соответствует ангармоническому квадрупольно-фононному гамильтониану четвертого порядка специального вида (см. [74] и имеющиеся там ссылки).

Этот гамильтониан был диагонализирован в N -мерном фоновом пространстве. Результаты диагонализации зависят от N . Эта зависимость изучалась в [116, 117] до введения МКФ и МВБ-1.

$$3) f(\hat{N}) = \frac{4}{3} \sqrt{N} \left(1 - \frac{\hat{N}}{N}\right) \theta(N - \hat{N}). \quad (99)$$

Этот случай впервые рассмотрен в [92]. На рис. 12 приведены диагональные матричные элементы $f(n) = \langle n\kappa I | f(\hat{N}) | n\kappa I \rangle$, соответствующие трем формам обрезающего фактора: 1, 2, 3.

Известно [7, 29], что в случае, когда реализуется $SU(3)$ -предел, параметры $\{h\} \equiv \{h_1, h_2, h_3, h_{40}, h_{42}, h_{44}\}$ можно выразить с помощью N и двух параметров: α и β . Эту параметризацию назовем

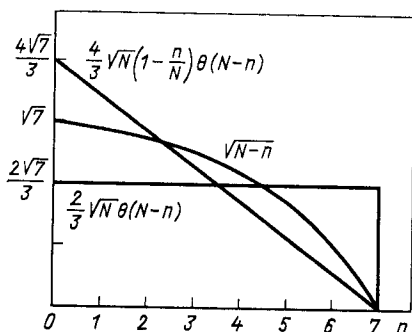


Рис. 12. Диагональные матричные элементы $f(n) = \langle n\kappa I | f(\hat{N}) | n\kappa I \rangle$ для трех разных форм обрезающего фактора при $N = 7$

$SU(3)$ -параметризацией $\{h\}$ $SU(3)$. (Явный вид связи $\{h\}_{SU(3)} \leftrightarrow \{\alpha, \beta, N\}$ дан в [74]) (см. (38) в [74]). Были рассчитаны спектры гамильтонианов \hat{H}^I для трех форм $f(\hat{N})$, задаваемых (96), (97) и (99), причем использовалась одна и та же $SU(3)$ -параметризация во всех трех случаях и предполагалось, что $N = 7$. Полученные спектры приведены на рис. 13—15 соответственно. Случаи, когда $f(\hat{N})$ определены соотношениями (97) и (99), к $SU(3)$ -симметрии никакого отношения не имеют. Однако из рис. 13—15 видно, что спектры, соответствующие трем формам обрезающего фактора поразительно схожи. Подобный результат получается и для электромагнитных свойств, рассчитанных в трех случаях. На этой основе авторы [92] заключают, что возникновение конечных ротационных полос (рис. 13—15) связано не с реализацией $SU(3)$ -предела МКФ, а скорее, отражает определенные соотношения между константами коллективного гамильтониана, действующего в ограниченном фоновом пространстве. На то обстоятельство, что условия возникновения ротационных полос должны быть слабее, чем это требует $SU(3)$ -симметрия, указывалось ранее в работе Бора и Моттельсона [118].

