

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е. П. Жидков, Б. Н. Хоромский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются универсальные и эффективные методы повышения точности приближенных решений, основанные на экстраполяции Ричардсона, и методы ускорения сходимости итерационных процессов на последовательности сеток при численном исследовании задач математической физики. Показано, что рассмотренные подходы могут с успехом применяться для решения задач магнитостатики, нелинейных уравнений Чу — Лоу теории дисперсионных соотношений, квазипотенциальных интегральных уравнений и ряда других физических проблем. Приводятся функциональная формулировка методов, условия их применимости и конкретные примеры использования.

The universal and effective methods of increasing the accuracy of approximate solutions based on Richardson extrapolation and methods of increasing the rate of convergency of iteration processes on the sequence of grids in numerical solution of the problems of mathematical physics are discussed in this review. It is shown that present approaches considered can be successfully used for solving the problems of magnetostatics, nonlinear equations of Chew — Low theory of dispersion relations, quasipotential integral equations and other physical problems. The functional representation of methods, conditions and concrete examples of their usage are given.

ВВЕДЕНИЕ

При численном моделировании широкого круга проблем, возникающих в физике элементарных частиц и теории ядра, а также при создании современных электрофизических установок предъявляются все более высокие требования к результатам вычислительного эксперимента и, как следствие, к необходимым для получения требуемого результата вычислительным ресурсам. При этом прогресс вычислительной техники не только не снижает ценности экономичных вычислительных алгоритмов, но делает доступным решение все более сложных физических задач, стимулируя развитие численных мето-

дов. Следует отметить, что большое многообразие математических постановок задач и их качественное усложнение (например, переход от линейных проблем к нелинейным, увеличение размерности задачи по пространственным переменным, высокие требования к точности вычислений, расчеты в широком диапазоне физических параметров) требуют использования достаточно универсальных и надежных подходов при создании или выборе экономичных численных алгоритмов для решения поставленной задачи.

В настоящем обзоре мы сосредоточим внимание на одном из наиболее мощных и универсальных средств для повышения эффективности вычислительных процессов, связанном с использованием численных алгоритмов на последовательности сгущающихся сеток (или «уровней»). Мотивом к обсуждению этих вопросов явилось, во-первых, повышение интереса к многосеточным алгоритмам (*MG*) со стороны математиков-вычислителей, о чем свидетельствует значительное количество научных публикаций (см. [1, 2] и цитируемую там литературу), во-вторых, практический опыт авторов и их коллег по применению и развитию этих алгоритмов при решении широкого круга физических задач, возникающих в Объединенном институте ядерных исследований, и, наконец, простота логических приемов при реализации алгоритмов и их универсальность. Последнее обстоятельство делает *MG*-алгоритмы легко доступными для широкого круга специалистов, непосредственно занимающихся численным моделированием, что мы и попытаемся показать в обзоре.

Многосеточная организация расчетов представляет собой более высокий алгоритмический уровень, на котором путем неоднократного обращения к конкретным и достаточно простым численным алгоритмам достигается существенное расширение возможностей последних по сравнению с однократным их использованием. Универсальность и эффективность вычислений на последовательности сеток связаны с тем, что в их основе лежит тот или иной способ учета априорной информации о дискретизованном решении исходной континуальной задачи, описывающей физический процесс. Для многих численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а также интегральных уравнений характерно, что аналитик вначале дискретизирует задачу, выбирая аппроксимирующее алгебраическое уравнение на конечномерном пространстве (сетке), и затем строит вычислительный процесс для приближенного решения системы дискретных уравнений (как правило, большого порядка). Обычно не допускается непосредственной связи между процессами дискретизации и решения системы. В этом случае в процессе решения не используется преимущество того, что решаемая алгебраическая система возникает не сама по себе, а является, по существу, аппроксимацией континуальных уравнений и поэтому может быть сама, вместе со своим решением, аналогично аппроксимирована другими, более простыми алгебраическими системами. При этом погрешность приближенных решений может

регулярным образом зависеть от параметров дискретизации. Поэтому основной идеей многосеточных (или многоуровневых) методов является работа не с единственной сеткой, а с последовательностью измельчающихся сеток (по тем или иным параметрам дискретизации), так что решения, определенные на этих сетках, взаимодействуют друг с другом [3], а также с точным решением континуальной задачи. В результате алгоритмы дискретизации, решения алгебраической системы и оценки погрешности результата объединяются в единый вычислительный процесс, делая его существенно более эффективным, зачастую на несколько порядков. Такой подход может, естественно, сочетаться и с другими методами оптимизации вычислений.

Понятие многосеточных вычислительных процессов, вообще говоря, включает в себя три основных аспекта: представление погрешности приближенных решений в виде функциональной зависимости от параметров дискретизации и использование этой зависимости для уточнения приближенных решений (экстраполяция Ричардсона, правило Ромберга); апостериорная оценка погрешности вычислений через известные величины (метод Рунге); ускорение сходимости итерационных методов на последовательности сгущающихся сеток (Multigrid methods). В литературе каждый из этих аспектов рассматривался, как правило, независимо. Нужно отметить, что идея уточнения приближенных решений на основе сеточных решений малого порядка точности высказывалась еще Ричардсоном [4, 5]. Систематическое изложение метода экстраполяции Ричардсона и его возможных применений к различным классам задач содержится в монографии [1], где имеется подробная библиография. Применение правила Рунге [6, 7] и Ромберга [1, 6] непосредственно связано с идеей экстраполяции Ричардсона и имеет большое значение в вычислительной практике. Многосеточные итерационные процессы для решения сильноэллиптических уравнений получили развитие начиная с [8—11] и в дальнейшем исследовались в различных направлениях [2, 3, 12—32, 92].

Мы принимаем следующий способ изложения. Формулируем общие идеи экстраполяции Ричардсона и *MG*-алгоритмов для операторных уравнений в нормированном или гильбертовом пространстве [1, 27, 28, 33—38], снабдив их конкретными примерами. Это позволяет, с одной стороны, установить общие условия применимости методов, а с другой, показать возможности использования приведенных результатов для широкого круга вычислительных задач. Далее сосредоточим внимание на некоторых нетрадиционных вопросах, связанных с использованием последовательности сеток, расширяющих возможности этого класса методов. В частности, рассмотрены вопросы об экстраполяции для решений уравнения Лапласа, имеющих особенности в окрестности угловых точек области [39], а также об экстраполяции при помощи поворота сеточной области [40]. Приводятся примеры (теоретически мало исследованной) экстраполяции по параметру сингулярности для спектральной задачи с особой точкой на

бесконечности [25, 26]. Сформулированы достаточные условия для многопараметрического разложения погрешности [36]. Представлен более простой, по сравнению со стандартными MG -алгоритмами, метод решения сеточных уравнений эллиптического типа, в котором для подавления гладкой составляющей погрешности используется ее представление по степеням шага дискретизации [15]. Таким образом, объединяются различные аспекты алгоритмов на последовательности сеток. Рассмотрен отличающийся наглядностью подход для оценки эффективности одного класса MG -алгоритмов [41].

Приведем краткое содержание обзора. В разд. 1 рассмотрены вопросы обоснования экстраполяции Ричардсона для нелинейного операторного уравнения в нормированном пространстве. Рассмотрены одно- и многопараметрические формулы разложения погрешности приближенного решения, определенного на конечномерном пространстве [1, 36, 37].

В разд. 2 приводятся следствия для уравнения с сильно монотонным оператором, возникающим, например, при решении квазилинейных эллиптических уравнений магнитостатики, а также для задачи на собственные значения с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. В качестве примера рассмотрена спектральная задача для интегродифференциального оператора.

Раздел 3 посвящен описанию примеров численных расчетов, иллюстрирующих эффективность экстраполяции Ричардсона для уравнения Лапласа и квазилинейных уравнений дивергентного типа, для граничных интегральных уравнений теории потенциала и сингулярных интегральных уравнений Чу—Лоу, в задаче на собственные значения для квазипотенциальных интегральных уравнений. Изложен метод уточнения решений на основе минимизации специального функционала, аппроксимирующего погрешность для серии расчетных данных.

В разд. 4 обсуждаются вопросы экстраполяции Ричардсона для уравнения Лапласа в областях с угловыми точками. Наличие особенностей у решения в окрестности углов не позволяет построить регулярное разложение погрешности по степеням шага дискретизации.

Рассматривается специальное представление погрешности с коэффициентами, имеющими особенности в угловых точках. Иллюстрируется эффективность экстраполяции в подобласти, удаленной от углов [39].

В разд. 5 изучаются алгоритмы уточнения приближенных решений на последовательности сеток, получающихся поворотом на некоторый угол [40]. В качестве оператора, инвариантного относительно поворота, рассмотрен лапласиан в R^2 и R^3 , а также бигармонический оператор.

Раздел 6 посвящен описанию абстрактного многосеточного итерационного процесса в гильбертовом пространстве [28]. Это позволяет рассмотреть с общих позиций различные варианты MG -алгоритмов. Приводится пример для эллиптического уравнения.

Далее в разд. 7 обсуждаются варианты *MG*-алгоритмов для трех типов уравнений, отличающихся расположением спектра соответствующего оператора. Типичными представителями этих трех групп являются эллиптические уравнения, интегральные уравнения первого и второго рода.

Приводятся некоторые упрощенные варианты многосеточных алгоритмов [10, 12, 13, 15], в том числе метод, использующий регулярное разложение погрешности по степеням параметра дискретизации [15]. Рассмотрен один способ интегральной оценки коэффициента эффективности для класса многосеточных алгоритмов [41].

Настоящий обзор не претендует на полноту изложения материала. Кроме рассмотренных здесь вопросов, на наш взгляд, представляющий интерес, в частности, *MG*-итерационные процессы для нелинейных уравнений [3, 16, 17, 32] и для интегральных уравнений первого и второго рода [30, 31, 42], некоторые модификации многосеточных алгоритмов для решения эллиптических уравнений [23, 42—45], алгоритмы экстраполяции по параметру регуляризации в некорректных задачах [4], а также для эволюционных уравнений, вопросы регулярного разложения погрешности для интегральных уравнений первого рода, в том числе с сингулярными ядрами [46]. К числу задач, иллюстрирующих эффективность *MG*-методов, наряду с приведенными в обзоре, можно добавить алгоритмы решения граничных интегральных уравнений на специальных поверхностях, а также алгоритмы для решения двумерных и пространственных задач магнитостатики комбинированным методом [47—50]. Интересны результаты по экстраполяции собственных значений относительно параметра, определяемого числом базисных функций для вариационных расчетов уровней энергии μ -мезомолекул [51]. Об эффективности *MG*-итерационных процессов свидетельствуют результаты по решению частичной обобщенной алгебраической проблемы на собственные значения [52].

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Экстраполяция Ричардсона для уточнения приближенных решений основана на формулах асимптотического разложения погрешности конечноразностных методов. Для общего случая операторных уравнений такие формулы рассматривались при различных предположениях [1, 33—37]. Достаточные условия разложимости погрешности по степеням шага дискретизации в линейном случае даны в [1]. Далее рассмотрим регулярное представление погрешности приближенного решения нелинейного операторного уравнения при одном [37] (однопараметрические формулы) или нескольких [36] (многопараметрические формулы) параметрах дискретизации. Отметим, что однопараметрические формулы получены лишь в предположении сходимости приближенного решения.

Рассмотрим задачу о приближенном решении уравнения

$$Au = y; \quad u \in E_1, \quad y \in E_2, \quad (1)$$

где $E_i, i = 1, 2$ — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_i$, а нелинейный оператор $A: \Omega_1 \subset E_1 \rightarrow E_2$. Пусть для всех $n \geq n_0$ задана последовательность операторов $P_{in}, i = 1, 2$, проектирующих E_i на конечномерные подпространства E_{in} , так что

$$\dim E_{in} < \dim E_{in'}, \quad n < n'; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{in}u\|_{in} = \|u\|_i, \quad u \in E_i.$$

Рассмотрим уравнение

$$A_n u_n = P_{2n} y, \quad A_n: E_{1n} \rightarrow E_{2n}, \quad (2)$$

аппроксимирующее уравнение (1). Вектор u_n является приближенным решением уравнения (1).

Пусть в пространствах E_i заданы линейные множества $B_{ki} \subset E_i, i = 1, 2$, так что $k = \overline{0, N}$ и $B_{0i} \subset B_{1i} \subset \dots \subset B_{Ni} = E_i$. Множества B_{ki} определяются классом разрешимости задачи (1): если для $y \in B_{k2}$ существует решение u уравнения (1), то $u \in B_{k1}$ и, кроме того, $A(B_{k1}) \subset B_{k2}, k = \overline{0, N}$. Аналогичные соотношения справедливы и для производных Фреше порядка l оператора A : если $v_{kj} \in B_{kj1}, j = \overline{1, l}, l = \overline{1, N}$, то

$$A^{(l)}(u)(v_{k_1}, \dots, v_{k_l}) \in B_{k_m 2}, \quad k_m = \max_{1 \leq i \leq l} k_i.$$

Наша цель — получить разложение погрешности приближенного решения

$$\Delta_n = P_{1n} u - u_n \quad (3)$$

по степеням n^{-1} :

$$\Delta_n = P_{1n} \left(\sum_{k=1}^N c_k n^{-k} \right) + \Omega_n, \quad \|\Omega_n\|_{1n} = o(n^{-N}), \quad (4)$$

где элементы

$$c_k(u) \in B_{k1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad u \in B_{01}$$

и не зависят от n .

Примем следующие гипотезы (H) относительно операторов A и A_n :

H1. Уравнения (1), (2) имеют решения $u \in B_{01}, u_n \in E_{1n}$ и имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{1n} u - u_n\|_{1n} = 0. \quad (5)$$

H2. Существует $R > 0$, такое, что операторы A и A_n имеют равномерно непрерывные производные Фреше до порядка N в окрестностях $S_R = \{x: \|x - u\| \leq R\}, S_R^n = \{x_n: \|x_n - u_n\| \leq R\}$ и

существуют ограниченные обратные операторы

$$\|A'(u)^{-1}\| \leq M_1; \quad \|A'_n(P_{1n}u)^{-1}\| \leq M_1$$

для всех $n \geq n_0$. Из равенства

$$A'(u)v = g, \quad g \in B_{k_2} \quad (6)$$

следует, что $v \in B_{k_1}$.

Н3. Справедливо разложение

$$P_{2n}Au = A_n P_{1n}u + P_{2n} \left(\sum_{k=1}^N a_k(u) n^{-k} \right) + \Omega_{n,0}, \quad (7)$$

где элементы $a_k(u) \in B_{k_2}$, $k = \overline{1, N}$, не зависят от n . Элемент $\Omega_{n,0}$ удовлетворяет соотношению

$$\|\Omega_{n,0}\|_{2n} = o(n^{-N}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Н4. Для производных $A^{(l)}(u)$ и $A_n^{(l)}(P_{1n}u)$, $l = \overline{1, N}$, при заданных $v_{k_1}, \dots, v_{k_l} \in B_{k_{i1}}$, $i = \overline{1, N}$, справедливо представление

$$\begin{aligned} P_{2n}A^{(l)}(u)(v_{k_1}, \dots, v_{k_l}) - A_n^{(l)}(P_{1n}u)(P_{1n}v_{k_1}, \dots, P_{1n}v_{k_l}) = \\ = P_{2n} \left(\sum_{|\alpha|=1}^{\beta_l} A_{\alpha,l}(v_{k_1}, \dots, v_{k_l}) n^{-|\alpha|} \right) + \Omega_{n,\alpha_l}(v_{k_1}, \dots, v_{k_l}); \quad (8) \end{aligned}$$

$$\|\Omega_{n,\alpha_l}\|_{2n} = o(n^{|\alpha_l| - N}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь α — мультииндекс, т.е. $\alpha = (i_1, \dots, i_l)$. Если $\alpha_l = (k_1, \dots, k_l)$, то $\beta_l = (N - k_1, \dots, N - k_l)$ и равенство двух индексов рассматривается покомпонентно. Также полагаем $|\alpha| = i_1 + \dots + i_l$, $\|\alpha\| = \max_{1 \leq p \leq l} |i_p|$. Ограниченные полилинейные формы $A_{\alpha,l}$ имеют области определения

$$A_{\alpha,l} : (B_{k_1} \times \dots \times B_{k_l}) \rightarrow B_{\|\alpha+\alpha_l\|,2}$$

и не зависят от n .