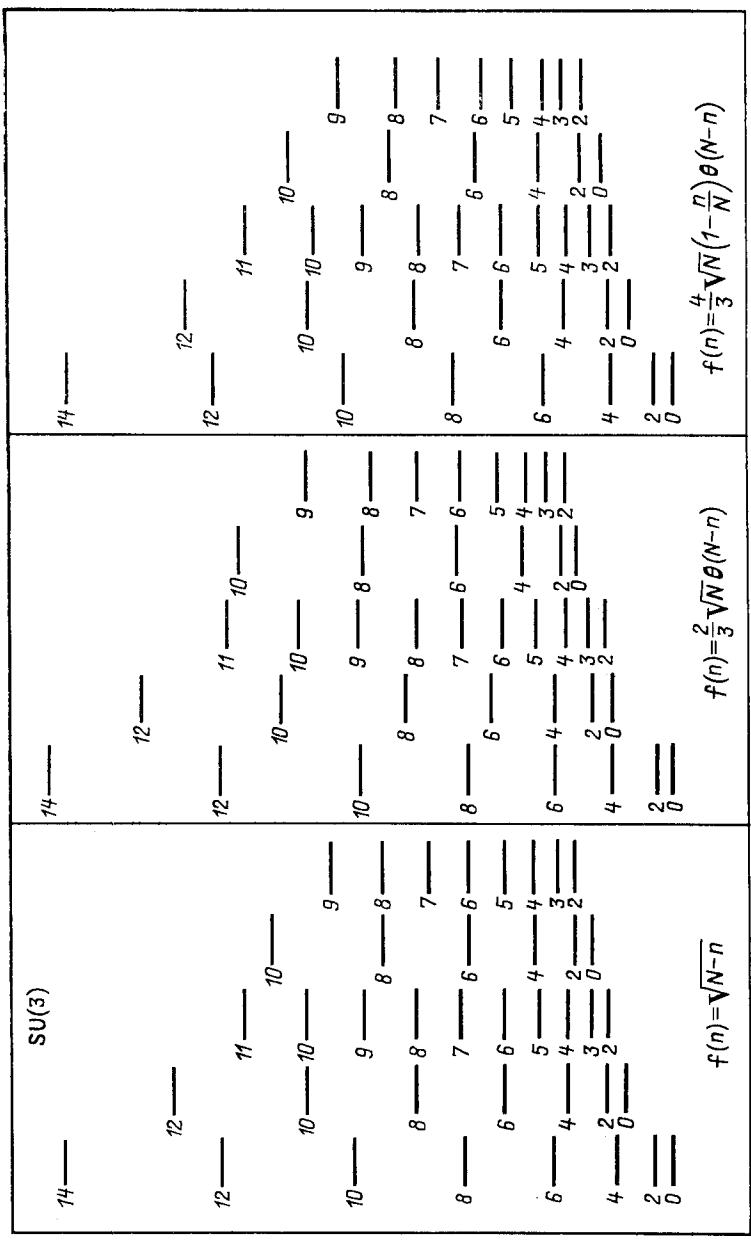


Рис. 13. Спектр $\hat{H}f$ при $f(\hat{N}) = (N - \hat{N})^2$. Использовалась параметризация: $h_1 = 0,0225$; $h_2 = -0,0224$; $h_3 = -0,0592$; $h_4 = 0,1175$; $h_5 = -0,0811$; $h_4 = 0,285$ и $N = 7$. Это соответствует параметрам $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,2$ при $SU(3)$ -параметризации. Числа у-уровней обозначают спин

Рис. 14. Спектр $\hat{H}f$ при $f(\hat{N}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{N} \theta(N - \hat{N})$. Параметры те же, что и на рис. 13

Рис. 15. Спектр $\hat{H}f$ при $f(\hat{N}) = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{N} (1 - \frac{\hat{N}}{N}) \theta(N - \hat{N})$. Параметры те же, что и на рис. 13

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор состоит из двух основных частей. Для тех, кого интересует математический аппарат теории, бóльший интерес представляет первая часть (разд. 1—3), где изложены результаты детального математического исследования вопроса о соотношении между двумя популярными коллективными моделями (МКФ и МВБ-1), который являлся дискуссионным. Установлена эквивалентность обеих моделей на уровне матричных элементов и операторов. Дано строгое доказательство того, что в физическом подпространстве бозонного пространства состояний МКФ и МВБ-1 унитарно-эквивалентны. Вопрос о соотношении МКФ и МВБ-1 в настоящее время можно считать полностью изученным.

Для читателя, более интересующегося физическими применениями, интерес представляет разд. 4, где изложены результаты новейшего развития и применения МКФ к конкретным физическим системам.

Авторы выражают глубокую благодарность Э. Наджакову за полезные обсуждения ряда вопросов, рассмотренных в обзоре, В. Г. Соловьеву и И. Н. Михайлову за интерес к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 2.
2. Bohr A. //Mat. fys. medd. Kgl. Danske vid. selskab. 1952. Vol. 26, No 14.
3. Bohr A., Mottelson B. R. //Mat. fys. medd. Kgl. danske vid. selskab. 1953. Vol. 27. No. 16.
4. Афанасьев Г. Н., Райчев П. П. //ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. С. 436—461.
5. Джолос Р. В., Дэнау Ф., Янссен Д. //ТМФ. 1974. Т. 20. С. 112—125;
- Джолос Р. В., Дэнау Ф., Янссен Д. Препринт ОИЯИ Р4-7144, Дубна, 1973.
6. Janssen D., Jolos R. V., Donau F. //Nucl. Phys. 1974. Vol. A224. P. 93—115.
7. Джолос Р. В., Дэнау Ф., Янссен Д. //ЯФ. 1975. Т. 22. С. 965—974.
8. Arima A., Iachello F. //Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 35. P. 1069—1072.
9. Arima A., Iachello F. //Ann. of Phys. 1976. Vol. 99. P. 253—271.
10. Arima A., Iachello F. //Ann. of Phys. 1978. Vol. 111. P. 204—238; Sholten O., Iachello F., Arima A. //Ann. of Phys. 1978. Vol. 115. P. 325—366; Arima A., Iachello F. //Ann. of Phys. 1979. Vol. 123. P. 468—492.
11. Arima A., Otsuka T., Iachello F., Talmi I. //Phys. Lett. 1977. Vol. 66B. P. 205—208.
12. Otsuka T., Arima A., Iachello F., Talmi I. //Phys. Lett. 1978. Vol. 76B. P. 139—143.
13. Otsuka T., Arima A., Iachello F. //Nucl. Phys. 1978. Vol. A309. P. 1—33.
14. Progress in Particle and Nuclear Physics. N. Y.: Pergamon Press. 1983. Vol. VIII: Collective Bands in Nuclei.
15. Зелевинский В. Г. //Изв. АН СССР. Сер. физ. 1984. Т. 48. С. 79—83.
16. Paar V. Interacting Bosons in nuclear Physics. N. Y.: Plenum Press. 1979. P. 163.
17. Blaizot J. P., Marshalek E. R. //Nucl. Phys. 1978. Vol. A309. P. 453—476.
18. Moshinsky M. //Nucl. Phys. 1980. Vol. A338. P. 156—166.
19. Cinocchio J. N., Kirson M. W. //Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 1744—1747.
20. Dieperink A. E. L. e. a. //Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 1747—1750.