В частности, при $l = 1$, $v \in B_{k_1}$, $k = \overline{1, N}$, разложение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} P_{2n}A'(u)v - A'_n(P_{1n}u)P_{1n}v = \\ = P_{2n} \left(\sum_{i=1}^{N-k} A_{i,1}(u) v n^{-i} \right) + \Omega_{n,1}; \\ \|\Omega_{n,1}\|_{2n} = o(n^{-N+k}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где непрерывные линейные операторы $A_{i,1}$ действуют $A_{i,1} : B_{k_1} \rightarrow B_{(k+i),2}$ и не зависят от n и v .

Разложение вида (4) устанавливает

Теорема 1. Пусть для уравнений (1), (2) выполнены условия Н1 — Н4. Тогда справедливо разложение (4).

Опуская полное доказательство [37], приведем лишь систему уравнений для коэффициентов $c_h(u)$ и Ω_n :

$$\left. \begin{aligned}
 &A'(u) c_1 = a_1, \\
 &A'(u) c_2 + A_{1,1}(u) c_1 + \frac{1}{2} A''(u) (c_1, c_1) = a_2, \\
 &\dots \dots \dots \\
 &A'(u) c_m + \sum_{i+h=m} A_{i,1}(u) c_h + \sum_{l=2}^m \frac{1}{l!} \left\{ \sum_{|\alpha_l|=m} A^{(l)}(u) \times \right. \\
 &\quad \times (c_{h_1}, \dots, c_{h_l}) - \sum_{|\alpha+\alpha_l|=m} A_{\alpha,l}(c_{h_1}, \dots, c_{h_l}) \left. \right\} = a_m, \\
 &m = \overline{1, N}, \quad a_m \in B_{m2}, \\
 &A'_n(P_{1n}u) \Omega_n + n^{-1}G(c_1, \dots, c_N) \Omega_n + F(\Omega_n) = \Phi,
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где G — линейный ограниченный оператор; $\|F(x)\|_{2n} = o(\|x\|_{1n})$, $\|\Phi\|_{2n} = o(n^{-N})$. Разложение (4) определяется единственным параметром дискретизации n^{-1} , который обычно можно интерпретировать, как характерное значение шага h по пространственным переменным. Рассмотрим многопараметрическое разложение погрешности [36]. Разложение, о котором пойдет речь, можно назвать однородным, так как параметры дискретизации участвуют в нем в виде однородных полиномов.

Пусть задано число $0 < H < 1$. Обозначим H_0 множество векторов $h \in R^\sigma$, для которых $h_i \in (0, H_0)$, $i = \overline{1, \sigma}$, где σ — целое число. На множестве H определим покомпонентное отношение упорядоченности: $h < h'$, если $h_i \leq h'_i$ для $i = \overline{1, \sigma}$ и существует i , что $h_i < h'_i$. Норму для $h \in H$ определим как $\|h\| = \max_i \{h_i\}$.

Пусть некоторой монотонно стремящейся к нулю последовательности $\{h\} \in H$ поставлена в соответствие пара конечномерных пространств E_{ih} с нормами $\|\cdot\|_{ih}$, $i = 1, 2$, и пара проектов $P_{ih}: E_i \rightarrow E_{ih}$, так что

$$\begin{aligned}
 \dim E_{ih} < \dim E_{ih'} &\Leftrightarrow h' < h, \\
 \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|P_{ih}u\|_{ih} &= \|u\|_i, \quad u \in E_i.
 \end{aligned}$$

Предположим, что для каждого $h \in \{h\}$ построен оператор $T_{h\sigma}: E_{1h} \rightarrow E_{2h}$, аппроксимирующий A , а также соответствующее уравнение для приближенного решения

$$T_{h\sigma}u_h - P_{2h}u = T_{h\sigma}u_h = 0, \quad u_h \in E_{1h}. \quad (10)$$

Предположим, что существует единственное решение u_h^* уравнения (10) для всех $h \in \{h\}$ и для погрешности метода $e_h = u_h^* - P_{1h}u \in E_{1h}$

справедлива оценка

$$\|e_h\|_{1h} = O(\|h\|^\alpha), \quad \|h\| \rightarrow 0, \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

Чтобы отличить элементы множества I неотрицательных мультииндексов $i = \{i_1, \dots, i_\sigma\} \in I$, $i_j \geq 0$, от целых чисел, примем для них обозначения $[i]$. Величина $|i|$ определена ранее. Для $[i] \in I$ и $h \in H$ обозначим $h^{\otimes i}$ произведение $h_1^{i_1} \dots h_\sigma^{i_\sigma}$, так что имеем

$$(h^{\otimes i})^\nu = (h_1^{i_1} \dots h_\sigma^{i_\sigma})^\nu = h_1^{i_1 \nu} \dots h_\sigma^{i_\sigma \nu}.$$

Пусть существуют числа γ , λ ($\gamma > 0$, $0 < \lambda \leq 1$), целые числа n , m ($n \geq m \geq 1$) и элементы $\omega_{[j]} \in E_1$, не зависящие от h , что выполняется:

$$\|e_h - P_{1h} \sum_{i=m}^n \sum_{|j|=i} (h^{\otimes j})^\nu \omega_{[j]}\|_{1h} = O(\|h\|^\mu), \quad \mu = n + \lambda. \quad (12)$$

По определению, выражение (12) задает σ -параметрическое разложение погрешности порядка n . Примем следующие гипотезы:

Н1'. Существуют числа γ , λ ($\gamma > 0$, $0 < \lambda \leq 1$), целые числа n , m ($n \geq m \geq 1$), множества $\Omega_2^i \subset E_2$, $i = m, n$, $\Omega_2^i \subset \Omega_2^{i+1}$ и операторы $F_{[j]}: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2^{|j|}$, $|j| = m, n$, не зависящие от $h \in H$, такие, что для $u \in \Omega_1$ имеем

$$\|T_{h_\sigma}(P_{1h}u) - P_{2h}[Au - y + \sum_{i=m}^n \sum_{|j|=i} (h^{\otimes j})^\nu F_{[j]}(u)]\|_{2h} = O(\|h\|^{(n+\lambda)\nu}).$$

Н2'. T_{h_σ} дифференцируем по Фреше до порядка ν , где $m(\nu + 1) \geq n + 1$ и для $v_h, u_h \in E_{1h}$ имеем

$$\|T_{h_\sigma}(v_h) - T_{h_\sigma}(u_h) - \sum_{k=1}^{\nu} a_k T_{h_\sigma}^{(k)}(u_h)(v_h - u_h)^k\|_{2h} = O(\|v_h - u_h\|_{1h}^{\nu+1}),$$

где a_k — постоянные, а (z^k) означает (z, \dots, z) k раз.

Н3'. Существует линейный оператор $B(u): D(B) \subset E_1 \rightarrow E_2$, зависящий от $u \in \Omega_1$, который аппроксимируется оператором $T'_{h_\sigma}(P_{1h}u)$ на $D(B)$, т. е. для $\omega \in D(B)$ имеем

$$\|T'_{h_\sigma}(P_{1h}u) P_{1h}\omega - P_{2h}B(u)\omega\|_{2h} \rightarrow 0, \quad \|h\| \rightarrow 0,$$

и каждое уравнение $B(u)\omega = g \in \Omega_2^i$, $i = m, n$, имеет единственное решение $\omega \in \Omega_1^i \subset D(B)$, $\Omega_1^i \subset \Omega_1^{i+1}$.

Н4'. Существуют операторы $G_{[j]}: \Omega_1 \times \Omega_1^i \rightarrow \Omega_2^{i+|j|}$, $|j| = \overline{1, n-i}$, не зависящие от $h \in H$, такие, что для $u \in \Omega_1$, $\omega \in \Omega_1^i$, $i = m, n$ имеем

$$\begin{aligned} \|T'_{h_\sigma}(P_{1h}u) P_{1h}\omega - P_{2h}[B(u)\omega + \sum_{i=1}^{n-i} \sum_{|j|=i} (h^{\otimes j})^\nu G_{[j]}(u, \omega)]\|_{2h} = \\ = O(\|h\|^{(n-i+\lambda)\nu}); \quad G_{[0]} = 0. \end{aligned}$$

Н5. Существуют операторы

$$G_{[j]}^k: \Omega_1 \times \Omega_1^{i_1} \times \dots \times \Omega_1^{i_k} \rightarrow \Omega^{i_1 + \dots + i_k + |j|},$$

$k = \overline{2, \nu}$, $i_l = \overline{m, n}$, $|j| = 0, \overline{n - km}$, не зависящие от $h \in H$, так что для $u \in \Omega_1$, $\omega_{[s]} \in \Omega_1^{s!}$, $|s| = m$, n имеем при $\alpha = (n - km + \lambda) \gamma$:

$$\|T_{h\sigma}^{(k)}(P_{1h}u)(P_{1h}\omega_{[s_1]}, \dots, P_{1h}\omega_{[s_k]}) - P_{2h} \sum_{\mu=0}^{n-km} \sum_{|j|=\mu} (h^{\otimes j})^\nu \times \\ \times G_{[j]}^k(u, \omega_{[s_1]}, \dots, \omega_{[s_k]})\|_{2h} = O(\|h\|^\alpha).$$

Сформулируем условия существования разложения при выполнении гипотез Н1' — Н5'.

Теорема 2 [36]. Предположим, что:

- 1) уравнения (1), (9) имеют единственные решения u^* и u_h^* ;
- 2) $\| [T_{h\sigma}^{(k)}(P_{1h}u^*)]^{-1} \| \leq Mh^{-p\gamma}$, где константы $M > 0$, $0 \leq p \leq m$ не зависят от $h \in H$;
- 3) справедлива оценка (14) погрешности e_h при $\alpha = q\gamma$, $q > p$. Тогда существуют элементы $\omega_{[j]} \in E_1$, $|j| = \overline{m, n}$, не зависящие от $h \in H$, такие, что выполнено разложение (12) при $\mu = n + \lambda - p$.

Замечание 1. Согласно [36], результаты теоремы 2 справедливы лишь при выполнении условия (1), если существуют константы c и p ($c > 0$, $p \geq 0$), не зависящие от $h \in H$, такие что для всех $v_h, u_h \in E_{1h}$ выполнено

$$\|T_{h\sigma}(v_h) - T_{h\sigma}(u_h)\|_{2h} \geq ch^{p\gamma} \|v_h - u_h\|_{1h}. \tag{13}$$

Численный пример с использованием двухпараметрического разложения приводится в [36].

Вопросы практического использования разложений (4), (12) для повышения точности приближенных решений u_h рассмотрим в разд. 3.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ

Рассмотрим уравнение (1) для сильно монотонного оператора A [37]. Такие задачи характерны при решении линейных и квазилинейных уравнений эллиптического типа, возникающих при численном моделировании задач магнитостатики, нелинейной теории упругости, в теории ньютоновских жидкостей, в задачах стационарной диффузии и стационарной теплопроводности [53].

Напомним, что отображение $A \in (E_1 \rightarrow E_1^*)$ называется сильно монотонным [53], если для всяких $u, v \in E_1$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2, \quad m > 0. \tag{14}$$

Здесь $\langle y, x \rangle$ есть значение линейного функционала $y \in E_1^*$ на векторе $x \in E_1$.

Теорема 3 [37]. Пусть отображения $A \in (E_1 \rightarrow E_1^*)$, $A_n \in (E_{1n} \rightarrow E_{1n})$ сильно монотонны и N раз непрерывно дифференцируемы по Фреше в окрестностях элементов u^* и $P_{1n}u^*$. Если выполнено условие (6), а также гипотезы НЗ и Н4, то справедливо разложение (4).

Доказательство сводится [37] к проверке условий Н1, Н2 теоремы 1. Существование и единственность решений следуют из общих теорем о монотонных операторах [53], сходимость есть следствие соотношения

$$A_n P_{1n} u^* - A_n u_n^* = P_{2n} \left(\sum_{k=1}^N a_k(u^*) n^{-k} \right) + \Omega_{n,0},$$

вытекающего из НЗ. Кроме того, из (14) следует [37], что производные $A'(u^*)$ и $A'_n(P_{1n}u^*)$ являются сильно положительными, т. е.

$$\langle A'(u^*) \zeta, \zeta \rangle \geq m_1 \|\zeta\|^2, \quad m_1 > 0,$$

а потому имеют равномерно ограниченные обратные операторы. Завершаем доказательство применением теоремы 1.

Рассмотрим задачу на собственные значения для линейного самосопряженного оператора $A = A^*$ в вещественном гильбертовом пространстве H , $A \in (H \rightarrow H)$ [38]. Как известно, эта задача сводится уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\Phi(z) \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax - \lambda x \\ (x, x) - 1 \end{array} \right\} = 0; \quad z = (x, \lambda) \in H^1 = H \oplus R, \quad (15)$$

где $\Phi \in (H^1 \rightarrow H^1)$, со скалярным произведением

$$(z_1, z_2) = (x_1, x_2) + \lambda_1 \lambda_2.$$

Две первые производные Фреше оператора (15) имеют вид

$$\Phi'(z_0) z = \left\{ \begin{array}{l} Ax - \lambda_0 x - \lambda x_0 \\ (x_0, x) \end{array} \right\}, \quad z_0 = (x_0, \lambda_0);$$

$$\Phi''(z_0) (z_1, z_2) = \left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) \\ (x_1, x_2) \end{array} \right\},$$

производные порядка $l > 2$ равны нулю. Пусть задан проектор $P_n: H^1 \rightarrow H_n^1 = H_n \oplus R$ и уравнение (15) заменяется алгебраической проблемой на собственные значения:

$$\Phi_n(z_n) \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_n x_n - \lambda_n x_n \\ (x_n, x_n)_{H_n} - 1 \end{array} \right\} = 0, \quad A_n = A_n^* \in (H_n \rightarrow H_n). \quad (16)$$

Аналогично разд. 1 определим классы разрешимости задачи

$$\Phi'(z^*) z = f; \quad f = (g, \mu), \quad z = (x, \lambda).$$

Если $g \in B_{k2}$, то $x \in B_{k1}$, $A(B_{k1}) \in B_{k2}$, $B_{ki} \in B_{k+1,i} \subset H$, $k = 0, N-1$, причем если (x^*, λ^*) решение (15), то $x^* \in B_{01}$. Справедлива

Теорема 4 [38]. Пусть $z^* = (x^*, \lambda^*)$ есть решение (15) и λ^* одно-
кратное, изолированное собственное число, $x^* \in B_{01}$ и для некоторо-
го решения z_n^* задачи (16) выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n z^* - z_n^*\|_{H_n^1} = 0. \tag{17}$$

Пусть также для $n \geq n_0$

$$\|\Phi'_n (P_n z^*)^{-1}\|_{H_n^1} \leq c = O(1), \quad n \rightarrow \infty \tag{18}$$

и существуют разложения

1) $P_n A x - A_n P_n x = P_n \left(\sum_{k=1}^{N-p} a_k(x) n^{-k} \right) + \xi_n, \quad \|\xi_n\| = o(n^{-N+p}),$
для $x \in B_{p1}, a_k \in B_{k+p,2}, a_k$ не зависят от n ;

2) $(y, x) - (P_n y, P_n x)_{H_n} = \sum_{k=1}^{N-p} \mu_k n^{-k} + \omega_n, \quad |\omega_n| = o(n^{-N+p})$

для $x \in B_{p1}, y \in B_{q1}, q \leq p, \mu_k$ не зависят от n . Тогда имеет место
представление (4), где $c_k(z^*) \in B_{k1} \oplus R$.

Доказательство также основано на применении теоремы 1. Суще-
ственной здесь является известная оценка [54]

$$\|\Phi'(z^*)^{-1}\| \leq \max(1, m^{-1}); \quad m = \inf_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \lambda^*} |\lambda^* - \lambda|,$$

где $\sigma(A)$ обозначает здесь и далее спектр оператора A .

Замечание 2. Если оператор A является вполне непрерывным,
то при некоторых требованиях к пространствам H_n условия (17),
(18) теоремы 4 можно опустить. Справедливость этих условий уста-
навливается аналогично тому, как это проводится для задачи с инте-
гриродифференциальным оператором [38].

$$-y'' + q(x)y + \int_0^1 K(x, \xi)y(\xi) d\xi = \lambda y; \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = y(1), \quad \int_0^1 y^2(x) dx = 1, \quad y'(0) > 0. \tag{19}$$

Сформулированные теоремы 1—4 в принципе дают возможность
получать разложения погрешности для широкого круга краевых
и спектральных задач математической физики. При этом наряду
с основным уравнением (1) необходимо построить последовательность
аппроксимирующих уравнений (2) в конечномерных пространствах
 $E_{in}, i = 1, 2$, с нужными свойствами. Операторы A и A_n должны
иметь необходимые свойства гладкости, аппроксимации и невырож-
денности производных Фреше, а также обеспечивать локальную
единственность решений уравнений (1), (2), что и сформулировано
в гипотезах Н1 — Н4. Общие теоремы 1, 2 можно конкретизировать

для специальных классов задач, как это делается, например, в теоремах 3, 4.