21. Klein A., Vallieres M.//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46. P. 586—590;
- Klein A. e. a.//Phys. Rev. 1982. Vol. C25. P. 2733—2742.
22. Gilmore R., Feng D. H.//Phys. Rev. 1982. Vol. C26. P. 766—770.
23. Джолос Р. В., Дзэну Ф., Янсен Д. Препринт ОИЯИ Р4-8077, Дубна, 1974.
24. Kyurchev G.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A349. P. 416—432.
25. Kyurchev G., Paar V.//Ann. of Phys. 1986. Vol. 170. P. 257—286.
26. Kirson M. V.//Ann. 1982. Vol. 143. P. 448—478.
27. Faessler A.//Nucl. Phys. 1983. Vol. A396. P. 291—307.
28. Casten R. F.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A347. P. 173—185.
29. Джолос Р. В., Янсен Д.//ЭЧАЯ, 1977. Т. 8. С. 330—373.
30. Iachello F. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
31. Джолос Р. В., Лемберг И. Х., Михайлов В. М.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 280—348.
32. Ванагас В.//ЭЧАЯ. 1976. Т. 7. С. 309—355; Там же 1980. Т. 11. С. 454—496.
33. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И., Смирнов Ю. Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений атомных ядер. Киев: Наукова Думка, 1981.
34. Rossensteel G., Rowe D. J.//Ann. of Phys. 1976. Vol. 96. P. 1—42; Ibid. 1977. Vol. 104. P. 134—144; Ibid. 1979. Vol. 123. P. 36—60.
35. Buck R., Biedenharn L. C., Cusson R. Y. Nucl. Phys. 1979. Vol. A. 317. P. 205—241.
36. Vanagas V., Nadjakov E.//Bulg. J. Phys. 1975. Vol. 2. P. 558—569;
- Vanagas V., Nadjakov E., Raychev P. Preprint II/75/50. Trieste, 1975.
37. Castanos O., Chacon F., Frank A., Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1979. Vol. 20. P. 35—44.
38. Georgieva A., Raycher P., Roussev R.//J. of Phys. G.: Nucl. Phys. 1982. Vol. 8. P. 1377—1391.
39. Тодоров И. Т. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наукова Думка, 1967. С. 237.
40. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
41. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Чоповский Л. Л.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1338—1385.
42. Arima A., Iachello F.//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40. P. 385—387.
43. Cizewski J. A., Casten R. F., Smith G. J. e. a.//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40. P. 167—170.
44. Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1974.
45. Ring P., Schuck P.//The Nuclear Many Body Problem. N. Y.: Springer, 1980.
46. Kyurchev C., Paar V.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A395. P. 61—76.
47. Lipas P. O.//Progr. Part. Nucl. Phys. 1983. Vol. 9. P. 511—594.
48. Schwinger J. The Quantum theory of angular momentum N. Y.: Academic Press, 1965.
49. Nadjakov E.//Proc. of the V-th Intern. School on Nucl. Phys. (Varna, 1981). Sofia: Bulg. Acad. Sci. 1982. P. 83—145.
50. Weyl H. Classical Groups, New Tersey, 1946.
51. Van der Waerden B. L.//Math. Z. 1933. Vol. 37. P. 446—453.
52. Dynkin E. B.//Am. Math. Soc., Transl. II, Vol. 6, Appendix, 102 p.
53. Pais A.//Rev. Mod. Phys. 1966. Vol. 38. P. 215—255.
54. Barid G. E., Biedenharn L. C.//J. Math. Phys. 1963. Vol. 4. P. 1449—1466.
55. Emch G. Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. N. Y.—Interscience, 1972.
56. Wightman A. S.//Phys. Rev. 1956. Vol. 101. P. 860—874.
57. Haag R., Kastler D.//J. Math. Phys. 1964. Vol. 5. P. 848—861.
58. Gilmore R., Bouden C. M., Narducci L. M.//Phys. Rev. 1975. Vol. A12. P. 1019—1031.