Многочисленные примеры обоснования разложений вида (4) или (12) можно найти в [1, 14, 33—36, 38, 40, 55].

В ряде задач (краевые задачи для неоднородных эллиптических уравнений, задачи на собственные значения для дифференциальных и интегродифференциальных операторов, интегральные уравнения с особенностями и интегральные уравнения первого рода) строгое обоснование этих разложений связано с характерными техническими трудностями и требует привлечения достаточно сложного аппарата теории численных методов. Поэтому в разд. 3 мы рассмотрим вопросы использования разложений (4), (12) для повышения точности приближенных решений, опуская обоснование этих разложений, которое можно найти в приведенной библиографии.

Далее рассмотрим лишь один пример полного обоснования разложения (4) для задачи (19) [38], в котором используются некоторые типичные конструкции теории разностных схем. Отметим, что разностная задача Штурма — Лиувилля рассматривалась в [56], а регулярное разложение погрешности в этой задаче получено в [1]. Пусть

$$q(x) \geq 0, q \in C^N[0, 1], K(x, \xi) \in C^N([0, 1] \times [0, 1]),$$

$$K(x, \xi) = K(\xi, x), \int_0^1 \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) y(x) d\xi dx \geq 0.$$

Обозначим $Sy = \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi$. Оператор S ограничен в каждом

из пространств $L_2[0, 1]$ и $\dot{W}_2^1[0, 1]$, симметричен $S = S^*$ и положительно определен в L_2 , т.е. $(Sy, y) \geq 0$.

Сформулируем операторное уравнение вида (15) в пространстве $H_1 = \dot{W}_2^1 \oplus R$, соответствующее задаче (19). Согласно [57], назовем обобщенным решением из \dot{W}_2^1 задачи (19) нормированную функцию $y(x) \in \dot{W}_2^1$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_0^1 (y_x \eta_x + qy\eta + Sy \cdot \eta) dx = \lambda \int_0^1 y\eta dx, \forall \eta \in \dot{W}_2^1. \quad (20)$$

Вводя в \dot{W}_2^1 новое скалярное произведение

$$[y, v] = \int_0^1 (y_x v_x + qyv + Sy \cdot v) dx, \quad \|y\|_1^2 = [y, y],$$

запишем (20) в виде

$$[y, \eta] = \lambda (y, \eta). \quad (21)$$

Учитывая оценку $|(y, \eta)| \leq c \|y\|_1 \|\eta\|_1$ по теореме Рисса равенство (21) представим в виде $[y, \eta] = \lambda [Ay, \eta]$, $\forall \eta \in \dot{W}_2^1$, причем аналогично [57] можно показать, что $A \in (\dot{W}_2^1 \rightarrow \dot{W}_2^1)$ вполне непрерывен в \dot{W}_2^1 . В итоге приходим к операторному уравнению

$$Ay - \lambda^{-1}y = 0, \quad y \in \dot{W}_2^1, \quad A = A^*. \tag{22}$$

Для аппроксимации (22) построим равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \bar{0}, n, h = n^{-1}\}$. Используем стандартные обозначения [7] для разностных производных, скалярных произведений и сеточных норм на $\bar{\omega}_h$:

$$y_x = (y_{i+1} - y_i) h^{-1}, \quad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1}) h^{-1}, \quad (y, v)_h = \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i h,$$

$$[y, v]_h = \sum_{i=0}^n y_i v_i h, \quad \|y\|^2 = [y, y]_h,$$

$$\|y\|_+^2 = [y_x, y_x]_h, \quad \|y\|_{+1}^2 = \|y\|^2 + \|y\|_+^2.$$

Пространство сеточных функций $y_h = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$, $y_0 = y_n = 0$ на $\bar{\omega}_h$ со скалярным произведением $[y, v]_h$ обозначим B , а для $\|\cdot\|_{+1}$ через B_{+1} . Аппроксимируем интегральный оператор Sy с помощью формулы трапеций

$$S_h y_h = \sum_{i=1}^{n-1} K(x, \xi_i) y_i h + \frac{1}{2} (K(x, 0) y_0 + K(x, 1) y_n) h, \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

В качестве аппроксимирующего уравнения (16) можно выбрать

$$A_h y_h \equiv -[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] h^{-2} + q_i y_i + [S_h y]_i = \lambda_h y_i; \tag{23}$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad y_0 = y_n = 0, \quad (y_h, y_h)_h - 1 = 0.$$

Используя известное разложение погрешности [58] для квадратурной формулы трапеций, для $f(x) \in C^{2p} [0, 1]$, $2p \leq N$ получаем разложение

$$S_h f - P_n S f = P_n \left(\sum_{k=1}^p h^{2k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \bar{B}_k \int_0^1 [K(x, \xi) f(\xi)]_{\xi}^{(2k)} d\xi \right) + O(h^{2p}), \tag{24}$$

где \bar{B}_k — числа Бернулли. Определим пространства $B_{k1} = C^{N-k} [0, 1]$, $B_{k2} = C^{N-k-2} [0, 1]$, тогда, используя (24), получаем разложения 1), 2) теоремы 4 для оператора A_h , заданного в (23). Проверим условия (17), (18). Пусть $z^* = (x^*, \lambda^*)$ — решение задачи (19), $\lambda^* > 0$. Сначала докажем, что $\Phi'_n (P_n z^*)^{-1}$ существует при достаточно больших n , т. е. уравнение $\Phi'_n (P_n z^*) z = 0$ имеет только

нулевое решение. Пусть это не так, и для всех n существуют сеточная функция \bar{y} и число λ_n , являющиеся решением системы

$$\left. \begin{aligned} -[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}]h^{-2} + q_i y_i + [S_h \bar{y}]_i - \lambda^* y_i - \lambda_n [P_n x^*]_i &= 0; \\ y_0 = y_n = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ (P_n x^*, \bar{y}) = 0, \quad (\bar{y}, \bar{y}) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Умножив первое из равенств (25) скалярно на \bar{y} , получим

$$\|\bar{y}_x\|^2 + ((P_n q + S_h) \bar{y}, \bar{y}) = \lambda^*,$$

т. е. $\|\bar{y}_x\|^2 \leq \lambda^*$. Рассмотрим кусочно-линейное восполнение $\bar{y}(x)$ функции \bar{y} . Так как $\|\bar{y}(x)\|_{\dot{W}_2^1}^2 \leq \lambda^* + 1$, то $\bar{y}(x) \rightarrow y_0(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в C -метрике, откуда следует, что $(y_0(x), x^*) = 0$, а $(y_0(x), y_0(x)) = 1$. Кроме того, учитывая симметрию A_h и условия 1), 2) теоремы 4, из (25) легко получить $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. Далее, так как

$(\bar{y}, \bar{y}) = \lambda^*$, то $\bar{A}\bar{y} \rightarrow \bar{z} \in \dot{W}_2^1$ в \dot{W}_2^1 -метрике в силу компактности оператора A в \dot{W}_2^1 . С учетом этого обстоятельства можно показать, что $\bar{y}(x) \rightarrow y_0(x)$ в \dot{W}_2^1 . Таким образом, существует обобщенное решение $y_0(x)$ [в нашем случае оно удовлетворяет (19)] следующей задачи:

$$y_0 = \lambda^* A y_0, \quad y_0 \in \dot{W}_2^1, \quad \|y_0\|_{L_2} = 1, \quad (x^*, y_0) = 0,$$

что противоречит однозначности собственного числа λ^* . Аналогичными рассуждениями устанавливается оценка (18).

Докажем условие (17), т. е. при достаточно больших n существует решение $(\lambda_n^*, y_n^*) = z_n^*$ задачи (23), такое, что $\|P_n z^* - z_n^*\|_{H_h^1} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Уравнение (23) рассмотрим как нелинейное операторное уравнение $\Phi_n(z_n) = 0$ и применим теорему о сходимости метода Ньютона. Для начального приближения $z_n^0 = (\lambda^*, P_n x^*)$ согласно условию 1) теоремы 4 и оценке (18) выполнены неравенства

$$\|\Phi_n(z_n^0)\| \leq ch^2, \quad \|\Phi_n'(z_n^0)^{-1}\|_1 \leq c_1.$$

Так как $\|\Phi_n''\| \leq 1$, то при условии $\varepsilon = ch^2 c_1 < 2^{-1}$ метод Ньютона — Канторовича сходится к точному решению $z_n^* = (\lambda_n^*, y_n^*)$ от начального приближения z_n^0 [59]. При этом справедлива оценка

$$\|z_n^* - z_n^0\|_1 \leq (1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}) \varepsilon^{-1} c_1 ch^2 \leq Mh^2,$$

устанавливающая, в частности, условие (17). Все условия теоремы 4 проверены.

Численный пример экстраполяции Ричардсона для задачи вида (19) приводится в [38].

3. ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И РИЧАРДСОНА

Пусть существует последовательность пространств E_{1,n_k} , $k = 1, N + 1$, и соответствующая им последовательность параметров дискретизации $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{N+1}$, что выполнены условия теоремы 1. Предположим для простоты, что существует непустое пересечение $E_{10} = \bigcap_{k=1}^{N+1} E_{1,n_k}$, так что разложение (4) для каждого n_k можно рассматривать на E_{10} , после действия проектора $P_{0,n_k}: E_{1,n_k} \rightarrow E_{10}$. Составим линейную комбинацию

$$u^0 = \sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k P_{0,n_k} u_{n_k}, \quad u^0 \in E_{10}, \tag{26}$$

где числа γ_k удовлетворяют системе

$$\sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k = 1; \quad \sum_{k=1}^{N+1} \gamma_k n_k^{-j} = 0, \quad j = \overline{1, N}. \tag{27}$$

Так как все n_k различны, то, согласно [1], система (27) имеет единственное решение. Построенное решение u^0 имеет порядок точности $o(n_1^{-N})$, который оказывается более высоким, по сравнению с каждым u_{n_k} . Аналогично теореме 3.1 из [1] справедлива.

Теорема 5. Пусть при сформулированных предположениях выполнено неравенство

$$n_{k+1} n_k^{-1} \geq 1 + d_1, \quad k = \overline{1, N},$$

с константой $d_1 > 0$, не зависящей от n_k . Тогда на множестве E_{10} для функции u^0 из (26) справедлива оценка

$$\| u^0 - P_0 u^* \| = o(n_1^{-N}),$$

где P_0 — оператор проектирования $P_0: E_1 \rightarrow E_{10}$.

Наиболее удобные способы выбора последовательностей n_k есть:

а) $n_k = n_0 k, k = \overline{1, N + 1}, d_1 = N^{-1}$;

б) $n_k = n_0 \cdot 2^{k-1}, k = \overline{1, N + 1}$ с константой $d_1 = 1$.

Замечание 3. Приведенные разложения, очевидно, можно рассматривать относительно параметров дискретизации $h_k = D \cdot n_k^{-1}$, соответствующих характерным размерам шага сеточной области.

Проиллюстрируем эффективность экстраполяции вида (26), (27) на конкретных примерах.

1. Рассмотрим в L -образной области $G \subset R^2$ краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона [39]:

$$\Delta u = f, \quad (x, y) \in G; \quad u(\xi) = g, \quad \xi \in \partial G = \Gamma, \tag{28}$$

где область $G = G_1 \cup G_2, G_1 = \{(x, y): |x| \leq a, 0 \leq y \leq a\}, G_2 = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, -a \leq y \leq 0\}, a > 0$, функции f и g достаточно гладкие и гарантируют выполнение условий теоремы 1 для используемой дискретизации при некотором N . Отметим, что построение

классов разрешимости B_{ki} , $i = 1, 2$, для задачи (28) осложняется присутствием угловых точек области G (порождающих особенности у решений), что приводит к дополнительным условиям согласования весьма сложного вида [1, 39, 55]. Более подробно мы остановимся на этом вопросе в разд. 4.

Для решения уравнения (28) в области G построим последовательность квадратных сеток $\{\omega_{h_k}\}_{k=1}^M$ с шагами $h_k, h_{k+1} = 0,5h_k, k = \overline{1, M}$, $h_1 = an^{-1}_0$, где $\omega_{h_1} = \{(x_i, y_j) \in \overline{G}, x_i = ih_1, |i| \leq n_0, y_j = jh_1, |j| \leq n_0\}$. На соответствующем множестве индексов $I_{G,k}$ рассмотрим сеточную функцию $u_h = \{u_{ij}\}, (i, j) \in I_{G,k}$ и вектор $\{f_{ij}\}, f_{ij} = f(x_i, y_j)$. Границу сеточной области обозначим Γ_{h_k} . Для каждого $h_k (=h)$ рассмотрим пятиточечную разностную схему, аппроксимирующую уравнение (28):

$$\Delta_h u_h \equiv \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} = f_{ij}, \quad (29)$$

$$(i, j) \in I_{G,k}; u_{ij} = g(\xi), \xi = (x_i, y_j) \in \Gamma_h,$$

где оператор Δ_h определяется лишь во внутренних точках сеточной области. Известно, что при соответствующей гладкости решения u^* задачи (28) погрешность u_h разлагается лишь по четным степеням шага h : $u_h = u^* + \sum_{n=1}^{N_0} c_n h^{2n} + o(h^{2N_0}), (x, y) \in \omega_h$. Обозначим

$u_{1,2}, \dots, m$ приближение, полученное экстраполяцией по формуле (26) из $u_{h_1}, u_{h_2}, \dots, u_{h_M}$, а $\varepsilon_{1,2}, \dots, m$ — погрешность в некоторой точке P сетки ω_1 для экстраполированного решения: $\varepsilon_{1,2}, \dots, m = u^*(P) - u_{1,2}, \dots, m(P)$. В табл. 1 приводятся погрешности для

Таблица 1. Эффективность экстраполяции Ричардсона для уравнения (28)

Задача	h	P	ε_h	$\varepsilon_{h/2}$	$\varepsilon_{h/4}$	$\varepsilon_{h/8}$	$\varepsilon_{1,2}$	$\varepsilon_{1,2,3}$	$\varepsilon_{1,2,3,4}$
1	1/4	1/4	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$
	1/8	-1/8	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-5}$	—	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	—
	1/16	-1/16	$5,4 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	—	—	$7,6 \cdot 10^{-8}$	—	—
	1/4	0; 0,25	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$
2	1/8	0,125	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$	—	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^{-7}$	—
	1/16	0,0625	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	—	—	$2,8 \cdot 10^{-7}$	—	—
	1/4	0,25	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$
3	1/8	0,125	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	—	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^{-4}$	—
	1/16	0,0625	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	—	—	$2,5 \cdot 10^{-3}$	—	—
4	1/3	—	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$9,4 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$

трех задач вида (28) со следующими данными: задача 1) — $u^* = \sin \pi x \sin \pi y$, $f = -2\pi^2 u^*(x, y)$; задача 2) — $u^* = \exp(x + y)$, $f = 2 \cdot u^*(x, y)$; задача 3) — $u^* = (x^2 + y^2)^{1/3} \sin\left(\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$, $f = 0$. Во всех случаях полагали $a = 0,5$; $h = 0,25$; P — координаты точки измерения погрешности.

Ухудшение эффекта от экстраполяции в задаче 3) объясняется особенностью решения [порядка $r^{2/3}$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$] в окрестности угловой точки $x = y = 0$. Приведенные результаты свидетельствуют о высокой эффективности экстраполяции Ричардсона для задачи с гладкими данными. Результаты для задачи 4) соответствуют квазилинейному уравнению

$$\operatorname{div} (v (|\operatorname{grad} u|^2) \operatorname{grad} u) = f; \quad (x, y) \in G, \quad u_T = u^*,$$

где $G = \{(x, y): 0,5 \leq x, y \leq 1,5\}$; $v(t) = (\varepsilon + t)(1 + t)^{-1}$; $\varepsilon = 10^{-4}$; $u^* = \sqrt{xy}$; $h = 1/3$, а погрешность приводится для C -нормы.

2. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений типа Чу — Лоу [60], возникающую в теории дисперсионных соотношений. Требуется определить вектор-функцию $v(t) = (v_1, \dots, v_N)^T$, $t \in [0, \pi/2]$ из уравнений

$$Av = v - g(t) \{v^2(t) + (\Lambda + Fv(t))^2\} = 0, \quad t \in [0, \pi/2], \quad (30)$$

где

$$Fv = K_1 v + CK_2 v + (E + C) l(t) v(t);$$

$$K_1 v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[(v(\tau) - v(t)) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} + (v(\tau) + v(t)) \operatorname{ctg} \frac{\tau + t}{2} \right] d\tau;$$

$$K_2 v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[(v(\tau) - v(t)) \operatorname{tg} \frac{\tau - t}{2} + (v(\tau) + v(t)) \operatorname{tg} \frac{\tau + t}{2} \right] d\tau,$$

$$l(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\cos t}{1 + \sin t} \right), \quad v^2 = (v_1^2, \dots, v_N^2)^T,$$

вектор $\Lambda \in R^N$ и унитарная $N \times N$ -матрица C заданы, E — единичная матрица.

Определим пространство $H_0^{m+\alpha}$ — m раз дифференцируемых функций с нулями на концах отрезка $[0, \pi/2]$, m -я производная которых принадлежит пространству H_0^α , $0 < \alpha < 1$, где

$$\|u\|_{H^\alpha} = \max_{t \in [0, \pi/2]} |u(t)| + \sup_{0 \leq t, \tau \leq \pi/2} |u(t) - u(\tau)| |t - \tau|^{-\alpha}.$$

Пространство вектор-функций обозначим $H_{0,N}^{m+\alpha}$ с нормой

$$\|v\|_\alpha = \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_{H^\alpha}, \quad v \in H_{0,N}^\alpha.$$

Пусть $g(t) \in H_0^{2\nu+\alpha+1}$, $\nu \geq 2$. На сетке $\omega_h = \{t_i = ih, i = \overline{0, n}; h = \frac{\pi}{2}n^{-1}\}$ рассмотрим разностную задачу

$$A_h v_h = v_h(t_j) - g(t_j) \{v_h^2(t_j) + [\Lambda + F_h v_h(t_j)]^2\} = 0, \quad (31)$$

где $v_h = (v(t_0), \dots, v(t_n))^T$ — сеточная функция на ω_h , а

$$F_h v_h(t_j) = B_h^1 v_h(t_j) + C B_h^2 v_h(t_j) + (C + E) l(t_j) v_h(t_j);$$

$$B_h^1 v_h(t_j) = h \left\{ v_h(t_j) \left(a_j^i + \frac{1}{2} (a_{n+j}^i - a_{n-j}^i) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (v_h(t_k) - v_h(t_j)) a_{k-j}^i + \sum_{k=1}^{n-1} (v_h(t_k) + v_h(t_j)) a_{n+j}^i \right\}; \quad i = 1, 2,$$

$$t_j \in \omega_h, \quad a_j^1 = \operatorname{ctg} \left(j \frac{h}{2} \right), \quad a_j^2 = \frac{1}{a_j^1}, \quad j = \pm 1, \dots, \pm(2n-1).$$

Слагаемое $(v_h(t_k) - v_h(t_j)) a_{k-j}^i$ при $k = j$ заменяется величиной $2v'(t_j) = h^{-1} [v_h(t_{j+1}) - v_h(t_{j-1})]$.

Теорема 6 [60]. Пусть число $R > 0$ таково, что

$$2 \|g\|_\alpha (R + (\max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i| + \|F\|_\alpha R) \|F\|_\alpha) < 1.$$

Тогда существует единственное решение $v^*(t) \in H_{0N}^{2\nu+1+\alpha}$, $\nu \geq 2$, $\|v^*\|_\alpha \leq R$, которое получается методом простой итерации. Для приближенного решения v_h справедливо разложение

$$v_h(t) = v^*(t) + \sum_{k=2}^{2\nu-2} c_k(t) h^k + o(h^{2\nu-1}), \quad t \in \omega_h, \quad (32)$$

где $c_k(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-k+1}$ и не зависят от h .

Т а б л и ц а 2. Уточнение решений уравнения Чу—Лоу

n	$\sigma_1(n)$	$\sigma\left(\frac{n}{2}, n\right)$	$\sigma_8(n)$
20	$1,12 \cdot 10^{-4}$	—	—
40	$2,77 \cdot 10^{-5}$	$2,52 \cdot 10^{-6}$	$2,43 \cdot 10^{-6}$
80	$7,01 \cdot 10^{-6}$	$1,60 \cdot 10^{-7}$	$1,62 \cdot 10^{-7}$

Для $N = 2$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $g(t) = \cos^2 t \sin t$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = 0,99$ в табл. 2 приведены результаты уточнения согласно разложению (32) для точного решения

$$v_i^*(t) = 4\lambda_i^2 \cos^2 t \sin t [4 - 4\lambda_i \cos t (2 \cos^2 t - 1) + \lambda_i^2 \cos^2 t]^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

на двух сетках ω_h и $\omega_{h/2}$, где $\sigma_1(n) = \max |v_h(t) - v^*(t)|$,

$$\sigma(n, 2n) = \max \left| \frac{4}{3} v_{h/2} - \frac{1}{3} v_h - v^*(t) \right|, \quad t \in \omega_h,$$

$\sigma_s(n)$ соответствует точности решений задачи (31), когда интегралы K_1, K_2 вычисляются по формуле Симпсона порядка $O(h^4)$.

3. Рассмотрим интегральное уравнение второго рода с вполне непрерывным интегральным оператором K [14, 61, 62]:

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) u(t) dt = f(x), \quad x \in \Omega = [0, 1]. \quad (33)$$

Предположим, что λ^{-1} не является собственным числом оператора K и выполнены свойства гладкости $K(x, t) \in C^{2m+1}[\Omega \times \Omega]$, $u(x) \in C^{2m+1}[\Omega]$, $m \geq 1$. Замечаем, что уравнение (33) однозначно разрешимо для любой правой части $f \in C^{2m+1}[\Omega]$. Приближенное решение

ищем в виде кусочно-линейной функции $\Psi = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i(x)$, где $u_h = (u_0, \dots, u_n)^T$ — вектор неизвестных, а $\varphi_i(x)$ — кусочно-линейные базисные функции на сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, n}, h = n^{-1}\}$. Уравнение для приближенного решения имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (E - \lambda K_h) u_h &= F, \quad K_h = \{k_{ij}\}, \quad F = \{f_i\}, \quad i, j = \overline{0, n}, \\ k_{ij} &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} K(x_i, t) \varphi_j(t) dt, \quad f_i = f(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Следствием компактности оператора K является

Лемма 1. Оператор $E - \lambda K_h: R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$ имеет равномерно ограниченный по n обратный оператор в C -норме.

Теорема 7 [14]. Пусть $f(x) \in C^{2m+1}[\Omega]$, $K(x, t) \in C^{2m+1}[\Omega \times \Omega]$ и λ^{-1} не является собственным числом оператора K . Тогда для вектора u_h , определяемого из системы (34), справедливо разложение

$$u_i = u(x_i) + \sum_{k=2}^{2m} c_k(x_i) h^k + o(h^{2m+1}), \quad i = \overline{0, n}, \quad x_i \in \omega_h, \quad (35)$$

где $c_k(x) \in C^{2m+1-k}[\Omega]$ не зависят от h .

Рассмотрим для примера граничное интегральное уравнение (ГИУ), возникающее при решении внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа [46]:

$$(E + K) u(x) = f(x) \equiv L \frac{\partial}{\partial n} u(x), \quad x \in \Gamma.$$

Здесь Γ — замкнутая кривая Ляпунова, разбивающая плоскость на две области, $u(x)$ — след на Γ гармонической во внешней области

функции u , $u(\infty) = 0$, $\partial/\partial n$ — производная по внутренней нормали к границе Γ , $f(x)$ задана,

$$Ku = \int_{\Gamma} K(x, t) u(t) dt, \quad Lv = \int_{\Gamma} \mathcal{L}(x, t) v(t) dt,$$

$$K(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln r^{-1}(x, s), \quad \mathcal{L}(x, s) = \frac{1}{\pi} \ln r^{-1}(x, s),$$

$$r(x, s) = |x - s|, \quad x, s \in \Gamma,$$

а t можно считать натуральным параметром на Γ . Известно, что $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора K . Поэтому при достаточной гладкости функции u и контура Γ для решения системы (34) справедливо разложение погрешности (35). Приведем результаты экстраполяции Ричардсона для решений u_h в точках границы Γ области $\Omega = \{(x, y): |x| \leq 1, |y| \leq 0,5\}$, приближающих гармоническую функцию $u(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1}$. Обозначаем

Таблица 3. Уточнение решений ГИУ

h	1/8	1/16	1/32	1/64
$\delta(h)$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$3,56 \cdot 10^{-3}$	$9,25 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$
$\delta\left(h, \frac{h}{2}\right)$	$3,47 \cdot 10^{-4}$	$3,48 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$	—
$\delta\left(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}\right)$	$9,76 \cdot 10^{-6}$	$5,47 \cdot 10^{-7}$	—	—
$\delta\left(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}\right)$	$6,7 \cdot 10^{-8}$	—	—	—

в табл. 3 $\delta(h) = \max_{x \in \omega_h} |u_h - u|$, $\delta(h_1, \dots, h_k)$ — погрешность решения, экстраполированного согласно (35) на последовательности сеток $\omega_{h_1}, \dots, \omega_{h_k} \in \Gamma$ с постоянным шагом h_k .

4. Рассмотрим спектральную задачу для квазипотенциальных уравнений вида [25, 63—66]:

$$L\Psi \equiv v(x)\Psi(x) + \beta c(x) \int_0^a G(x, y)c(y)\Psi(y)dy = \lambda\Psi(x);$$

$$0 < a \leq \infty, \quad 0 \leq x \leq a, \quad \int_0^a \Psi^2 dx = 1, \quad (36)$$

$$G(x, y) = G_1(|x - y|) + G_2(x + y),$$

где функции $v(x)$, $c(x)$ заданы и имеют требуемую гладкость. Пусть $a = \infty$. Предполагаем, что решение $\Psi(x)$ имеет асимптотику при $x \rightarrow \infty$:

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^L \frac{b_i}{x^{\alpha+s_i}} + O(x^{-\alpha-Ls}); \quad s \geq 1, \quad L \geq 0, \quad \alpha > 1$$

и, кроме того, $\Psi(x) \in C^M[0, \infty)$, $M \geq 4$, $\Psi(0) = 0$. Требуется найти несколько минимальных собственных чисел и соответствующих собственных функций задачи (36). Согласно [25] аппроксимацию уравнения (36) строим методом Галеркина для системы φ_k , $k = \overline{1, n+1}$ кусочно-линейных при $x \leq R$ базисных функций, определенных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{1, n+1}\}$, так что для некоторого числа $a_\infty < \infty$, $h = a_\infty n^{-1}$, $R = a_\infty + h$ и $\varphi_{n+1}(x) = (R/x)^\alpha$, $x \geq R$.

Решение $\Psi_h(x)$ ищем в виде $\Psi_h = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \varphi_i(x)$, где $u_h = (u_1, \dots, \dots, u_{n+1})^T$ — вектор неизвестных. В результате аппроксимирующая система уравнений

$$(L\Psi_h, \varphi_k) = \lambda_\xi (\Psi_h, \varphi_k), \quad k = \overline{1, n+1},$$

после некоторых упрощений сводится к частичной проблеме на собственные значения для симметричной матрицы A :

$$Au_\xi = \lambda_\xi u_\xi, \quad u_\xi = (u_1, \dots, u_n, \nu u_{n+1})^T, \quad \xi = (h, r), \quad (37)$$

$$r = R^{-1}, \quad \nu = \|\varphi_{n+1}\|_{L_2} h^{-1/2},$$

имеющей вид

$$A = D + C \begin{pmatrix} B & V \\ V^T & 0 \end{pmatrix} C, \quad B: R^n \rightarrow R^n,$$

$$B = T + H, \quad V = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad T = \{t_{|i-j|}\},$$

$$H = \{h_{i+j}\}, \quad i, j = \overline{0, n-1}, \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{n+1}),$$

$$C = \text{diag}(c_1, \dots, c_{n+1}).$$

Здесь T — симметричная теплицева, а H — ганнелева матрицы. Система (37) аппроксимирует (36) с точностью $\Delta_\xi = O(h^2) + O(r^{\alpha+s-1})$. Для данной задачи характерна зависимость погрешности приближенных решений u_ξ , λ_ξ от двух параметров аппроксимации h и $r = R^{-1}$, что дает возможность для двухпараметрической экстраполяции. Кроме того, можно использовать многосеточные итерационные процессы решения (37), сочетающие движение по h - и R -уровням (см. разд. 3

[26]). Приведем результаты предложенной в [25] двухпараметрической экстраполяции (более подробно см. в [25, 26]), предполагая регулярную зависимость погрешности сеточных решений λ_ξ (аналогично для u_ξ) от параметров h и r :

$$\lambda = \lambda_\xi + \sum_{i=1}^N d_i h^{1+i} + \sum_{i=1}^L \frac{v_i(h)}{R^{\alpha+i-1}} + O(h^{N+1}) + O(R^{-\alpha-Ls}), \quad (38)$$

где d_i не зависят от h , а $v_i(h)$ не зависят от R . Разложение (38) носит эвристический характер и не является следствием теоремы 2 в силу того, что параметры h и r имеют различную природу, однако подтверждается численными экспериментами. Разложение по h можно

Таблица 4. Экстраполяция Ричардсона для уравнения (36)

R	Δ_7	$\Delta_{7,6}$	$\Delta_{7,6,5}$
$R_1 = 10$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$2,78 \cdot 10^{-6}$
$R_2 = 12,5$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,08 \cdot 10^{-6}$
$R_3 = 15$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	$4,91 \cdot 10^{-7}$

получить из теоремы 4. Данные табл. 4 относятся к точно решаемой модели, в которой

$$v(x) = x^2/2, \quad G_1(x) = \ln x, \quad G_2(x) = -\ln x, \quad c(x) = 1,$$

$$\beta = \pi^{-1}, \quad \Psi_1(x) = x(x^2 + 1)^{-2}, \quad \lambda_1 = -0,5, \quad \alpha = 3, \quad s = 2.$$

Расчеты проводились на семи сетках с числом неизвестных $n_i = 2^{3+i} + 1$, $i = \overline{1, 7}$, $n_7 = 1025$ для трех значений R . Величины Δ_7 , $\Delta_{7,6}$, $\Delta_{7,6,5}$ представляют погрешности собственного числа для ω_7 и экстраполированных значений по двум и трем сеткам. Обозначим $\Delta(R_i, R_j)$ погрешности результатов экстраполяции по R , т. е. величин $\lambda(R_i, R_j) = \mu_1 \lambda_1(R_i) + \mu_2 \lambda_1(R_j)$, где $\lambda_1(R)$ есть уточненное по h собственное значение, вычисленное для заданного значения R . Числа μ_1 , μ_2 удовлетворяют системе $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\mu_1 R_i^{-4} + \mu_2 R_j^{-4} = 0$. Имеем $\Delta(R_1, R_2) = -9,0 \cdot 10^{-8}$; $\Delta(R_1, R_3) = -7,2 \times 10^{-7}$; $\Delta(R_2, R_3) = -4,0 \cdot 10^{-8}$.

Приведенные результаты (см. табл. 1—4) свидетельствуют о высокой эффективности экстраполяции Ричардсона при повышении точности решений. Для сравнения отметим, что точность порядка $2,0 \cdot 10^{-8}$ в задаче (1), табл. 1 без использования экстраполяции может быть достигнута лишь на сетке с шагом $H \leq h/64$, где h — шаг на

последней из использованных сеток, что означает увеличение вычислительной работы по крайней мере в 64^2 раз.

В ряде случаев установить точный вид разложения (38) достаточно сложно. В работе [26] предложен метод уточнения приближенных решений (u_ξ, λ_ξ) , основанный на минимизации некоторого функционала, определенного для набора приближенных значений λ_ξ , соответствующих различным значениям параметра $r = R^{-1}$. Зависимость величины λ_ξ от r аппроксимируется некоторой многопараметрической функцией. Для задачи (37) зависимость $\lambda_\xi(r)$ можно «фитировать» функцией

$$F(r) = c_0 + c_1 r^{-\alpha} + c_2 r^\beta, \quad \alpha, \beta > 0,$$

где c_0 есть искомое уточнение по r для собственного числа, а c_1, c_2, α, β — вспомогательные параметры. Эти параметры находятся из условия минимума функционала

$$\Phi_1(c_0, c_1, c_2, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (\lambda_\xi(r_i) - F(r_i))^2 \rightarrow \min,$$

где n — число используемых собственных значений $\lambda_\xi(r_i)$ при различных r_i . Обозначим $\Delta = |c_0 - \lambda^*|$. Численные эксперименты дают следующие результаты: при $N = 1025, n = 20$ имеем $\Delta = 4,3 \cdot 10^{-9}$; при $N = 512, n = 15$ $\Delta = 1,0 \cdot 10^{-7}$, а при $N = 256, n = 11$ $\Delta = 7,0 \cdot 10^{-7}$. Минимизация проводилась при помощи подпрограммы НФИТ пакета прикладных программ НВООК. Изложенный «феноменологический» подход позволяет при меньшей априорной информации о поведении погрешности получить приближения достаточно высокой точности. Естественно, что он потребует больше вычислительной работы по сравнению с экстраполяцией на основе заданного разложения (38).

4. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В СТУПЕНЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть $G \in R^2$ — область, составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, Γ — граница $G, \bar{G} = G \cup \Gamma, n(\xi)$ — внутренняя нормаль к Γ в точке $\xi \in \Gamma$. Рассмотрим задачу Дирихле [39]:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \\ u(x) &= g, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть функция $f \in W_2^k(G), k = 2L + 2, L \geq 1, g \in C^{k+1}(\Gamma^i)$, где $\Gamma^i \in \Gamma$ — прямолинейные участки границы. Задача (39) имеет при $g = 0$ обобщенное решение $u(x) \in W_2^1(\bar{G})$ [66], т. е.

$$\iint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) dx = \iint_{\bar{G}} f \eta dx \tag{40}$$

при произвольной функции $\eta \in W_2^1(\bar{G})$, $\eta|_\Gamma = 0$. Соотношение (40) определяет операторное уравнение

$$\Lambda u = f, \quad \Lambda : W_2^1 \rightarrow W_2^1, \quad u|_\Gamma = 0. \quad (41)$$

В общем случае $g \neq 0$ решение $u \in W_2^1(\bar{G})$ в окрестности угловой точки (x_0, y_0) с углом φ_0 имеет вид [68]:

$$u = \sum_{0 < \lambda_p < h+1} a_{pq} r^{\lambda_p} P_{pq}(r \ln^q r) + \sum_{0 \leq i_1 + i_2 \leq h+1} a_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \\ + \sum_{2 \leq j_1 \leq h+1} r^{j_1} \ln^{j_2} r \Theta_{j_1 j_2}(\varphi) + \omega; \quad r = [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]^{1/2}. \quad (42)$$

Здесь p, q, j_1 — целые числа, P_{pq} — полином, коэффициенты которого есть комбинации тригонометрических функций. Например, при $q = 0$, $P_{p0} = A \sin \lambda_p \varphi + B \cos \lambda_p \varphi$. Функции $\Theta_{j_1 j_2}(\varphi)$ — бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$. Главный член асимптотики есть $r^{\lambda_1} (A \sin \lambda_1 \varphi + B \cos \lambda_1 \varphi)$. Кроме того,

$$\sum_{m=0}^{h+2} \int_G r^{-2(h+2-m)} \left| \frac{\partial^m \omega}{\partial x^m} \right| dx \leq c (\|f\|_{W_2^h(G)} + \|u\|_{W_2^1(\bar{G})}).$$

В случае $\varphi_0 = \pi/2$ имеем $a_{pq} = 0$ (так как λ_p — целые), а коэффициенты $\Theta_{j_1 j_2}$ явно выражаются через значения $f(x_1, x_2)$. При $\varphi_0 = 3\pi/2$ $a_{pq} \neq 0$ и условия согласования, гарантирующие нужную гладкость решения, имеют весьма громоздкий вид. Отметим, что λ_p есть собственные числа задачи Штурма — Лиувилля

$$v''_{\varphi\varphi} - \lambda^2 v = 0, \quad v(0) = v(\varphi_0) = 0,$$

а $\Theta_{j_1 j_2}$ и коэффициенты P_{pq} выражаются через собственные функции этой задачи.

Предположим, что область G покрыта квадратной сеткой ω_h с шагом h , так что граница Γ лежит на линиях сетки и $\Gamma_h = \Gamma \cap \omega_h$, $\omega_h \cap G = \bar{\omega}_h$. Рассмотрим разностную аппроксимацию

$$\Delta_h u_h = f(x), \quad x \in \bar{\omega}_h \setminus \Gamma_h; \quad u_h = g, \quad x \in \Gamma_h, \quad (43)$$

где оператор Δ_h определен в (29). Поскольку особенности вида (42) возникают даже при достаточной гладкости входных данных, то разложение погрешности вида (4) с ограниченными коэффициентами не может быть получено без специальных дополнительных требований (условий согласования). Действительно, пусть $u \in W_2^{h+2}(\bar{G})$ и справедливо представление

$$u_h = u^*(x) + \sum_{i=1}^L a_i(x) h^{2i} + \eta_h, \quad x \in \omega_h. \quad (44)$$

Тогда согласно (9) коэффициенты $a_i(x)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_i &= - \sum_{p=2}^{i+1} \frac{2}{(2p)!} \delta_p a_{i+1-p}, \quad a_{i, \Gamma} = 0; \\ a_0 &= u^*, \quad \delta_p = \frac{d^{2p}}{dx_1^{2p}} + \frac{d^{2p}}{dx_2^{2p}}, \quad i = \overline{1, L} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

и уже при $i \geq 2$ могут стать неограниченными в окрестности угловых точек. Если же решение u^* не обладает достаточной гладкостью, например $u^* \in W_2^2(G)$, то даже $a_1(x)$ может стать неограниченным. Упомянутые условия согласования, по существу, должны гарантировать ограниченность решений всех вспомогательных задач (45). Естественно, что на практике такие условия выполняются лишь в исключительных случаях.

Далее рассмотрим разложение (44), не предполагая условий согласования. Отметим, что в [1] получено представление

$$u_h = u^* + a_1 h^2 + \eta_h h^{3+\alpha}; \quad x \in \omega_h, \quad |a_1| | \eta_h | < C$$

для задачи Дирихле в прямоугольнике при выполнении некоторых условий согласования. Случай представления (44) с ограниченными коэффициентами рассмотрен в [55]. В работах [69] получено асимптотическое представление первого члена в разложении (44) по степеням h^λ для сеточных задач с угловой точкой вида $\pi/2, \pi, 3\pi/2$, а в [70] строится разностная схема, точно аппроксимирующая первый член асимптотики (42). Схема с аддитивным выделением особенности рассмотрена в [67]. Следующий результат показывает, что погрешность решения u_h задачи (43) можно представить в виде (44) таким образом, что функции $a_i(x)$ будут иметь известные особенности в окрестности угловой точки, а остаточный член η_h оценивается решением некоторой стандартной сеточной задачи, свойства которого устанавливаются в численном эксперименте. Расчеты показывают, что для сингулярностей, характерных для задачи (43), сеточная функция η_h равномерно ограничена вне некоторой окрестности угловой точки. Последнее означает, что экстраполяция типа Ричардсона эффективна при удалении от угловой точки (это подтверждается численными экспериментами), однако практически слабо уточняет решения в малой ее окрестности. Отмечаем, что для задач магнитостатики во многих случаях решение представляет интерес именно в области, удаленной от угловых точек.

Теорема 8. Пусть $u^* \in W_2^{k+2}(\bar{G})$, $k = 2L + 2$, $L \geq 1$, тогда для решения уравнения (43) справедливо представление (44), в котором

$$a_i(x) = \Theta_i r^{\lambda_1 - 2(i-1)\nu}(\varphi) + \sum_{j_1, j_2} r^{\mu_{j_1}} \ln^{q_{j_2}} r \Theta_{i j_1 j_2}(\varphi) + \omega_i, \quad (46)$$

где r определен в окрестности угла, $\Theta_i, \Theta_{j_1 j_2}, \omega_i$ не зависят от h , $\mu_{j_1} > \lambda_1 - 2(i-1)$, а $\omega_i \in W_2^{k-2(i-1)}(\bar{G})$. Сеточная функция η_h подчиняется оценке $|\eta_h| \leq v_h$, где v_h удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -\Delta_h v_h &= (|V_h| + cr^{\lambda_1 - 2L}) h^{2L+2}; \quad x \in \omega_h, \\ v_h &= 0, \quad x \in \Gamma_h, \quad c > 0, \quad \|V_h\| = 0(1). \end{aligned} \quad (47)$$

При $\varphi = \pi/2$ следует положить $\lambda_1 = 0, \Theta_i = 0$.

Доказательство утверждений сводится к последовательному вычислению асимптотик коэффициентов $a_i(x)$ на основе системы (45) и дальнейшей оценке правой части в уравнении (47) через коэффициенты a_i и их производные [39, 71].

Если потребовать выполнения условий согласования для каждой из задач (45), то получим регулярное разложение погрешности с ограниченными коэффициентами $a_i(x), \eta_h$. Напротив, если $u^* \in W_2^1(\bar{G})$, то справедлива теорема, аналогичная предыдущей, только особенность у коэффициента с номером i будет иметь тот же характер, как у $(i+1)$ -го коэффициента из (46), а показатель $2L+2$ в (47) следует заменить $2L$.

Приведем численные расчеты [71] для мажорантных функций v_h , являющихся решением разностной задачи в области Ω , с угловой точкой $x_1 = x_2 = 0$:

$$-\Delta v_h = r^\gamma, \quad \gamma < 0, \quad v_{h,\Gamma} = 0,$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\gamma = \lambda_1 - 2L$ либо $\gamma = \lambda_1 - 2L - 2$, в зависимости от гладкости искомого решения, а число L определяет количество используемых для уточнения сеток $M = L + 1$. При $\varphi = \pi/2$ имеем $\lambda_1 = 0$, а при $\varphi = 3\pi/2$ соответственно $\lambda_1 = 2/3$. На рис. 1 приведены функции v_h в точках $x_1 = x_2$ для области $G_1 = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1, x_2 \leq 2\}$ при трех значениях γ : $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -4, \gamma_3 = -6$. На рис. 2 дана функция v_h для L -образной области (см. п. 1 разд. 3) при $a = 1$ и значениях аргументов $x_1 = -x_2$. Величина γ принимает значения: $\gamma_1 = -4/3, \gamma_2 = -10/3, \gamma_3 = -16/3$. Расчеты проводились на сетке размерности 113×113 при $h = 0,0179$. Решения v_{2h} и v_{4h} имеют аналогичный характер.

Таблица 5. Экстраполяция Ричардсона

10 ⁻⁵ ε	Номера диагональных							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ε _h	73	44	30	21	16	12	9,7	7,5
ε _{h/2}	31	15	9,6	6,6	4,8	3,6	2,8	2,1
ε _{h, h/2}	17	5,8	2,7	1,6	1,0	0,69	0,49	0,35

О повышении эффективности экстраполяции Ричардсона при удалении от угловой точки свидетельствуют расчеты, проведенные для задачи

$$-\Delta u = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^{-3/2}, \quad u_{\Gamma} = u^*, \quad u^* = (x_1 + x_2)^{1/2}$$

в области $G = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1, x_2 \leq 1/4\}$. Решения с особенностью вида $r^{1/2}$ возникают, например, в точках смены краевых условий

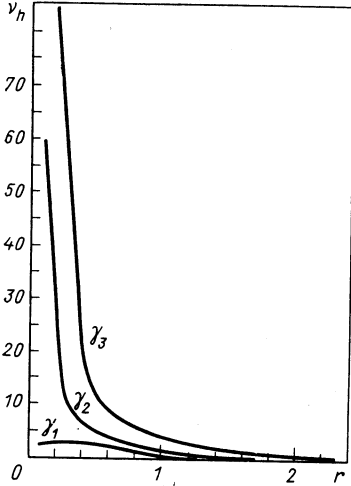


Рис. 1. Мажорантные функции ν_h для угла $\pi/2$

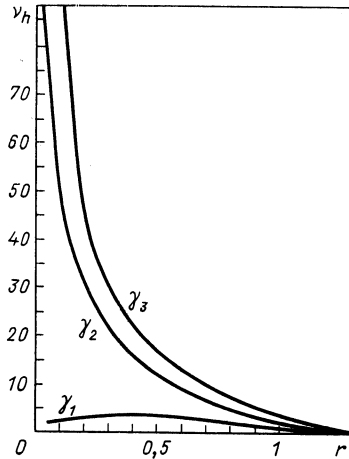


Рис. 2. Мажорантные функции ν_h для угла $3\pi/2$

Дирихле и Неймана для угла $\varphi = \pi$. В табл. 5 указаны погрешности в диагональных точках квадратной сетки ω_h , $h = 1/64$ и соответствующих точках сетки $\omega_{h/2}$, а также точность экстраполяции $\varepsilon_{h,h/2}$.

Приведенные результаты показывают практическую эффективность экстраполяции Ричардсона при решении уравнения Пуассона в областях с углами. При удалении от угловой точки повышение точности достигается даже для решений, имеющих степенные осо-

для решений с особенностью

точек от $(0, 0)$

	9	10	11	12	13	14	15
	5,7	4,2	3,0	1,9	1,1	0,52	0,13
	1,6	1,2	0,84	0,55	0,31	0,14	0,037
	0,25	0,18	0,12	0,07	0,04	0,019	0,004

бенности. Можно предположить, что аналогичная ситуация имеется и в трехмерном случае, где аддитивное выделение особенности затруднительно. Алгоритмы, связанные с локальным сгущением сетки, рассматриваются, например, в [3, 17, 67] (адаптивная дискретизация).

5. ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДОМ ПОВОРОТА СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При уточнении приближенного решения u_n^* на основе разложения (4) исключаются несколько первых слагаемых $c_i n^{-ki}$, $i = 1, N$, путем комбинирования $N + 1$ выражения вида (4) при попарно различных значениях n (или h). Предполагается построение набора различных сеточных областей и соответствующих операторов интерполирования нужной точности. Однако следует учитывать достаточно быстрый рост расчетного массива. Например, при уменьшении среднего шага сетки в 2 раза для двухмерных задач необходимый при экстраполяции массив возрастает в 5 раз, а в трехмерных задачах в 9 раз.

Пусть оператор A инвариантен относительно поворота системы координат. Тогда имеется возможность проводить уточнение на одной и той же сеточной области. Если установить зависимость коэффициентов c_i от угла поворота системы координат, в которой аппроксимируется оператор A , то также можно исключить несколько первых слагаемых в разложении (4) [40]. Рассмотрим уравнение Пуассона в R^2 и R^3 , а также бигармоническое уравнение.

Начнем с задачи Дирихле (39) в прямоугольнике $\Pi = \{x_1, x_2; 0 \leq x_\alpha \leq a_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Пусть построена квадратная разностная сетка ω_h с шагом h , согласованная со сторонами прямоугольника. Легко видеть, что для аппроксимации оператора Δ наряду с обычным шаблоном типа «крест» можно использовать также шаблоны с шагом $\tau_k = h \sqrt{1 + k^2}$, $k = 1, 2, \dots$, получающиеся при поворотах на угол $\varphi_k = \pm \arctg k$. В случае $k = 1$, что соответствует углу $\varphi_1 = \pi/4$, построим на сетке ω_h разностную аппроксимацию (наряду с Δ_h) Δ_τ согласно формулам

$$\Delta_\tau u_\tau = \frac{u_{i-1, j-1} + u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j-1} - 4u_{ij}}{\tau^2}, \quad \tau = h\sqrt{2}. \quad (48)$$

Рассмотрим решения следующих разностных задач:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_h u_h &= f(x), & x \in \omega_h, & \quad u_{h, \Gamma} = g; \\ \Delta_\tau u_\tau &= f(x), & x \in \omega_h, & \quad u_{\tau, \Gamma} = g. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Теорема 9 [40]. Пусть $f(x) = 0$ при $x \in \Gamma$ и выполнено условие $d^4 u/dx_1^4 + d^4 u/dx_2^4 = 0$ в углах прямоугольника. Тогда для $u \in C^6(\Pi)$ справедливо представление

$$\frac{2u_h + u_\tau}{3} + \frac{h^2}{12} f(x) = u^*(x) + O(h^4), \quad x \in \omega_h, \quad (50)$$

а для $u \in C^8(\bar{\Pi})$ выполнено

$$\frac{1}{45} [32u_{\frac{h}{2}} - 2u_h + 16u_{\frac{\tau}{2}} - u_{\tau}] + \frac{h^2}{6\tau} f(x) = u^*(x) + \mu_h,$$

$$|\mu_h| \leq ch^6 \ln h, \quad x \in \omega_h.$$

Для доказательства достаточно установить разложение (4) для решений u_h и u_{τ} из (49) и использовать зависимость между коэффициентами $c_h(x)$ при одинаковых степенях h и τ [40].

Важно отметить, что в разложении (50) решения u_h и u_{τ} определены на одной и той же сеточной области ω_h , поэтому исключается процедура интерполирования. Кроме того, сеточная область ω_h при повороте на угол φ_k , $k=1, 2, \dots$, распадается на $k^2 + 1$ независимых шаблонов, что позволяет проводить расчеты решения u_{τ} лишь на массиве размерности $N_{\omega}/k^2 + 1$, где N_{ω} — число точек сетки ω_h , а затем использовать u_{τ} как начальное приближение при расчете u_h . В итоге реализация формулы (50) требует меньше вычислительной работы по сравнению с методом Ричардсона для решений u_h и $u_{h/2}$, если разностные уравнения решаются итерационно. Формулы для уточнения при повороте на угол $\varphi = \pm \arctg 2$ рассмотрены в [40]. Есть основания предположить, что формулы типа (50) имеют место и для квазилинейного уравнения дивергентного типа (30), так как соответствующий оператор инвариантен относительно поворота.

Пусть прямоугольный параллелепипед $\Pi = \{0 \leq x_i \leq a_i, i = \overline{1, 3}\}$ покрыт кубической сеткой ω_h с шагом h , согласованной с границей Π . Рассмотрим три разностных оператора Δ_{μ_i} , $i = \overline{1, 3}$, которые строятся аналогично оператору Δ_{τ} из (48) при повороте относительно одной из трех осей, параллельных Ox_i , $i = \overline{1, 3}$:

$$\Delta_{\mu_i} u(x) = h^{-2} (u(x + \Delta_i) - 2u(x) + u(x - \Delta_i)) + \Delta_{\tau} u,$$

где Δ_{τ} действует согласно (48) в плоскости, ортогональной оси Ox_i , а вектор $\Delta_i = he_i$, где e_i — единичный вектор, параллельный оси Ox_i . Уравнения

$$\Delta_{\mu_i} u_{\mu_i} = f, \quad x \in \omega_h, \quad u_{\mu_i}|_{\Gamma} = g, \quad i = \overline{1, 3} \tag{51}$$

однозначно разрешимы и для u_{μ_i} справедливы априорные оценки $|u_{\mu_i}| \leq c \max |f, g|$.

Теорема 10 [40]. Пусть $u(x) \in C^6(\bar{\Pi})$, $f_{\Gamma} = 0$ и решения $v_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, уравнения (при $m \neq n \neq i$)

$$\Delta v_i = -\frac{1}{12} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{d^4}{dx_k^4} + 6 \frac{d^4}{dx_m^2 dx_n^2} \right) u, \quad v_i|_{\Gamma} = 0$$

таковы, что $v_i \in C^4(\bar{\Pi})$. Тогда для решений u_{μ_i} из (51) справедливо представление

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 u_{\mu_i}(x) + \frac{h^2}{12} f(x) = u(x) + O(h^4), \quad x \in \omega_h. \quad (52)$$

Замечаем, что все решения u_{μ_i} определены на одной сеточной области, а расчеты по формуле (52) также осуществляются как многоступенчатый итерационный процесс.

Рассмотрим далее бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = f(x, y), \quad u_{\Gamma} = 0, \quad \Delta u_{\Gamma} = 0 \quad (53)$$

в прямоугольнике Π , покрытом сеткой $\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j): x_i = ih, y_j = jh, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}\}$ с шагом h . Уравнение (53) аппроксимируем соотношением

$$\Delta_h^2 u_h \equiv u_{h\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + 2u_{h\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} + u_{h\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} = f, \quad (x, y) \in \omega_h; \quad (54)$$

$$u_{h,\Gamma} = 0, \quad \Delta_h u_{h,\Gamma} = 0,$$

используя фиктивные точки $(x_i, (M+1)h)$, $(x_i, -h)$, $(-h, y_j)$, $((N+1)h, y_j)$, $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, M-1}$. После поворота системы координат на угол $\varphi = \pi/4$ рассмотрим на сетке ω_h решение u_{τ} уравнения

$$\Delta_{\tau}^2 u_{\tau} = f, \quad u_{\tau,\Gamma} = 0, \quad \Delta_{\tau} u_{\tau,\Gamma} = 0, \quad (55)$$

где Δ_{τ} определен в (48).

Теорема 11 [40]. Пусть $u \in C^8(\bar{\Pi})$, $f_{|\Gamma} = 0$ и решение $v(x, y)$ уравнения

$$\Delta^2 v = -\frac{1}{6} \left(\Delta^3 - 2\Delta \frac{d^4}{dx^2 dy^2} \right) u;$$

$$v_{\Gamma} = 0, \quad \Delta v_{\Gamma} = -\frac{1}{12} \left(\Delta^2 - 2 \frac{d^4}{dx^2 dy^2} \right) u,$$

таково, что $v \in C^6(\bar{\Pi})$. Тогда для решений u_h и u_{τ} уравнений (54), (55) справедливо представление

$$\frac{2u_h + u_{\tau}}{3} + \frac{h^2}{6} \Delta_h u_h = u(x, y) + O(h^4), \quad (x, y) \in \omega_h.$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 11 попутно устанавливается разложение погрешности решений u_h и u_{τ} по степеням шага h [40].

Приведем численный пример уточнения решения u_h по формуле (50). Пусть $u^* = \sin \pi x \sin \pi y$,

$$\Delta u = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, \quad u_{\Gamma} = 0$$

Т а б л и ц а 6. Экстраполяция при помощи поворота сетки

x	y	$u_h - u^*$	$u_\tau - u^*$	$v_h - u^*$
0,5	0,5	$-8,27 \cdot 10^{-3}$	$-3,36 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
0,1	0,2	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	$-6,1 \cdot 10^{-3}$	$-4,5 \cdot 10^{-5}$

в квадрате Π для $a = b = 1$. Результаты расчетов при $h = 0, 1$ приведены в табл. 6. Сеточная функция v_h получена согласно (50).

6. АБСТРАКТНЫЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Во многих задачах численного анализа использование последовательности приближенных уравнений (2) не только позволяет повысить точность решений, но и дает возможность ускорить сходимость итерационных процессов решения проблемы (2) на самой мелкой сетке. Ускорение сходимости достигается за счет двух основных факторов. Во-первых, это построение хорошего начального приближения на мелкой сетке с использованием решения на грубых сетках. Во-вторых, используя последовательность сеток, можно уменьшить спектральный радиус оператора перехода на мелкой сетке, что для многих итерационных методов эквивалентно изменению структуры вектора невязки (или погрешности), адаптируя ее к выбранному итерационному процессу.

Впервые многосеточные итерационные процессы для уравнений эллиптического типа были рассмотрены в работах [8—10] и в дальнейшем получили широкое развитие. Основное внимание уделялось *MG*-алгоритмам для эллиптических разностных уравнений. Этот подход также рассматривался в применении к интегральным уравнениям первого и второго рода [30, 31, 42, 72], для некоторых классов спектральных задач [18, 25, 26]. Многие аспекты проблемы, в том числе и для нелинейного случая, отражены в [2]. Далее рассмотрим абстрактную формулировку общего варианта *MG*-алгоритмов для линейного уравнения с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве в вариационной форме, придерживаясь результатов [28], и приведем конкретный пример применения обсуждаемой конструкции для эллиптического дифференциального уравнения.

Пусть H есть гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим тройку

$$\{H, a(u, v), f(v)\}, \quad a(u, v): H \otimes H \rightarrow R, \quad f(v): H \rightarrow R,$$

где a — непрерывная симметричная вещественная билинейная форма; f — непрерывный вещественный линейный функционал. Предполагаем, что

$$a(v, v) \geq a_0 \|v\|^2, \quad a_0 > 0, \quad \forall v \in H. \tag{56}$$

В силу (56) форма $a(\cdot, \cdot)$ индуцирует энергетическую норму $[u] \equiv (a(u, u))^{1/2}$. Рассмотрим проблему аппроксимации единственного решения следующей задачи.

Задача 1. Даны $\{H, a(u, v), f(v)\}$, найти $u \in H$, такое, что $a(u, v) = f(v)$ для всех $v \in H$.

Построим конечномерную аппроксимацию задачи 1. Пусть H_j , $j \geq 1$, есть последовательность N_j -мерных пространств. В каждом пространстве H_j определим непрерывную, симметричную положительно определенную билинейную форму $a_j(u, v)$ и непрерывную линейную функцию $f_j(v)$. Потребуем, чтобы

$$N_j \sim \sigma N_{j-1}, \quad \sigma \geq 2. \quad (57)$$

Конечномерной аппроксимацией задачи 1 является

Задача 2. Даны $\{H_j, a_j(u, v), f_j(v)\}$, найти $u_j \in H_j$, такое, что $a_j(u_j, v) = f_j(v)$ для всех $v \in H_j$, $j \geq 1$.

Определим линейные операторы проектирования и восполнения, а также интерполирования между соседними по j пространствами:

$$P_j: H \rightarrow H_j, \quad I_j: H_j \rightarrow H, \quad E_j: H_{j-1} \rightarrow H_j, \quad R_j: H_j \rightarrow H_{j-1}. \quad (58)$$

С каждым пространством H_j ассоциируем спектральную задачу $a_j(v, \Psi_i^{(j)}) = \lambda_i^{(j)}(v, \Psi_i^{(j)})$ для всех $v \in H_j$, $i = \overline{1, N_j}$, где $(\cdot, \cdot)_j$ — скалярное произведение в H_j . Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} 0 < \lambda_1^{(j)} \leq \lambda_2^{(j)} \leq \dots \leq \lambda_{N_j}^{(j)} \equiv \Lambda_j, \\ (\Psi_i^{(j)}, \Psi_k^{(j)}) = \delta_{ik}; \quad a_j(\Psi_i^{(j)}, \Psi_k^{(j)}) = \lambda_i^{(j)} \delta_{ik}; \quad i, k = \overline{1, N_j}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. В каждом пространстве H_j определим дискретную норму

$$[v]_s^2 \equiv \sum_{i=1}^{N_j} c_i^2 (\lambda_i^{(j)})^s, \quad v = \sum_{i=1}^{N_j} c_i \Psi_i^{(j)}, \quad -2 \leq s \leq 2.$$

Отметим, что $[v]_1 = [v]$ — обычная энергетическая норма на уровне j . В дальнейшем индекс размерности пространства по мере надобности будем опускать. Сформулируем требования, которым должна удовлетворять используемая дискретизация. Первое из них обеспечивает близость билинейных форм и соответствующих энергетических норм для смежных по j подпространств.

Гипотеза 1. Для всех $j > 1$ существует константа $c_1 > 0$, не зависящая от j , такая, что

$$a_j(E_j v, E_j w) = c_1 a_{j-1}(v, w) \quad \text{для всех } v, w \in H_{j-1}.$$

Следующее условие связано с асимптотикой собственного числа Λ_j из (59).

Гипотеза 2. Существуют положительные константы δ и c_2 , не зависящие от j , такие, что

$$\Lambda_j \leq c_2 N_j^{2\delta}, \quad j \geq 1.$$

Сформулируем k -уровневый итерационный процесс решения задачи 2. Процесс включает решения задач вида 2 последовательно для $j = 1, 2, \dots, k$. При этом k -уровневая схема имеет три параметра: m и n , которые определяют число сглаживающих итераций, и p , определяющий число рекурсивных итераций. Вычисления начинаются с пространства наибольшей размерности и используют пространства меньшей размерности лишь для решения проблем коррекции.

Алгоритм MGI (k, m, n, p): для данного $k > 0$ ищем приближение к элементу $u_k \in H_k$, который является точным решением задачи 2, т. е. $a_k(u_k, v) = f_k(v)$ для всех $v \in H_k$.

а) Если $k = 1$, то задача решается прямым методом.

б) Если $k > 1$, то одна итерация k -уровневой схемы от начального приближения $z_0 \in H_k$ до конечного результата итерации $z_{m+n+1} \in H_k$ осуществляется в три этапа:

I. Если $n > 0$, то определим $z_i, i = \overline{1, n}$, из равенств

$$(z_i - z_{i-1}, v)_k = \Lambda_k^{-1} [f_k(v) - a_k(z_{i-1}, v)], \quad \forall v \in H_k. \quad (60)$$

II. Пусть $q \in H_{k-1}$ есть аппроксимация элемента $\bar{q} \in H_{k-1}$, полученная в результате p итераций по схеме $(k - 1)$ -уровня, примененной к уравнению для невязки

$$a_{k-1}(\bar{q}, v) = c_1^{-1} \{f_k(E_k v) - a_k(z_n, E_k v)\} \equiv \bar{f}_{k-1}(v) \quad (61)$$

для всех $v \in H_{k-1}$, начиная от нулевого начального приближения. Тогда полагаем $z_{n+1} = z_n + E_k q$.

III. Если $m > 0$, то определим $z_i, i = \overline{n+2, m+n+1}$, согласно (60).

В процессе корректирующих итераций II приближенно вычисляется проекция погрешности на H_{k-1} при использовании p итераций $(k - 1)$ -уровневой схемы, примененной к задаче 2 для $j = k - 1$. Сглаживающие итерации I и III подавляют быстро осциллирующую компоненту погрешности. Используемый здесь метод простых итераций (60) не является единственно возможным. Важно, чтобы итерации быстро сходились на части спектра (59), соответствующей большим собственным значениям.

Для анализа сходимости используется ограничение на оценку погрешности итерационного процесса, применяемого на k -м уровне коррекции. Обозначим погрешность на уровне k после i -й итерации алгоритма $e_i = u_k - z_i$.

Гипотеза 3. Для некоторого α , такого, что $0 < \alpha \leq 1$, существует положительная константа c_3 , для которой справедливо

$$[E_k \bar{q} - e_n]_{1-\alpha} \leq c_3^\alpha N_k^{-2\alpha\delta} [e_n]_{1+\alpha},$$

где число δ определено в гипотезе 2.

Теорема 12 [28]. Предположим выполнение гипотез 1—3. Пусть $p > 0$ есть произвольное фиксированное число. Для любой константы $0 < \gamma < 1$ существует неотрицательное число I , зависящее

только от p и γ , такое, что

$$[e_{m+n+1}]_1 \leq \gamma [e_0]_1 \text{ для всех } m + n \geq I.$$

Из теоремы 12 следует [28], что для уменьшения погрешности начального приближения в $N^{-q\delta}$ раз при некотором фиксированном q алгоритм *MGI* требует $F(N) \log N$ операций. Здесь N — число неизвестных в системе, а

$$F(N) \leq \begin{cases} c_k N, & 1 \leq p < \sigma; \\ c_k N \log N, & p = \sigma; \\ c_k N^{\log p}, & p > \sigma, \end{cases}$$

где число σ определено в (57). Предполагаем, что погрешность решения u_j задачи 2 имеет оценку $[P_j u - u_j] \leq c_k N_j^{-q\delta}$, $j \geq 1$, константа c_k не зависит от N_j . Напомним, что вычислительный алгоритм называется оптимальным относительно асимптотики числа арифметических действий, если вычислительные затраты в расчете на одно неизвестное не зависят от размерности системы. Для $0 \leq p < \sigma$ алгоритм оптимального порядка имеет вид

Алгоритма *MGO* (j, r, m, n, p): заданы число $j > 0$ и последовательность $\{H_i, a_i(\cdot, \cdot), f_i(\cdot)\}_{i=1}^j$. Аппроксимируем решение $u_j \in H_j$ задачи 2, последовательно выполняя

а) Если $j = 1$, то решаем задачу 2 непосредственно.

б) Если $j > 1$, то начиная от начального приближения $z_0 = E_j \tilde{u}_{j-1}$ делаем r итераций *MGI* (j, m, n, p) до получения \tilde{u}_j — значения для u_j , вычисленного согласно алгоритму *MGI*.

Стоимость алгоритма *MGO* устанавливает

Теорема 13 [28]. Предположим, что имеют место гипотезы 1—3. Пусть $r \geq 1$ — произвольное фиксированное число. Предполагаем, что

$$[P_j u - u_j] \leq c_k N_j^{-q\delta}, \quad \gamma \geq 1, \quad [P_j u - E_j P_{j-1} u] \leq c_k N_j^{-q\delta}, \quad j \geq 2, \\ [u_1 - \tilde{u}_1] \leq c_k N_1^{-q\delta}.$$

Тогда: а) для всякого $p \geq 1$ существует неотрицательное число I , такое, что для $j \geq 1$

$$[u_j - \tilde{u}_j] \leq c_k N_j^{-q\delta} \text{ для всех } m + n \geq I;$$

б) $[P_j u - \tilde{u}_j] \leq 2c_k N_j^{-q\delta}$;

с) вычислительные затраты на \tilde{u}_j ограничены величиной $c_5 F(N_j)$, где $c_5 = \sigma r / (\sigma - 1)$ не зависит от j .