59. Dobaczawski J. // Nucl. Phys. 1981. Vol. A369. P. 213—257; Ibid. 1982. Vol. A380. P. 1—27.
60. Marshalek E. R. // Nucl. Phys. 1980. Vol. A347. P. 253—262.
61. Kyrchev G., Paar V. // Fizika. 1986. Vol. 18. P. 197—207.
62. Itzykson C., Nauenberg M. // Rev. Mod. Phys. 1966. Vol. 38. P. 95—120.
63. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
64. Dobrev V. K., Mack G., Petkova V. B. e. a. // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1977. Vol. 63.
65. Naimark M. T. Normed Algebras. Amsterdam: Wolters-Noordhoff, 1972.
66. Михайлов В. М., Панин Р. В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1983. Т. 47. С. 889—900.
67. Klein A. // Progress Particle Nuclear Physics. Vol. 9. N. Y.: Pergamon Press, 1983, P. 71—83.
68. Kyrchev G., Paar V. // Fizika. 1984. Vol. 16. P. 291—296.
69. Arima A. e. a. // Phys. Lett. 1982. Vol. 101 B. P. 209—215.
70. Gambhir Y. K., Ring P., Schuck P. // Nucl. Phys. 1984. Vol. A423. P. 35—
- 51.
71. Переломов А. М. // УФН. 1977. Т. 123. С. 23—56.
72. Arima A., Iachello F. // Phys. Rev. 1977. Vol. C16. P. 2085—2089.
73. Scholten C. Ph D Thesis, Groningen, 1980.
74. Paar V., Brant S., Cantol F. e. a. // Nucl. Phys. 1982. Vol. A378. P. 41—76.
75. Arima A., Iachello F. // Adv. Nucl. Phys. 1984. Vol. 13. P. 139—200.
76. Duval R. D., Barrett B. R. // Phys. Lett. 1981. Vol. 100B. P. 223—227.
77. Iachello F., Scholten O. // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 679—689.
78. Casten R. F., Smith P. // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 337—339.
79. Scholten O., Blasi N. // Nucl. Phys. 1980. A. 380. P. 509—528.
80. Kaup U., Gelberg A., von Boentano P. // Phys. Rev. 1980. Vol. C22. P. 1738—1713.
81. Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei/Ed. F. Iachello. N. Y.: Plenum Press, 1978.
82. Iachello F. // Physica. 1985. Vol. 15D. P. 85—96.
83. Casten R. F. // Physica. 1985. Vol. 15D. P. 99—107.
84. Tokunaga Y., Sayfarth H., Schult O. W. R. e. a. // Nucl. Phys. 1984. Vol. A.430. P. 269—300.
85. Marinov A., Gelent W., Copal S. e. a. // Nucl. Phys. 1984. Vol. A431. P. 318—343.
86. Sunko D. K., Paar V. // Phys. Lett. 1984. Vol. 146B. P. 279—284.
87. Sunko D. K., Paar V. // Fizika. 1985. Vol. 17. P. 201—213.
88. Stephens F. S. // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. P. 43—66.
89. Hübsch T., Paar V., Vretenar D. // Phys. Lett. 1985. Vol. 151D. P. 320—
- 324.
90. Hübsch T., Paar V. // Z. Phys. 1984. Vol. 319A. P. 111—112.
91. Brant S., Paar V., Vretenar D. // Z. Phys. 1984. Vol. 319A. P. 355—356.
92. Lopas V., Paar V. // Z. Phys. 1984. Vol. 319A. P. 351—354.
93. Sunko D. K. e. a. // Nucl. Phys. 1987. Vol. A461.
94. Elliott J. P. // Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. A245. P. 128—144; Ibid. P. 562—
- 581.
95. Paar V., Brant S., Kraljevic H. // Phys. Lett. 1982. Vol. 110B, P. 181—184.
96. Canto L. F., Paar V. // Phys. Lett. 1981. Vol. 102B. P. 217—220.
97. Корн Г., Корн Т. // Справочник по математике: Пер. с. англ. М.: Наука, 1970. С. 460.
98. Vergados J. D. // Nucl. Phys. 1968. Vol. A111. P. 681—754.
99. Hecht K. T. // Nucl. Phys. 1975. Vol. 62. P. 1—35.
100. Paar V. // Nucl. Phys. 1979. Vol. A331. P. 16—28.
101. Volkov D. V., Akulov V. P. // Phys. Lett. 1973. Vol. 46B. P. 109—111.
102. Wess J., Zumino B. // Nucl. Phys. 1974. Vol. 70B. P. 39—57.
103. Кас В. Г. // Adv. in Math. 1977. V. 26. P. 8.
104. Nadjakov E., Mikhailov I. N. Preprint JINR E4-86510, Dubna, 1986.

105. Iachello F. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 49. P. 772—773.
106. Iachello F., Kuyucak S. // Ann. Phys. 1981. Vol. 136. P. 19—61.
107. Balantekin A. B., Bars I., Iachello F. // Nucl. Phys. 1981. Vol. A370. P. 284—316
108. Balantekin A. B., Bars I., Bijker R., Iachello F. // Phys. Rev. 1983. Vol. C27. P. 1761—1764.
109. Sun H. Z., Frank A., Van Isacker P. // Phys. Lett. 1983. Vol. 1248. P. 275—280.
110. Vallieres M., Sun H. Z., Feng D. H. e. a. // Phys. Lett. 1984. Vol. 135B. P. 339—343.
111. Slansky R. // Phys. Rep. 1981. Vol. 79. P. 1—128.
112. Fischler M. // J. Math. Phys. 1981. Vol. 22. P. 637—648.
113. Iachello F. Interacting Bose-Fermi systems in nuclei/Ed. F. Iachello. N. Y.: Plenum Press, 1981.
114. Balantekin A. B., Pear V. // Phys. Rev. 1986. Vol. 34C. P. 1917—1919.
115. Джолос Р. В., Иванова С. П. Препринт ОИЯИ Р4-86507, 1986.
116. Bes D. R., Dussel G. // Nucl. Phys. 1970. Vol. A143. P. 623—640.
117. Gneuss G., Greiner W. // Nucl. Phys. 1971. Vol. A171. P. 449—479.
118. Bohr A., Mottelson B. R. // Phys. Scr. 1980. Vol. 22. P. 468—474.