Поскольку $r \geq 1$ не зависит от j , то убеждаемся, что алгоритм *MGO* при $1 \leq p < \sigma$ имеет оптимальный порядок.

Отметим, что алгоритмы типа *MGI* для эллиптических уравнений впервые рассмотрены в [8, 9], а алгоритм оптимальный по порядку, типа *MGO*, в [10]. В обоих случаях использовался метод конечных

разностей. Различные варианты реализации *MG*-алгоритмов для метода сеток и конечных элементов, оценки их скорости сходимости, а также вопросы обобщения на нелинейный случай рассматривались в [2].

Приведем пример [28] построения *MG*-алгоритма и проверки общей теории для одномерного эллиптического уравнения

$$-(pu_x)_x + su = f(x), \quad x \in \Omega = [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (62)$$

предполагая, что $f \in L_2(\Omega)$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $s \in C(\overline{\Omega})$ и существуют положительные константы p_0, p_1, s_0, s_1 , что

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1; \quad 0 < s_0 \leq s < s_1, \quad x \in \Omega. \quad (63)$$

Пусть заданы целые числа $k > 1$ и $N_0 > 0$. Определим последовательность $N_j = 2N_{j-1} + 1, j \geq 1$, для которой согласно (57) можно положить $\sigma = 2$. Построим k равномерных сеток $\Omega^j, j = \overline{1, k}$, вида

$$\Omega^j = \{ih_j; i = \overline{1, N_j}\}, \quad h_k = (N_k + 1)^{-1}, \quad h_j = 2^{k-j}h_k.$$

Предположим для начала, что $p(x) = 1, s(x) = 0$ в (62). Аппроксимируем уравнение (62), заменяя u_{xx} разностным оператором u_{xx} . Получим систему линейных уравнений

$$A_k u_k = h_k f_k; \quad A_k \equiv h_k^{-1} [-1, 2, -1], \quad (64)$$

где u_k, f_k — аппроксимирующие сеточные функции на Ω^k , а A_k — трехдиагональная матрица размерности $N_k \times N_k$. Покажем, что многосеточный алгоритм требует $O(N_k)$ операций для решения задачи (64) с точностью $O(N_k^{-2})$.

Отождествим пространство решений $H_j, j = \overline{1, k}$, с сеточными функциями на Ω^j . Пусть $N \equiv N_k$, тогда

$$H_k \equiv \{v: v \in R^N\},$$

$$H_{k-1} \equiv \{v: v \in H_k, v = (0, v_1, 0, v_2, \dots, v_{N_{k-1}}, 0)\}, \quad (65)$$

а пространства H_{k-2}, \dots, H_1 строятся аналогично. Определим операторы кусочно-линейной интерполяции между смежными по j пространствами решений:

$$E_2: H_{j-1} \rightarrow H_j, \quad R: H_j \rightarrow H_{j-1},$$

$$v = E_2 u, \quad v_m = u_m, \quad m = 2l, \quad l = \overline{1, L}, \quad L = (N_k - 1)/2,$$

$$v_1 = 0,5u_2, \quad v_N = 0,5u_{N-1}, \quad v_m = 0,5(u_{m-1} + u_{m+1}),$$

$$m = 2l + 1, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad R \equiv E_2^T.$$

Задачи на более грубых сетках определяются через интерполяционные матрицы E_2 и R . Матрицы $A_j, j = \overline{1, k-1}$ определяются рекурсивно: $A_{k-j} \equiv E_2^T A_{k-j+1} E_2$. Пусть $\bar{r} \in R^N$ есть правая часть на уровне k . Тогда задача на $(k-1)$ -уровне определяется уравнением

$$A_{k-1} \bar{q} = E_2^T \bar{r} \equiv f_{k-1}, \quad \bar{q} \in H_{k-1}.$$

Половина столбцов и строк матрицы A_{k-1} нулевые. Можно переопределить матрицу так, что ненулевые строки и столбцы займут первые N_{k-1} позиций. Тогда A_{k-1} будет иметь подматрицу, идентичную по форме матрице A_k . Пространство решений после перенумерации H_{k-1} будет иметь вид $\{v \in H_k: v = (v_1, v_2, \dots, v_{N_{k-1}}, 0, \dots, 0)\}$. Задача на уровне $(k-i)$ определяется аналогично.

Для применения предыдущей теории формализуем постановку задач. Для $j \geq 1$ билинейные формы $a_j(\cdot, \cdot)$, линейный функционал $f_j(v)$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_j$ определим по формулам

$$\begin{aligned} a_j(u, v) &= u^T A_j v, & f_j(v) &= h_j f_j^T v, \\ (u, v)_j &= h_j u^T v, & u, v &\in H_j. \end{aligned} \quad (66)$$

Энергетическая норма для $u \in H_j$ имеет вид $[u]^2 = a_j(u, u)$. Для каждого $a_j(\cdot, \cdot)$ определена спектральная задача (59). Согласно (59) Λ_j означает максимальное собственное число. Для $-2 \leq s \leq 2$ дискретные нормы определяются из соотношений

$$[v]_s^2 \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i^2 (\lambda_i^{(j)})^s, \quad v \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i \Psi_i^{(j)}, \quad N = N_j, \quad (67)$$

причем $[v]_1 = [v]$ есть обычная энергетическая норма.

Проверим выполнение гипотез 1–3. Первая из них выполняется в силу определения системы для A_{j-1} , $j > 1$. В частности, при $j > 1$ имеем $a_j(E_2 v, E_2 W) = a_{j-1}(v, W)$; $v, W \in H_{j-1}$. Гипотеза 2 есть следствие очевидной оценки $\Lambda_j \leq 4h_j^2$. Гипотеза 3 вытекает из следующей леммы [28].

Лемма 2. Пусть целое число $k > 1$ и $c(s) = 4^{(s-1)/2}$. Для $s = 0, 1, 2$ и $u \in H_k$ выполнено

$$\min_{v \in H_{k-1}} [u - E_2 v]_s \leq c(s) h_k^{2-s} [u]_2. \quad (68)$$

Далее можно применять теорему 12. В частности, для рассмотренного случая при $m + n = 2$, $p = 2$ можно показать [28], что для реализации алгоритма *MGI* требуется около $22 N_k$ умножений.

Построение алгоритма *MGO* предполагает использование операторов проектирования и восполнения между пространствами H и H_j согласно (58), где оператор $P_j: H \rightarrow H_j$ можно рассматривать, например, как оператор простого сноса на сетку Ω^j , а оператор $I_j: H_j \rightarrow H$ — как оператор кусочно-линейной интерполяции. Эти операторы имеют свойства

$$P_j I_j v = v \quad \text{на } \Omega^j; \quad I_j E P_{j-1} = I_{j-1} P_{j-1} \quad \text{на } \Omega^{j-1}.$$

Теперь легко проверить условия теоремы 13 для модельного случая. Можно показать, что вся итерационная схема применима и для случая $p \neq 1$, $s \neq 0$, если использовать известную разностную схему $(pu_{\bar{x}})_x$ для аппроксимации оператора $(pu_x)_x$. Алгоритм *MGO* требует $O(N_k)$ операций.

ФОРТРАН и АЛГОЛ — программы, реализующие некоторые варианты *MG*-алгоритмов для эллиптических задач, приведены, например, в [3, 32].

Как отмечено в [28], в качестве сглаживающих итераций (60) можно использовать также попеременно-треугольный метод, методы с чебышевским ускорением, а также методы типа сопряженных градиентов.

7. СТАТУС МНОГОСЕТОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ, НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ

Рассмотрим последовательность конечномерных задач

$$A_j u_j = F_j; \quad j = \overline{1, k}, \quad u_j \in H_j \quad (69)$$

с самосопряженными, положительно определенными операторами A_j . Билинейные формы $a_j(\cdot, \cdot)$ и линейные функционалы $f_j(v)$ можно определить аналогично (66). Конструируя многосеточный итерационный процесс для решения задачи (69) на самой мелкой сетке, т. е. при $j = k$, на основе использования более грубых сеток при $j \leq k - 1$, можно выделить три основные возможности расположения спектра операторов A_j .

Пусть $\sigma(A_j) \in [a_j, b_j]$, тогда

а) $0 < a_j$ не зависит от N_j ; $b_j \rightarrow \infty$, $N_j \rightarrow \infty$, причем малым значениям собственных чисел соответствуют гладкие собственные функции (например, в смысле гипотезы 3).

б) Числа $a_j, b_j > 0$ не зависят от N_j .

в) b_j не зависят от N_j ; $a_j \rightarrow 0$, $N_j \rightarrow \infty$, причем собственным числам $\lambda \rightarrow 0$ соответствуют быстро осциллирующие собственные функции.

Вариант а) имеет место, например, в случае эллиптических краевых задач, причем $b_j \sim N_j^\alpha$, $\alpha > 0$. Случай б) соответствует интегральным уравнениям 2-го рода, а случай в) возникает, например, при решении интегральных уравнений 1-го рода с вполне непрерывным оператором и представляет по существу некорректную задачу.

Для задач из группы а) характерно, что основные трудности при построении итерационных процессов решения (69) на одной сетке состоят в подавлении гладкой составляющей погрешности начального приближения, соответствующей малым собственным значениям, так как высокая скорость сходимости для быстро осциллирующей компоненты достигается, например, для методов типа простой итерации (60). Эта ситуация характерна при решении эллиптических разностных уравнений.

Для второй группы задач итерационные методы с оператором перехода типа простых итераций сами по себе сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, не зависящим от размерности N_j . Поэтому для решения задачи с точностью ε требуется порядка $O(N_j \ln \varepsilon^{-1})$ операций. Для задач со свойством в) имеем $a_j/b_j \rightarrow 0$ при $N_j \rightarrow \infty$, поэтому построение оптимальных по порядку

методов, так же как и в варианте а), требует разработки специальных алгоритмов. Однако в этом случае применение алгоритмов типа *MGI* не дает необходимого эффекта, так как обеспечивает лишь ускорение сходимости гладкой компоненты решения, соответствующей собственным числам λ , лежащим вблизи правой границы спектра. Естественно, что это не может изменить порядок величины спектрального радиуса оператора перехода основного итерационного процесса на последней сетке.

Пусть для решения уравнения (69) используется основной итерационный процесс (индекс j опускаем)

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau_k} = -\Psi(u^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Psi(u^*) = 0, \quad (70)$$

где Ψ задает оператор перехода, u^* — точное решение задачи (69), а u^0 — начальное приближение. Для алгоритма *MGI*, в частности, такой процесс задается формулой (60). Если скорость сходимости алгоритма (70) определяется величиной $[q(N)]^k$, $q < 1$, $N = N_j$, то число итераций для достижения заданной точности ε пропорционально двум сомножителям: $p_1 = \ln \varepsilon^{-1}$ и $p_2 = \ln [q(N)]^{-1}$. Значение многосеточного алгоритма *MGI* состоит в том, чтобы сделать множитель p_2 не зависящим от N , за счет ускорения сходимости итераций на гладкой компоненте решения для задач типа а). Для задач типа б) число p_2 с самого начала не зависит от N .

Если порядок аппроксимации системы (69) есть $O(N^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, то естественно выбирать число $\varepsilon = O(N^{-\alpha})$ и, значит, $p_1 = O(\ln N)$. Устранить зависимость числа p_1 от N на основе последовательности задач (69), можно достаточно просто (по сравнению с методом *MGI*), используя лишь общие характеристики алгоритмов, такие, как погрешность аппроксимации и скорость сходимости итераций [12, 13]. В частности, если в качестве основного итерационного процесса (70) для различных j взять метод типа *MGI*, то такая оптимизация реализуется в алгоритме *MGO*, который был предложен в [10], и приводит в результате к методу, оптимальному по порядку числа арифметических действий. В случае достаточно произвольного итерационного метода (70) можно использовать следующий вариант *MG*-алгоритма. Решается задача (69) методом (70) при $j = 1$ с точностью ε_1 , т. е. $\|u_1^{h_1} - u_1^*\|_{H_1} \leq \varepsilon_1$, после чего сеточная функция $u_1^{h_1}$ интерполируется на пространство H_2 , где выбирается в качестве начального приближения: $u_2^0 = E_2 u_1^{h_1}$. Затем проводятся k_2 итераций (70) на H_2 до достижения точности $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и т. д. В [10, 13] оценивается эффективность такой процедуры при использовании двух или нескольких вспомогательных пространств H_j . Если $\varepsilon_j = O(N_j^{-\alpha})$, где $N_j^{-\alpha}$ — погрешность приближенных решений u_j , то при естественных предположениях число итераций на последней сетке (H_h) уменьшается в $O(\ln \varepsilon_h^{-1})$ раз при $N_h \rightarrow \infty$. Далее приведем оценку асимптотического коэффициента экономии рассматриваемого процесса на основе подхода, предложенного в [41]. Рассуждения

справедливы и в случае, когда уравнения (69) являются нелинейными.

Предположим (для удобства оценок), что размерность последовательности задач (69) возрастает непрерывно, что позволяет построить дифференциальное уравнение для числа арифметических действий. Итерационный процесс (70) также заменим на эволюционный процесс

$$\frac{du}{dt} = -\Psi(u), \quad u(0) = u^0, \quad u \in H_k, \quad (71)$$

сходящийся со скоростью

$$\|u(t) - u^*\| \leq \exp(-\sigma(N)t) \|u^0 - u^*\| \equiv B \exp(-\sigma t)$$

и являющийся непрерывным аналогом (70). Скорости сходимости процессов (70) и (71) приводим в соответствие соотношением $q^k = \exp(-\sigma(N)k)$. При этом параметр t имеет смысл числа итераций. Для уменьшения нормы начальной погрешности $B = \|u^* - u^0\|$ в N^p раз необходимо $t = p\sigma(N)^{-1} \ln N$ итераций. Если на одну итерацию используется $k_0 N^m$ арифметических действий, то их суммарное число выразится формулой

$$Q_0(N) = pkN^m \sigma^{-1}(N) \ln N \equiv \frac{pk}{m} \int_0^N n^{-1} \sigma(N)^{-1} \ln N \, dn. \quad (72)$$

Рассмотрим процесс (71) на последовательности пространств H_n , $n_0 \leq n \leq N$, $n \in Z$. Пусть задан оператор интерполирования $P_{nm}: H_n \rightarrow H_m$, $n \leq m$, $\|P_{nm}\| = 1$, такой, что

$$\|P_{nm}u_n^* - u_m^*\| \leq c(m, n) n^{-p_1}, \quad c \leq B, \quad p_1 \geq 0. \quad (73)$$

Полагая, что для всех n выполнено $t = p\sigma(n)^{-1} \ln n$, и используя элемент $P_{n, n+\Delta}u_n$ как начальное приближение в пространстве $H_{n+\Delta}$, легко подсчитать приращение вычислительной работы [41] $\Delta Q = Q(n+\Delta) - Q(n)$

$$\Delta Q = -k(n+\Delta)^m \sigma^{-1}(n+\Delta) \ln [1 + B^{-1}n^{-p_1}c(n, n+\Delta)] \left(\frac{n}{n+\Delta}\right)^p. \quad (74)$$

Устремляя формально в (74) $\Delta \rightarrow 0$ и полагая $c(n, n+\Delta) = O(\Delta)$, записываем дифференциальное уравнение для $Q(n)$:

$$\frac{dQ}{dn} = pk n^{-1+m} \sigma^{-1}(n), \quad n_0 \leq n \leq N,$$

интегрируя которое, получаем

$$Q(N) = Q(n_0) + pk \int_{n_0}^N n^{m-1} \sigma^{-1}(n) \, dn. \quad (75)$$

Формулу (75) можно считать непрерывным аналогом выражения (30) из [13] для объема вычислений на последовательности сеток. Отношение величины $Q_0(N)$ из (72) к $Q(N)$ из (75) дает искомый асимптотический коэффициент экономии κ . В табл. 7 приводится коэффициент κ для случая разностных эллиптических уравнений, где N — размерность сеточной задачи по одной переменной, m — число пространственных переменных. Полагаем $Q(n_0) = 0$. Напомним, что

Таблица 7. Коэффициент экономии κ для упрощенного многосеточного алгоритма

$m \backslash \sigma(N)$	N^{-2}	N^{-1}	$N^{-1/2}$	$[\ln N]^{-1}$	const	НК
2	$4 \ln N$	$3 \ln N$	$5/2 \ln N$	$\kappa > 2 \ln N$	$2 \ln N$	$\kappa > 2 \ln \ln N$
3	$5 \ln N$	$4 \ln N$	$7/2 \ln N$	$\kappa > 3 \ln N$	$3 \ln N$	$\kappa > 3 \ln \ln N$

$\sigma(N) = N^{-2}$ соответствует методу Зейделя, $\sigma(N) = N^{-1}$ — методу SOR и методам с чебышевским ускорением, $\sigma(N) = N^{-1/2}$ — методам типа попеременно-треугольного, $\sigma(N) = [\ln N]^{-1}$ — переменных направлений, а $\sigma = \text{const}$, не зависящая от N , для оптимальных по порядку числа арифметических действий. Для метода НК (Ньютона — Канторевича) предполагаем квадратичную сходимость $\|u(t) - u^*\| \leq \exp(-\sigma_0 2^t) \|u^0 - u^*\|$.

Из табл. 7 видно, что чем меньше скорость сходимости основного итерационного процесса (70), тем больше коэффициент экономии κ .

Можно показать [41], что если в формуле (73) положить $p_1 \geq 1$, т. е. использовать интерполяцию более высокого порядка [в смысле (73)], чем точность аппроксимации n^{-p} для уравнения (69), то величину $Q(N)$ в (75) можно существенно уменьшить. Такой подход предложен в [15], где повышение точности интерполяции (73) достигается за счет экстраполирования с нескольких предыдущих сеток на основе разложения (4) по степеням шага дискретизации. При этом возможность регулярного представления погрешности используется в сочетании с многосеточным итерационным процессом.

Пусть в пространствах H_i , $i = \overline{1, l-1}$, получены решения u_i с одинаковой точностью $\varepsilon = O(N_i^{-\alpha})$, где α — максимальная степень N^{-1} в разложении (4). Тогда для вычисления u_{N_l} используем начальное приближение

$$u_{N_l}^0 = \sum_{i=1}^{l-1} \gamma_i P_{ii} u_{N_i}, \quad (76)$$

где оператор интерполирования P_{ii} имеет порядок $O(N_i^{-\alpha})$ на точном решении уравнения (1) или задачи 1, а коэффициенты γ_i опре-

оценивается величиной $O(h^{-2})$. Отметим, что наибольшая эффективность релаксационного метода [9, 73] для аналогичной задачи характеризуется $\gamma = 0,42$. Численные эксперименты показывают [15], что при расчете решений осциллирующего типа $u = \sin p\pi x_1 \times \times \sin p\pi x_2$ в интервале $p = 1 \div 20$ уже при $p \geq 7$ значение γ не убывает при увеличении p . Этот факт объясняется тем, что гладкая компонента решения точно экстраполируется по формуле (76), в то время как сильно осциллирующая компонента погрешности быстро подавляется методом Зейделя. Если в процессе расчетов величина γ уменьшается до некоторого предельного значения γ_{\min} , то легко перейти к релаксационному методу *MGO*, требующему аналогичной организации вычислений на последовательность сеток.

Изложенные модификации *MG*-алгоритмов могут быть использованы для задач типа а) и б). В задачах типа в) основная проблема при построении итерационных процессов состоит в подавлении быстро осциллирующей составляющей погрешности, которая соответствует значениям собственных чисел $\lambda \rightarrow 0$. Очевидно, что на эту составляющую нельзя воздействовать, используя более грубые сетки. Задачи типа в) обладают свойством некорректности. Одной из возможностей здесь является использование в качестве вспомогательной некоторой альтернативной формулировки исходной задачи, но уже имеющей спектральные свойства типа а). На основе этой идеи в [42] построен *MG*-интегроразностный метод решения интегрального уравнения первого рода теории потенциала (задача Дирихле для гармонической функции), оптимальный по порядку числа арифметических действий. Метод основан на поочередном использовании граничного интегрального уравнения с оператором L (36) и разностного уравнения (29) в некоторой приграничной полосе и по существу является регуляризирующим алгоритмом.

Отметим, что *MG*-метод, использующий представления (76), (77), оказался весьма эффективным при решении частичной проблемы на собственные значения для одного класса матриц типа теплицевых большой размерности [25], в связи с решением квазипотенциальных интегральных уравнений [64]. В работе [26] использован двухуровневый *MG*-метод решения указанной проблемы, сочетающий движение по h - и R -уровням, где h — параметр дискретизации по пространственной переменной, а R — параметр, учитывающий асимптотику решения в окрестности особой точки. В целом *MG*-итерационные алгоритмы для задач на собственные значения еще недостаточно изучены. Одна из причин состоит в том, что мы имеем дело с нелинейной проблемой (квадратичная нелинейность). О практической эффективности уточняющей экстраполяции и *MG*-алгоритмов в задачах на собственные значения свидетельствуют также работы [51, 52, 74, 75]. Ряд особенностей использования последовательности сеток при решении краевых задач для дифференциальных уравнений рассматривается также в [76—81].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные здесь приемы повышения точности приближенных решений и ускорения сходимости итерационных процессов при организации расчетов на последовательности сгущающих сеток представляют эффективный и достаточно единообразный подход для широкого круга вычислительных проблем математической физики. При решении двумерных и пространственных задач магнитостатики [46—48, 82—85], спектральных задач для квазипотенциальных интегральных уравнений [25, 26, 63], нелинейных уравнений типа Чу — Лоу в теории дисперсионных соотношений [60], граничных интегральных уравнений теории потенциала, возникающих в магнитостатике и электростатике [46, 47], при расчете собственных значений дифференциальных и интегродифференциальных операторов [38] в задачах теории ядра и элементарных частиц, как правило, удается уменьшить в несколько раз (а часто и на один-два порядка) вычислительную работу для получения заданной точности, а также для получения максимально возможной точности в рамках фиксированной аппроксимации (при заданных ограничениях на ресурсы ЭВМ), позволяя одновременно надежно контролировать точность расчетов.

Наиболее предпочтительны рассмотренные методы при расчетах на ЭВМ со сравнительно небольшим быстродействием и оперативной памятью, например на персональных ЭВМ. Реализация алгоритмов существенно не меняется при переходе к нелинейным проблемам и при увеличении числа пространственных переменных. В последнем случае можно использовать многопараметрические формулы разложения погрешности. В нелинейном случае использование последовательности конечномерных задач, наряду с ускорением сходимости, дает надежный способ построения начального приближения для основного итерационного процесса. В целом многосеточная организация расчетов является одной из основ при создании комплексов программ [25, 47, 48, 86—88] для решения широкого круга задач численного анализа и, естественно, может сочетаться с другими методами оптимизации вычислений [89, 91].

Авторы выражают благодарность своим коллегам Э. А. Айряню, Г. Е. Мазуркевичу, М. Нгуену, Э. Г. Никонову, И. П. Юдину, О. И. Юлдашеву, Р. М. Ямалееву, а также А. В. Сидорову и Н. Б. Скачкову за сотрудничество по рассмотренным здесь проблемам, Р. З. Даутову за помощь при работе над литературой и П. Г. Акишину, В. И. Коробову, И. В. Пузынину, А. Л. Урванцеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И., Шайдулов В. В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
2. Lect. Notes in Math. Berlin: Springer — Verlag. 1982. N 960.
3. Brandt A. // Math. Comp. 1977. Vol. 31, N 138. P. 333—390.

4. Richardson L. F.//Philos. Trans. Roy. Soc. Lond., ser. A. 1910. Vol. 210. P. 307—357.
5. Richardson L. F.//Ibid. 1927. Vol. 226. P. 299—349.
6. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 1051, 1055.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
8. Федоренко Р. П.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961, Т. 1, № 5. С. 922—927.
9. Федоренко Р. П.//Там же, 1964. Т. 4, № 3. С. 559—564.
10. Бахвалов Н. С.//Там же. 1966. Т. 6, № 5. С. 861—885.
11. Астраханцев Г. П.//Там же. 1971. Т. 11, № 2. С. 439—448.
12. Конавалов А. Н.//Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. Вып. 3, № 13. С. 105—109.
13. Ильин В. П., Свешников В. М.//Численные методы механики сплошной среды. ИБ (Новосибирск), 1971. Т. 2, № 1. С. 43—54.
14. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н.//Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Будапешт, ЦИФИ — ОИЯИ, 1983. Вып. 4. С. 43—69.
15. Ayrjan E. A., Zhidkov E. P., Khoromsky B. N.//Comp. Phys. Comm. 1983. Vol. 29. P. 125—130; Препринт ОИЯИ 5-81-820, Дубна, 1981.
16. Hackbusch W.//Lect. Notes in Math. Berlin: Springer — Verlag. 1982. N 960. P. 177—219.
17. Stuben K., Trottenberg U.//Ibid. P. 1—176.
18. Brandt A.//Ibid. P. 220—312.
19. Nicolaidis R. A.//Math. Comp. 1977. Vol. 31. P. 892—906; 1978. Vol. 32. P. 1082—1086.
20. Астраханцев Г. П., Руховец Л. А.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1981. Т. 21, № 4. С. 926—944.
21. Шайдунов В. В. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: ОВМ АН СССР, 1983. С. 238—246; Шайдунов В. В.//Вариационно-разностные методы в математической физике. Ч. 1. М.: ОВМ АН СССР, 1984. С. 149—160.
22. Il'in V. P., Kuznetsov Yu. A.//Lect. Notes in Math, Berlin Springer—Verlag, 1979. N 704. P. 23—36.
23. Ильин В. П., Саблин Н. И. Препринт ВЦ СО АН СССР, № 94, Новосибирск, 1982.
24. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
25. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ P11-84-740, Дубна, 1984.
26. Жидков Е. П., Никонов Э. Г., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ P11-85-970, Дубна, 1985.
27. Мэтр Ж. Ф., Мюзи Ф. Методы вычислительной математики и математического моделирования. М.: ОВМ АН СССР, 1985. С. 181—220.
28. Douglas C. S.//Elliptic Problem Solvers, II, Academic Press, Orlando, Florida, 1984. P. 453—466.
29. Brandt A.//Elliptic Problem (M. H. Shultz, ed.), N.Y.: Academic Press 1981. P. 39—84.
30. Hemker P. W., Schippers H.//Math. Comp. 1981. Vol. 36. P. 215—232.
31. Schippers H.//J. Comp. Phys. 1982. Vol. 48. P. 441—461.
32. Hackbusch W.//Computational Fluid Dynamics, Lecture Series 1985-5, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhole Saiut Genese, Belgium, 1981. P. 1—45.
33. Pereyra V.//Numer Math. 1967. Vol. 10, N 4. P. 316—323.
34. Pereyra V.//SIAM J. on Numer. Anal. 1967. Vol. 4, N 4. P. 508—533.
35. Joice D. C.//SIAM Review. 1971. Vol. 13, N 4. P. 435—490.
36. Та Van Dinh//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24, № 9. С. 1359—1371.
37. Жидков Е. П., Нгуен М., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ P5-12979, Дубна, 1979.

38. Нгуен М., Хоромский Б. Н., Ямалеев Р. М.//Дифф. уравнения. 1980. Т. 16, № 7. С. 1293—1302.
39. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н., Айрян Э. А. Препринт ОИЯИ Р5-80-617, Дубна, 1980.
40. Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ Р5-80-736, Дубна, 1980.
41. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ 5-81-783, Дубна, 1981.
42. Хоромский Б. Н.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24, № 1. С. 53—64.
43. Holland W., McCormick S., Ruge J. J.//Comp. Phys. 1982. Vol. 48. P. 412—422.
44. Axelsson O., Gustafsson I.//Math. Comp. 1983. Vol. 40, N 161. P. 219—242.
45. Schaffer S.//Math. Comp. 1984. Vol. 43, N 167. P. 89—115.
46. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н., Юлдашев О. И. Препринт ОИЯИ Р11-82-659, Дубна, 1982; 11-81-398, Дубна, 1981.
47. Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е., Хоромский Б. Н. Препринты ОИЯИ Р11-86-333; Р11-86-230, Дубна, 1986.
48. Айрян Э. Л., Жидков Е. П., Федоров А. В. и др.//Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Будапешт, ЦИФИ — ОИЯИ. 1987. Вып. 5. С. 2—29.
49. Zhidkov E. P., Khoromsky B. N.//Sov. J. Num. Anal. Math. Mod. 1987. Vol. 2, N 6. P. 463—488.
50. Жидков Е. П., Мазуркевич Г. Е., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ Р11-87-501, Дубна, 1987.
51. Виноцкий С. И., Коробов В. И., Пузынин И. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. Вып. 2. С. 705—714.
52. Гусев В. В., Касчиев М. С. Препринт ОИЯИ Р11-85-758, Дубна, 1985.
53. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
54. Као Т. Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
55. Волков Е. А.//Дифф. уравнения. 1965. Т. 1, № 7. С. 946—960; Т. 2, № 8. С. 1070—1084.
56. Тихонов А. Н., Самарский А. А.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 784—805.
57. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
58. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
59. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
60. Жидков Е. П., Нгуен М., Хоромский Б. Н.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21, № 4. С. 962—969.
61. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
62. Добровольский И. П.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21, № 4. С. 952—961.
63. Жидков Е. П., Сидоров А. В., Скачков Н. Б., Хоромский Б. Н. Препринт ОИЯИ Р11-85-465, Дубна, 1985.
64. Сидоров А. В., Скачков Н. Б. Препринт ОИЯИ Р2-84-502, Дубна, 1984.
65. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.//Nuovo cimento. 1963. Vol. 29, N 3. P. 380—399.
66. Kadyshchevsky V. G., Mateev M. D.//Nuovo cimento. 1968. Vol. 55A, N 2. P. 285—300.
67. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.
68. Кондратьев В. А.//Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 109—192.
69. Андреев В. Б.//ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 5. С. 997—1000; 1979. Т. 244, № 6. С. 1289—1293.
70. Фрязинов И. В.//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18, № 5. С. 1170—1185.

71. Айрян Э. А. Численные алгоритмы на последовательности сеток для решения краевых задач магнитостатики: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Дубна, 1985.
72. Nowak Z. P. // Lect. Notes in Math. Berlin: Springer — Verlag. 1982. N 960. P. 576—596.
73. Федоренко Р. П. // УМН. 1973. Т. 28. Вып. 2. С. 121—182.
74. Баатар Д., Пузынин И. В., Ракитский А. В. Препринт ОИЯИ Р11-12908, Дубна, 1979.
75. Виноцкий С. И., Гочева А. Д., Гусев В. В. и др. Препринт ОИЯИ Р4-84-642, Дубна, 1984.
76. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
77. Hackbusch W. // Computing. 1978. Vol. 20, N 4. P. 291—306.
78. Hackbusch W. // Math. Comp. 1980. Vol. 34. P. 425—440.
79. Bank R. E., Dupont T. // Math. Comp. 1981. Vol. 36. P. 35—51.
80. Bank R. E., Rose D. J. // Math. Comp. 1982. Vol. 160. P. 453—465.
81. Сандер С. А. Препринт ВЦ СО АН СССР № 91, Новосибирск, 1982.
82. Урванцев А. Л., Шайдуров В. В. // Вариационно-разностные методы решения задач математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. С. 137—144.
83. Урванцев А. Л. // Численные методы задач электронной оптики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979. С. 77—88.
84. Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д. Препринт ОИЯИ Р11-86-534, Дубна, 1986.
85. Айрян Э. А., Жидков Е. П., Полякова Р. В. и др. Препринт ОИЯИ Р11-86-80, Дубна, 1986.
86. Айрян Э. А., Хоромский Б. Н., Юдин И. П., Юлдашев О. И. Препринт ОИЯИ 11-84-802, Дубна, 1984.
87. Урванцев А. Л. Численное решение нелинейных магнитостатических задач методом конечных элементов: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1981.
88. Ерофеев А. В., Кузнецов С. Б., Урванцев А. Л. Препринт ВЦ СО АН СССР № 623, Новосибирск, 1985.
89. Самарский А. А., Капорин И. Е., Кучеров А. Б., Николаев Е. С. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1983. № 7 (254). С. 3—12.
90. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1976.
91. Кузнецов Ю. А. Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1985. Вып. 2. С. 265—350.
92. Шайдуров В. В. Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1987. Вып. 5. С. 258—271.